

MTMM.00.182 Matemaatiline analüüs IV

Praktikumide raudvara

kevad 2017

Sisukord

1. Alamhulgad ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jadad
2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus
3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine
4. Liitfunktsioonide diferentseerimine. Taylorig valem
5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid
6. Joonintegraalid
8. Pindintegraalid

1. Alamhulgad ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jadad

Lahtine ja kinnine **kera** / lahtine ja kinnine ε -**ümbrus**

$$U_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{R}^m : \|X - A\| < \varepsilon\}$$

$$\overline{U}_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{R}^m : \|X - A\| \leq \varepsilon\}$$

Lahtine ja kinnine **risttahukas**

$$K_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(A) = \{X \in \mathbb{R}^m : |x_k - a_k| < \varepsilon_k, 1 \leq k \leq m\}$$

$$\overline{K}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m}(A) = \{X \in \mathbb{R}^m : |x_k - a_k| \leq \varepsilon_k, 1 \leq k \leq m\}$$

1. Alamhulgad ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jaded

Sisepunkt, sisemus

$$A \in D^\circ \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(A) \subset D$$

Rajapunkt, raja

$$A \in \partial D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (D \cap U_\varepsilon(A) \neq \emptyset) \wedge ((\mathbb{R}^m \setminus D) \cap U_\varepsilon(A) \neq \emptyset)$$

Sulund, sulundipunkt ehk puutepunkt

$$\overline{D} = D \cup \partial D$$

1. Alamhulgad ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jadad

D on **lahtine** $\Leftrightarrow \forall A \in D \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(A) \in D$

D on **kinnine** $\Leftrightarrow \partial D \subset D$

D on **sidus** $\Leftrightarrow$ iga tema kahte punkti saab ühendada mingi pideva joonega

D on **piirkond** $\Leftrightarrow D \subset \overline{D^\circ}$

D on **tõkestatud** $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^m \ \exists r > 0 : D \subset U_r(A)$

1. Alamhulga ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jadad

Olgu $X^{(n)} \in \mathbb{R}^m$, $n = 1, 2, \dots$

Jada piirväärtus

$$\begin{aligned} X^{(n)} \xrightarrow[n]{} A &\Leftrightarrow \lim_n \|X^{(n)} - A\| = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \right. \\ &\quad \left. \Rightarrow \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \dots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \varepsilon \right) \end{aligned}$$

2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

A on hulga D **kuhjumispunkt** $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad (U_\delta(A) \setminus \{A\}) \cap D \neq \emptyset$

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning A hulga D kuhjumispunkt.

Funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : (0 < \|X - A\| < \delta, X \in D) \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(X^{(n)} \in D \setminus \{A\}, X^{(n)} \rightarrow A \right) \Rightarrow f(X^{(n)}) \rightarrow b \right)$$

2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : (0 < \|X - A\| < \delta, X \in D) \Rightarrow f(X) > M \right)$$

$$\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} f(X) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 : (\|X\| > K, X \in D) \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon \right)$$

$$\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} f(X) = \infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall M > 0 \ \exists K > 0 : (\|X\| > K, X \in D) \Rightarrow f(X) > M \right)$$

2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning A hulga D kuhjumispunkt.

f on **pidev punktis** $A \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$

$$\Leftrightarrow \left(\left(X^{(n)} \in D, X^{(n)} \rightarrow A \right) \Rightarrow f \left(X^{(n)} \right) \rightarrow f(A) \right)$$

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

Olgu $A = (a, b)$ kahe muutuja funktsiooni $w = f(x, y)$ määramispiirkonna $D \subset \mathbb{R}^2$ sisepunkt.

Osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Diferentseeruvus

f on punktis $A = (a, b)$ **diferentseeruv** $\Leftrightarrow$

$$\exists M, N : \lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - f(A) - M(x - a) - N(y - b)}{\|X - A\|} = 0$$

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

Diferentseeruva f korral $M = \frac{\partial f}{\partial x}(A)$ ja $N = \frac{\partial f}{\partial y}(A)$, st $\Delta f = f(X) - f(A)$ on esitatav kujul

$$\Delta f = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - b) + \alpha,$$

kus $\alpha = \alpha(x - a, y - b)$ ning $\lim_{X \rightarrow A} \frac{\alpha}{\|X - A\|} = 0$.

$\exists$ pid. osatuletised $\Rightarrow$ diferentseeruv $\Rightarrow$ pidev

$\searrow$
 $\exists$ lõpl. osatuletised

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

Kui osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ on määratud punkti A mingis ümbruses ning $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ on punktis A pidevad, siis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \text{ (Lause 4.1).}$$

Kui osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud punkti A mingis ümbruses ning on diferentseeruvad punktis A , siis $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$ (Lause 4.2).

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

f on punktis A **kaks korda diferentseeruv** $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud $U_\delta(A)$ -s ja on diferentseeruvad punktis $A \Leftrightarrow f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud $U_\delta(A)$ -s ja on diferentseeruvad punktis A

f on punktis A **$n + 1$ korda diferentseeruv** $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}y}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ on määratud $U_\delta(A)$ -s ja on diferentseeruvad punktis $A \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ on määratud $U_\delta(A)$ -s ja on diferentseeruvad punktis A

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

Kui funktsioon $f = f(x, y)$ on punktis A diferentseeruv, siis tema **täisdiferentsiaal** punktis A , mis vastab argumendi muudule (dx, dy) , avaldub kujul

$$d_A f = d_A f(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)dy.$$

Üldiselt, kui funktsioon $f = f(x, y)$ on punktis A n korda diferentseeruv, siis **n -järku täisdiferentsiaal** punktis A , mis vastab argumendi muudule (dx, dy) , avaldub kujul

$$d_A^n f = d_A(d_A^{n-1} f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(A) dx^{n-k} dy^k.$$

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

Funktsiooni f **gradient** punktis A

$$\text{grad } f(A) = \nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right).$$

Funktsiooni f **tuletis punktis A suunas $\vec{s}$**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + t\vec{s}) - f(A)}{t\|\vec{s}\|} = \\ &= \left\langle \text{grad } f(A), \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} \right\rangle = \|\text{grad } f(A)\| \cdot \cos \angle(\text{grad } f(A), \vec{s}). \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ on maksimaalne $\Leftrightarrow \text{grad } f(A) \uparrow\uparrow \vec{s}$,

st $\text{grad } f(A)$ näitab ära funktsiooni maksimaalse kasvamise suuna

4. Liitfunktsioonide diferentseerimine. Taylori valem

Kui $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ on diferentseeruvad punktis A ning $f = f(u, v)$ on diferentseeruv punktis $(u(A), v(A))$, siis liitfunktsioon

$$F(x, y) = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$$

on **diferentseeruv** punktis A (Lause 3.5).

Kui funktsioonidel $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$ eksisteerivad punktis A lõplikud osatuletised x järgi ning $f = f(u, v)$ on punktis $B = (u(A), v(A))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil F on punktis A **osatuletis**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial u}(B) \frac{\partial u}{\partial x}(A) + \frac{\partial f}{\partial v}(B) \frac{\partial v}{\partial x}(A)$$

(Lause 3.4).

4. Liitfunksioonide diferentseerimine. Taylorig valem

Liitfunksiooni

$$F(x, y) = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$$

täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$\begin{aligned}dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \\&= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\&= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = df.\end{aligned}$$

4. Liitfunktsioonide diferentseerimine. Taylori valem

Liitfunktsiooni

$$F(x, y) = f(u, v) = f(u(x, y), v(x, y))$$

teist järku täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$\begin{aligned} d^2 F &= d^2 f + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 \right) + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v. \end{aligned}$$

Teist järku täisdiferentsiaal ei ole üldjuhul invariantne muutujavahetuse suhtes, st $d^2 F \neq d^2 f$. Kui $d^2 u = d^2 v = 0$, st u ja v on lineaarsed, siis $d^2 F = d^2 f$. Ka kõrgemat järku täisdiferentsiaalid on invariantssed muutujavahetuse suhtes (st $d^n F = d^n f$) juhul, kui u ja v on lineaarsed.

4. Liitfunksioonide diferentseerimine. Taylorig valem

Taylori valem

Kui f on määratud punkti A mingis ümbruses ja f on punktis A n korda diferentseeruv, siis

$$f(A+h) = f(A) + d_A f(h) + \frac{1}{2!} d_A^2 f(h) + \dots + \frac{1}{n!} d_A^n f(h) + \alpha_n(h), \quad (1)$$

kus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha_n(h)}{\|h\|^n} = 0$ (jääkliikme Peano tingimus).

Kui f on punkti A ümbruses $U_\delta(a)$ $n+1$ korda diferentseeruv ning $A+h \in U_\delta(a)$, siis leidub $\theta \in (0,1)$ nii, et kehtib valem (1), kus

$$\alpha_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} d_{A+\theta h}^{n+1} f(h) \quad (\text{jääkliikme Lagrange'i kuju}).$$

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Rahuldagu $F = F(x, y)$ punktis $A = (a, b)$ järgmisi tingimusi:

1) F ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ on pidevad ümbruses $U_\theta(A)$;

2) $F(A) = 0$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$,

siis $\exists \delta, \sigma > 0$ nii, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab ristkülikus $K_{\delta, \sigma}(A)$ ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$, mis on pidev vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$. Kui lisaks

4) $\frac{\partial F}{\partial x}$ on pidev ümbruses $U_\theta(A)$,

siis f on pidevalt diferentseeruv vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$ ning

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Funktsioonil f on punktis A **(range) lokaalne maksimum**, kui

$$\exists \delta > 0 : f(X) \stackrel{(<)}{\leq} f(A) \quad \forall X \in U_\delta(A) \setminus \{A\}.$$

Funktsioonil f on punktis A **(range) lokaalne miinimum**, kui

$$\exists \delta > 0 : f(X) \stackrel{(>)}{\geq} f(A) \quad \forall X \in U_\delta(A) \setminus \{A\}.$$

Kui funktsioonil f on tema ekstreemumpunktis A olemas osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, siis $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$.

Kui $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, i = 1, \dots, m$, siis ütleme, et A on funktsiooni f **statsionaarne punkt**.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Olgu $B = (b_{ij})$ sümmeetriline $m \times m$ maatriks. Funktsiooni $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(X) = \sum_{i,j=1}^m b_{ij}x_i x_j,$$

nimetatakse **ruutvormiks**.

Ruutvorm Φ on **positiivselt määratud**, kui $\Phi(X) > 0$

$\forall X \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$; **negatiivselt määratud**, kui $\Phi(X) < 0$

$\forall X \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$; **määramata**, kui $\exists X, X' \in \mathbb{R}^m : \Phi(X) > 0$,
 $\Phi(X') < 0$.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Sylvesteri kriteerium

Ruutvorm Φ on positiivselt määratud parajasti siis, kui

$$b_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Ruutvorm Φ on negatiivselt määratud parajasti siis, kui

$$b_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks statsionaarses punktis (teoreem 6.1)

Olgu antud $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu f kaks korda diferentseeruv punktis A ning olgu A funktsiooni f statsionaarne

punkt. Tähistame $\Phi(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j$.

- ▶ Kui Φ on positiivselt määratud, siis funktsioonil f on punktis A range lokaalne miinimum.
- ▶ Kui Φ on negatiivselt määratud, siis funktsioonil f on punktis A range lokaalne maksimum.
- ▶ Kui Φ on määramata, siis funktsioonil f punktis A lokaalset ekstreemumit ei ole.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Olgu antud $f, F_1, \dots, F_r: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $r < m$. Olgu $A \in \mathbb{R}^m$ selline, et $F_i(A) = 0$, $i = 1, \dots, r$.

Ütleme, et funktsioonil f on punktis A (seostega $F_i(X) = 0$, $i = 1, \dots, r$, määratud) **tinglik miinimum (maksimum)**, kui leidub $U_\delta(A)$ nii, et

$$f(A) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(X) \quad \forall X \in U_\delta(A) \cap \{X \mid F_i(X) = 0, i = 1, \dots, r\}.$$

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

Langrange'i määramata kordajate meetod

Leidugu $\delta > 0$ nii, et funktsioonidel $f, F_1, \dots, F_r$ on pidevad osatuletised kõigi muutujate $x_1, \dots, x_m$ järgi ümbruses $U_\delta(A)$.

Lisaks olgu osatuletiste maatriksi $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(A) \right)_{i,j=1}^{r,m}$ mingi r veeruvektorist koosneva alammaatriksi determinant nullist erinev. Määrame arvud $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ võrrandisüsteemist

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(A) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(A), \quad j \in J \subset \{1, \dots, m\}, |J| = r.$$

Kui funktsioonil f on punktis A tinglik ekstreemum, siis A on Lagrange'i funktsiooni

$$\mathcal{L}(X) := f(X) + \sum_{i=1}^r \lambda_i F_i(X)$$

statsionaarne punkt.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Näide. Leida funktsiooni $f(x, y, z) = x + y + z^2$ ekstreemum tingimustel $z - x = 1$, $y - xz = 1$.

Kontrollime Lagrange'i meetodi eeldusi. Funktsioonidel f , $F_1(x, y, z) = z - x - 1$ ja $F_2(x, y, z) = y - xz - 1$ on pidevad osatuletised kõigi muutujate järgi. Osatuletiste matriksi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -z & 1 & -x \end{pmatrix}$$

2×2 alammatriksiste determinandid on -1 , $x + z$ ja -1 , nende seas on nullist erinevaid. Seega võime rakendada Lagrange'i meetodit, et leida need punktid, kus üldse on võimalik ekstreemumi olemasolu.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Lagrange'i funktsiooni

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

statsionaarsete punktide leidmiseks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \end{cases}$$

millest $\lambda_1 = z + 1$, $\lambda_2 = -1$ ja $x + 3z + 1 = 0$. Lisades siia võrdused $z - x = 1$ ja $y - xz = 1$, saame $x = -1$, $y = 1$ ja $z = 0$ ning lisaks $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -1$.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Punkt $A = (-1, 1, 0)$ on Lagrange'i funktsiooni $\mathcal{L}$ ainus statsionaarne punkt. Kui A oleks Lagrange'i funktsiooni $\mathcal{L}$ lokaalne ekstreemumpunkt, siis oleks täidetud tingimused $F_1(X) = 0$, $F_2(X) = 0$ ning kehtiks $f(X) = \Phi(X)$, seega oleks A ka funktsiooni f tinglik ekstreemum. Rakendame funktsioonile

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, y, z) &= x + y + z^2 + \underbrace{\lambda_1}_{=1}(z - x - 1) + \underbrace{\lambda_2}_{=-1}(y - xz - 1) \\ &= z^2 + z + xz\end{aligned}$$

teoreemi 6.1.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Teoreemi eeldused on täidetud, sest $\mathcal{L}$ on kaks korda diferentseeruv ning A on $\mathcal{L}$ statsionaarne punkt. Ruutvormi kordajate maatriksi

$B = (b_{ij})$ elemendid avalduvad kujul $b_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}$, seega

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ning} \quad d_A^2 \mathcal{L}(h_1, h_2, h_3) = 2h_1 h_3 + 2h_3^2.$$

See ruutvorm on määramata, seega funktsioonil $\mathcal{L}$ punktis A lokaalset ekstreemumit ei ole. Aga sellegipoolest on A algse tingliku ekstreemumülesande miinimum. Miks?

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Näitame, et $A = (-1, 1, 0)$ on funktsiooni $f(x, y, z) = x + y + z^2$ miinimum tingimustel $z - x = 1$, $y - xz = 1$.

Punktis A saame $f(A) = 0$. Anname nüüd argumendile A muudu, mis rahuldab lisatingimusi, st valime mingi

$(x, y, z) \in U_\delta(A) \cap \{(x, y, z) | z = x + 1, y = xz + 1 = x^2 + x + 1\}$,
st $(x, y, z) = (-1 + \varepsilon, \varepsilon^2 - \varepsilon + 1, \varepsilon)$. Saame

$f(x, y, z) = -1 + \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 + \varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 > 0 = f(A)$. Seega A on tinglik miinimum.

Kuidas sellele küsimusele üldisemalt läheneda? Optimiseerimise kursusest on teada järgmine tulemus.

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

Olgu $f, F_1, \dots, F_r$ kaks korda diferentseeruvad punktis A . Olgu A Lagrange'i funktsiooni $\mathcal{L}$ statsionaarne punkt ning

$$\Phi(h) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(A) h_i h_j > 0 \text{ iga } h \neq 0 \text{ korral, mis rahuldab}$$

$$\text{tingimusi } \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) h_i \leq 0, \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(A) h_i = 0, j = 1, \dots, r. \text{ Siis } A$$

on tingliku ekstreemumülesande miinimumpunkt.

Seega ei ole tarvis $\Phi(h) = 2h_1h_3 + 2h_3^2$ positiivset määratust (piisav tingimus), vaid piisab positiivsusest teatud $h \neq 0$ korral (samuti piisav, aga pisut nõrgem tingimus).

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid. Näide

$$f(x, y, z) = x + y + z^2, \quad A = (-1, 1, 0)$$

$$F_1(x, y, z) = z - x - 1, \quad F_2(x, y, z) = y - xz - 1$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) h_i \leq 0 \Leftrightarrow h_1 + h_2 \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(A) h_i = 0 \Leftrightarrow -h_1 + h_3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(A) h_i = 0 \Leftrightarrow h_2 + h_3 = 0$$

Seega $h_1 = h_3$, $h_2 = -h_3$ ning $h_1 + h_2 = h_3 - h_3 = 0 \leq 0$. Selliste $h \neq 0$ korral $\Phi(h) = 2h_1 h_3 + 2h_3^2 = 4h_3^2 > 0$, sest kui $h_3 = 0$, siis ka $h_1 = h_2 = 0$. Seega A on tingliku ekstreemumülesande miinimumpunkt.

6. Joone kaare pikkus

Olgu $I \subset \mathbb{R}$ intervall. Vaatame ruumis $\mathbb{R}^m$ joont

$$\gamma(I) = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t) \mid t \in I)\}.$$

- ▶ γ on **pidev**, kui $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ on pidevad;
- ▶ γ on **sile**, kui $\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_m(t)$ on pidevad ning ei ole korraka nullid I üheski punktis;
- ▶ γ on **lihtne**, kui tal puuduvad kordsed punktid
($\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$);
- ▶ γ on **kaar**, kui I on lõik;
- ▶ γ on **kinnine**, kui $I = [\alpha, \beta]$ ja $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$;
- ▶ kaar γ on **sirgestuv**, kui ta on lihtne ja
 $|\gamma(I)| = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} p(T) < \infty$, kus $p(T)$ on I alajaotusele T
vastava kõõlmurdjoone pikkus ning $\lambda(T)$ on alajaotuse T
osalõikude maksimaalne pikkus.

6. Esimest liiki joonintegraal

Olgu $AB = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ lihtne sirgestuv joon ning $f = f(x, y)$ sellel määratud funktsioon. Lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus $T[t_0, \dots, t_n]$ jaotab joone AB n kaareks $X_0X_1, \dots, X_{n-1}X_n$, kus $X_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$. Olgu $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ suvalised ning $Q_i = (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$. Moodustame summa

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) s_i,$$

kus s_i on kaare $X_{i-1}X_i$ pikkus.

Kui eksisteerib $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T)$, siis seda nimetatakse funktsiooni f

esimest liiki joonintegraaliks ehk **joonintegraaliks kaare**

pikkuse järgi üle joone AB ning tähistatakse $\int_{AB} f(x, y) ds$.

6. Esimest liiki joonintegraal

Kui AB on sile ja f pidev, siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

6. Esimest liiki joonintegraal

Omadused:

- ▶ aditiivsus
- ▶ lineaarsus
- ▶ sõltumatus joone suunast
- ▶ monotoonsus
- ▶ keskväärtusteoreem

6. Esimest liiki joonintegraal

Joone pikkus: Kui xyz -ruumis antud joon AB on sile, siis tema pikkus avaldub kujul $s_{AB} = \int_{AB} ds$.

Materiaalse joone mass: Kui $f(x, y)$ on materiaalse joone AB mass punktis $(x, y) \in AB$, siis kogu joone mass avaldub kujul $m_{AB} = \int_{AB} f(x, y) ds$.

Silinderpinna pindala: Olgu Σ vertikaalne silinderpind, mille alumine serv paineb xy -tasandil joonel AB ning ülemine serv on funktsiooni $z = f(x, y)$, $(x, y) \in AB$ graafik. Siis selle silinderpinna pindala on $S_{\Sigma} = \int_{AB} f(x, y) ds$

6. Teist liiki joonintegraal

Olgu $AB = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ lihtne sirgestuv joon ning $f = f(x, y)$ sellel määratud funktsioon. Lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotus $T[t_0, \dots, t_n]$ jaotab joone AB n kaareks $X_0X_1, \dots, X_{n-1}X_n$, kus $X_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$. Olgu $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ suvalised ning $Q_i = (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$. Moodustame summad

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta x_i \quad \text{ja} \quad \sigma_2(T) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta y_i$$

kus $\Delta x_i = \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$ ning $\Delta y_i = \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})$ on kaare $X_{i-1}X_i$ projektsioonid vastavalt x - ja y -teljele.

Kui eksisteerivad $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_1(T)$ ja $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma_2(T)$, siis neid nimetatakse funktsiooni f **teist liiki joonintegraaliks** ehk **joonintegraalideks koordinaatide järgi** üle joone AB ning tähistatakse vastavalt $\int_{AB} f(x, y) dx$ ja $\int_{AB} f(x, y) dy$.

6. Teist liiki joonintegraal

Kui AB on sile ja f pidev, siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) dt$$

ja

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) dt.$$

6. Teist liiki joonintegraal

Omadused:

- ▶ aditiivsus
- ▶ lineaarsus
- ▶ sõltuvus joone suunast
- ▶ ~~monotoonsus~~
- ▶ keskvaartusteoreem

Kinnise joone AB korral loetakse positiivseks integreerimise suunaks kellaosuti liikumisele vastupidine suund.

6. Teist liiki joonintegraal

Tasandilise kujundi pindala:

Olgu kujundi D rajajoon AB tükiti sile, siis kujundi D pindala on arvutatav valemitega

$$S_D = \int_{AB} x \, dy = \int_{AB} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{AB} x \, dy - y \, dx.$$

Töö:

Liikugu punkt mööda joont AB jõu $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ toimel, kus P ja Q on pidevad. Siis jõu $\vec{F}$ töö W on arvutatav valemiga

$$W = \int_{AB} P \, dx + Q \, dy.$$

6. Teist liiki joonintegraal

Sõltumatus integreerimisteest:

Olgu piirkond D lahtine ja ühelisidus (st sidus ning sisaldab koos iga lihtsa kinnise joonega ka selle joone poolt piiratud ala). Olgu $P(x, y)$, $Q(x, y)$, P_y ja Q_x pidevad piirkonnas D ning AB tükiti sile.

Joonintegraal $\int_{AB} P dx + Q dy$ on piirkonnas D integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui $P dx + Q dy$ on täisdiferentsiaal mingile funktsioonile, st $P_y = Q_x$. Olgu $P dx + Q dy = dF$, siis kehtib valem

$$\int_{AB} P dx + Q dy = F(B) - F(A).$$

8. Pinna puutujatasand

Olgu pind Ω antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

$$\text{Olgu } A = A(u, v) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = B(u, v) = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix},$$

$$C = C(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Pinna Ω punkti X , mis vastab piirkonna Δ punktile $U = (u, v)$ nimetatakse **pinna harilikuks punktiks**, kui A , B ja C ei ole korraga nullid ning **pinna iseäraseks punktiks**, kui $A = B = C = 0$ või mõni koordinaatfunktsioonidest ei ole pidevalt diferentseeruv punktis U .

Pinda Ω nimetatakse **siledaks**, kui koordinaatfunktsioonid $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ on hulgas Δ pidevalt diferentseeruvad ja pinnal ei ole iseäraseid punkte.

8. Pinna puutujatasand

Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame **kahe poolega pinnaks**. Iga sile kordsete punktideta pind on kahe poolega.

Vektor $\vec{n} = (A, B, C)$ on pinna Ω **normaal** punktis X (piirkonna Δ punktis U). Lepime kokku, et vektoriga (A, B, C) on määratud pinna **positiivne pool** (sõltub parametrizeeringust). Ilmutatud võrrandiga $z = z(x, y)$ esitatud pinna korral $C = 1$ ning pinna positiivne pool on tema ülemine pool.

Olgu Ω sile pind, olgu $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pinna harilik punkt ning $\vec{n} = (A, B, C)$ normaal punktis X_0 . Pinna **puutujatasandi võrrand** punktis X_0 on

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

8. Esimest liiki pindintegraal

Olgu antud sile või tükiti sile pind Ω . Olgu pinnal Ω määratud kolme muutuja funktsioon $f(x, y, z)$. Funktsiooni f **esimest liiki pindintegraaliks** üle pinna Ω nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(X_i) \mu(\Omega_i) = \iint_{\Omega} f d\mu. \quad (1)$$

Kui pind Ω on sile, antud võrranditega $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, ja funktsioon f on pidev sellel pinnal, siis pindintegraal (1) eksisteerib ning

$$\iint_{\Omega} f d\mu = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv,$$

$$\text{kus } A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

8. Esimest liiki pindintegraal

Erijuhul, kui pind Ω on antud ilmutatud võrrandiga $z = z(x, y)$, $(x, y) \in \Delta$, lisaks on Ω sile ja funktsioon f pidev sellel pinnal, siis pindintegraal (1) eksisteerib ning

$$\iint_{\Omega} f \, d\mu = \iint_{\Delta} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy.$$

8. Esimest liiki pindintegraali rakendused

- ▶ Sileda pinna Ω pindala $S_{\Omega} = \iint_{\Omega} d\mu$
- ▶ Pinna Ω mass $m_{\Omega} = \iint_{\Omega} \gamma(x, y, z) d\mu$, kus $\gamma(x, y, z)$ on pinna Ω pindtihedus
- ▶ Pinna Ω massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_{\Omega}} \iint_{\Omega} x \gamma(x, y, z) d\mu \\ y_c = \frac{1}{m_{\Omega}} \iint_{\Omega} y \gamma(x, y, z) d\mu \\ z_c = \frac{1}{m_{\Omega}} \iint_{\Omega} z \gamma(x, y, z) d\mu \end{cases}$$

8. Teist liiki pindintegraal

Olgu antud kahe poolega pind

$$\Omega: \quad x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta.$$

Esmalt määrame pinna positiivse poole, selleks on normaaliga $\vec{n} = (A, B, C)$ määratud pinna pool (ilmutatud võrrandiga antud pinna korral pinna ülemine pool). Jaotame pinna Ω osadeks Ω_i , $i = 1, \dots, n$.

Olgu pinnatüki Ω_i projektsioon xy -tasandil Ω'_i , yz -tasandil Ω''_i ning zx -tasandil Ω'''_i . Defineerime pinnatükkide projektsioonide märgiga pindalad vastavalt

$$S'_i = \begin{cases} \mu(\Omega'_i), & \gamma < \pi/2 \\ -\mu(\Omega'_i), & \pi/2 < \gamma < \pi \end{cases} = \iint_{\Delta_i} C \, du \, dv,$$
$$S''_i = \iint_{\Delta_i} A \, du \, dv, \quad S'''_i = \iint_{\Delta_i} B \, du \, dv.$$

8. Teist liiki pindintegraal

Funktsiooni **teist liiki pindintegraalideks** üle pinna Ω positiivse poole nimetatakse piirväärtusi

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(X_i) S'_i &= \iint_{\Omega} f \, dx \, dy, \\ \lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(X_i) S''_i &= \iint_{\Omega} f \, dy \, dz, \\ \lim_{\lambda(\tilde{T}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(X_i) S'''_i &= \iint_{\Omega} f \, dz \, dx.\end{aligned}\tag{2}$$

8. Teist liiki pindintegraal

Kui pind Ω on risti xy -tasandiga, siis $\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = 0$.

Analoogiline omadus on ka ülejäänud pindintegraalidel (2).

Üldiseks teist liiki pindintegraaliks nimetatakse summat

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} P \, dx \, dy + Q \, dy \, dz + R \, dz \, dx = \\ &= \iint_{\Omega} P \, dx \, dy + \iint_{\Omega} Q \, dy \, dz + \iint_{\Omega} R \, dz \, dx. \end{aligned}$$

8. Teist liiki pindintegraal

Kui pind Ω on sile, antud võrranditega $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, ja funktsioon f on pidev sellel pinnal, siis pindintegraalid (2) eksisteerivad ning

$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, C \, du \, dv,$$

$$\iint_{\Omega} f \, dy \, dz = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, A \, du \, dv,$$

$$\iint_{\Omega} f \, dz \, dx = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, B \, du \, dv,$$

$$\text{kus } A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Kui integreerida üle pinna negatiivse poole, muutub märk integraali ees.