

Matemaatiline analüüs IV
praktilumiülesannete kogu
2014. a. kevadsemester

1. Alamhulgad ruumis $\mathbb{R}^m$. Koonduvad jaded

1. Tõestage, et ruumis $\mathbb{R}^2$

- a) iga kera (s.o. ring) $U_r(\mathbf{A})$ sisaldab ruutu keskpunktiga $\mathbf{A} = (a, b)$,
- b) iga ristkülik

$$K_{r_1, r_2}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} = (x, y) : a - r_1 < x < a + r_1, b - r_2 < y < b + r_2\}$$

sisaldab ringi keskpunktiga $\mathbf{A}$.

Sõnastage ja tõestage sama ruumis $\mathbb{R}^m$.

2. Tõestage, et alamhulk $D \subset \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $r > 0$, et $D \subset U_r(\mathbf{0})$.

3. Leidke $\lim \mathbf{X}^{(n)}$ ruumis $\mathbb{R}^2$, kui

a) $\mathbf{X}^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right);$

c) $\mathbf{X}^{(n)} = \left(\sin \frac{1}{n}, (-1)^n \right);$

b) $\mathbf{X}^{(n)} = \left(n \sin \frac{1}{n}, \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right);$

d) $\mathbf{X}^{(n)} = \left(\frac{2n-7}{3n}, \frac{n^3+3n-1}{n^2+5} \right).$

4. Olgu $\mathbf{X}^{(n)} \rightarrow \mathbf{A}$ ja $\mathbf{Y}^{(n)} \rightarrow \mathbf{B}$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Veenduge, et $\mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{Y}^{(n)} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ja $\lambda \mathbf{X}^{(n)} \rightarrow \lambda \mathbf{A}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

5. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D rajapunkt. Tõestage, et leidub hulga D punktide jada $(\mathbf{X}^{(n)})$, mille korral $\mathbf{X}^{(n)} \rightarrow \mathbf{A}$.

6. Leidke järgmiste omadustega hulga D ruumis $\mathbb{R}^2$:

a) $\partial D^\circ = \partial D = \overline{\partial D};$

d) $\partial D \neq \overline{\partial D};$

b) $D \neq \emptyset, \partial D = \emptyset;$

c) $\partial D = [0, 1]^2, \partial D^\circ = \emptyset;$

e) hulgad $\partial D^\circ, \partial D$ ja $\overline{\partial D}$ on kõik erinevad.

7. Teatavasti nimetatakse mittetühja hulka $D \subset \mathbb{R}^m$ piirkonnaks, kui $D \subset \overline{D^\circ}$. Tõestage, et kehtivad järgmised väited.

- a) Iga mittetühi lahtine hulk on piirkond.
 b) Hulk, mis sisaldab isoleeritud punkte, ei ole piirkond.
 c) Hulk D on piirkond parajasti siis, kui leidub lahtine hulk U nii, et $U \subset D \subset U \cup \partial U$.

8. Kirjeldage (skitseerige) alamhulka D ruumis $\mathbb{R}^2$. Otsustage, kas D on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^2$.

- a) $D = \{(x, y) : 1 < x < 4, -1 < y < 0\}$; c) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 625\}$;
 b) $D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;

9. Kirjeldage (skitseerige) hulka, mis on määratud ruumis $\mathbb{R}^3$ järgmiste võrranditega või võrratustega. Otsustage, kas see hulk on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^3$.

- a) $z = 2$; b) $y \geq -1$; c) $y = x$; d) $x + y = 1$; e) $z = y^2$;
 f) $x^2 + z^2 = 4$; g) $z = x^2 + y^2$; h) $\begin{cases} x = 1, \\ y = z; \end{cases}$
 i) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 < 4$.

10. Skitseerige või kirjeldage funktsiooni f graafikut:

- a) $f(x, y) = 2$; d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; f) $f(x, y) = x^2$;
 b) $f(x, y) = 4 - 2x - 4y$;
 c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; e) $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; g) $f(x, y) = \sin y$.

11. Leidke $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ja $\frac{1}{f(x, y)}$, kui $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.

Funktsiooni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *tasemejooneks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x, y) : f(x, y) = k\}$. Funktsiooni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *tasemepinnaks* (tasemel k) nimetatakse punkti-hulka $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = k\}$.

12. Skitseerige järgmiste funktsioonide tasemejooned/tasemepinnad.

- a) $f(x, y) = x + y$; d) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; g) $f(x, y, z) = x + y + z$;
 b) $f(x, y) = x^2 + y^2$; e) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$; h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
 c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; f) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$; i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

13*. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$ kinnine hulk ning olgu fikseeritud positiivne reaalarv r . Tähistame $E = \{\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{X} \in D \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| = r\}$. Tõestage, et E on samuti kinnine hulk.

14*. Rahuldagu jada $(\mathbf{X}^{(n)}) \subset \mathbb{R}^m$ liikmed iga $n \in \mathbb{N}$ korral tingimust $\|\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}\| < \frac{1}{2^n}$.

Tõestage, et jada $(\mathbf{X}^{(n)})$ on koonduv.

2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

15. Tõestage piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

- a) $\lim_{x \rightarrow (2,3)} (3x + 4y) = 18$;
 b) $\lim_{x \rightarrow (-5,7)} (4y - 5x) = 53$;
 c) $\lim_{x \rightarrow (-1,-1)} (x^2 - 2y) = 3$;
 d) $\lim_{x \rightarrow (2,1)} (2y^2 - 3x) = 5$;
 e) $\lim_{x \rightarrow (1,1)} xy = 1$;
 f) $\lim_{x \rightarrow (1,1)} \left(\frac{1}{x} + 2y \right) = 3$;

- g) $\lim_{x \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2$;
 h) $\lim_{x \rightarrow (0,2)} \frac{1}{x^2 + (y-2)^2} = \infty$;
 i) $\lim_{x \rightarrow (-1,0)} \frac{1}{x|y|} = -\infty$;
 j) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2 - \sin x} = 0$;
 k) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (x^2 + 2y^2) = \infty$.

16. Leidke piirväärtused või tõestage, et piirväärtust ei leidu:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$;
 b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$;
 c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(xy)}{x \sin y}$;
 d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{x}$;
 e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\tan 2xy}{x^2 y}$;
 f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}}$;
 g) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (x+y) e^{-(x^2+y^2)}$;
 h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$;

- i) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x+y^2}$;
 j) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$;
 k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$;
 l) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$;
 m) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{|x^3| + |y^3|}$;
 n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;
 o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \ln(x^2 + y^2)$;
 p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$;

17. Näidake, et piirväärtus $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ on olemas, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ ei eksisteeri:

a) $f(x,y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$;

b) $f(x,y) = (x-y) \cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}$.

18. Kas funktsioon f on pidev punktis 0 ?

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{kui } x+y \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x+y = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{kui } x^4 + y^4 \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x^4 + y^4 = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{f) } f(x, y) &= \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases} \\ \text{g) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } f(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}; \end{cases} \\ \text{i) } f(x, y) &= \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

19. Tõestage, et kui m muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ja $f(\mathbf{A}) > 0$, kus $\mathbf{A}$ on piirkonna $D \subset \mathbb{R}^m$ sisepunkt, siis leidub selline ümbrus $U_\varepsilon(\mathbf{A})$, et $f(\mathbf{X}) > 0$ iga $\mathbf{X} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$ korral.

20. Olgu kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidev hulga D sisepunktis $\mathbf{A} = (a, b)$. Veen-
duge, et osafunktsioonid f_1 ja f_2 , mis on defineeritud seostega $f_1(x) := f(x, b)$ ja $f_2(y) := f(a, y)$, on pidevad vastavalt punktis a ja b .

21. Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ hulga D sisepunkt. Kas funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidevus punktis $\mathbf{A}$ on samaväärne sellega, et osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja b ?

22. Tõestage, et kui kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev sisepunktis $\mathbf{A}$, siis leidub punkti $\mathbf{A}$ selline ümbrus $U_\varepsilon(\mathbf{A})$, milles f on tõkestatud, s.t. leidub $M > 0$, et $|f(\mathbf{X})| \leq M$ iga $\mathbf{X} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$ korral.

23. Näidake, et kui kahe muutuja funktsioonid f ja g on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis ka funktsioonid $f + g$ ja $f \cdot g$ on selles punktis pidevad.

24*. Olgu antud lahtine hulk $U \subset \mathbb{R}^2$ ning funktsioon $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Olgu täidetud järgmised tingimused.

- f on mõlema muutuja järgi eraldi võttes pidev hulgas U (see tähendab, iga $(a, b) \in U$ korral tekkivad osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja punktis b),
- f on muutuja y järgi kasvav (see tähendab, iga $(a, b) \in U$ korral osafunktsioon f_2 on kasvav).

Tõestage, et f on hulgas U pidev funktsioon.

3. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

25. Leidke esimest järku osatuletised:

$$\text{a) } f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y};$$

$$\text{b) } f(x, y) = xy \ln(xy);$$

$$\text{c) } f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{d) } f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x};$$

$$\text{e) } f(x, y, z) = \sin(xy + yz);$$

$$\text{f) } f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

26. Olgu f selline kahe muutuja funktsioon, et tal leiduvad punkti $\mathbf{A}$ ümbruses $K_\delta(\mathbf{A})$ (lah-
tine kuup) mittenegatiivsed osatuletised mõlema muutuja järgi. Tõestage, et f on kasvav
järgmises mõttes: kui $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_\delta(\mathbf{A})$, kusjuures $x_1 \leq x_2$ ja $y_1 \leq y_2$, siis $f(x_1, y_1) \leq$

$f(x_2, y_2)$.

27. Rahuldagu funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ seost $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, kus $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Leidke f .

28. Olgu $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y): y \in \mathbb{R}\}$ ning rahuldagu funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ seost $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}$, kus $(x, y) \in D$, ja $f(1, y) = \sin y$, kus $(1, y) \in D$. Leidke f .

29. Läbi pinnal $z = 2x^2 + y^2$ asuva punkti $\mathbf{M}(1, 2, 6)$ on tõmmatud xz -tasandiga ja yz -tasandiga paralleelsed tasandid. Leidke, millised on nurgad punktis $\mathbf{M}$ tekkivate lõikejoonte puutujate ja koordinaattelgede vahel.

30. Põhjendage, et funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv ning leidke tema täisdiferentiaal selles punktis:

- a) $f(x, y) = e^{xy}$, $\mathbf{A} = (0, 0)$;
- b) $f(x, y) = x^y$, $\mathbf{A} = (2, 3)$;
- c) $f(x, y) = x \ln(xy)$, $\mathbf{A} = (-1, -1)$;
- d) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, $\mathbf{A} = (2, 1)$;
- e) $f(x, y, z) = \cos(xy + xz)$, $\mathbf{A} = \left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$;
- f) $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$, $\mathbf{A} = (1, 2, 3)$.

31. Kontrollige, kas funktsioon $w = f(x, y)$ on punktis $\mathbf{0} = (0, 0)$ pidev, kas tal on selles punktis lõplikud osatuletised, kas ta on selles punktis diferentseeruv, kaks korda diferentseeruv:

- a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- b) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;
- c) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$;
- d) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$;
- e) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0. \end{cases}$
- f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = 0; \end{cases}$
- g) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = 0; \end{cases}$
- h) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = 0; \end{cases}$
- i) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$
- j) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$
- k) $f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = 0. \end{cases}$

32. Olgu kahe muutuja funktsioon f punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv. Olgu $\ell = (l_1, l_2) \neq \mathbf{0}$. Arvutage tuletis suunas ℓ , mis on defineeritud seosega $\frac{\partial f}{\partial \ell}(\mathbf{A}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{A} + t\ell) - f(\mathbf{A})}{t\|\ell\|}$.

33. Leidke funktsiooni $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ tuletis punktis $\mathbf{M}(1, 2)$ punkti $\mathbf{N}(4, 6)$ suunas.

34. Mingil mäel on punktis (x, y) kõrgus merepinnast määratud seosega $z = 2500 - 3x^2 - 4y^2$ (meetrites). x -telje positiivne suund osutab itta ning y -telje positiivne suund osutab põhja. Alpinist asub punktis $(15, -10, 1425)$.

- a) Kui alpinist liigub otse läände, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
 b) Kui alpinist liigub kagu suunas, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
 c) Millises suunas peaks alpinist liikuma, et ta liiguks mööda samakõrgusjoont?

35. Koostage pinna puutujatasandi ja normaali võrrand punktis $\mathbf{A}$:

- a) $z = xy$, $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$; e) $z = x^2 + y^2$, $\mathbf{A} = (1, 2, 5)$;
 b) $z = x + y^2$, $\mathbf{A} = (0, 1, 1)$; f) $z = 2x^2 + y^2$, $\mathbf{A} = (1, -1, 3)$;
 c) $z = x^3 + y^3$, $\mathbf{A} = (1, -1, 0)$; g) $z = \sin(xy)$, $\mathbf{A} = \left(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 d) $z = e^{x+y}$, $\mathbf{A} = (1, -1, 1)$;

36. Kas tasand $z = 0$ on punktis $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ puutujatasandiks pinnale

- a) $z = x^2 + y^2$ (pöördparaboloid); b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (koonus); c) $z = xy$ (hüperboolne paraboloid)?

37. Olgu funktsioonidel $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ lõplikud osatuletised punktis $\mathbf{A} = (a, b) \in D$. Veenduge, et siis ka funktsioonidel $f + g$ ja fg on punktis $\mathbf{A}$ lõplikud osatuletised ning

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) + \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{A}) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x}(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A}) \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) + f(\mathbf{A}) \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{A}).$$

38. Veenduge, et kui f ja g on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$, siis ka $f + g$ ja λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$ ja

1) $d(f + g) = df + dg$; 2) $d(\lambda f) = \lambda df$ (kus $\lambda \in \mathbb{R}$).

39*. Olgu antud kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning $\mathbf{A} \in D^\circ$. Ülesande 32 põhjal on teada, et kehtivad implikatsioonid

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \forall \ell = (l_1, l_2) \neq \mathbf{0} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial \ell}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R},$$

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } \mathbf{A}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \ell = (l_1, l_2) \neq \mathbf{0} \quad \frac{\partial f}{\partial \ell}(\mathbf{A}) = 0.$$

Kas emb-kumb neist implikatsioonidest on üldiselt pööratav?

4. Liitfunktsioonide diferentseerimine. Taylorig valem

40. Leidke ühe muutuja liitfunktsiooni F tuletis, kui

- a) $f(x, y) = e^{x-3y}$ ja $x = \sin t$, $y = \frac{1}{3} \cos t$; d) $f(t, x, y) = t^2 + x^2 + y^2$ ja $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$;
 b) $f(x, y) = \ln(1 - xy)$ ja $x = t^2$, $y = t^3$; e) $f(t, x, y) = \tan(t + x^2 - y)$ ja $x = t^2$,
 c) $f(x, y, z) = xyz$ ja $x = \sin t$, $y = \cos t$, $y = t^5$.
 $z = 2t$;

41. Leidke osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$, kui

- a) $f(u, v) = u^2 v$ ja $u = x \cos y$, $v = x \sin y$; d) $f(u, v) = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$ ja
 $u = x \sin y$, $v = x \cos y$;
b) $f(u, v) = u \ln v$ ja $u = \frac{1}{x+y}$, $v = e^{x+y}$; e) $f(u, v) = u^2 - v^2$ ja
 $u = x \sin y$, $v = x \cos y$.
c) $f(u, v) = ue^v$ ja $u = x^2$, $v = x \ln y$;

42. Selgitage, miks liitfunktsioon on diferentseeruv ja leidke tema täisdiferentsiaal:

- a) $f(u, v) = uv$ ja $u = e^{2x} + 1$, $v = 1 - x$; $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$,
b) $f(u, v) = u \sin v$ ja $u = \cos x$, $v = 2x + 1$;
c) $f(u, v) = u \ln v$ ja $u = 2x + 1$, $v = y + 1$; e) $f(u, v, w) = uvw$ ja $u = x + y$, $v = e^{2x-y}$,
d) $f(u, v) = u^2 + v^2$ ja $w = x$;

43. Selgitage diferentseeruvust ja leidke näidatud järku täisdiferentsiaalid:

- a) $f(x, y) = (x + y + 1)^5$, $d^4 f$; b) $f(x, y, z) = \cos(2x + 3y - 5z)$, $d^6 f$.

44. Näidake, et funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = \mathbf{0}, \end{cases}$$

korral $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{0}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{0})$. Milline segaosatuletiste teoreemide eeldustest on rikutud?

45. Määrake funktsiooni $u = u(x, y)$ üldavaldis, kui ta rahuldab seost

- a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Olgu U lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^2$ ning $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv funktsioon. Kuju-
tust $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ nimetatakse *Laplace'i operaatoriks*. Kui $\Delta f = 0$, siis öeldakse, et f on
harmoniline funktsioon.

46. Tõestage, et hulk $\{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid \Delta f = 0\}$ on alamruum hulgas U kaks korda diferentseeruvate funktsioonide vektorruumis.

47. Tooge näide mõnest funktsioonist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mis on kaks korda diferentseeruv $\mathbb{R}^2$ -s, aga ei ole harmooniline.

48. Olgu U lahtine hulk ruumis $\mathbb{C}$ ning $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ diferentseeruv (ehk hulgas U holomorfe) funktsioon, see tähendab, eksisteerigu lõplik tuletis $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ iga $z_0 \in U$ korral. Esitades $z = x + iy$ korral $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ näidake, et hulgas U rahuldavad u ja v *Cauchy-Riemanni võrrandeid*, see tähendab, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

49. Avaldage Cauchy-Riemanni võrrandid polaarkoordinaatides, arvestades, et $x = r \cos \varphi$

ja $y = r \sin \varphi$.

50. Olgu U lahtine hulk ruumis $\mathbb{C}$ ning $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ diferentseeruv funktsioon. Esitame $z = x + iy$ korral $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Näidake, et u ja v on harmoonilised funktsioonid.

Näpunäide: Kompleksmuutuja funktsioonide teoorias näidatakse, et kui f on lahtises hulgas U diferentseeruv, on ta hulgas U lõpmata arv kordi diferentseeruv, mistõttu võib eeldada, et esituse $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, korral on funktsioonidel u ja v olemas pidevad teist järku osatuletised.

51. Olgu U lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}^2$. Harmoonilisi funktsioone $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v: U \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad Cauchy-Riemanni võrrandeid, nimetatakse *kaasharmoonilisteks*. Leidke kaasharmooniline funktsioonile

a) $u(x, y) = x^2 - y^2$;

b) $u(x, y) = e^x \sin y$.

52. Näidake, et järgmised funktsioonid on harmoonilised funktsioonid oma määramispiirkonnas:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;

b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

c) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$;

Saab näidata, et lahtise hulga $U \subset \mathbb{R}^2$ ja harmooniliste funktsioonide $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtivad järgmised väited:

- kui u ja v on üksteise kaasharmoonilised, siis funktsioon $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, kus $U_1 = \{x + iy: (x, y) \in U\}$, mis on antud seostega $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$, on diferentseeruv hulgas U_1 ;
- u jaoks kehtib *maksimumi printsiip*: iga kinnise hulga $B \subset U$ korral saavutab u hulgas B ekstremaalsed väärtused ainult hulga B rajajoonel ∂B ;
- u jaoks kehtib *keskväärtusprintsiip*: kui $B(p, r)$ on kinnine kera keskpunktiga p raadiusega r , siis $u(p) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r} u \, ds$ (I liiki joonintegraal).

53. Leidke funktsiooni f Taylori valem punktis $(0, 0)$, kui $n = 3$:

a) $f(x, y) = e^y \cos x$;

c) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$;

e) $f(x, y) = x \cos^2 y$;

b) $f(x, y) = e^x \sin y$;

d) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$;

f) $f(x, y) = y \sin^2 x$.

54. Leidke funktsiooni f Taylori valem punktis $\mathbf{A}$, kui $n = 3$:

a) $f(x, y) = e^{x+y}$,
 $\mathbf{A} = (1, -1)$;

b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$,
 $\mathbf{A} = (1, 1)$;

c) $f(x, y) = \ln(xy)$,
 $\mathbf{A} = (1, 1)$.

55. Arvutage Taylori valemi ($n = 1$) abil ligikaudne väärtus:

a) $1,03^{2,04}$;

c) $\sqrt{3,97} \cdot 2,03^2$;

d) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right)$.

b) $\sqrt{2,03 \cdot 1,98}$;

56. Tuletage Taylori valemi ($n = 2$) abil järgnevate avaldiste ligikaudse arvutamise valemid:

$$\text{a) } \arctan \frac{1-\alpha}{1-\beta} \quad (|\alpha|, |\beta| \ll 1);$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} \quad (|\alpha|, |\beta| \ll 1).$$

57*. Olgu funktsioonil $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad osatuletised, kusjuures leidugu $K > 0$ nii, et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{X}) \right| \leq K$$

kõigi punktide $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ ja indeksite $j = 1, \dots, m$ korral. Tõestage, et f on Lipschitzi funktsioon, st. leidub konstant $L > 0$ selliselt, et mistahes punktide $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ jaoks kehtib võrratus

$$|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})| \leq L \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

5. Ilmutamata funktsioonid ja ekstreemumid

58. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x, y) = 0$ määrab punkti $\mathbf{A} = (a, b)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$. Juhul, kui määrab, siis leidke tuletis $f'(a)$, kui ta leidub.

- $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1, \mathbf{A} = (0, 1);$
- $F(x, y) = y^2 + x^2 - x^4, \mathbf{A} = (0, 0);$
- $F(x, y) = xe^y + \ln(x + y + 1), \mathbf{A} = (0, 0);$
- $F(x, y) = x^4 - x^2 - y^2 + 2y - 1, \mathbf{A} = (0, 1);$
- $F(x, y) = y^2 x^{\frac{1}{3}} + \sin y, \mathbf{A} = (0, 0).$
- $F(x, y) = 15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44, \mathbf{A} = (2, 1).$
- $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2), \mathbf{A} = (0, 0).$

59. Leidke f' , kui f on järgmise võrrandiga antud ilmutamata funktsioon:

- $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x};$
- $y - \varepsilon \cos y = x$, kus $\varepsilon \in (0, 1);$
- $\sin x y = 1 - 0,2xy;$
- $y + \sin y + e^x = 0;$
- $x + y = e^{x-y};$
- $y^2 + 2xy - 2 = 0.$

60. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x, y, z) = 0$ määrab punkti $\mathbf{A} = (a, b, c)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $z = f(x, y)$. Arvutage ka $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, kui nad eksisteerivad.

- $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16, \mathbf{A} = (1, 4, 2);$
- $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \mathbf{A} = (a, b, c)$, kus $c := \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \neq 0;$
- $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 8, \mathbf{A} = (0, -1, 2).$

61. Leidke ilmutamata funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised, kui f on antud järgmise võrrandiga.

a) $x + y + z = e^{-x-y-z};$

b) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1;$

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz;$

d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

62. Leidke kahe muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2;$

b) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2;$

c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x;$

d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2;$

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$

f) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y;$

g) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kui } (x, y) = 0; \end{cases}$

h) $f(x, y) = xy + \frac{1}{2(x+y)};$

i) $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}};$

63. Leidke kolme muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

a) $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1;$

b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1;$

c) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \text{ kui } x > 0, y > 0, z > 0.$

64. Leidke harilikule ekstreemumile taandamise meetodil funktsiooni f ekstreemum antud tingimustel:

a) $f(x, y) = xy, \quad y = 2x^3 - 3x;$

b) $f(x, y) = x(y-1), \quad y = x^2;$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$

d) $f(x, y, z) = x + y + z^2,$
 $z - x = 1, y - xz = 1.$

65. Leidke Lagrange'i meetodil funktsiooni f ekstreemum antud tingimustel:

a) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y, \quad x^2 + y^2 = 1;$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 2;$

c) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9;$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6, x - y = 0.$

66*. Olgu antud funktsioonid $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ning punkt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$. Olgu funktsioon F pidev ruumis $\mathbb{R}^2$ ja funktsioonidel F ja f pidevad osatuletised mõlema muutuja järgi ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) \neq 0$.

Olgu $\nabla f(\mathbf{A}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) \right) \neq \mathbf{0}$, kusjuures funktsioonil f olgu tinglik lokaalne ekstreemum punktis $\mathbf{A}$ tingimusel $F(x, y) = 0$. Tõestage, et vektorid $\nabla f(\mathbf{A})$ ja $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A}), \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) \right)$ on kol-

lineaarsed.

6. Joonintegraalid

67. Olgu $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ antud seosega $\gamma(0) = \mathbf{0}$ ja $\gamma(t) = \left(t, t \cos^2 \frac{\pi}{2t}\right)$. Tõestage, et $L := \gamma([0, 1])$ on pidev ja lihtne, aga mitte sirgestuv joon.

Näpunäide: uurige kõõlmurdojoni, mis on määratud punktidega $t_0 = 0$, $t_j = \frac{1}{2n+1-j}$, $j = 1, \dots, 2n$.

68. Olgu $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitzi mõttes pidev funktsioon, st. leidugu $K \in \mathbb{R}$ omadusega $\|\gamma(t) - \gamma(t')\| \leq K|t - t'|$ mistahes punktide $t, t' \in [a, b]$ korral. Olgu $L := \gamma([a, b])$ lihtne. Tõestage, et L on sirgestuv joon ning $|L| \leq K(b - a)$.

69. Arvutage esimest liiki joonintegraalid:

- $\int_L (x + y) \, ds$, kui L on kolmnurk tippudega $\mathbf{O} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = (1, 0)$ ja $\mathbf{B} = (0, 1)$;
- $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} \, ds$, kui L on ringi sektori $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ rajajoon;
- $\int_L y^2 \, ds$, kui L on tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaar ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, kui L on ringjoon $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$;
- $\int_L \frac{3z^2}{x^2 + y^2} \, ds$, kui L on krüvijoone $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$ esimene keerd ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- $\int_L z \, ds$, kui L on koonilise krüvijoone $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ kaar ($0 \leq t \leq a$).

70. Leidke materiaalse joone L mass, kui

- L on antud võrrandiga $y = \ln x$ ($1 \leq x \leq e$) ja joontihedusega $\rho(x, y) = kx^2$;
- L on antud võrranditega $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$ ($0 \leq t \leq \ln 3$) ja $\rho(x, y, z) = \rho_0$.

71. Olgu $L = \gamma([a, b])$ lihtne pidev sirgestuv joon. Defineerige lõigu T alajaotusele vastavad joonintegraali $\int_L f \, ds$ Darboux' ülem- ja alamsummad $s(T)$ ja $S(T)$. Tõestage, et tõkestatud funktsiooni $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtib samaväärsus

$$\exists \int_L f \, ds \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

72. Olgu L lihtne pidev sirgestuv joon. Tõestage, et kui $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis leidub esimest liiki joonintegraal $\int_L f \, ds \in \mathbb{R}$.

73. Sõnastage ja tõestage I ning II liiki joonintegraali lineaarsuse omadus. (NB! Riemanni

integraalile arvutusvalemi abil mitte üle minna, kuna see vajab joone siledust!)

74. Sõnastage ja tõestage I liiki joonintegraali monotoonsuse omadus ning keskmise muutuva omadus (nn. sändvitsiteoreem). Kas II liiki joonintegraal on üldiselt monotoonne?

75. Arvutage teist liiki joonintegraalid:

- $\int_{OB} 2xy \, dx + x^2 \, dy$, kus $\mathbf{O} = (0, 0)$, $\mathbf{B} = (1, 1)$ ja $\mathbf{OB}$ i) on sirge $y = x$, ii) on parabool $y = x^2$, iii) koosneb sirglõikudest $\mathbf{OA}$ ja $\mathbf{AB}$, kus $\mathbf{A} = (1, 0)$;
- $\int_{\Gamma} (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$, kus Γ on ringjoon $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
- $\int_L (2 - y) \, dx + x \, dy$, kus L on tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ kaar ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- $\int_{AB} (4x + y) \, dx + (x + 4y) \, dy$, kus $\mathbf{AB}$ on punkte $\mathbf{A} = (1, 1)$, $\mathbf{B} = (-1, 1)$ ühendav joon $y = x^4$;
- $\int_L y \, dx + z \, dy + x \, dz$, kus L on krüvijoone $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

76. Olgu L lihtne sile sirgestuv joon ruumis $\mathbb{R}^2$ ning $\tau(\mathbf{X}) = (\tau_1(\mathbf{X}), \tau_2(\mathbf{X}))$ olgu ühikpuutuja-vektor joonele L punktis $\mathbf{X} \in L$. Olgu $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Tõestage, et

$$\int_L f \, dx = \int_L f \cdot \tau_1 \, ds, \quad \int_L f \, dy = \int_L f \cdot \tau_2 \, ds.$$

77. Leidke joonintegraali abil tasandilise kujundi D pindala, kui ta on piiratud astroidiga $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

78. Olgu xy -tasandil jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M(x, y)$ punkti $\mathbf{0}$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist $\mathbf{0}$. Leidke jõu töö A , mis on kulunud punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

79. Jõud konstantse suurusega F on xy -tasandi igas punktis x -telje suunaline. Leidke jõu töö A , mis kulub punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

80. Arvutage teist liiki joonintegraalid:

- $\int_{AB} (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$, kus $\mathbf{A} = (0, 1)$, $\mathbf{B} = (2, 3)$;
- $\int_{AB} y \, dx + x \, dy$, kus $\mathbf{A} = (-1, 2)$, $\mathbf{B} = (2, 3)$;
- $\int_{AB} x \, dx + y^2 \, dy$, kus $\mathbf{A} = (1, 1)$, $\mathbf{B} = (2, 3)$;
- $\int_{AB} \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2}$, kus punkte $\mathbf{A} = (2, 1)$, $\mathbf{B} = (1, 2)$ ühendav joon ei lõika y -telge.

81*. Leidke pindade $x^2 + y^2 = x$ ja $z = x$ ühisosaks oleva kaare pikkus. Avaldage tulemus järgmiste suuruste kaudu:

- esimest liiki elliptiline integraal $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$, $k \geq 0$;

- teist liiki elliptiline integraal $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$, $k \geq 0$.

82*. Olgu antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tähistame

$$V(f; s, t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : s = x_0 < x_1 < \dots < x_n = t \right\}.$$

Suurust $V(f; a, b)$ nimetatakse funktsiooni f *täisvariatsiooniks*; kui $V(f; a, b) \in \mathbb{R}$, siis öeldakse, et f on lõigus $[a, b]$ *tõkestatud variatsiooniga*.

Tähistame veel

$$v_f(x) = V(f; a, x), \quad x \in [a, b].$$

Ilmselt $v_f(a) = 0$ ja $v_f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvav funktsioon.

Tõestage, et

- kui f on punktis $x_0 \in [a, b)$ paremalt pidev, siis v_f on punktis x_0 paremalt pidev;
- kui f on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis v_f on punktis x_0 pidev;
- kui v_f on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis f on punktis x_0 pidev.

Näpunäited. Osa a) jaoks piisab näidata, et $\lim_{x \rightarrow x_0+} V(f; x, x_0) = 0$, seda võiks teha ε - δ keeles. Osa c) juures tasub uurida võrratuse $|f(x) - f(x_0)| \leq |v_f(x) - v_f(x_0)|$ kehtivust.

Märkus. Asendades absoluutväärtused normidega, näitab ülesanne 82, et kui joon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on sirgestuv, siis γ on pidev (mingis punktis) parajasti siis, kui „kaarepikkuse funktsioon“ $t \mapsto |\{\gamma(u): u \in [a, t]\}|$ on pidev (samam punktis).

83*. Tõestage, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pikkus C rahuldab võrratusi

$$\pi(a + b) < C < \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Näpunäide: Joone kaare pikkuse valem.

7. Kahekordsed integraalid

84. Arvutage kahekordsed integraalid:

- $\iint_D x \, dx \, dy$, kui D on kolmnurk tippudega $(0, 2)$, $(3, 3)$ ja $(2, 0)$;
- $\iint_D x \, dx \, dy$, kui D on piiratud joontega $y + 3x - 6 = 0$ ja $y = 3x^2$;
- $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, kui D on piiratud joontega $y^2 = x$ ja $y = x^2$;
- $\iint_D xy \, dx \, dy$, kui D on piiratud joontega $y^2 + x^2 = 1$, $y = x + 1$ ja $x = 1$;
- $\iint_D 2|x| \, dx \, dy$, kui D on trapets tippudega $(-1, 4)$, $(5, 4)$, $(1, 1)$ ja $(4, 1)$.

85. Arvutage kahekordsed integraalid, minnes üle (elliptilistele) polaarkoordinaatidele:

- $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, kui D on määratud võrratustega $y \leq 0$, $x \geq 0$ ja $x^2 + y^2 \leq R^2$;
- $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kui D on määratud võrratustega $y^2 + (x - 1)^2 \leq 1$, $y \geq 0$;
- $\iint_D \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2} dx dy$, kui D on määratud võrratusega $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1$;
- $\iint_D x dx dy$, kui D on piiratud joonega $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$;
- $\iint_D xy^2 dx dy$, kui D asub joonte $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ja $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ vahel.

86. Leidke tasandilise kujundi D pindala kahekordse integraali abil:

- D on piiratud joontega $xy = a^2$, $x + y = 2,5a$ ($a > 0$);
- D on piiratud joontega $r = b \cos \theta$ ja $r = a \cos \theta$, kus $0 < a < b$;
- D on piiratud joontega $r \cos \varphi = 1$ (sirge) ja $r = 2$ (ringjoon), kusjuures D ei sisalda poolust;
- D on piiratud joontega $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$, kus $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.
Näpunäide: võtke kasutusele uued tundmatud u, v , kus $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

87. Tasandiline kujund D on piiratud joontega $y = \sin x$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) ja OA , kus $A(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Leidke kujundi D raskuskeskme koordinaadid.

88. Leidke kardiodi $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) raskuskeskme koordinaadid.

89. Tõestage, et ühepunktine hulk on nullmõõduga.

90. Olgu $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Tõestage, et D ei ole Jordani mõttes mõõtuv.

91. Tõestage, et nullmõõduga hulga iga alamhulk on mõõtuv ja samuti nullmõõduga.

92. Tõestage, et kahe nullmõõduga hulga ühend on nullmõõduga. Järeldage siit, et iga lõplik hulk on nullmõõduga.

93. Tõestage, et kui D_1 ja D_2 on Jordani mõttes mõõtuvad, siis $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ on samuti Jordani mõttes mõõtuvad.

94. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Tõestage, et f graafik $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ on nullmõõduga hulk.

95. Tõestage, et lahtine kera $U_\delta(A)$ on Jordani mõttes mõõtuv ja leidke tema mõõt.

96. Tõestage, et Jordani mõõt on monotoonne: kui D_1 ja D_2 on mõõtuvad hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $D_1 \subset D_2$, siis $\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$.

97. Tõestage, et kui D on mõõtuv piirkond (st. mittetühi ja $D \subset \overline{D^\circ}$), siis $\mu(D) > 0$.

98. Tõestage, et Jordani mõõt on subadiitiivne: kui D_1 ja D_2 on mõõtuvad hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, siis $\mu(D_1 \cup D_2) \leq \mu(D_1) + \mu(D_2)$.

99. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ selline tõkestatud hulk, et hulgad D , $\overline{D}$ ja D° on kõik Jordani mõttes mõõtuvad. Tõestage, et $\mu(D) = \mu(\overline{D}) = \mu(D^\circ)$.

100. Leidke ruumilise kujundi Ω ruumala:

- a) Ω on piiratud pindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$;
- b) Ω on piiratud pindadega $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$;
- c) Ω on piiratud pindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ ja $z = 2x^2 + y^2 + 1$;
- d) Ω on piiratud pindadega $z = 0$, $z = x^2 + y^2$ ja $x^2 + y^2 = 1$;
- e) Ω on piiratud pindadega $x^2 + y^2 = 3$ ja $z^2 = x^2 + y^2 + 3$.

101. Leidke risttahuka $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui risttahuka tihedus punktis (x, y, z) avaldub seosega $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

102. Leidke paraboloidiga $y^2 + 2z^2 = 4x$ ja tasandiga $x = 2$ piiratud keha raskuskeskme koordinaadid.

103*. Olgu $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Kas leidub funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et f on integreeruv ristkülikus $R = [a, b] \times [c, d]$, aga tingimus „iga $\xi \in [a, b]$ korral leidub $\int_c^d f(\xi, y) dy$ “ on rikutud?
- Kas leidub funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et iga $\xi \in [a, b]$ korral leidub $\int_c^d f(\xi, y) dy$, aga f pole integreeruv ristkülikus R ?

8. Pindintegraalid

104. Leidke pinna iseärased punktid:

- a) pind on antud seostega $x = uv$, $y = u$, $z = v^2$, kus $(u, v) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$ (*Whitney vihmavari*);
- b) pind on antud seostega $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = v$, kus $(u, v) \in R$ mingi ristküliku R korral;
- c) pind on antud seostega $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^5$, kus $(u, v) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$.

105. Leidke pinna puutujatasand antud punktis $\mathbf{X}_0$:

- a) pind on antud võrrandiga $z = x^3 + y^2$, punkt $\mathbf{X}_0 = (1, 1, 2)$;
- b) pind on antud parameetriliste võrranditega $x = r$, $y = r \sin t$, $z = r \cos t$, punkt $\mathbf{X}_0 = (-1, \sqrt{3}/2, -1/2)$;
- c) pind on antud parameetriliste võrranditega $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = h$, punkt $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, -1 \right)$ ($a > 0$).

106. Olgu Ω sile kordsete punktideta pind, mille korral $z = 0$ (st. Ω asub xy -tasandil). (Pind Ω on parametrizeeritud $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = 0$, kus $(u, v) \in \Delta$ ja Δ on kinnine mõõtuv piirkond uv -tasandil.) Olgu funktsioon f selline, et leidub esimest liiki pindintegraal $I := \iint_{\Omega} f d\mu \in \mathbb{R}$. Tõestage, et siis kahekordne integraal $\iint_{\Omega} f dx dy$ ja teist liiki pindintegraali

absoluutväärtus $\left| \iint_{\Omega} f \, dx \, dy \right|$ on mõlemad võrdsed arvuga I . Tooge näide sellisest pinnast Ω , kus $\iint_{\Omega} f \, d\mu = - \iint_{\Omega} f \, dx \, dy$.

107. Leidke antud pinnatüki pindala:

- hüperboolse paraboloidi $z = xy$ see osa, mis on silindri $x^2 + y^2 = 8$ sees;
- sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ see osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = ax$ sees ($a > 0$);
- sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ see osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = b^2$ sees ($0 < b \leq a$).

108. Arvutage esimest liiki pindintegraalid:

- $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \, dz$, kus Ω on poolsfäär $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$;
- $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kus Ω on koonuse $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ pind (koos ülemise põhjaga);
- $\iint_{\Omega} (6x + 4y + 3z) \, dx \, dy \, dz$, kus Ω on tasandi $x + 2y + 3z = 6$ see osa, mis asub esimeses oktantis;
- $\iint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kus Ω on pinna $z = xy$ see osa, mis on silindri $x^2 + y^2 = 4$ sees.

109. Leidke silindri $x^2 + y^2 = a^2$ selle osa mass, mis asub tasandite $z = 0$ ja $z = c$ vahel, kui pindtihedus igas punktis on pöördvõrdeline selle punkti kauguse ruuduga koordinaatide alguspunktist.

110. Leidke massikeskme koordinaadid homogeense sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osal, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

111. Arvutage teist liiki pindintegraalid:

- $\iint_{\Omega} (x - y) \, dx \, dy$, kus Ω on koonuspinna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$ alumine pool;
- $\iint_{\Omega} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, kus Ω on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ välimine pool;
- $\iint_{\Omega} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, kus Ω on tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ piiratud kuubi positiivne pool;
- $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, kus Ω on ringi $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$ alumine pool;
- $\iint_{\Omega} xz \, dx \, dy + xy \, dy \, dz + yz \, dz \, dx$, kus Ω on püramiidi $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ välimine pool;
- $\iint_{\Omega} (y + z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$, kus Ω on kinnise sileda pinna välimine pool.

112. Leidke keha E ruumala teist liiki pindintegraali abil, kui

- E on piiratud pindadega $x = 0$, $z = 0$ ja $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = -u + 3 \cos v$, kus $u \geq 0$;

- b) E on piiratud pindadega $z = c$, $z = -c$ ja $x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v$, $y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v$, $z = c \sin u$.

113. Leidke vektorvälja $\vec{A} = (xy, y + z, x + 2z)$ voog koordinaatide alguspunkti poolt läbi tasandi $2x + y + z = 2$ osa, mis asetseb esimeses oktantis.

114. Leidke vektorvälja $\vec{A} = (x, y, z)$ voog läbi pinna $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [0, 1]$, tema välisnormaali suunas.

115. Tõestage, et kui $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ja $\frac{\partial R}{\partial z}$ on pidevad punkti $\mathbf{M}$ mingis ümbruses, siis $(\operatorname{div} \vec{A})(\mathbf{M}) =$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{M}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{M}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{M}).$$

Näpunäide: Tuletis piirkonna järgi.

116. Leidke vektorvälja $\vec{A}$ divergents punktis $\mathbf{M}(1, -1, 1)$, kui $\vec{A} = (xy^2, x^2y, z^3)$.

117*. Tähistame $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Olgu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Eeldusel, et mõlemad integraalid eksisteerivad, tõestage nn. *Poissoni valem*:

$$\iint_S f(ax + by + cz) d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du.$$

9. Parameetrist sõltuvad integraalid

118. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad.

a) $F(x) = \int_0^3 e^{-tx} dt, \quad x \in [0, 1];$

b) $F(x) = \int_{-3}^7 \frac{\sin(tx)}{t} dt, \quad x \in [-2, 10];$

c) $F(x) = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(t+x) dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$

d) $F(x) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(t-x) dt, \quad x \in [0, 1].$

119. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^3 t^2 \cos(tx) dt;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dt}{1 + (1 + tx)^{\frac{1}{x}}};$

c) $\lim_{x \rightarrow 2+} \int_1^e \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{x-2} dt.$

120. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $F(x) = \int_0^1 \arctan \frac{t}{x} dt, \quad x \neq 0;$

c) $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\cos(tx)}{t} dt, \quad x > 1;$

b) $F(x) = \int_1^\pi \frac{\cos(tx^2)}{t} dt, \quad x \neq 0;$

d) $F(x) = \int_0^{2+x} \frac{\ln(1+tx)}{t} dt, \quad 0 < |x| < 1.$

121. Leidke integraalid $I = \int_0^1 F(x) dx$ järgmistest funktsioonidest.

a) $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \cos(x \cos t) dt$;

b) $F(x) = \int_0^1 (t + e^t - t^x \ln t) dt$.

122. Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leidke järgmised integraalid $I(a)$.

a) $I(a) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx, \quad |a| < 1$;

b) $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx, \quad a^2 \neq 1$.

123. Näidake, et järgmised päratud integraalid koonduvad ühtlaselt antud piirkonnas X .

a) $\int_0^1 \frac{\arctan(t-x)}{\sqrt{1-t}} dt, \quad X = (-\infty, \infty)$;

b) $\int_0^\infty e^{-tx} \sin t dt, \quad X = [a, \infty), \quad a > 0$;

c) $\int_0^2 \frac{t^x}{\sqrt{4-t^2}} dt, \quad X = (-\ln 2, 8)$;

d) $\int_1^2 \frac{\operatorname{sgn}(t-x)}{\sqrt{(t-1)(2-t)}} dt, \quad X = (-\infty, \infty)$.

124. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

a) $F(x) = \int_1^\infty \frac{t \sin(t+x)}{1+t^2} dt, \quad x \in (-\infty, \infty)$;

b) $F(x) = \int_0^3 \frac{\sin(tx)}{t\sqrt{3-t}} dt, \quad x \in (-\infty, \infty)$.

125. Kasutades diferentseerimist parameetri a järgi, leidke järgmised integraalid.

a) $I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-ax^2}}{x} dx, \quad a > 0$;

c) $I(a) = \int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} dx$;

b) $I(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx, \quad a > -1$;

d) $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx, \quad a > 0, b > 0$.

126. Leidke järgmised integraalid I , kasutades märgitud valemeid.

a) $I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xt} dt, \quad b > a > 0$;

b) $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2 t^2}$;

c) $I = \int_0^\infty \sin x^2 dx, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-xt^2} dt$.

127. Leidke järgmised integraalid Euleri integraalide abil ($0 < a < 1$).

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x \, dx;$$

$$\text{e) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^9 x \, dx;$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4};$$

$$\text{f) } \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} \, dx;$$

$$\text{c) } \int_0^1 \sqrt{x-x^2} \, dx;$$

$$\text{g) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} \, dx.$$

$$\text{d) } \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2} \, dx;$$

128*. Olgu $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ning $[a, b] \subset (0, \infty)$. Tõestage, et kui

a) funktsioon f on pidevalt diferentseeruv poollõigis $[0, \infty)$;

b) leidub lõplik piirväärtus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: f(\infty)$;

c) integraal $\int_0^{\infty} f'(cx) \, dx$ koondub ühtlaselt lõigis $[a, b]$,

siis kehtib nn. *Frullani valem*

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, dx = (f(\infty) - f(0)) \ln \frac{a}{b}.$$

129*. Olgu $a > 0$. Tõestage järgmine valem:

$$2^{2a} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)} = 2\sqrt{\pi}.$$

Näpunäide: Veenduge, et $B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B\left(\frac{1}{2}, a\right)$.

10. Fourier' read

130. Leidke funktsiooni Fourier' rida lõigis $[-\pi, \pi]$ ja uurige selle koonduvust:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{kui } x \in [-\pi, 0), \\ 0, & \text{kui } x \in [0, \pi]; \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = x;$$

$$\text{b) } f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$\text{f) } f(x) = x^2;$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{\pi - x}{2};$$

$$\text{g) } f(x) = x^3;$$

$$\text{d) } f(x) = |x|;$$

$$\text{h) } f(x) = x^4;$$

$$\text{i) } f(x) = e^x.$$

Näpunäide osade f)–h) juurde. Saab näidata, et kui f Fourier' rida koondub lõigis $[-\pi, \pi]$ keskmiselt funktsiooniks f (see tähendab,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx - f(x) \right) dx \xrightarrow{n} 0),$$

näiteks juhul, kui $f \in L^1[-\pi, \pi]$, siis $\int_0^x f(t) \, dt = \frac{a_0}{2} \cdot x + \sum_n \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{b_n}{n} \right)$ ehk *Fourier' rida võib integreerida liikmeti*. Sealjuures integreerimisel saadud rida koondub **ühtlaselt** lõigis $[-\pi, \pi]$.

Niisiis, kui on teada $f(x) = x$ Fourier' rida, saab integreerides kergesti leida ka $x^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$ ning edasi ka x^3 jne., Fourier' rea.)

131. Arendage antud funktsioon lõigus $[0, \pi]$ koosinusreaks ja uurige rea koonduvust:

a) $f(x) = 1, \quad x \in [0, \pi];$

c) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi].$

b) $f(x) = x, \quad x \in [0, \pi];$

132. Arendage antud funktsioon lõigus $[0, \pi]$ siinusreaks ja uurige rea koonduvust:

a) $f(x) = 1, \quad x \in [0, \pi];$

c) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi].$

b) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, \pi];$

133. Leidke funktsiooni Fourier' rida etteantud intervallis ja uurige selle koonduvust:

a) $f(x) = x, \quad x \in [0, 2\pi];$

c) $f(x) = |x|, \quad x \in [-l, l].$

b) $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2\pi];$

134. Leidke järgmiste ridade summad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$

135*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -perioodiline ja lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev. Olgu

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \text{ funktsiooni } f \text{ Fourier' rea } n\text{-nes osasumma. Olgu}$$

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ Olgu } m, M \in \mathbb{R}. \text{ Tõestage järgmised implikatsioonid:}$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) \geq m \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(x) \geq m;$$

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) \leq M \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_n(x) \leq M.$$

136*. Olgu funktsioonil f pidev tuletisfunktsioon lõigus $[-\pi, \pi]$ (st. $f \in C^1([-\pi, \pi])$). Tõestage, et f Fourier' kordajad a_n ja b_n , kus $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, rahuldavad tingimusi

$$\lim_n n a_n = 0, \quad \lim_n n b_n = 0.$$

Näpunäide: Riemanni lemma.

Märkus. Saab näidata, et kui $f \in C^k([-\pi, \pi])$, see tähendab, k korda pidevalt diferentseeruv, siis $\lim_n n^k a_n = \lim_n n^k b_n = 0$. Niisiis, mida kõrgemat järku pidev tuletis on funktsioonil f , seda

kiiremini hääbuvad tema Fourier' kordajad.

11. Fourier' teisendus

137. Leidke järgmiste integraalide Cauchy peaväärtused. Kas need integraalid koonduvad ka harilike päratute integraalidena?

a) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \, dx$;

b) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

c) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} x \cos x \, dx$;

d) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$;

e) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\arctan x|}{1+x^2} dx$;

f) **v.p.** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$, kus f on paaritu.

138. Leidke järgmiste funktsioonide konvolutsioonid $f * g$, kus

$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) \, dy$.

a) $f = 2\chi_{(-2,2)}$, $g = -3\chi_{(0,1)}$;

c) $f(x) = x\chi_{(0,1)}(x)$, $g(x) = x^2\chi_{(0,1)}(x)$;

b) $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = 2e^{-2x^2}$;

d) $f(x) = \frac{\chi_{(0,5)}(x)}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x\chi_{(0,3)}(x)$.

Näpunäide osa b) juurde: kasutage Euler-Poissoni integraali $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

139. Veenduge, et Fourier' teisendusel on järgmised omadused:

a) $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral;

b) kui $g(x) = f(x)e^{2\pi i a x}$, siis $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$;

c) kui $g(x) = f(x-a)$, siis $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i a y}$;

d) kui $g(x) = f(ax)$, kus $a > 0$, siis $\hat{g}(y) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{y}{a}\right)$;

e) kui f on paarisfunktsioon, siis $\hat{f}$ on paarisfunktsioon;

f) kui f on paaritu funktsioon, siis $\hat{f}$ on paaritu funktsioon;

g) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

140. Leidke järgmiste funktsioonide Fourier' teisendid:

a) $f(x) = e^{-\pi x^2} \cos(6\pi x)$;

f) $f(x) = xe^{-a|x|}$, kus $a > 0$;

b) $f(x) = \chi_{(-2\pi, 2\pi)} \cos(6\pi x)$;

g) $f(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$;

c) $f(x) = e^{-ax} \chi_{(0,\infty)}(x)$, kus $a > 0$;

h) $f(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$, kus $a > 0$ (Diraci δ lähend).

d) $f(x) = e^{-a|x|}$, kus $a > 0$;

e) $f = \chi_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$;

Näpunäide osa a) juurde: kasutage võrdust $\int_0^{\infty} e^{-\pi x^2} \cos ax \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{\pi a^2}{4}}$. (Võrdust saab näiteks tõestada, lähtudes Euler-Poissoni integraalist ja koosinuse Tayloriga reast.)

141*. Leidke funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ Fourier' teisend.

Näpunäide: resiidide teooria.

Vastused ja lahendusvihjed

1. a) näidake, et $K_{\frac{r}{\sqrt{2}}}(\mathbf{A}) \subset U_r(\mathbf{A})$; b) näidake, et $U_{\min\{r_1, r_2\}}(\mathbf{A}) \subset K_{r_1, r_2}(\mathbf{A})$.
Ruumis $\mathbb{R}^m$ näidake, et $K_{\frac{r}{\sqrt{m}}}(\mathbf{A}) \subset U_r(\mathbf{A})$ ning $U_{\min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}}(\mathbf{A}) \subset K_{r_1, r_2, \dots, r_m}(\mathbf{A})$.
2. Sisalduvusest $D \subset U_r(\mathbf{0})$ järelneb D tõkestatus. Vastupidi, olgu D tõkestatud, siis $D \subset U_\rho(\mathbf{A})$ mingi $\rho > 0$ ja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ korral. Tähistage $r = \rho + \|\mathbf{A}\|$.
3. a) (0, 1); b) (1, e); c) ei leidu; d) ei leidu.
4. Viiakse läbi nagu ruumis $\mathbb{R}$, aga absoluutväärtus on asendatud normiga.
5. Leidke iga n jaoks selline $\mathbf{X}^{(n)}$, et $\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\| < \frac{1}{n}$.
6. a) $D = [0, 1]^2$; b) $D = \mathbb{R}^2$; c) $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$; d) $D = [0, 1]^2 \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, t\right) : t \in [0, 1]\right\}$; e) $D = \mathbb{Q}^2 \cup [0, 1]^2$.
7. a) sulundi omadus; b) D isoleeritud punktid ei tule sulundisse $\overline{D^\circ}$; b) kui D on piirkond, siis U rolli sobib D° ; vastupidisel juhul annab $U \subset D$, et $U \subset D^\circ$, millest järelneb vajalik sisalduvus $D \subset \overline{U} \subset \overline{D^\circ}$.
8. a) lahtine, ei ole kinnine, riskülik; b) ei ole lahtine ega kinnine, rõngas; c) kinnine, ei ole lahtine, ringjoon;
9. a) kinnine, ei ole lahtine, tasand; b) kinnine, ei ole lahtine, poolruum; c) kinnine, ei ole lahtine, tasand; d) kinnine, ei ole lahtine, tasand; e) kinnine, ei ole lahtine, paraboolne silinder; f) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline silinder; g) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline paraboloid; h) kinnine, ei ole lahtine, sirge; i) lahtine, ei ole kinnine, kera.
10. a) tasand; b) tasand; c) sfääri ülemine pool; d) koonus; e) sfääri alumine pool; f) paraboolne silinder.
11. $f(y, x) = -f(x, y)$, $f(-x, -y) = f(x, y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = -f(x, y)$, $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
12. a) paralleelsed sirged; b) kontsentrilised ringjooned; c) hüperboolid, mille asümptootideks on nurgapoolitajad; d) hüperboolid, mille asümptootideks on koordinaatteljed; e) kontsentrilised rombid; f) ringjooned, mille keskpunkt asub x -teljel ja mis puutuvad y -telge; g) paralleelsed tasandid; h) kontsentrilised sfäärid; i) sama asümptootilise koonusega pöördhüperboloidid.
13. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; b) $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$; c) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$; d) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{20}\right\}$; e) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$; f) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$; g) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; h) $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$; i) $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{E}\right\}$; j) $D = \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon}}$; k) $D = \sqrt{E}$.
14. a) 0; b) 0; c) $-\infty$; d) a ; e) 2; f) e; g) 0; h) ei leidu; i) ei leidu; j) 0; k) ei leidu; l) 0; m) 0; n) 0; o) ei leidu.
15. Korduvate piiväärtuste jaoks kasutage Heine kriteeriumit.
16. a) jah; b) ei; c) jah; d) jah; e) ei; f) jah; g) ei; h) ei; i) jah.
17. Valige $\varepsilon = f(\mathbf{A})$.
18. Funktsiooni f pidevuse tingimusest tekkinud δ sobib ka f_1 ja f_2 jaoks.
19. Ei.
20. Valige näiteks $\varepsilon = 1$ ning märgake, et $|f(\mathbf{X})| \leq |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| + |f(\mathbf{A})|$.
21. Heine kriteerium (kõige mugavam).
22. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + y \ln(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + x \ln(xy)$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{|y|}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2}$; d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}$; e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y \cos(xy + yz) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (x + z) \cos(xy + yz)$; f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\sin x}{\cos y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos x \tan y}{\cos y}$.
23. Kasutage korduvalt väidet: kui f on lõigus $[a, b]$ pidev ja vahemikus (a, b) dif-v, kusjuures $f'(x) \geq 0$, siis f on kasvav lõigus $[a, b]$.
24. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C(x)$, kus $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on suvaline funktsioon.

28. $f(x, y) = \frac{y^2 \ln x^2}{2} + \frac{x^2 - 1}{2} + \sin y$.

29. $\arctan 4, \arctan 4$.

30. Diferentseeruvuse põhjendab punkti A ümbruses pidevate osatuletiste olemasolu; a) $df(h_1, h_2) = 0$; b) $df(h_1, h_2) = 12h_1 + 8h_2 \ln 2$; c) $df(h_1, h_2) = h_1 + h_2$; d) $df(h_1, h_2) = \frac{h_1}{5} + \frac{h_2}{2}$; e) $df(h_1, h_2, h_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi h_1}{6} + h_2 + h_3 \right)$; f) $df(h_1, h_2, h_3) = -6h_1 + 3h_2 + 2h_3$.

31. P = on pidev, O = on lõplikud osatuletised, D = on diferentseeruv, DD = on kaks korda diferentseeruv; a) P, $\neg O$; b) P, O, $\neg D$; c) P, $\neg O$; d) P, O, D, $\neg DD$; e) $\neg P$, O; f) $\neg P$, O; g) P, O, $\neg D$; h) P, O, D, $\neg DD$; i) P, $\neg O$; j) P, O, D, $\neg DD$; k) P, O, D, $\neg DD$.

32. $\frac{\partial f}{\partial \ell}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})l_2 = \langle \text{grad } f, \ell \rangle$.

33. 5.

34. a) kõrgemale; b) madalamale; c) vektori (8, 9) suunas või vastassuunas.

35. a) $y - z = 0$; b) $x + 2y - z - 1 = 0$; c) $3x + 3y - z = 0$; d) $x + y - z + 1 = 0$; e) $2x + 4y - z - 5 = 0$; f) $4x - 2y - z - 3 = 0$; g) $\frac{\pi}{6}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = 0$.

36. a) jah; b) ei (puutujatasandit ei leidu); c) jah.

37. Kasutage ühe muutuja funktsiooni tuletise vastavaid omadusi.

38. Kasutage ülesannet 37 ning piirväärtuse omadusi.

40. a) $e^{\sin t - \cos t}(\sin t + \cos t)$; b) $\frac{5t^4}{t^5 - 1}$; c) $\sin 2t - 2t \cos 2t$; d) $4t^3 + 2t + 1$; e) $\frac{1 + 4t^3 - 5t^4}{\cos^2(t + t^4 - t^5)}$.

41. a) $3x^2 \sin y \cos^2 y, x^3 \cos^3 y - 2x^3 \sin^2 y \cos y$; b) 0, 0; c) $x^2 \cdot y^x \ln y + 2xy^x, x^3 y^{x-1}$. d) 0, -1; e) $-2x \cos 2y, 2x^2 \sin 2y$.

42. Nii välimine funktsioon kui ka sisemised funktsioonid on diferentseeruvad seoses pidevate osatuletiste olemasoluga; a) $df = (e^{2x} - 2xe^{2x} - 1)dx$; b) $df = (\cos x \cos(2x+1) + \cos(3x+1))dx$; c) $df = 2 \ln(y+1)dx + \frac{2x+1}{y+1}dy$; d) $df = 8x^3 dx + 8y^3 dy$; e) $df = e^{2x-y}((2x^2 + 2xy + 2x + y)dx + (x - xy - x^2)dy)$.

43. Kõik osatuletised on pidevad, vajalikku järku diferentseeruvus on seega olemas, veelgi enam, liit-funktsiooni diferentseerimise reeglite kohaselt on invariantne muutuja vahetuse suhtes, kuna sisemine funktsioon on lineaarfunktsioon; a) $u = x + y + 1, d^4 f = 120u d^4 u$; b) $u = 2x + 3y - 5z, d^6 f = -\cos u d^6 u$.

44. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{0}) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{0}) = 1$; rikutud on segaosatuletiste pidevuse ning osatuletiste diferentseeruvuse nõuded.

45. a) $u(x, y) = C(y) + D(x)$, kus C on diferentseeruv ja D on suvaline funktsioon; b) $u(x, y) = xC(y) + D(y)$, kus C ja D on suvalised funktsioonid.

46. Kasutage osatuletiste lineaarsust.

47. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

48. Arvutage tuletis $f'(x_0 + iy_0)$ konkreetsetes suundades $x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0$ ja $x_0 + iy \rightarrow x_0 + iy_0$, tulemus peab tulema sama. Niisiis selgub, et $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$.

49. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

50. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$, analoogiliselt näidatakse ka v harmoonilisus.

51. a) $v(x, y) = 2xy + C$; b) $v(x, y) = -e^x \cos y + C$.

52. Vahetu $\Delta f = 0$ kontroll.

53. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x, y) = 1 + y - \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{3yx^2 - y^3}{6} +$

$\alpha(x, y)$; b) $f(x, y) = y + yx + \frac{3yx^2 - y^3}{6} + \alpha(x, y)$; c) $f(x, y) = y + yx - \frac{y^2}{2} + \frac{3yx^2 - 3y^2x + 2y^3}{6} + \alpha(x, y)$; d) $f(x, y) = x + y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x, y)$; e) $f(x, y) = x - y^2x + \alpha(x, y)$; f) $f(x, y) = x^2y + \alpha(x, y)$.

54. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim_{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \rightarrow 0} \frac{\alpha(x,y)}{((x-1)^2+(y-1)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x,y) = 1+x+y +$

$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x,y)$; b) $f(x,y) = 1+3x-3y+3y^2-3xy+xy^2-y^3 + \alpha(x,y)$; c) $f(x,y) = -\frac{11}{3} + 3x + 3y - \frac{3x^2+3y^2}{2} + \frac{x^3+y^3}{3} + \alpha(x,y)$.

55. a) 1,06; b) 2,005; c) 8,21; d) 0,005.

56. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{4}$; b) $1 + \frac{m\alpha+n\beta}{4} + \frac{(3m^2-4m)\alpha^2-2mna\beta+(3n^2-4n)\beta^2}{32}$.

58. a) määrab, $f'(0) = 0$; b) ei määrab, sest $\mathbf{A}$ on $\{(x,y): F(x,y) = 0\}$ isoleeritud punkt; c) määrab, $f'(0) = -2$; d) ei määrab, sest $\mathbf{A}$ on $\{(x,y): F(x,y) = 0\}$ isoleeritud punkt; e) määrab, $f'(0) = 0$; f) ei määrab, sest $\{(x,y): F(x,y) = 0\}$ laguneb punkti $\mathbf{A}$ ümbruses kaheks lõikuvaks sirgeks; g) ei määrab, sest $\{(x,y): F(x,y) = 0\}$ laguneb punkti $\mathbf{A}$ ümbruses kaheks lõikuvaks jooneks.

59. a) $f'(x) = \frac{x+f(x)}{x-f(x)}$; b) $f'(x) = \frac{1}{1+\varepsilon \sin f(x)}$; c) $f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$; d) $f'(x) = -\frac{e^x}{\cos f(x)+1}$; e) $f'(x) = \frac{e^{x-f(x)}-1}{e^{x-f(x)}+1}$; f) $f'(x) = -\frac{f(x)}{x+f(x)}$.

60. a) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = -\frac{3}{4}$; b) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{a}{c}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -\frac{b}{c}$; c) määrab, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

61. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$; b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{z}{z+x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{z^2}{xy+yz}$; c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{yz-x}{z-xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xz-y}{z-xy}$; d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{c^2y}{b^2z}$.

62. a) range lok. miinimum punktis $(0,0)$; b) lok. ekstr. puuduvad; c) range lok. maksimum punktis $(-2,-1)$; d) range lok. maksimum punktis $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, lok. maksimum punktis $(0,0)$; e) range lok. miinimum punktis $(0,0)$; f) range lok. miinimum punktis $(1,-1)$, range lok. maksimum punktis $(-1,-1)$; g) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) range lok. maksimum punktis $(1,-1)$.

63. a) range lok. miinimum punktis $(1, -2, \frac{1}{2})$; b) range lok. miinimum punktis $(1, -1, 3)$; c) range lok. miinimum punktis $(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

64. a) range lok. miinimum punktides $(-1,1)$ ja $(1,-1)$, range lok. maksimum punktis $(0,0)$; b) range lok. miinimum punktis $(1,1)$, range lok. maksimum punktis $(-1,1)$; c) range lok. miinimum punktis $(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$; d) range lok. miinimum punktis $(-1,1,0)$.

65. a) range lok. miinimum punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, range lok. maksimum punktis $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$; b) range lok. miinimum punktis $(1,1)$; c) range lok. miinimum punktis $(-1,2,-2)$, range lok. maksimum punktis $(1,-2,2)$; d) range lok. miinimum punktis $(1,1,2)$.

67. Olgu näpunäites antud kõõlmurdjoone pikkus $p(T)$, siis

$$p(T) \geq 2 \cdot \frac{1}{2n} + 2 \cdot \frac{1}{2n-2} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{n} \infty.$$

68. Kaare L suvalise kõõlmurdjoone pikkus ei ületa arvu $K(b-a)$.

69. a) $1 + \sqrt{2}$; b) $2e^a - 2 + \frac{\pi a e^a}{4}$; c) $2\pi a^4$; d) $8a$; e) $8a\pi^3\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{(a^2+2)^3-2\sqrt{2}}}{3}$.

70. a) $\frac{k}{3} \cdot \sqrt{(e^2+1)^3-2\sqrt{2}}$; b) $\frac{4\rho_0}{3}$.

71. Suuna $\Rightarrow$ jaoks kasutage omadust $s(T) = \inf\{\sigma(T, \xi): \xi_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \dots, n\}$ ja analoogilist $S(T)$ jaoks. Suuna $\Leftarrow$ jaoks näidake, et $I^* - I_* = 0$ ning tõestage, et leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $I_* - \varepsilon \leq S(T) - \varepsilon < s(T) \leq \sigma(T, \xi)$, analoogiliselt ka teine pool.

72. Näidake, et $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$, kasutades liitfunktsiooni $f \circ \gamma$ ühtlast pidevust lõigus $[a, b]$.

73. Toimub analoogiliselt Riemanni integraaliga.

74. Toimub analoogiliselt Riemanni integraaliga. Ei.

75. a) a) 1, b) 1, c) 1 (märkus: vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = x^2 y$, pole see juhuslik, et kõik vastused on samad); b) 0 (märkus: vastust on arvutamata lihtne näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = \frac{x^2 + xy - y^2}{2}$); c) -2π ; d) -2 (märkus: vastust on lihtsam näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ ning mingit lihtsamat kõverat **AB**); e) $-\pi$.

76. Kuna joone $\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : t \in [a, b]\}$ puutuja sihivektor on $(\varphi'_1(t), \varphi'_2(t))$, siis $\tau_1(\varphi_1(t)) = \frac{\varphi'_1(t)}{\sqrt{\varphi'^2_1(t) + \varphi'^2_2(t)}}$,

analoogiliselt τ_2 kohta. Niisiis

$$\int_L f \, dx = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi'_1(t) \, dt = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot \tau_1(\varphi_1(t)) \cdot \sqrt{\varphi'^2_1(t) + \varphi'^2_2(t)} \, dt = \int_L f \cdot \tau_1 \, dx,$$

samuti saadakse teine võrdus.

77. $\int_{\partial D} x \, dy = \frac{3\pi ab}{8}$.

78. $\vec{F}(x, y) = (-x, -y)$; tarvis on leida $A = \int_L \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle d\vec{r}$, kus $d\vec{r} = (dx, dy)$; saame, et $A = -14$.

79. $\vec{F}(x, y) = (F, 0)$, seega $A = aF$.

80. a) $F(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2}$, $F(\mathbf{B}) - F(\mathbf{A}) = 4$; b) $F(x, y) = xy$, $F(\mathbf{B}) - F(\mathbf{A}) = 8$; c) $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}$, $F(\mathbf{B}) - F(\mathbf{A}) = 10\frac{1}{6}$; d) $F(x, y) = -\frac{y}{x}$, $F(\mathbf{B}) - F(\mathbf{A}) = -\frac{3}{2}$.

84. a) $\frac{20}{3}$; b) $\frac{27}{4}$; c) $\frac{6}{35}$; d) $\frac{7}{12}$; e) $71\frac{1}{4}$.

85. a) 0; b) $\frac{32}{9}$; c) 4π ; d) 2π ; e) $\frac{\pi}{128}$.

86. a) $\frac{a^2}{8} \cdot (15 - 16 \ln 2)$; b) $\frac{\pi}{4} \cdot (b^2 - a^2)$; c) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$; d) $\frac{(b-a)(\beta-a)}{3}$.

87. $\left(\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}, \frac{\pi}{24-6\pi} \right)$.

88. $\left(\frac{5a}{6}, 0 \right)$.

89. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (lemma 9.1).

90. Näidake, et $S(T) - s(T) = 1$ ristküliku $[0, 1]^2$ iga alajaotuse T korral.

91., 92. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (lemma 9.1).

93. Kui D_1 ja D_2 on nullmõõduliga, siis $\partial D_1 \cup \partial D_2$ on nullmõõduliga. Näidake, et $\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$, $\partial(D_1 \cap D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$ ning $\partial(D_1 \setminus D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$.

94. Teatavasti f graafik sisaldub ristkülikus $R := [a, b] \times [m, M]$. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (lemma 9.1), pidades alajaotuse konstrueerimisel silmas, et f on ühtlaselt pidev lõigul $[a, b]$.

95. Pange tähele, et $\partial U_\delta(\mathbf{A})$ on sile joon (või kahe pideva funktsiooni graafiku ühend). $\mu(U_\delta(\mathbf{A})) = \pi\delta^2$.

96. Kasutage mõõdu aditiivsust lõikumate hulkade jaoks.

97. Pange tähele, et D sisaldab mingit lahtist kera.

98. Kasutage mõõdu monotoonsust ja mõõdu aditiivsust lõikumate hulkade jaoks, esitades $D_1 \cup D_2 = D_1 \cap (D_2 \setminus D_1)$.

99. Kasutage mõõdu monotoonsust ja subaditiivsust koos seostega $D^\circ \subset D \subset \overline{D} = D^\circ \cup \partial D$.

100. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{68}{15}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $4\pi(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$.

101. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$.

102. $\left(\frac{2}{3}, 0, 0 \right)$. (NB! Raskuskese asub väljaspool keha!)

104. a) $(0, 0, 0)$; b) punktid (x, y, z) , kus z on suvaline ja (x, y) on joone $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ iseärane punkt; c) $(0, 0, 0)$.

105. a) $3x + 2y - z - 3 = 0$; b) $2x + \sqrt{3}y - z = 0$; c) $x + y - \sqrt{2} = 0$.

106. Kuna ristkülikuteks (ja äärtes nende osadeks) jaotamine on üks võimalik Δ jaotamise viis tükiti siledade joontega kinnisteks mõõtuvateks osapiirkondadeks ühiste sisepunktideta, siis kahekordne integraal $\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \iint_{\Omega} f \, d\mu$. Kogu Ω ulatuses on C kas positiivne või negatiivne (C on pidev ja nulli ei saa läbida, sest $A = B = 0$). Seega teist liiki pindintegraal $\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = \pm \iint_{\Omega} f \, d\mu$.

Näide: $x = u$, $y = -v$, $z = 0$, kus $(u, v) \in [0, 1] \times [-1, 1]$, siis $C = -1$, aga $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 1$.

107. a) $32\pi\sqrt{29}$; b) $2a^2(\pi - 2)$; c) $4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$.

108. a) π ; b) $\pi h^4 \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right)$; c) $54\sqrt{14}$; d) 0.

109. $2\pi \arctan \frac{c}{a}$.

110. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right)$.

111. a) 0; b) $4\pi a^3$ (vastust on lihtsam leida Ostrogradski valemi abil); c) 3; d) $-\frac{a^4\pi}{2}$; e) $\frac{1}{8}$ (vastust on lihtsam leida Ostrogradski valemi abil); f) 0 (Ostrogradski valem).

112. a) 6; b) $-\frac{4\pi(b^2 - a^2)c}{3} + 2\pi b^2 c$.

113. $\frac{10}{3}$.

114. $\frac{4\pi}{3}$.

115. Tähistame $H(E) = \iiint_E f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, kus E on mõõtuv. Funktsioon $f := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ on pidev punkti $\mathbf{M}$ mingis ümbruses. Kirjutades „tuletis piirkonna järgi“ lause (vt. lause 9.14) läbi kolme muutuja juhtumil, saame, et $\lim_{E \rightarrow \mathbf{M}} \frac{H(E)}{V_E} = f(\mathbf{M})$. Kui aga leiab aset selline üldine koondumine, siis leiab aset ka koondumine, kus kehad E on kõik tükiti sileda rajapinnaga.

116. 5.

118. Näidake, et järgmised kahe muutuja funktsioonid on pidevad märgitud ristkülikutes: a) $f(x, t) = e^{-tx}$ ristkülikus $[0, 1] \times [0, 3]$; b) $f(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin(tx)}{t}, & \text{kui } t \neq 0, \\ x, & \text{kui } t = 0, \end{cases}$ ristkülikus $[-2, 10] \times [-3, 7]$; c) $f(x, t) = \ln \sin(t + x)$ ristkülikus $[0, \frac{\pi}{4}] \times [1, \frac{\pi}{2}]$.

d) Integrand $f(x, t) = \operatorname{sgn}(t - x)$ ei ole pidev ristkülikus $[0, 1] \times [0, 1]$. Ent vahetu arvutamine näitab, et $F(x) = 1 - 2x$.

119. Kontrollige, et a) $f(x, t) = t^2 \cos(tx)$ on pidev näiteks ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 3]$;

b) $f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1+tx)^{\frac{1}{x}}}, & \text{kui } x \neq 0, \\ \frac{1}{1+e^t}, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$ on pidev näiteks ristkülikus $[-1, 1] \times [0, 1]$;

c) $f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \arctan \frac{t}{x-2}, & \text{kui } x > 2, \\ \frac{\pi}{2t}, & \text{kui } x = 2 \end{cases}$ on pidev näiteks ristkülikus $[2, 3] \times [1, e]$.

Vastused: a) 9; b) $\ln \frac{2e}{e+1}$; c) $\frac{\pi}{2}$.

120. Kontrollige, et funktsioonid f ja $\frac{\partial f}{\partial x}$ on pidevad ristkülikus R : a) $f(x, t) = \arctan \frac{t}{x}$, $R = [a, b] \times [0, 1]$, kus $a > 0$ või $b < 0$; b) $f(x, t) = \frac{\cos tx^2}{t}$, $R = [a, b] \times [1, \pi]$, kus $a > 0$ või $b < 0$; c) $f(x, t) = \frac{\cos(tx)}{t}$, $R =$

$[a, b] \times [1, d]$, kus $[1, x^2] \subset [1, d]$, lisaks on $\beta(x) = x^2$ diferentseeruv; d) $f(x, t) = \begin{cases} \frac{\ln(1+tx)}{t}, & \text{kui } t > 0, \\ x, & \text{kui } t = 0, \end{cases}$

$R = [a, b] \times [c, d]$, kus $[0, 2+x] \subset [0, d]$, lisaks on $\beta(x) = 2+x$ diferentseeruv.

Vastused: a) $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$; b) $\frac{2\cos\pi x^2}{x} - \frac{2\cos x^2}{x}$; c) $\frac{3\cos x^3 - \cos x}{x}$; d) $\frac{4(1+x)\ln|1+x|}{x(2+x)}$.

121. a) $1 - \cos 1$; b) e.

122. Kontrollige, et funktsioonid f ja $\frac{\partial f}{\partial a}$ on pidevad ristkülikus R : a) $f(a, x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ -a, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

$R = [-a_1, a_1] \times [0, \pi]$, kus $a_1 \in (0, 1)$; b) $f(a, x) = \begin{cases} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $R = [\alpha, \beta] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, kus $a \in (\alpha, \beta)$;

Tulemused: a) $I'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, millest $I(a) = \pi \arcsin a$ (vt. $a = 0$ integreerimiskonstandi määramiseks);

b) $I'(a) = \frac{\pi}{2(|a|+1)}$, millest $I(a) = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{2} \cdot (\ln(1+|a|))$ (vt. $a = 0$ integreerimiskonstandi määramiseks).

123. Kasutage Weierstrassi tunnust. d): vaja on lisaks põhjendada, miks kahe ühtlaselt koonduva integraali summa on ühtlaselt koonduv.

124. Veenduge, et integrand on pidev kahe muutuja funktsioon; kontrollige integraalide ühtlast koonustumist Abeli, Dirichlet' või Weierstrassi tunnusega.

125. a) integraali enda koondumine näidake eraldi intervallides $[0, 1]$ ja $[1, \infty)$ (lõigus $[0, 1]$ on Riemanni integraal, punktis $x = 0$ on parempoolne kõrvaldatav katkevus), osatuletise integraal on esitatav samuti kujul $\int_0^1 + \int_1^\infty$, kus esimene liidetav on Riemanni integraal ja teine koondub ühtlaselt tänu Weierstrassi tunnusele; saame, et $I'(a) = \frac{1}{2a}$, millest $I(a) = \frac{\ln|a|}{2}$; b) lahendusvõtted analoogilised eelnevaga, $I'(a) = \frac{1}{a+1}$, millest $I(a) = \ln(a+1)$; c) lõigus $[0, \frac{1}{2}]$ on tegu Riemanni integraaliga (punktis $x = 0$ parempoolne kõrvaldatav katkevus), lõigus $[\frac{1}{2}, 1]$ koonduva päratu integraaliga, osatuletise integraali ühtlase koonduvuse saab kontrollida Weierstrassi tunnusega; saame, et $I'(a) = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$, millest

$I(a) = \frac{\pi \operatorname{arsh} a}{2} = \frac{\pi \ln(a + \sqrt{a^2+1})}{2}$; d) fikseerime b ; integraali enda koondumine näidake eraldi intervallides $[0, 1]$ ja $[1, \infty)$ (lõigus $[0, 1]$ on Riemanni integraal, punktis $x = 0$ on parempoolne kõrvaldatav katkevus), osatuletise integraal on esitatav samuti kujul $\int_0^1 + \int_1^\infty$, kus esimene liidetav on Riemanni integraal ja teine koondub ühtlaselt tänu Weierstrassi tunnusele; saame, et $\frac{\partial I}{\partial a}(a, b) = \frac{\pi}{2a}$, millest $I(a, b) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}$.

126. Vajalikud ühtlased koondumised näidake Weierstrassi tunnuse abil; a) $\ln \frac{b}{a}$; b) $I = \frac{\pi \operatorname{arsh} 1}{2} = \frac{\pi \ln(1+\sqrt{2})}{2}$; c) $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

127. a) $\frac{3\pi}{512}$; b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{\pi}{8}$; d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; e) $\frac{1}{560}$; f) π ; g) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

130. a) $S(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{2k-1} \sin(2k-1)x$, $S(-\pi) = 0$, mujal $S(x) = f(x)$; b) $S(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$, $S(-\pi) = S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = \operatorname{sgn} x$; c) $S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k} \sin k\pi$, $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2}$, mujal $S(x) = \frac{\pi-x}{2}$; d) $S(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$, $S(x) = |x|$; e) $S(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{2(-1)^k}{k} \sin kx$, $S(-\pi) = S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = x$; f) $S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx$, $S(x) = x^2$;

g) $S(x) = -\sum_{k=1}^\infty \frac{2(\pi^2 k^2 - 6) \cdot (-1)^k}{k^3} \sin kx$, $S(-\pi) = S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = x^3$; h) $S(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^\infty \frac{8(\pi^2 k^2 - 6) \cdot (-1)^k}{k^4} \cos kx$, $S(x) = x^4$; i) $S(x) = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{2(-1)^k}{k^2+1} \cos kx - \frac{2k(-1)^k}{k^2+1} \sin kx\right)$, $S(-\pi) = S(\pi) = \operatorname{ch} \pi$, mujal $S(x) = e^x$.

131. a) $S(x) = 1$; b) $S(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$, $S(x) = x$; c) $S(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos 2kx$, $S(x) = \sin x$.

132. a) $S(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$, $S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = x$; b) $S(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{\pi k^3} \cdot ((2-\pi^2 k^2)(-1)^k - 2) \cdot \sin kx$, $S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = x^2$; c) $S(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k} \sin 2kx$, $S(0) = S(\pi) = 0$, mujal $S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.

133. a) $S(x) = \pi - \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k} \sin kx$, $S(0) = S(2\pi) = \pi$, mujal $S(x) = x$; b) $S(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^\infty \frac{4}{k^2} \cos kx - \frac{4\pi}{k} \sin kx$, $S(0) = S(2\pi) = \frac{\pi^2}{2}$, mujal $S(x) = x^2$; c) $S(x) = \frac{l}{2} - \sum_{k=1}^\infty \frac{4l}{\pi^2(2k-1)^2} \cos(2k-1)x$, $S(x) = |x|$.

134. a) $\frac{\pi^2}{12}$ (kasutage $f(x) = x$ arendist); b) $\frac{\pi}{8}$ (kasutage $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ arendist); c) $\frac{1}{2}$ (Fourier' ridu pole

vaja, kuna $S_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)}$); d) $\frac{\pi^3}{32}$ (kasutage $f(x) = x^3$ arendist).

137. a) 0, ei; b) π , jah; c) 0, ei; d) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, jah; e) $\frac{\pi^2}{4}$, jah; f) 0, üldiselt mitte.

$$138. a) (f * g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 2 \text{ või } x \geq 3, \\ -6x - 12, & \text{kui } x \in (-2, -1), \\ -6, & \text{kui } x \in [-1, 2], \\ 6x - 18, & \text{kui } x \in (2, 3); \end{cases} \quad b) (f * g)(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} e^{-\frac{2x^2}{3}};$$

$$c) (f * g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 0 \text{ või } x \geq 2, \\ \frac{x^4}{12}, & \text{kui } x \in (0, 1], \\ \frac{-x^4 + 6x^2 - 4x}{12}, & \text{kui } x \in (1, 2); \end{cases}$$

$$d) (f * g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 0 \text{ või } x \geq 8, \\ \frac{4x\sqrt{x}}{3}, & \text{kui } x \in (0, 3), \\ \frac{4x\sqrt{x} - (4x+6)\sqrt{x-3}}{3}, & \text{kui } x \in [3, 5], \\ \frac{-(4x+6)\sqrt{x-3} + 6x\sqrt{5} - 10\sqrt{5}}{3}, & \text{kui } x \in (5, 8); \end{cases}$$

139. a)–f) järelduvad vahetult päratute integraalide vastavatest omadustest (tuleb sealjuures võtta arvesse, et väärtused on kompleksed!); omaduse g) tõestamiseks tuleb muuta integreerimise järjekorda $x - y =: u$, mida tohib teha seoses integraalide ühtlase koondumisega.

$$140. a) \frac{1}{2} e^{-\pi(y-3)^2} + \frac{1}{2} e^{-\pi(y+3)^2}; b) \frac{(y-3)\sin(4\pi^2 y + 12\pi^2) + (y+3)\sin(4\pi^2 - 12\pi^2)}{2\pi y^2 - 18\pi}; c) \frac{a - 2i\pi y}{a^2 + 4\pi^2 y^2}; d) \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 y^2}; e) \frac{\sin \pi y}{\pi y}; f) -\frac{8i\pi a y}{(a^2 + 4\pi^2 y^2)^2}; g) \frac{1 - \cos 2\pi y}{2\pi^2 y^2}; h) e^{-\pi^2 a^2 y^2}.$$