15. Mittelineaarsed mudelid ja kaos

Mõiste **kaos** pärineb Vana-Kreeka mütoloogiast, kus tähendas tühjust enne maailma loomist. Meil on kaos määramatuse (korralageduse) sünonüüm. Ühest teaduslikku definitsiooni kaosel ei olegi. Ü. Lepiku ja J. Engelbrechti "Kaoseraamat" annab vastuseks: "Ebaregulaarne liikumine, mis on tingitud süsteemi mittelineaarsest iseloomust. Kaootilise liikumise korral ei taga igakülgne determineeritus mudelis ennustatavust lahendis." (osa “Kaoseraamatust” on loengumaterjalide hulgas)

15.1 Kaos ökoloogias – Verhulsti mudel

Lihtsaim mudel populatsiooni arvukuse kirjeldamiseks on antud juba 1845. a **Verhulst**'i poolt .

$\boldsymbol{x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)}$

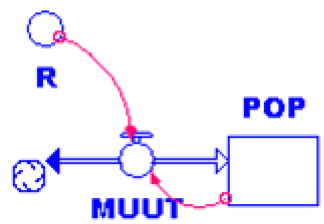
Seda valemit nimetatakse ka **logistiliseks võrrandiks**. Siin $\boldsymbol{x_n}$ on arvukus hetkel $\boldsymbol{t}$ ja $\boldsymbol{x_{n+1}}$ arvukus hetkel $\boldsymbol{t + dt}$. Kasutatakse taandatud populatsiooni, jagatakse maksimaalse populatsiooniga, ehk $\boldsymbol{x}$ on nn dimensioonita suurus (antud juhul dimensioonita populatsioon) lõigus $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$.

Andes ette $\boldsymbol{x_0}$ ja $\boldsymbol{r}$ saame arvutada populatsiooni igal järgneval ajahetkel. Kui $\boldsymbol{r}$ on küllalt väike, sureb populatsioon välja (ehk koondub $\boldsymbol{0}$). Kui $\boldsymbol{r}$ on pisut suurem, aga $\boldsymbol{r < 3}$, siis toimub koondumine nullist erineva populatsiooni arvu juures.

Kui aga $\boldsymbol{3 < r < 3.45}$, siis toimub võnkumine kahe tasakaalupunkti vahel – punktis $\boldsymbol{r = 3}$ toimus bifurkatsioon. Väärtuse $\boldsymbol{r = 3.45}$ juures toimub järgmine bifurkatsioon, periood pikeneb jälle 2 korda ja nüüd toimub võnkumine 4 väärtuse vahel.

Järgnevad bifurkatsioonid toimuvad $\boldsymbol{r_3 = 3.54}$ ja $\boldsymbol{r_4 = 3.56}$; $\boldsymbol{r > 3.57}$ korral muutub protsess kaootiliseks.

$\boldsymbol{\Delta x = x_{n+1} - x_n = r \cdot x_n(1 - x_n) - x_n = x_n(r - 1) - rx_n^2}$



Ülesanne. Koostada mudel logistilisest võrrandist, kus juhtimiseks on muut ja populatsiooni arv alghetkel on $\boldsymbol{0.1}$ (populatsiooni tihedus), parameetri $\boldsymbol{r}$ väärtuseks **3.55**.
Teha graafik populatsiooni muutusest aja jooksul.
Kasutada **Euleri** meetodit sammuga $\boldsymbol{1}$.
Simulatsiooni pikkus algul $\boldsymbol{50}$ või $\boldsymbol{100}$.
Muuta $\boldsymbol{R}$ väärtusi, kasutades tundlikkuse analüüsi.

$\boldsymbol{R = 0.5, R = 2.5, R = 3, R = 3.45, R = 3.54, R = 3.56, R = 3.58}$

Kujutada graafikul populatsiooni muutumist **tundlikkuse analüüsis** antud parameetrite korral.

15.2 Lorenzi kaos

Kaose isaks peetakse Edward Lorenz’it, tegeles konvektsiooni uurimisega. Soojendati õhukest vedelikukihti altpoolt. Kindla temperatuuri juures algas vedeliku konvektiivne liikumine ja tekkisid keerised. Diferentsiaalvõrrandite süsteem on komplitseeritud. Lorenz lihtsustas DVS, et saada numbrilisi tulemusi.

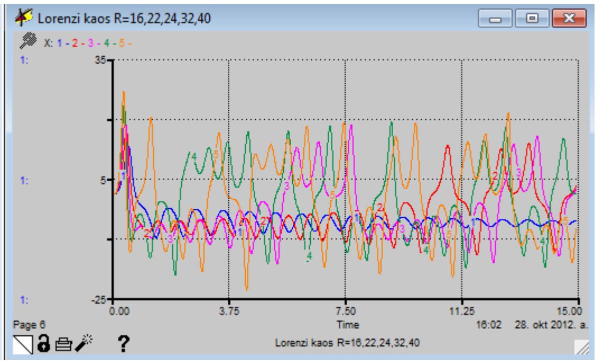
Ülesanne. Koostada Lorenzi kaose mudel, kasutades järgmist süsteemi.

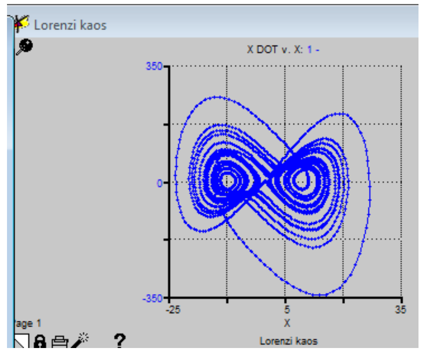
$$\boldsymbol{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = (R - z)x - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - Bz \end{cases}}$$

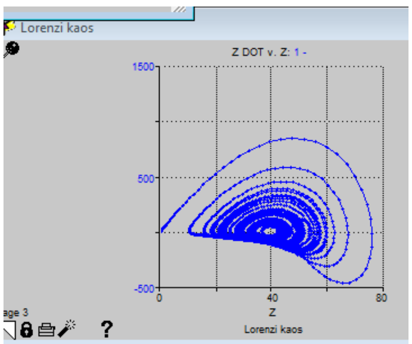
$\boldsymbol{P = 10;\ \ B = \frac{8}{3};\ \ R = 40}$

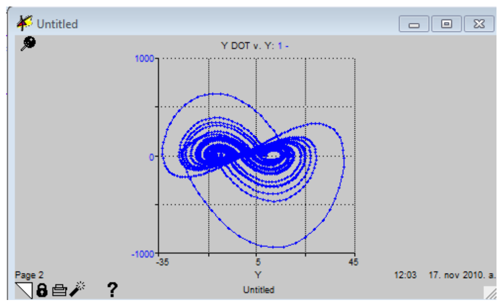
$\boldsymbol{x(0) = 1;\ \ y(0) = 1;\ \ z(0) = 0}$

Mudel tööaeg muutub kuni ajani **15** sammuga **0.005**, kasutada **Euleri** meetodit. Kujutada **graafikul** kõikide põhimuutujate muutumist ajas, kahemõõtmelises teljestikus kujutada kõikide põhimuutujate ja nende tuletistele vastavaid jooni. Lisada mudelisse **tekstipiirkond** mudeli nimetusega ja parameetri R väärtusega. Kasutades **tundlikkuse analüüsi**, muuta parameetri $\boldsymbol{R}$ väärtusi järgnevalt: $\boldsymbol{R = 16, 22, 28, 34, 40.}$ Kujutada vastavad jooned ühe põhimuutuja jaoks graafikul.









Ülesanne.

Täiendada **Verhulst**i mudelit (15.1), **lisades juhtimismuutuja**, mis leiab populatsiooni jaoks ka **eelmise väärtuse**, ning teha kahemõõtmelises teljestikus **graafik** populatsioonist ja tema eelmisest väärtusest. Kasutada parameetrit $\boldsymbol{R}$ väärtusega $\boldsymbol{R = 4}$ (selle väärtuse korral on juba tegemist kaosega). **Lisada** eraldiasetsev (ei ole antud mudeli teiste muutujatega seotud) **juhtimismuutuja** vabalt valitud nimega, mis annab **juhusliku suuruse** 0 ja 1 vahel, ning **lisada** ka selle muutuja jaoks **eelmist väärtust** sisaldav uus juhtimismuutuja. Teha nende muutujate jaoks sarnane kahemõõtmelises teljestikus asetsev **graafik**. Mudelisse lisada **tekstipiirkond**, kuhu lisada lühike mudeli kirjeldus ja järeldused juhuslikkuse ja kaose korral tehtud graafikute kuju kohta.