MTMM.00.250

Matemaatilise modelleerimise alused 3 EAP

Auditoorne töö: loenguid 1 tund nädalas, praktikume 2 tundi nädalas (14 nädalat)

Kursuse käigus omandatakse modelleerimise algtõed, modelleerime mitmeid bioloogilisi ja füüsikalisi protsesse, saame algteadmisi programmipakettide Stella, Mathcad ja Arena kohta. Praktikumides tutvume erinevate mudelitega, täiendame neid ja koostame uusi mudeleid.

Kirjandus:
"Dynamic modelling", Bruce Hannon, Matthias Ruth, 1994.
"How to Model it", Starfield, Smith, Beloch, 1990.
"Kaoseraamat", Ü. Lepik, J. Engelbrecht, 1999.
Esimene neist on meie kursuse ülesehituse aluseks. Kuna kursuses vaadeldakse ka juhuslikke protsesse, tutvutakse modelleerimisel ka tõenäosusteooria mõningate mõistetega. Käsitletakse ka kaosele viivaid süsteeme.

Sissejuhatus

Mis on mudel, modelleerimine, milleks neid vaja on?

Iga päev tuleb meil vastu võtta kümneid või isegi sadu otsuseid. Need ei pea olema strateegilised (pensionifondi, kooli või eriala valik) otsused vaid ka lihtsalt mida õhtul teha (minna kinno, kõrtsi või remontida korterit), mida süüa osta, milline jalgratas (vihmavari vm) osta jne. Otsuste vastuvõtmiseks on kaks põhimõtteliselt erinevat teed:
1. juhuslik valik (kull/kiri, nn KATSE-EKSITUSE meetod);
2. argumenteeritud valik.

Paljudesse olukordadesse (sotsiaalsete, bioloogiliste ja ökoloogiliste probleemide lahendamiseks) esimene valik, nn katse eksituse meetod ei sobi, sest võib viia katastroofini või võtab liiga palju aega. Lihtsam on eksperimenteerida mudelitega.

Seega me valime teise tee. Selleks on vaja maailma asjadest aru saada, meid huvitavaid protsesse mõista, nende arengut ette näha ja seda oskuslikult kasutada. Siit saavadki tähenduse mõised.

Mudel on meie arusaam sellest, kuidas miski toimub (kuidas mingid protsessid toimuvad).

Mudelid võimaldavad mõista reaalelu probleeme imiteerides tegelikke protsesse lihtsustatult.
Tegelikult tuleb ülesannete lahendamisel alati eelistada täpseid lahendeid, kuid kahjuks see enamasti ei õnnestu, seda eriti loodusteaduslike ja üldse rakenduslike protsesside uurimisel.

Eesti ilmauurija Heino Tooming kirjutab (Horisont nr 4 /2005):
1. Teame, et maailm on ühtne ja keeruline ning suur on ahvatlus mõista looduse mitmekesisust (ja sellest kasu saada).
2. Seni on teadus valdavalt püüdnud lahutada maailma koostisosadeks, et selle kaudu uurida looduse olemust.
3. Kuid terviksüsteemidel on omadusi, mis puuduvad looduse osistel ja ilmnevad alles siis, kui üksikelemendid ühinevad süsteemideks.

Modelleerimine on teadus mudelite koostamisest ja analüüsist.
Täiendades: **matemaatiline mudel on mudel, mis on koostatud kasutades matemaatilisi kontseptsioone (nagu funktsioonid, võrrandid, võrratused jm).**

Eelneva põhjal mõistame, et oleme modelleerimisega juba ammu kokku puutunud. Näiteks õhtuid planeerides, kui minna teatud peole, siis enne hommikut koju ei jõua ja edasi homme ei ole mingit tööisu, ka koolifüüsika kirjeldab paljusid mudeleid (keha liikumine raskusjõu või vedru mõjul), busside sõiduplaan on busside liikumise mudel. Modelleerimist kasutatakse kõikidel elualadel: bioloogias, arstiteaduses, majandusteaduses, ökoloogias jm, enamasti märkamatult kasutame seda ka igapäevaelus.

Modelleerimise **erinevus** puhtast matemaatikast – erinevad inimesed mõistavad samu protsesse erinevalt (näiteks erinevad börsimaaklerid aktsiaturgude käitumist), pole olemas analüütilist lõplikku lahendit, lahend pole ühene.
Töö käigus leitakse ligikaudne lahend, mudelit täiustatakse/parandatakse ja mängitakse kõik jälle läbi.
Nagu märkisid ökoloog Garrett Hardin ja füüsik Heinz Pagels – süsteemide funktsioneerimisest arusaamine (ehk modelleerimine) peaks olema kolmas osa üldharidusest:
1. lugemine ja kirjutamine
2. numbrid ja arvutamine
3. süsteemide funktsioneerimisest arusaamine.

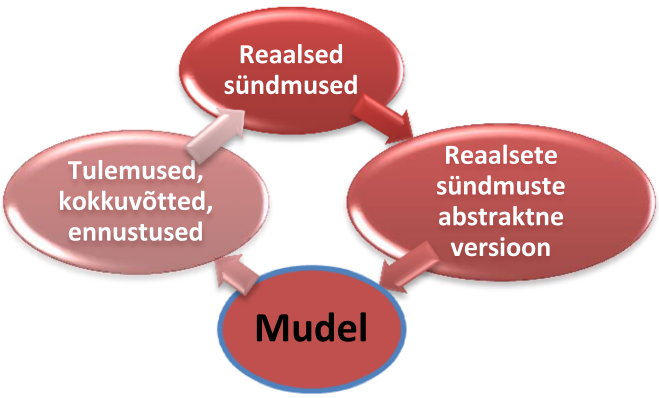
Samuti võib võrrelda modelleerimist teksülesande lahendamisega. Tekstülesande lahendamise esimese etapis tuleb erineval kujul antud andmetest selekteerida vajalikud, koostada nende vahelised seosed, sama modelleerimisel.

1. Mudelite tüübid, mudeli põhikomponendid, mõisteid

Tüüpideks jaotatakse mudeleid mitmeti, kuid kirjeldatava protsessi järgi on kaht põhilist tüüpi mudeleid:
1. Mingit nähtust antud ajahetkel kirjeldav mudel (nn STAATILINE mudel);
2. Protsessi mudel kirjeldab muutusi reaalses või simuleeritud ajas (nn DÜNAAMILINE mudel).

Esimese tüübi näiteks on busside sõiduplaan, Eesti kaart jne, neid mudeleid läheb vaja antud olukorras mingi otsuse vastuvõtmiseks (näiteks: milline jalgratas osta).
Teise tüübi näiteks on migratsioon, populatsioon, reostus, aktsiahind, seda tüüpi mudelite eesmärgiks on välja tuua mitmeid erinevaid tulevikke dünaamilistele protsessidele.
Selles kursuses töötame peaaegu ainult teist tüüpi mudelitega, nende modelleerimine pole mõeldav ilma arvutita. Edaspidi jagame teist tüüpi mudelid veel omakorda eri tüüpideks.

Modelleerimise etapid:



Kui esimene ring on läbitud võrreldakse mudeli tulemust reaalsusega, täiendatakse/korrigeeritakse mudelit ja minnakse uuele ringile.

Mudeli koostamise põhimõtted:
1. fikseerime protsessi võtmeelemendid ja vaatlustulemused;
2. määrame põhimuutujad abstraktse versiooni koostamiseks;
3. määrame seosed põhimuutujate vahel;
4 käivitame mudeli.

Vaatleme tulemusi.

Modelleerimine on lõputu protsess, me võrdleme saadud tulemusi tegelikkusega, parandame ja täiendame mudelit, käivitame uuesti jne. Kui mudel on simuleeritud arvutiga, siis on iga mudeli element määratud algtingimustega ja arvuti leiab vastuseid probleemidele vastavalt elementide vahel määratud seostele.

2. Subjektiivsuse formaliseerimine staatilises mudelis

Vaatleme ühte näidet staatilisest mudelist. Olgu meil vaja koostada mudel näiteks muruniiduki ostmiseks.
Sõelale on jäänud kolm niidukit:
A- odav, supermarketis müüdav ilma rohukogurita miinimumvõimsusega mudel.
B- natuke kallim aiatehnikat müüvas ja remontivas poes, samuti ilma rohukogurita ja miinimumvõimsusega.
C- kallis rohukoguriga võimas isevedav mudel aiatehnika kaupluses.

Esiteks valime kriteeriumid (põhimuutujate asemel), mida pidada antud otsustuse korral oluliseks, näiteks: hind, funktsionaalsus (multsimine, rohukogumine), garantiitingimused, võimsus (niitmislaius jm). Koostame nende tähtsuse suhtes üksteisesse risttabeli **Saaty skaala järgi**:

Tähtsusnivoo	**Selgitus**
1	Võrdselt tähtsad
3	Natuke parem
5	Oluliselt parem
7	Väga tugevalt parem
9	Ekstreemselt parem

Ühest suurem arv näitab, et rida (ehk vastav omadus) on tähtsam, kui veeruomadus ja vastupidi. Saame järgmise tabeli:

	Hind	**Funkts**	**Garantii**	**Võimsus**	**Geom keskm**	**Norm kaal**
Hind	1	3	2	2	1,8612097	0,42875
Funkts	0,3333	1	0,5	1	0,6389431	0,14719
Garantii	0,5	2	1	1	1	0,23036
Võimsus	0,5	1	1	1	0,8408964	0,19371
				summa	4,3410492	1

Leiame saadud tabeli iga rea geomeetrilise keskmise ja normeerime need (jagame kogusummaga). Oleme leidnud kriteeriumide olulisuse, näiteks praegusel juhul määrab hind 43%, garantiitingimused 23%, võimsus 19% ja funktsionaalsus 15% otsusest.
Märkus: Kui mõne kriteeriumi kaal jääb väikseks (5%) võime ta kõrvale jätta või asendada mõne teisega. Analoogselt, kui üks kriteerium on ülivõimas (üle 60 %) võime tabeli veel kord üle vaadata, kas hinnangud on ikka reaalsed.

Järgmiseks olgu meil valida 3 toote (tegevuse) vahel, koostame iga kriteeriumi kohta toodete hinnangute risttabelid, kus leiame jällegi ridade geomeetrilised keskmised ja normeerime nad.
Hinnakriteerium andis valikutele järgmise tabeli:

Hind	A	B	C	**Geom keskm**	**Norm kaal**
A	1	3	7	2,75892	0,6329909
B	0,3333	1	7	1,32635	0,3043103
C	0,1429	0,14286	1	0,27328	0,0626988
			Summa	4,35855	1

Lõpuks koostame valikute kohta tabeli kuhu koondame lõpphinded, liidame need ja saame koguhinde. Näiteks toote A hinnang = hinna olulisus (kriteeriumide tabelist 0.43)*toote A hinnaväärtus (HIND tabelist 0.63) + funkts olulisus*toote A funktsionaalsusväärtus + ...

Parim valik sai kõige kõrgema hinde.
Kui tundub, et tulemus pole loogiline tuleb analoogiliselt dünaamiliste mudelitega mudel üle vaadata ja muuta kriteeriume või vaadata üle tähtsushinnangud.

3. Modelleerimise printsiibid

Mudeli koostamine on mõistlik jagada järgmisteks osadeks:

1. Probleemi püstitamine, mudeli eesmärgid. Suurem süsteem tuleb jagada alammudeliteks;
2. Määrame põhimuutujad, märgi ühikud; hoida lihtsust (põhimuutujaid mõõdukalt).
3. Vali juhtimismuutujad; hoia lihtsust (arvesta ainult peamisi arenguid).
4. Määra juhtimismuutujate parameetrid (ühikutega).
5. Hinda mudelit võimalike vastuolude mõttes. Vajadusel kasuta lisakitsendusi.
6. Määra mudeli tööaeg ja ajasamm.
7. Käivita mudel, testi ajasammu – muuda viimast senikaua 2 korda väiksemaks kuni tulemused ei erine oluliselt.
8. Varieeri parameetreid ekstreemsete väärtusteni, täiusta mudelit.
9. Võimalusel võrdle tulemust eksperimendiga.
10. Muuda parameetreid ja ka mudelit, et saada suuremat kompleksust ja vähendada erinevusi eksperimentaalsete tulemustega.

Püstita uus küsimuste/ probleemide hulk, korrata 1.-10.

Modelleerimisel on 3 põhilist **kasutusala**:

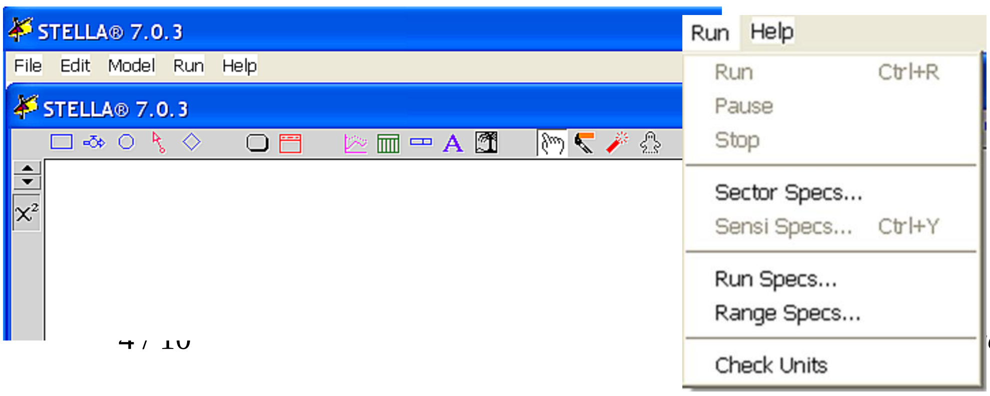
1. Hea mudel lubab varieerida komponente ja näha selle mõju ülejäänud süsteemile.
2. Hea mudel lubab ennustada dünaamilise süsteemi (protsessi) tulevikku.
3. Hea mudel stimuleerib järgmisi küsimusi süsteemi käitumise kohta ja avastatud printsiipide rakendatavusest teiste süsteemide modelleerimisel.

4. Modelleerimine Stella abil

Mudeli elementide põhitüübid:
1. **Põhimuutujad** (energia, populatsioon, hind, temperatuur ...); (STOCK)
2. **Juhtimised** – elemendid, mis kirjeldavad põhimuutujate muutumist. Kui mudel töötab ajas, siis nad muudavad põhimuutujaid iga ajasammu järel. (FLOW)
3. **Juhtimismuutujad** (CONVERTER)
4. **Viitmuutujad** (ACTION CONNECTOR)

Märkused mudelite koostamise kohta:

- Kui mõne muutuja aken ei näe välja nagu harjunud olete, vaadake, kas vasakul servas on gloobusega nupp ja vajutage seda.
- Kui mudelis on kasvõi üksainus "**?**" (viitab veale) ei saa seda käivitada, tuleb viga parandada. Ka peale välise vea kõrvaldamist tuleb korraks veel mudelisse sisse minna ja OK väljuda (näiteks oli kasutamata viit).
- Enne, kui saate anda graafilist seost peate märkima argumendi. Andes graafilist seost järgige tähelepanelikult nii argumendi kui muutuja skaalat. Kui graafiliselt seoselt tagasi võrrandile või väärtusele minna tuleb graafik kustutada.
- Mitte unustada simulatsiooni aega ja ajasammu vastavusse viia (**Run - Specs**).

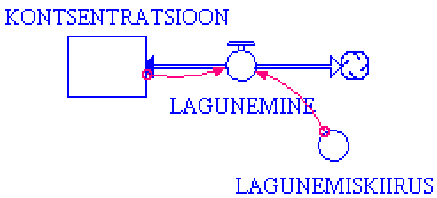


5. Mudelite tüübid

1. **Mõjutuse(stiimuli)–vastavuse mudel** (stimulus-response model). Siin on näiteks populatsiooni juurdekasvu arvutamine sõltumatu põhimuutujatest.
2. **Iseendale viitav mudel** (self-referencing model). Näiteks populatsiooni tase mõjutab oma kasvu määra.
3. **Eesmärki otsiv mudel** (goal seeking model). Näiteks on lõpppopulatsioon üheselt määratud eesmärk, mida otsime.
4. **Eesmärki seadev mudel** (goal setting model). Näiteks püütakse määrata populatsiooni tihedust välismõjude korral. Keerukaim neljast.

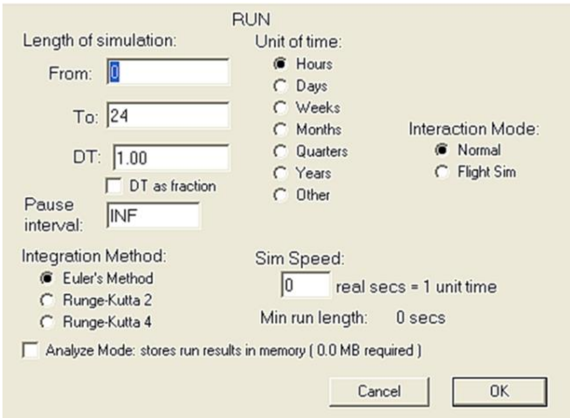
6. Ajasammu valik ja selle mõju tulemustele

Ajasammu (**DT**) saab määrata aknast, mis avaneb **Run - Run Specs**, jälgime ka numbrilise integreerimismeetodi valikut – seekord võtame “**Euler**”.
Vaatame selle mõju näitemudelil, mis kirjeldab aine lagunemist: (tähelepanu tuleks pöörata sellele, et kontsentratsioon väheneb igal ajasammul, seega juhtimine peab olema suunatud väljapoole)



KONTSENTRATSIOON = 100 (algkontsentratsioon)
LAGUNEMISKIIRUS = 0.1733 (st ühes ajaühikus laguneb 17,33 % ainest)
LAGUNEMINE= LAGUNEMISKIIRUS * KONTSENTRATSIOON
Run Specs menüüst valida simulatsiooni pikkus **To** = **24**. Joonisele 0.00 täpsus

Aine lõppkontsentratsiooni sõltuvus ajasammust ja arvutusmeetodist	Euler	R-K 2	R-K 4
0,005	1,56		
0,01	1,56		
0,02	1,55		
0,03125	1,54		
0,0625	1.53		
0,125	1,49	1,562	
0,25	1,42	1,564	1,562
0,5	1,29		1,562
1	1,04		



Siit järeldub, et Euleri meetodi korral on sobiv samm 1/100.
Ärgem unustagem, et tegelikus elus on vastav protsess pidev, st $\Delta T \to 0$.
Märkus: samm sõltub integreerimismeetodi valikust ja Euleri meetod nõuab vähimat sammu.

Millest erinevused tingitud on – vaatame lihtsat pangaprotsendi arvutamist 1 aasta jooksul, olgu intress 12 % aastas ehk 1 % kuus. Kui DT = 1 aasta (ehk intressi makstakse 1 kord aastas) on lõpphoius 1,12 esialgset hoiust.
Kui DT = 3 kuud (ehk intressi makstakse kolme kuu tagant), siis 1.12550881 alghoiust ja DT = 1 kuu, siis 1.12683 alghoiust; erinevus suureneb perioodi pikenedes eksponentsiaalselt.

7. Mudeli järkjärguline arendamine

Industrialiseerimise mudel lihtsa agraarühiskonna korral.

7.1 Algus

Kirjeldame esialgu protsessi ja mudeli osi, mis protsessi mõjutavad. Algul arvestame ainult põhilisi juhtivaid jõude, kui need modelleeritud, siis järkjärgult detaile.
Vaatame agraarühiskonda (10 isendit) ühikpindalaga saarel, toit kontrollib populatsioonitaset. Arukamad liikmed mõistavad, et toiduvarud lõppevad ja eeldame, et ühiskond hakkab seemneid külvama/istutama. Hiljem leitakse, et tööriistadega saab kergemini toota ja tekivad tööstused. Toimub industrialiseerimine.
Kuidas modelleerida majanduse tsiviliseerumist? Võtame kasutusele põhimuutuja "populatsioon", mida kontrollib sissevool "sünnid".
"Sünnimäär"- uute inimeste arv olemasolevate kohta, sõltub populatsiooni tihedusest. Olgu maksimaalseks elanike tiheduseks 200, samuti olgu ilma ruumiprobleemideta sündivus 0.1 (näiteks antropoloogid määrasid). Kuna saare suurus on üks ühik, siis tihedus ja populatsioon on samad (erinevad ühikud).
Ajasammuks määrame 1 ja simulatsiooni pikkuseks 100. Koostame mudeli ja paneme tööle.

7.2 Varudel põhineva toidu kasutamise mõju populatsiooni kasvule.

Lisame eelmisele mudelile väljavoolu "surmad", mida kontrollib "suremus". Viimast reguleerime söödava toidu hulgaga inimese kohta. Uueks põhimuutujaks „toit“, millel väljavool „süüakse“.
Toiduvarud etteantud (1000 kg) ja vähenevad monotoonselt.

7.3 Põllumajanduse lisamine mudelisse.

Eeldame, et pool populatsiooni suudab toitu toota, põllumaa on fikseeritud. Majandusteadlased leidsid seose "toidu toodang"$= A \cdot põllumehed\verb|^|alfa$, parameetrid $A = 5, alfa = 0.3$, $põllumehed = 1/2 \cdot populatsioon$. Mudel muutub järjest suuremaks, keerukamaks ja vähem loetavamaks. Et vältida joonte lõikumist ja parandada mudeli loetavust kasutame vaime.

7.4 Tööstuse lisamine mudelisse.

Täiendame oma tootmisfunktsiooni lisades tööriistade tootmise kui sisendi põllumajanduslikku tootmisse. Põllumajanduse ja tööriistade tootmise vahel tuleb leida optimaalne vahekord (mis on defineeritud kui maksimaalne toidu tootmine inimese kohta). Enne mudeli käivitamist tuleks prognoosida toidu ja populatsiooni kõverad. Tuleb leida tööjõu jaotus tööstuse ja põllumajanduse vahel nii, et populatsioon ei väheneks kunagi ja saavutaks lõpptaseme.
Mudel on keeruline ja on mitmeid tagasimõjuprotsesse, mille tugevus sõltub valitud parameetrite väärtustest. Seega on põhjust uurida mudeli tundlikkust muutes parameetrite väärtusi.

8. STELLA poolt kasutatavad numbrilised meetodid

Diferentsiaalvõrrand (DV) on võrrand, mis seob otsitavat funktsiooni, tema tuletisi ja argumenti.
Kuid mitte alati ei õnnestu diferentsiaalvõrrandit analüütiliselt lahendada (ehk ei õnnestu leida otsitavat funktsiooni). Siiski on võimalik lahendada diferentsiaalvõrrandit numbriliselt , st leida otsitava funktsiooni väärtused teatud punktides.

Meie poolt koostatud mudeli realiseerib STELLA diferentsiaalvõrrandeina, mida omakorda integreerib (lahendab) numbriliselt. Selleks on valida kolm meetodit:

- Euler,
- Runge-Kutta 2. järku,
- Runge-Kutta 4. järku meetod.

Vaatame DV kujul $y' = dy/dx = f(x;y)$ koos algtingimusega $y(x_0) = y_0$. Lahendamine taandub otsitava funktsiooni väärtuste leidmisele punktides $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Tähistame $y_i = y(x_i)$ ja $x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0 \dots n-1$ (samm on konstantne).

8.1 Euleri meetod

$\boldsymbol{y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h}$
Valemi viga $O(h^2)$, st $|y_1(tegelik) - y_1(arvutatud)| \leq Mh^2$, kus M on teatav konstant (sõltub $y''(x)$).
See meetod on graafiliselt lihtsalt arusaadav. Seda meetodit on nimetatud ka Runge-Kutta 1. järku meetodiks.

8.2. Runge-Kutta 2. järku meetodid

Kaks varianti:

1) $\boldsymbol{y_1 = y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)}$

2) $\boldsymbol{y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),\quad k_1 = f(x_0, y_0), k_2 = f(x_0 + h, y_0 + k_1)}$

Mõlemal juhul valemite viga $O(h^3)$. Ka see meetod on graafiliselt selgitatav.

8.3. Runge-Kutta 4. järku meetod

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$
$$\boldsymbol{k_1 = f(x_n, y_n),\quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right)}$$
$$\boldsymbol{k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2\right),\quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)}$$

Valemi viga $O(h^5)$. Viimast meetodit kasutatakse praktikas kõige enam.

9. Põhimuutuja jaotamine osadeks, mitme sõltumatu muutujaga mudel

9.1.Vanusegruppidega populatsiooni mudel

Jaotame kogu populatsiooni 7 erineva vanusegrupi vahel:
1) 0-9 a. 100 inimest; 2) 10-19 a. 100 inimest;
3) 20-29 a. - 75 inimest, sünnitavad lapsi, koefitsient = 0.12;
4) 30-39 a. 60 inimest; 5) 40-49 a. - 50 inimest;
6) 50-59 a. - 40 inimest; 7) 60 a. ja üle - 30 inimest. (70 a surrakse ehk liigutakse süsteemist välja).
Igal vanusegrupil on erinev surmamäär. Igal 10 aasta järel liigutakse ühest vanusegrupist teise. Kogu populatsioon saavutab stabiilse arvu umbes 150 aasta pärast.

9.2. Jõe reostuse mudel

Jõgi on jaotatud 6 erinevaks osaks: põhimuutujad ONE, TWO, THREE, FOUR, FIVE, SIX.
Põhimuutujad kirjeldavad reostust igas lõigus, algväärtused kõigil 0. Ühes kindlas kohas satub jõkke saasteainete hulk, mille toob sisse juhtimine
$F0 = \boldsymbol{PULSE}(100, DT, 1000)$
Põhimuutujaid ühendavad juhtimised $F1 - F6$: $F1 = ONE/T1$ jne.
Uurime reostuse kontsentratsiooni ajas ja erinevates ruumipunktides (jõeosades) üheaegselt.

Kontsentratsioon = saasteainete hulk /vee hulk vastaval lõigul $CONC1 = ONE/V1$ jne. Veehulgad igal lõigul määratakse vooluseadusega
$Q1 = 1$ ($\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$) lõigul ONE, TWO, ülejäänutel $Q2 = 1.6$ m3/min
vee asumise aeg antud lõigus $T = RUUMALA/Q$.
Funktsioon $\boldsymbol{PULSE}(<\boldsymbol{SUURUS}> [,<\boldsymbol{ESIMENE\ KORD}>,<\boldsymbol{INTERVALL}>])$
tekitab ühe või mitu hüpet antud suuruse võrra.
SUURUS määrab hüppe kõrguse = $SUURUS/DT$;
ESIMENE KORD määrab esimese hüppe aja (vaikimisi esimesel sammul);
INTERVALL määrab järjestikuste hüpete vaheaja (vaikimisi igal ajasammul, kui $INTERVALL = 0$, siis üks hüpe).

10. Juhuslikkus modelleerimisel

Tihti ei saa me mingit protsessi täpselt määrata, sisse jääb teatav juhuslikkus – mingi juhuslik element võib määrata süsteemi käitumise suuna.

Tõenäosusteooria ja statistika mõisteid

Juhuslikuks suuruseks (JS) nimetame suurust, mis katse tulemusel omandab ühe oma võimalikest väärtustest (varem mitte teadaolev).
Juhuslikku suurust nimetame **diskreetseks juhuslikuks suuruseks** (DJS), kui tema väärtuste hulk on lõplik või loenduv.
Juhusliku suuruse **jaotusfunktsiooniks** nimetame funktsiooni, mis seab väärtusele *x* vastavusse tõenäosuse, et $X < x$. $F(x) = P(X < x)$.
Diskreetse juhusliku suuruse **jaotusseaduseks** (tõenäosusfunktsiooniks) nimetame eeskirja, mis seob juhusliku suuruse võimalikud väärtused ja nende tõenäosused. $p_i = P(X = x_i)$
Pideva juhusliku suuruse **tihedusfunktsioon** $f(x) = F'(x)$. Vastab diskreetse juhusliku suuruse jaotusseadusele.

Lisaks neile funktsioonidele kasutatakse juhusliku suuruse iseloomustamiseks veel mitmeid karakteristikuid, meie vaatame siin kahte: keskväärtust ja dispersiooni.
Diskreetse juhusliku suuruse X **keskväärtus** defineeritakse valemiga

$$EX = E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

kus x_i tähistab diskreetse juhusliku suuruse X väärtust ja p_i selle väärtuse tõenäosust. Keskväärtus paikneb diskreetse juhusliku suuruse väikseima ja suurima väärtuse vahel.
Diskreetse juhusliku suuruse **dispersiooniks** nimetame tema hälbe (keskväärtuse suhtes) ruudu keskväärtust $DX = D(X) = E(X - EX)^2$.

Pideva juhusliku suuruse keskväärtus ja dispersioon avalduvad:

$$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\,, \quad DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx \qquad \sigma = \sqrt{DX}$$

Ühtlane jaotus:

PJS jaotus, mille tihedusfunktsioon on konstantne. $f(x) = c$, kui $x \in [a, b]$ ja $f(x) = 0$ mujal.
$c = 1/(b - a)$ (tuleneb tihetusfunktsiooni omadusest).
Jaotusfunktsioon $F(x) = (x - a)/(b - a)$.
Praktikas esineb harva, näiteks bussi ooteaeg, ooteaeg valgusfoori taga.
Keskväärtus $E(X) = (a + b)/2$, dispersioon $D(X) = (b - a)^2/12$.

Normaaljaotus:

PJS jaotus, mille korral tihedusfunktsioon defineeritakse valemiga

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Jaotusfunktsioon avaldub kujul

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

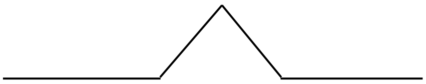
Normaaljaotust kirjeldab kaks parameetrit: keskväärtus ja standardhälve (ruutjuur dispersioonist).

$N(\mu; \delta)$

Meie kursuses need keerukad valemid kasutust ei leia, sest kõike seda arvutab programm.

Kolmnurkjaotus

Pideva juhusliku suuruse jaotus, mille korral tihedusfunktsiooni graafik on kolmnurkse kujuga:



Siin on jaotust kirjeldavaid parameetreid kolm, murdjoone nurkpunktide väärtused.
Funktsioone $\boldsymbol{IF}, \boldsymbol{THEN}, \boldsymbol{ELSE}, \boldsymbol{AND}, \boldsymbol{OR}, \boldsymbol{NOT}$ kasutatakse avaldiste moodustamiseks, mille väärtused sõltuvad sellest, kas antud tingimus osutub tõeseks (**TRUE**) või on väär (**FALSE**).
Mitme tingimuse jaoks kasutada ümarsulge. Näiteks: $IF\ (x > 0)\ AND\ (y < 0)\ THEN\ 1\ ELSE\ 0$

10.1 Mündi viskamise mudel

Viskame näiteks 2000 korda münti. Modelleerime selle arvutil, kasutades juhuslike arvude generaatorit – igal viskel genereerime juhusliku arvu vahemikus (0;1), kui see on < 0.5, siis loeme viske kirjaks, kui > 0.5 kulliks. Funktsioon ***RANDOM(0,1)*** väljastab juhusliku arvu arvude 0 ja 1 vahel.
Põhimuutuja loendab, mitu korda esineb kiri rohkem, kui kull. Ajasamm $DT = 1$, simulatsiooni aeg 2000.

10.2 Joobes liikumise mudel

Vaja läbida 100 m algasendist etteantud suunas. Iga sammu järel muutub liikumissuund ja sammu pikkus. Valime alguspunkti koordinaadid $(0; 0)$ ja lõpppunkti koordinaadid $(0; 100)$, jooksva punkti koordinaadid tähistame $(X; Y)$.
Sammu pikkuse ja suuna standardhälbed samad, neid iseloomustab joove (joobe indeks- mida väiksem indeks, seda väiksem joove).
$Sammu\ pikkus = \boldsymbol{NORMAL}(\mathbf{0.8};\ \boldsymbol{joobeindeks})$ – normaaljaotusega juhuslik suurus, mille keskväärtus on 0.8 ja standardhälve on võrdne joobeindeksiga.
Punktis $(X; Y)$ vajalik liikumissuund on

$$vajalik\ liikumissuund = \begin{cases} \arctan\dfrac{Y-100}{x}, & x < 0 \\ \arctan\dfrac{Y-100}{x} + \pi, & x \geq 0 \end{cases}$$

Tegelikult astutakse samm suunas $NORMAL(vajalik\ liikumissuund;\ joobeindeks)$, nii liigutakse vastavalt x ja y telje sihis edasi
$\Delta X\ = sammu\ pikkus\ \cdot \cos(tegelik\ liikumissuund)$ ja
$\Delta Y\ = sammu\ pikkus \cdot\ \sin(tegelik\ liikumissuund)$.
Et vaadata läbitud teekonda graafikul xy teljestikus, tuleb "Graph Type" (üleval servas) valida "*Scatter*", punktide ühendamiseks valida “*connect dots*”.
Funktsioon $\boldsymbol{PAUSE}$ kasutamisel mudeli käivitamisel **Run** menüüst järel antud funktsioon peatab mudeli töö (***Run - Pause*** olekusse). Edasise mudeli käivitamise jaoks vaja valida ***Run - Resume***
Kasutatakse koos $\boldsymbol{IF}$ tingimusega, mis annab tingimuse mudeli töö peatamiseks.

10.3 Tagasimõju mudelid

Tagasimõju protsess: süsteemi ühe komponendi muutus kutsub esile süsteemi teise komponendi muutuse, mis omakorda muudab esialgset komponenti. Jaotatakse:
1. **Negatiivne tagasimõju** - süsteemi ühe komponendi muutus kutsub esile süsteemi teise (teiste) komponendi muutuse, mis omakorda neutraliseerib esimese komponendi muutuse.
2. **Positiivne tagasimõju** - süsteemi ühe komponendi muutus kutsub esile süsteemi teise (teiste) komponendi muutuse, mis omakorda võimendab esialgset komponendi muutust.

Positiivne tagasimõju on halb, see viib süsteemi tasakaalust välja. Negatiivne hea, viib süsteemi tasakaalu. Tavaliselt omab süsteem mõlemat tüüpi tagasimõjusid.
Kirjanduses on tagasimõjusid uuritud näiteks järgmistes teostes: ***Grace, 1987***, "*The Impact of Preemption on the Zonation of Two Typha Species Along Lakeshores*". Ökoloogias 2 rannaveetaime levik juurte abil. Kumb taim hakkab domineerima?
Brian Arthur, 1990, "*Positive Feedbacks In The Economy*" Milline uutest tehnoloogiatest hakkab turul domineerima?
Artur illustreeris positiivse tagasimõju protsessi lihtsa mudeliga: vastavalt juhusliku suuruse väärtustele lisatakse erinevate reeglite järgi anumasse palle . Eesmärk on koostada ja mõista seaduspära, millal ilmneb positiivne ja millal negatiivne tagasimõju. Alustades kahe erineva värviga ja 1 palliga mõlemast värvist (näiteks kollane ja roheline). Uue palli värv valitakse vastavalt anumas olemasolevate pallide jaotusele. Kui vastavat värvi palli jaotus on suurem, kui juhuslik arv, mis antakse 0 ja 1 vahel, siis *positiivse* tagasimõju korral lisatakse sama värvi pall; *negatiivse* tagasimõju mudeli korral lisatakse teist värvi pall.

Näide positiivse ja negatiivse tagasimõju korral pallide lisamisest ja osakaalu kujunemisest 10 sammu korral

POSITIIVNE TAGASIMÕJU

Time	JS	KOLL OSA	ROH OSA	LISA ROH	LISA KOLL
0	0,94	0,50	0,50	0	1
1	0,05	0,67	0,33	1	0
2	0,04	0,5	0,5	1	0
3	0,63	0,4	0,6	0	1
4	0,37	0,5	0,5	1	0
5	0,77	0,43	0,57	0	1
6	0,19	0,5	0,5	1	0
7	0,11	0,44	0,56	1	0
8	0,12	0,4	0,6	1	0
9	0,47	0,36	0,64	1	0
10	0,44	0,33	0,67	1	0

NEGATIIVNE TAGASIMÕJU

Time	JS	KOLL OSA	ROH OSA	LISA ROH	LISA KOLL
0	0,94	0,50	0,50	1	0
1	0,05	0,33	0,67	0	1
2	0,04	0,5	0,5	0	1
3	0,63	0,6	0,4	1	0
4	0,37	0,5	0,5	0	1
5	0,77	0,6	0,4	1	0
6	0,19	0,5	0,5	0	1
7	0,11	0,57	0,43	1	0
8	0,12	0,5	0,5	0	1
9	0,47	0,56	0,44	1	0
10	0,44	0,6	0,4	1	0