

Märkusi 8. praktikumi kohta

Teist liiki pindintegraali korral tuleb esmalt määrata pinna

$$\Omega: \quad x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

positiivne pool (sõltub parametriseringust). Positiivse poole määrab normaal $\vec{n} = (A, B, C)$, kus

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Ilmutatud võrrandiga $z = z(x, y)$ antud pinna korral alati $C = 1$ ning positiivne pool on pinna ülemine pool. Teist liiki pindintegraal on defineeritud kui pindintegraal üle pinna positiivse poole, kui integreerida üle negatiivse poole, muutub märk integraali ees vastupidiseks.

Märkus. Selle lähenemise korral on esmalt olemas parametrisering ja see määrab pinna positiivse poole. Võib mõelda ka teisiti: otsustame ära, kumb pool on positiivne pool, näiteks, et välimine pool on alati positiivne pool. Siis tuleb leida selline parametrisering, et normaal $\vec{n} = (A, B, C)$ vastaks pinna positiivsele poolele. Kui ei vasta, tuleb märk integraali ees ära vahetada.

Ülesanne 111 a. Integreeritakse üle pinna negatiivse poole, seega muutub märk integraali ees. Kasutame parametriseringut $x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}$, siis $C = 1$ ja $\Delta: u^2 + v^2 \leq 1$. Taandame pindintegraali kahekordsele integraalile ning selle omakorda polaarkoordinaatidele üle minnes ühekordsetele integraalidele

$$\iint_{\Omega^{\text{neg}}} (x - y) dx dy = - \iint_{\Delta} (u - v) du dv = - \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \int_0^1 r^2 dr = 0.$$

Ülesanne 111 b. Integreeritakse üle pinna välimise poole, ülemise poolsfääri Ω_1 jaoks on see positiivne pool, alumise poolsfääri Ω_2 jaoks negatiivne pool (kui mõlemad pinnad esitada ilmutatud kujul). Kasutame parametriseringut $x = u, y = v, z = \pm \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$, $\Delta: x^2 + y^2 \leq a^2$. Vastavalt $A = \frac{\pm u}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, B = \frac{\pm v}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}, C = 1$ ning

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1^{\text{pos}}} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= \iint_{\Delta} \left(\frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} + \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} + \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \right) du dv, \\ \iint_{\Omega_2^{\text{neg}}} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= - \iint_{\Delta} \left(\frac{-u^2}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} + \frac{-v^2}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} - \sqrt{a^2 - u^2 - v^2} \right) du dv. \end{aligned}$$

Seega

$$\iint_{\Omega^{\text{väl}}} x dy dz + y dz dx + z dx dy = 2 \iint_{\Delta} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}} du dv = \dots = 4\pi a^3.$$

Lahendus 2. Parametriseerime nüüd sfääri võrranditega $x = a \cos \varphi \sin \theta, y = a \sin \varphi \sin \theta, z = a \cos \theta, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$. Siis $A = -a^2 \cos \varphi \sin^2 \theta, B = -a^2 \sin \varphi \sin^2 \theta, C = -a^2 \sin \theta \cos \theta$. Ülemise poolsfääri korral $C \leq 0$, alumise poolsfääri korral $C \geq 0$, sellele parametriseringule vastav pinna positiivne pool on pinna sisemine pool. Kuna integreerida tuleb üle välimise poole, tuleb vahetada märk integraali ees

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^{\text{väl}}} x dy dz + y dz dx + z dx dy &= - \iint_{\Omega^{\text{pos}}} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \\ &= - \iint_{\Delta} (-a^3 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta - a^3 \sin^2 \varphi \sin^3 \theta - a^3 \sin \theta \cos^2 \theta) d\varphi d\theta = \dots = 4\pi a^3. \end{aligned}$$

Ülesanne 111 c. Vigane ülesanne, integreerida tuleks üle välimise poole, mitte üle positiivse poole. Parametriseerime ära kõik kuubi tahud, sellega määrame ära ka positiivse poole.

- $\Omega_1 : x = 0, y = u, z = v, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 1, B = 0, C = 0$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_2 : x = u, y = 0, z = v, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 0, B = -1, C = 0$ (positiivne on välimine pool)
 $\Omega_3 : x = u, y = v, z = 0, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 0, B = 0, C = 1$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_4 : x = 1, y = u, z = v, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 1, B = 0, C = 0$ (positiivne on välimine pool)
 $\Omega_5 : x = u, y = 1, z = v, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 0, B = -1, C = 0$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_6 : x = u, y = v, z = 1, (u, v) \in [0, 1]^2; A = 0, B = 0, C = 1$ (positiivne on välimine pool)

Kasutame integraali aditiivsust ($\Omega = \cup_{i=1}^6 \Omega_i$) ning fakti, et kui pind on risti vastava tasandiga, siis integraali väärtus on 0.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_1^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_1^{\text{väl}}} x \, dy \, dz = - \iint_{[0,1]^2} 0 \cdot 1 \, du \, dv = 0 \\
 \iint_{\Omega_2^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_2^{\text{väl}}} y \, dz \, dx = \iint_{[0,1]^2} 0 \cdot (-1) \, du \, dv = 0 \\
 \iint_{\Omega_3^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_3^{\text{väl}}} z \, dx \, dy = - \iint_{[0,1]^2} 0 \cdot 1 \, du \, dv = 0 \\
 \iint_{\Omega_4^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_4^{\text{väl}}} x \, dy \, dz = \iint_{[0,1]^2} 1 \cdot 1 \, du \, dv = 1 \\
 \iint_{\Omega_5^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_5^{\text{väl}}} y \, dz \, dx = - \iint_{[0,1]^2} 1 \cdot (-1) \, du \, dv = 1 \\
 \iint_{\Omega_6^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy &= \iint_{\Omega_6^{\text{väl}}} z \, dx \, dy = \iint_{[0,1]^2} 1 \cdot 1 \, du \, dv = 1
 \end{aligned}$$

Seega

$$\iint_{\Omega^{\text{väl}}} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy = 3.$$

Ülesanne 111 e. Parametriseerime ära kõik püramiidi tahud, sellega määrame ära ka positiivse poole.

- $\Omega_1 : x = 0, y = u, z = v, \quad u, v \geq 0, u + v \leq 1; A = 1, B = 0, C = 0$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_2 : x = v, y = 0, z = u, \quad u, v \geq 0, u + v \leq 1; A = 0, B = 1, C = 0$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_3 : x = u, y = v, z = 0, \quad u, v \geq 0, u + v \leq 1; A = 0, B = 0, C = 1$ (positiivne on sisemine pool)
 $\Omega_4 : x = u, y = v, z = 1 - u - v, \quad u, v \geq 0, u + v \leq 1; A = 1, B = 1, C = 1$ (positiivne on välimine pool)

Kasutame integraali aditiivsust ($\Omega = \cup_{i=1}^4 \Omega_i$) ning fakti, et kui pind on risti vastava tasandiga, siis integraali väärtus on 0.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_1^{\text{väl}}} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx &= \iint_{\Omega_1^{\text{väl}}} xy \, dy \, dz = - \iint_{\Delta} 0 \cdot u \cdot 1 \, du \, dv = 0 \\
 \iint_{\Omega_2^{\text{väl}}} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx &= \iint_{\Omega_2^{\text{väl}}} yz \, dz \, dx = - \iint_{\Delta} 0 \cdot u \cdot 1 \, du \, dv = 0 \\
 \iint_{\Omega_3^{\text{väl}}} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx &= \iint_{\Omega_3^{\text{väl}}} xz \, dx \, dy = - \iint_{\Delta} u \cdot 0 \cdot 1 \, du \, dv = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_4^{\text{v\"al}}} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx &= \iint_{\Delta} (u(1-u-v) \cdot 1 + uv \cdot 1 + v(1-u-v) \cdot 1) \, du \, dv = \\
&= \iint_{\Delta} (u+v-u^2-v^2-uv) \, du \, dv = \int_0^1 du \int_0^{1-u} (u+v-u^2-v^2-uv) \, dv = \\
&= \int_0^1 \left(uv + \frac{v^2}{2} - u^2v - \frac{v^3}{3} - \frac{uv^2}{2} \right) \Big|_{v=0}^{v=1-u} du = \\
&= \int_0^1 \left(u - u^2 + \frac{1}{2} - u + \frac{u^2}{2} - u^2 + u^3 - \frac{1}{3} + u - u^2 + \frac{u^3}{3} - \frac{u}{2} + u^2 - \frac{u^3}{2} \right) du = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{6} + \frac{u}{2} - \frac{3u^2}{2} + \frac{5u^3}{6} \right) du = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Seega

$$\iint_{\Omega^{\text{v\"al}}} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx = \frac{1}{8}.$$