Mittekorrektsed ülesanded

2017

Sisukord

Peatükk 1

Näiteid mittekorrektsetest ülesannetest ja iseregulariseerimisest

1.1 Sissejuhatus

Kui modelleerime mõnda nähtust, saame ülesande matemaatilise mudeli, mis seob lähteandmeid ja otsitavaid tulemusi. Ülesanne on korrektne, kui ülesanne on üheselt lahenduv igasuguste lähteandmete korral etteantud klassist ning lahend sõltub pidevalt lähteandmetest. Ülesanne on mittekorrektne, kui väikese lähteandmete muutuse korral lahend muutub palju. See tähendab, lahend ei sõltu pidevalt lähteandmetest. See on ebameeldiv, sest mõõtmisel saadud algandmed on mõõtmisveaga. Korrektsete ülesannete lahendamisel ei pöörata lähteandmete ebatäpsusele tavaliselt tähelepanu. Mittekorrektsete ülesannete lahendamisel aga ongi põhiküsimuseks, kuidas vähendada lähteandmete ebatäpsuse mõju lähislahendile.

1.1.1 Lineaarne võrrand ruumis $\mathbb{R}$

Vaatleme võrrandit $au = f$, kus antud on reaalarvud $a, f \in \mathbb{R}$ ja $u \in \mathbb{R}$ on otsitav. Lahendi ühesus sõltub kordajast a.

1) Kui $a = 0$, siis lahend leidub parajasti juhul, kui $f = 0$. Sel korral on lahendeid u lõpmata palju, see tähendab, iga $u \in \mathbb{R}$ rahuldab antud võrrandit.

2) Kui $a \neq 0$, siis leidub parajasti üks lahend, mis avaldub kujul $u = \dfrac{f}{a}$. Kui vaadelda piirprotsessi $a \to 0$, siis ebatäpse lähteandme f korral lahendi vead suurenevad. Vaatleme vigu lähemalt.

Kui f asemel on antud f_δ nii, et $|f_\delta - f| \leqslant \delta$, kus $\delta > 0$ ja δ on väike, siis saame lähislahendi $u_\delta = \dfrac{f_\delta}{a}$. Täpsest lahendist erineb see *absoluutse vea* võrra: $|u_\delta - u| = \left|\dfrac{f_\delta - f}{a}\right| \leqslant \dfrac{\delta}{|a|}$, st. mida väiksem on a, seda suurem on jagatis ehk seda suurem on viga.

Suhteline e. *relatiivne viga* $\dfrac{|u_\delta - u|}{u} = \left|\dfrac{f_\delta - f}{a} \cdot \dfrac{a}{f}\right| = \left|\dfrac{f_\delta - f}{f}\right| \leqslant \dfrac{\delta}{|f|}$.

Siit nähtub, et absoluutne viga sõltub eelkõige arvust a ja suhteline viga arvust f.

1.1.2 Lineaarne algebraline võrrandisüsteem

Vaatleme algebralist võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} (1+\varepsilon)u_1 + u_2 &= f_1 \\ u_1 + (1-\varepsilon)u_2 &= f_2 \end{cases}$$

Võrrandisüsteem on sümmeetriline, kui süsteemi maatriks $A = A^T$. Suurused f_1 ja f_2 on antud, u_1 ja u_2 on otsitavad,

$$D = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = (1-\varepsilon^2) - 1 = -\varepsilon^2.$$

Mida väiksem on ε, seda suuremad on lahendite absoluutväärtused

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 1 \\ f_2 & 1-\varepsilon \end{vmatrix}}{\varepsilon^2} = \frac{f_1(1-\varepsilon) - f_2}{\varepsilon^2}, \\ u_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1+\varepsilon & f_1 \\ 1 & f_2 \end{vmatrix}}{\varepsilon^2} = \frac{(1+\varepsilon)f_2 - f_1}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Mõned näited.

1) Kui $f_1 = f_2 = 1$, siis $u_1 = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $u_2 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$.

2) Kui $f_1 = 1+\varepsilon$, $f_2 = 1-\varepsilon$, siis $u_1 = -\dfrac{1}{\varepsilon}+1$, $u_2 = \dfrac{1}{\varepsilon}+1$.

Kui $\varepsilon \to 0$, tulevad u_1 ja u_2 hästi suure absoluutväärtusega. Näiteks kui $\varepsilon = 10^{-10}$, siis 1) juhul $u_1 = 10^{10}$, $u_2 = -10^{10}$ ning 2) juhul $u_1 \approx -10^{10}$, $u_2 \approx 10^{10}$.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendite stabiilsust iseloomustavad võrrandisüsteemi maatriksi omaväärtused λ, mis on võrrandi $|A-\lambda I| = 0$ lahendid. Arvutame need.

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\varepsilon-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \varepsilon^2 - 1 = 0,$$

siit $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+\varepsilon^2}$, mis tähendab, et $\lambda_{\max} \approx 2$, $\lambda_{\min} \approx -\dfrac{\varepsilon^2}{2}$. Järelikult konditsiooniarv

$$\mu(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|} \approx 2 : \frac{\varepsilon^2}{2} = \frac{4}{\varepsilon^2}.$$

Näeme, et kui $\varepsilon \to 0$, siis $\mu(A) \to \infty$.

Lahendi vea hindamine Olgu $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Kui on teada argumentide x_i vead, kui suur on u viga? Eeldusel, et u on diferentseeruv, avaldub absoluutne viga kujul

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \Delta x_i.$$

Valime ülaltoodud näites $\varepsilon = 10^{-n}$, siis

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(f_1, f_2) = \big((1-10^{-n})f_1 - f_2\big) \cdot 10^{2n}, \\ u_2 &= u_2(f_1, f_2) = \big((1+10^{-n})f_2 - f_1\big) \cdot 10^{2n}. \end{aligned}$$

Leiame osatuletised:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial f_j} \right| \approx 10^{2n}, \qquad i = 1,2, \quad j = 1,2.$$

Seega

$$\Delta u_1 \approx \Delta u_2 \approx 10^{2n}(\Delta f_1 + \Delta f_2).$$

Kui näiteks $f_1 = f_2 = 1$, siis

$$u_1 = 10^n, \qquad u_2 = -10^n.$$

Kui aga $f_1 = 1$, $f_2 = 1 - 10^{-n}$, siis

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = -1.$$

Saadud lahendid on väga erinevad. Tegu on tüüpilise mittekorrektse ülesandega.

1.1.3 Ülesande üldisem püstitus. Operaatorvõrrand

Olgu H ja F Hilberti ruumid ning $A : H \to F$ lineaarne operaator. Vaatleme operaatorvõrrandit $Au = f$.

Element $f \in F$ väljendab lähteandmeid. Kui $f \in F$ asemel on teada f_δ nii, et $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, siis saame lahendi u asemel elemendi u_δ, mille korral $Au_\delta = f_\delta$. Meid huvitab, kui palju u_δ erineb täpsest lahendist u. Eeldame, et A on lineaarne, siis ka A^{-1}, kui ta leidub, on lineaarne. Edasiseks aruteluks eeldamegi, et leidub pöördoperaator A^{-1} ja $\left\|A^{-1}\right\| < \infty$.

Võrrandi $Au = f$ lahendi saame, kui vasakult rakendame A^{-1}. Saame $A^{-1}Au = A^{-1}f$, millest $u = A^{-1}f$. Analoogiliselt $u_\delta = A^{-1}f_\delta$. Nüüd

$$\|u_\delta - u\| = \left\|A^{-1}f_\delta - A^{-1}f\right\| = \left\|A^{-1}(f_\delta - f)\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|f_\delta - f\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \delta.$$

Siit näeme, et lähislahendi u_δ absoluutne viga sõltub operaatorist A, sest A^{-1} sõltub operaatorist A.

Lahendi relatiivse vea leiame järgmiselt: kuna $\|f\| = \|Au\| \leqslant \|A\| \|u\|$, siis $\dfrac{1}{\|u\|} \leqslant \dfrac{\|A\|}{\|f\|}$ ning seega

$$\frac{\|u_\delta - u\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}f_\delta - A^{-1}f\| \cdot \|A\|}{\|f\|} \leqslant \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|f_\delta - f\|}{\|f\|}.$$

Siin $\dfrac{\|f_\delta - f\|}{\|f\|}$ on lähteandmete relatiivne viga. Suurust $\mu(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$ nimetatakse operaatori A ***konditsiooniarvuks***. Sümmeetrilise operaatori A korral saab näidata, et $\mu(A) \geqslant \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, kus arvud λ on operaatori A omaväärtused. Meenutame, et operaatori A ***omaväärtuseks*** nimetatakse arvu λ, mille korral võrrandil $Au = \lambda u$ leidub mittetriviaalne lahend u (sellist elementi u nimetatakse ***omaelemendiks***).

Nagu näha, tasub lahendi vea vähendamiseks vähendada arvu $\left\|A^{-1}\right\|$.

1.1.4 Lavrentjevi meetod

Operaatorvõrrandi $Au = f$ lahendamisel on problemaatilised operaatori A väikesed omaväärtused. Kui näiteks $\lambda = 0$ on A omaväärtus, siis vastav omaelement $\tilde{u}$ on homogeense võrrandi $A\tilde{u} = 0$ mittetriviaalne lahend ning võrrandi $Au = f$ lahend pole üldse üheselt määratud. Nimelt, koos lahendiga $\overline{u}$ oleks lahendiks samuti element $\overline{u}+c\tilde{u}$, kus c on suvaline arv. Tõepoolest:

$$A(\overline{u} + c\tilde{u}) = A\overline{u} + cA\tilde{u} = f + 0 = f.$$

Olgu nüüd operaator A enesekaasne, st. $A = A^*$, ja mittenegatiivne, st. $\langle Au, u\rangle \geqslant 0$ iga u korral. (Lühemalt, $A = A^* \geqslant 0$.) Lihtne on näha, et enesekaasse mittenegatiivse operaatori omaväärtused on mittenegatiivsed. Tõepoolest, olgu u omaväärtusele λ vastav omaelement, siis $\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geqslant 0$, millest $\lambda \geqslant 0$. Sellel juhul tekib soov modifitseerida võrrandit $Au = f$ nii, et $\lambda_{\min}$ oleks võimalikult suurem.

Spektrinihe ehk Lavrentjevi meetod. Olgu $A = A^* \geqslant 0$. Vaatleme võrrandi $Au = f$ asemel võrrandit $(A+\alpha I)u = f$, kus $\alpha > 0$, α on väike. Operaatori $A+\alpha I$ omaväärtused on arvud kujul $\lambda+\alpha$, kus λ on A omaväärtus, sealjuures omaelemendid jäävad samaks. Tõepoolest, võrrandid $(A-\lambda I)u = 0$ ja $(A + \alpha I - (\lambda + \alpha)I)u = 0$ on samaväärsed.

Nüüd $\lambda + \alpha \geqslant \alpha$ ning samuti $\lambda + \alpha > \lambda$. Niisiis muutuvad uue võrrandi omaväärtused automaatselt positiivseks ja ka suurenevad.

Mida täpsemalt on f teada (mida väiksem on δ), seda väiksema α võime valida. Arvu α vähenedes väheneb viga täpsete lähteandmete korral, α suurenedes väheneb lähteandmete ebatäpsusst tulenev viga.

1.1.5 Tihhonovi meetod

Meetodi põhiidee on üleminek mitte-enesekaasselt ülesandelt enesekaassele ülesandele.

Kui operaator A pole enesekaasne või pole mittenegatiivne, siis läheme ülesandelt $Au = f$ üle ülesandele $A^*Au = A^*f$, see tähendab, rakendame ülesande mõlemale poolele operaatori A kaasoperaatorit A^*. Operaator A^*A on enesekaasne ja mittenegatiivne. Tõepoolest:

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A, \qquad \langle A^*Aw, w\rangle = \langle Aw, Aw\rangle = \|Aw\|^2 \geqslant 0.$$

Kui λ on A^*A omaväärtus, siis $\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle A^*Au, u\rangle = \|Au\|^2 \geqslant 0$, millest $\lambda \geqslant 0$.

Lisame ülesandes $A^*Au = A^*f$ operaatorile A^*A operaatori αI. Saame võrrandi

$$(A^*A + \alpha I)u = A^*f.$$

See ongi Tihhonovi meetod.

Uurime Tihhonovi meetodi veahinnagut. Kui f asemel on teada f_δ, saame kasutada u_α^δ kui võrrandi $(A^*A + \alpha I)u_\alpha^\delta = f_\delta$ lahendit. Vaatleme lisaks veel lahendit u_α^0 võrrandile $(A^*A + \alpha I)u_\alpha^0 = f$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\left\|u_\alpha^\delta - u\right\| &= \left\|u_\alpha^\delta - u_\alpha^0 + u_\alpha^0 - u\right\| \leqslant \left\|u_\alpha^\delta - u_\alpha^0\right\| + \left\|u_\alpha^0 - u\right\| = \\
&= \left\|(A^*A + \alpha I)^{-1} f_\delta - (A^*A + \alpha I)^{-1} f\right\| + \left\|u_\alpha^0 - u\right\| = \\
&= \left\|(A^*A + \alpha I)^{-1} (f_\delta - f)\right\| + \left\|u_\alpha^0 - u\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|(A^*A + \alpha I)^{-1}\right\| \|f_\delta - f\| + \left\|u_\alpha^0 - u\right\|.
\end{aligned}$$

Saab näidata, et $\left\|(A^*A + \alpha I)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ ning $\left\|u_\alpha^0 - u\right\| \to 0$ protsessis $\alpha \to 0$. Seega

$$\left\|u_\alpha^\delta - u\right\| \leqslant \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \left\|u_\alpha^0 - u\right\|.$$

Arv α on vaja valida sõltuvalt arvust δ nii, et $\dfrac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \to 0$, kui $\delta \to 0$, samuti $\alpha(\delta) \to 0$, kui $\delta \to 0$.

Vaja on, et lähteandmete täpsuse paranedes lahendi täpsus suureneks. Vea käitumise graafik on esitatud joonisel. Jooniselt on näha, et leidub optimaalne α.

1.1.6 Diferentseerimisülesanne

Olgu antud $f \in C^1(-\infty, \infty)$. Leida $u = f' \in C(-\infty, \infty)$. (Selline u leidub, sest $f \in C^1(-\delta, \delta)$ ja seega $u \in C(-\infty, \infty)$.)

Olgu antud lähend f_δ selliselt, et $\|f_\delta - f\| = \max\limits_{x \in (-\infty, \infty)} |f_\delta(x) - f(x)| \leqslant \delta$. Ei pruugi leiduda f_δ' või siis ei pruugi kehtida $f_\delta' \in C(-\infty, \infty)$. Isegi kui f_δ on diferentseeruv, võivad f' ja f_δ' olla kuitahes erinevad.

Joonistelt on see ilmekalt näha: $\|f_\delta - f\|$ on väike iga x korral, aga tuletiste erinevus on suur.

Näide. $f \equiv 0$, $f_\delta(t) = \delta \cdot \sin \delta^{-2} t$. Siis

$$\|f - f_\delta\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \delta \cdot \sin \delta^{-2} t \right| = \delta \to 0,$$

aga $f'_\delta(t) = \dfrac{\cos \delta^{-2} t}{\delta}$, millest

$$\|f' - f'_\delta\| = \max_{t \in \mathbb{R}} \left| \delta^{-1} \cos \delta^{-2} t \right| = \frac{1}{\delta} \to \infty$$

protsessis $\delta \to 0$. Siin δ võib olla kuitahes väike.

1.1.7 Lineaarsed operaatorid Hilberti ruumis

Meenutame, et *Hilberti ruumiks* nimetatakse täielikku skalaarkorrutisega ruumi. Näiteks

- $L_2(a, b)$, kus $\langle u, v \rangle = \displaystyle\int_a^b u(t) v(t)\, dt$, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_a^b u^2(t)\, dt$;
- $W^m(a, b)$, kus $\langle u, v \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \int_a^b u^{(k)}(t) v^{(k)}(t)\, dt$.

Öeldakse, et operaator A on *lineaarne*, kui $A(\lambda u) = \lambda A u$ ja $A(u+v) = Au + Av$ kõigi kompleksarvude λ ja elementide $u, v \in H$ korral. Öeldakse, et operaator A on *tõkestatud*, kui leidub c, et $\|Au\| \leqslant c \|u\|$ iga $u \in H$ korral. Vähimat sellist arvu c nimetatakse operaatori A *normiks*: $c = \sup\limits_{u \in H} \dfrac{\|Au\|}{\|u\|}$.

Saab näidata, et tõkestatud lineaarne operaator on pidev, see tähendab, kui $u \to u'$, siis $Au \to Au'$.

Operaatorit A nimetatakse *kompaktseks*, kui ta teisendab iga tõkestatud hulga kompaktseks hulgaks. Hulka nimetatakse *(jadaliselt) kompaktseks*, kui tema igast jadast saab eraldada koonduva osajada.

Vaatleme operaatorit $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Operaatori A *väärtuste piirkonnaks* nimetatakse hulka $\mathcal{R}(A) = \{f \in F \,:\, \exists u \in H\; Au = f\}$. Operaatori A *tuumaks* nimetatakse hulka $\mathcal{N}(A) = \{u \in H \,:\, Au = 0\}$. Operaatoril A leidub pöördoperaator $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, H)$, kui iga $f \in F$ korral leidub $u \in H$ selliselt, et $Au = f$. Siis kirjutatakse $A^{-1} f = u$.

Operaatori $A \in \mathcal{L}(H, H)$ *omaväärtuseks* nimetatakse arvu λ, mille korral leidub $u \in H$ nii, et $Au = \lambda u$. Operaatorit $A \in \mathcal{L}(H, H)$ nimetatakse *enesekaasseks*, kui $A = A^*$, see tähendab, $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ iga $u, v \in H$ korral.

Enesekaasset operaatorit A nimetatakse *mittenegatiivseks*, kui $\langle Au, u\rangle \geqslant 0$ iga $u \in H$ korral; *positiivseks*, kui $\langle Au, u\rangle > 0$ iga $u \in H$ korral; *positiivselt määratuks*, kui leidub arv $c > 0$ selliselt, et $\langle Au, u\rangle \geqslant c\,\|u\|^2$ iga $u \in H$ korral. Positiivselt määratud operaatoril leidub pidev pöördoperaator. Tõepoolest,

$$c\,\|u\|^2 \leqslant \langle Au, u\rangle \leqslant \|Au\|\,\|u\| \Rightarrow \|u\| \leqslant \frac{1}{c}\,\|Au\|\,.$$

Nüüd $\left\|A^{-1}f\right\| \leqslant \frac{1}{c}\,\|f\|$ iga f korral, millest järeldub, et $\left\|A^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{c}$.

Olgu $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Siis $F = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$. Kui A on enesekaasne, siis $H = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$, see tähendab, iga $u \in H$ avaldub üheselt $u = u_0 + u_1$, kus $u_0 \in \mathcal{N}(A)$ ja $u_1 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Olgu A lineaarne, enesekaasne, kompaktne. Kompaktsel operaatoril leidub täielik omaelementide süsteem $\{v_i\,:\,i \in \mathbb{N}\}$: $Av_i = \lambda_i v_i$. Need omaelemendid võib võtta ortonormeeritud $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Seega iga u esitub kujul $u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, v_k$, kus $u_0 \in \mathcal{N}(A)$. Nüüd

$$Au = Au_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, \lambda_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, \lambda_k v_k$$

ning induktsiooniga saame tõestada ($l \in \mathbb{N}$ korral)

$$A^l u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, \lambda_k^l v_k.$$

Kui A on lisaks enesekaassusele ka mittenegatiivne, st. $A = A^* \geqslant 0$, siis $A^\alpha u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, \lambda_k^\alpha v_k$ (α on reaalarv, $\alpha \geqslant 0$).

Kui g on tõkestatud funktsioon operaatori A spektril

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \left\{\mu \in \mathbb{C}\,:\, \exists (A - \mu I)^{-1}\right\},$$

siis võib defineerida $g(A)u = g(0)u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle\, g(\lambda_k) v_k$.

1.1.8 Momentide võrratus

Olgu H Hilberti ruum ning $A \in \mathcal{L}(H, H)$.

Lause 1. *Kui* $A = A^* \geqslant 0$*, siis* $\|A^\alpha u\| \leqslant \|Au\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}$*, kus* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$*.*

Tõestus. Kui $\alpha = 0$ või $\alpha = 1$, on see võrratus triviaalne. Juhul $\alpha \in (0, 1)$ teeme tõestuse läbi erijuhul, kus $A = A^* > 0$ ja A on kompaktne. Lähtume Hölderi võrratusest:

$$\sum |a_i b_i| \leqslant \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \in (1, \infty).$$

Saame

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle^2, \qquad \|Au\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle u, v_k\rangle^2, \qquad \|A^\alpha u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \langle u, v_k\rangle^2,$$

millest võttes $\beta = 1 - \alpha$, $p = \dfrac{1}{\alpha}$, $q = \dfrac{1}{1-\alpha}$, järeldub

$$\begin{aligned} \|A^\alpha u\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} \langle u, v_k\rangle^{2\alpha} \cdot \langle u, v_k\rangle^{2\beta} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle u, v_k\rangle^2\right)^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k\rangle^2\right)^\beta = \\ &= \left(\|Au\|^2\right)^\alpha \cdot \left(\|u\|^2\right)^{1-\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

Järeldus 2. *Kui* $A = A^* \geqslant 0$*, siis* $\|A^p u\| \leqslant \|A^q u\|^{\frac{p}{q}} \|u\|^{1-\frac{p}{q}}$*, kus* $0 \leqslant p \leqslant q$*.*

Tõestus. Järeldub momentide võrratusest, võttes A asemele A^q ja $\alpha = \dfrac{p}{q}$. Siis saame, et $\|A^p u\| = \|(A^q)^\alpha u\| \leqslant \|A^q u\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha} = \|A^q u\|^{\frac{p}{q}} \|u\|^{1-\frac{p}{q}}$. $\square$

Märkus 3. *Momentide võrratus on täpne* A *omaelementide peal.*

Tõestus. Kui v on A omaelement, siis $Av = \lambda v$. Nüüd

$$\|A^p v\| = \|\lambda^p v\| = \lambda^p \|v\|, \qquad \|A^q v\| = \lambda^q \|v\|,$$

millest

$$(\|A^q v\|)^{\frac{p}{q}} = (\lambda^q \|v\|)^{\frac{p}{q}} = \lambda^p \|v\|^{\frac{p}{q}}. \qquad \square$$

1.1.9 Mittekorrektse ülesande mõiste

Olgu H ja F meetrilised ruumid. Vaatleme võrrandit $Au = f$. Seda ülesannet nimetatakse korrektselt püstitatud ülesandeks, kui on rahuldatud järgmised tingimused:

1) iga $f \in F$ korral leidub lahend $u \in H$,
2) lahend on ühene,
3) lahend sõltub pidevalt paremast poolest, st. kui $f_n \to f$, siis vastavate lahendite jada $u_n \to u$.

Kui vähemalt üks tingimustest on rikutud, on tegemist *mittekorrektse ülesandega*.

Lineaarse operaatori korral ülesanne $Au = f$ on korrektne, kui leidub pidev pöördoperaator. Kui $\mathcal{R}(A)$ on mittekinnine, siis ülesannet $Au = f$ nimetatakse *oluliselt mittekorrektseks*.

1.1.10 Ajaloolist mittekorrektsetest ülesannetest

Hadamard uuris matemaatilise füüsika võrrandite seade korreksust. Elliptilise võrrandi korral Dirichlet' ülesanne (lisaks võrrandile rajatingimus $u|_\Gamma = \varphi$), hüperboolse ja paraboolse võrrandi korral Cauchy ülesanne (lisaks võrrandile antud algtingimus) on korrektselt seatud. Hadamard püstitas hüpoteesi, et looduses ongi kõik ülesanded korrektselt seatud. Siiski nii see ei ole. Maavarade otsimise ülesanne viib Cauchy ülesandele Laplace'i võrrandi jaoks, mis on mittekorrektne ülesanne. Mitmed teadlased väidavad, et lausa enamus loodusteaduste ülesannetest on mittekorrektselt seatud.

Mittekorrektsete ülesannete teooriale pandi alus Venemaal. 1963 said A.N. Tihhonov, V.K. Ivanov, M. M. Lavrentjev Lenini preemia mittekorrektsete ülesannete uurimise eest. Käesolevaks ajaks on uurimise raskuspunkt kandunud mujale, keskused on Austrias ja Saksamaal.

1.1.11 Ülesannete Gaussi sümmetriseerimine

Olgu H ja F Hilberti ruumid, $A : H \to F$ lineaarne operaator. Vaatleme võrrandit kujul

$$Au = f. \tag{1.1}$$

Rakendame võrrandi (1.1) mõlemale poolele kaasoperaatorit A^*:

$$A^*Au = A^*f. \tag{1.2}$$

Tähistame ortoprojektori $Q : F \to \overline{\mathcal{R}(A)}$. Siis $F = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$, st. iga $z \in F$ esitub üheselt kujul $z = z_0 + z_1$, kus $Qz = z_1$, $Qz_0 = 0$, $Qz_1 = z_1$. Muidugi iga $u \in H$ korral $Au \in \mathcal{R}(A)$, mis tähendab, et $QAu = Au$, seega $QA = A$.

Vaatleme ülesannet

$$Au = Qf \tag{1.3}$$

ning ülesannet:

$$\text{minimiseerida funktsionaal} \quad \Phi(u) = \|Au - f\|^2. \tag{1.4}$$

Lause 4. *Ülesanded (1.2), (1.3) ja (1.4) on samaväärsed, st. lahendite hulgad langevad kokku.*

Tõestus. Tõestuseks näitame, et u_* (1.2) lahend $\overset{\text{A.}}{\Rightarrow}$ u_* (1.3) lahend $\overset{\text{B.}}{\Rightarrow}$ u_* (1.4) lahend $\overset{\text{C.}}{\Rightarrow}$ u_* (1.2) lahend.

A.
$$\begin{aligned} A^*Au_* = A^*f \quad &\Leftrightarrow \quad A^*(Au_* - f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Au_* - f \in \mathcal{N}(A^*) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad Q(Au_* - f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad QAu_* = Qf \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad Au_* = Qf. \end{aligned}$$

B.
$$\begin{aligned} \|Au - f\|^2 &= \|(Au - Qf) + (Qf - f)\|^2 = \\ &= \|Au - Qf\|^2 + \|Qf - f\|^2 \geqslant \\ &\geqslant \|Qf - f\|^2, \end{aligned}$$

sest $Au - Qf \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ ja $Qf - F \in \mathcal{N}(A^*)$. Tuli välja, et üldiselt $\Phi(u) \geqslant \|Qf - f\|^2$, aga kui $u = u_*$ on $Au = Qf$ lahend, siis $\Phi(u) = \|Qf - f\|^2$. Seega $Au = Qf$ lahend on $\Phi(u)$ miinimumkoht.

C.
$$\begin{aligned} \Phi(u + h) - \Phi(u) &= \|A(u + h) - f\|^2 - \|Au - f\|^2 = \\ &= \|(Au - f) + Ah\|^2 - \|Au - f\|^2 = \\ &= 2\langle Au - f, Ah\rangle + \|Ah\|^2 = \\ &= 2\langle A^*(Au - f), h\rangle + \|Ah\|^2. \end{aligned}$$

Samas

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|Ah\|^2}{\|h\|} \leqslant \lim_{\|h\| \to 0} \|A\|^2 \cdot \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0,$$

millest järeldub, et $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \dfrac{\|Ah\|^2}{\|h\|} = 0$. Leiame Φ tuletise:

$$\Phi'(u) = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\Phi(u+h) - \Phi(u)}{\|h\|} = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{2\langle A^*(Au-f), h\rangle}{\|h\|}.$$

Siit järeldub, et

$$\Phi'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^*(Au-f) = 0.$$

Niisiis, kui u_* minimiseerib $\Phi(u)$, siis u_* on (1.2) lahend. $\square$

Ülesannete lahenduvuse seisukohalt on kolm võimalust.

1) Kui $f \in \mathcal{R}(A)$, siis on võrrand (1.1) lahenduv ja (1.2) langeb kokku (1.1)-ga. Seega kõik ülesanded (1.1), (1.2), (1.3) ja (1.4) on samaväärsed (ja lahenduvad).

2) Kui $f \notin \mathcal{R}(A)$, aga $Qf \in \mathcal{R}(A)$, siis ülesanne (1.1) pole lahenduv, aga (1.2), (1.3) ja (1.4) on lahenduvad.

3) Kui $f \notin \mathcal{R}(A)$ ja $Qf \notin \mathcal{R}(A)$, siis ei ole ükski neist ülesannetest lahenduv.

1.1.12 Mittekorrektsete ülesannete klassifitseerimine

Olgu H Hilberti ruum, $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $A = A^*$, A kompaktne operaator. Sel juhul (A kompaktsuse tõttu) leidub omaväärtuste jada (λ_k), kus $\lambda_k \in [-\|A\|, \|A\|]$ ja $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$.

Operaatori A omaelemendid u_k võib valida ortonormeerituna: $\langle u_k, u_j\rangle = \delta_{kj}$. Sealjuures iga $u \in H$ saab esitada kujul $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k\rangle u_k$.

Teoreem 5 (Picard'i teoreem)**.** *Ülesanne (1.1) on lahenduv parajasti siis, kui* $f \perp \mathcal{N}(A^*)$ *ja* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \langle f, u_k\rangle^2 < \infty$*. (See on tingimus* f *sileduse kohta: kuna* $\lambda_k^{-1} \to \infty$*, siis peab* $\langle f, u_k\rangle \to 0$ *hääbuma kiiremini.) Sel juhul lahend avaldub kujul* $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, u_k\rangle u_k$*.*

Tõestus. 1) Kui $f \in R(A)$, siis leidub $u \in H : Au = f$ ja $\langle f, u_k \rangle = \langle u, A^* u_k \rangle = \lambda_k \langle u, u_k \rangle$ ning

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, u_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle^2 \leqslant \|u\|^2 < \infty.$$

2) Kui $f \perp \mathcal{N}(A^*)$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \langle f, u_k \rangle^2 < \infty$, siis $u := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, u_k \rangle u_k \in H$ ja võrduse $Au_k = \lambda_k u_k$ tõttu

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, u_k \rangle Au_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, u_k \rangle u_k = f.$$

$\square$

1. MÜ klassifitseerimise võimalus Tähistame

$$\mu = \sup \left\{ \nu \,:\, \lambda_k = O(k^{-\nu}) \right\}.$$

Suurus μ näitab, kui kiiresti λ_k hääbub.

Kui $0 < \mu \leqslant 1$, siis nimetatakse ülesannet *nõrgalt mittekorrektseks*.

Kui $1 < \mu < \infty$, siis nimetatakse ülesannet *mõõdukalt mittekorrektseks*.

Kui $\mu = \infty$ (näiteks eksponentsiaalne kahanemine), siis nimetatakse ülesannet *tugevalt mittekorrektseks*.

2. MÜ klassifitseerimise võimalus Olgu D diferentseerimise operaator. Vähimat arvu m, mille korral operaator $D^m A$ on pidevalt pööratav, nimetatakse ülesande $Au = f$ mittekorrektsuse mõõduks.

Näiteks diferentseerimisülesanne $u = f'$ on samaväärne integraalvõrrandiga $Au = f$, kus $Au = \int_0^t u(s)\, ds$. Siis $(Au)'(t) = u(t)$. Seega 1-kordse diferentseerimisülesande mittekorrektsuse mõõt on $m = 1$. Siin operaatori A omaväärtused $\lambda_k \sim \frac{1}{k}$, seega 1. klassifikatsiooni järgi $\mu = 1$.

Kui $H = L_2$, siis võib arvu m iseloomustada võrratustega

$$c_1 \|u\|_{L_2} \leqslant \|Au\|_{W^m} \leqslant c_2 \|u\|_{L_2}.$$

Kui $D^m A$ on pidevalt pööratav, $H = F = L_2(\Omega)$, kus Ω on tõkestatud piirkond l-mõõtmelises ruumis, siis $\lambda_k = O\left(k^{-\frac{m}{l}}\right)$.

1.1.13 Ruumide valikust

Formaalselt saab iga ülesannet $Au = f$ ruumide valikuga muuta korrektseks. Kui $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, võtame $F = \mathcal{R}(A)$, siis iga $f \in F$ korral on ülesanne lahenduv ja lahend on ühene, jääb mõelda vaid stabiilsusele. Seda saab aga garanteerida normi valikuga: võtame $\|f\|_F = \|u\|_H$. Siis $\left\|A^{-1}f\right\|_H = \|f\|_F$, $\left\|A^{-1}\right\|_{F\to H} = \sup\limits_{f\in F} \dfrac{\|A^{-1}f\|_H}{\|f\|_F} = \sup\limits_{f\in F} \dfrac{\|f\|_F}{\|f\|_F} = 1.$

See on ainult teoreetiline lähenemine. Ei ole lihtsalt kontrollitavat meetodit, millised f kuuluvad ruumi F. Kui andmed on ligikaudsed, siis ei saa mõõta $\|f_\delta - f\|$ suvalises normis. Mõõta saame näiteks ruumis C või L_2. Ruumide valik on ülesande poolt sageli ette dikteeritud.

1.2 Näiteid mittekorrektsest ülesannetest

1.2.1 I liiki Fredholmi integraalvõrrand

Vaatleme võrrandit

$$\lambda u(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)\,dx = f(t), \qquad a \leqslant s,t \leqslant b \qquad \lambda \in R.$$

Kui $\lambda \neq 0$, siis on see võrrand II liiki Fredholmi integraalvõrrand; kui $\lambda = 0$, siis I liiki Fredholmi integraalvõrrand. II liiki võrrandid on korrektsed ülesanded.

Veendume, et I liiki võrrandid on mittekorrektsed. Eeldame, et $K(t,s)$ on pidev, siis leidub M selliselt, et $|K(t,s)| \leqslant M$ iga $t,s \in [a,b]$ korral. Võtame $F = H = C[a,b]$. Fikseerime $\overline{s} \in (a,b)$. Võtame $\varepsilon > 0$ nii, et $[\overline{s}-\varepsilon, \overline{s}+\varepsilon] \subset [a,b]$. Moodustame elemendi u_ε nii, et

$$u_\varepsilon(s) = 0, \quad s \notin [\overline{s}-\varepsilon, \overline{s}+\varepsilon], \qquad u_\varepsilon(\overline{s}) = 1, \qquad \|u_\varepsilon\| = \max_{s\in[a,b]} |u_\varepsilon(s)| = 1.$$

Tähistame $f_\varepsilon = Au_\varepsilon$, siis

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\| &= \max_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)u_\varepsilon(s)\,ds \right| \leqslant \\
&\leqslant \max_{t\in[a,b]} M \int_a^b |u_\varepsilon(s)|\,ds = M \max_{t\in[a,b]} \int_{\overline{s}-\varepsilon}^{\overline{s}+\varepsilon} |u_\varepsilon(s)|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M \int_{\overline{s}-\varepsilon}^{\overline{s}+\varepsilon} ds = M \cdot 2\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).
\end{aligned}$$

Kui $f_\varepsilon = 0$, on lahend 0. Kui vabaliikmete erinevus hääbub, siis lahendite erinevus on $\|u_\varepsilon - 0\| = \|u_\varepsilon\| = 1$. Ülesande korrektsuse kolmas tingimus (stabiilsus) on seega rikutud.

Kui $\dfrac{\partial^m K(t,s)}{\partial s^m}$ on pidev, siis $\lambda_k = O\left(k^{-m}\right)$. Mida siledam tuum, seda suurem on I liiki integraalvõrrandi mittekorrektsuse määr. II liiki võrrandite lahendamisel tuleb tuuma siledus kasuks.

Kui $K \equiv 1$, siis $\displaystyle\int_a^b u(s)\,ds = f(t)$. Ülesande lahenduvuse tarvilik ja piisav tingimus on, et $f \equiv \mathrm{const}$, st. ei sõltu t-st. Lahendeid tuleb lõpmata palju.

1.2.2 I liiki Volterra integraalvõrrand

Vaatleme võrrandit

$$\lambda u(t) + \int_a^t K(t,s)u(s)\,ds = f(t), \qquad a \leqslant s,t \leqslant b.$$

Kui $\lambda \neq 0$, siis see on II liiki Volterra integraalvõrrand, kui $\lambda = 0$, siis on I liiki. Jälle II liiki võrrand on korrektne, I liiki mittekorrektne.

Eeldame, et $K(t,s)$ on pidevalt diferentseeruv, $K(t,t) \neq 0$ iga $t \in [a,b]$ korral. Diferentseerime võrrandi pooli:

$$\begin{aligned}
&K(t,t)u(t) + \int_a^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u(s)\,ds = f'(t) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{K(t,t)} \\
&u(t) + \int_a^t H(t,s)u(s)\,ds = f'(t), \qquad H(t,s) = \frac{1}{K(t,t)} \cdot \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Saime II liiki võrrandi (ehk korrektse ülesande). I liiki võrrandi mittekorrektsuse mõõduks 2. klassifikatsiooni järgi on $m = 1$.

Operaator A, $(Au)(t) = \int_a^t K(t,s)u(s)\,ds$, on üksühene (pidevalt pööratav) ruumide paaril $H = C[a,b]$, $F = C_0^1[a,b] = \{v \in C^1[a,b] \,:\, v(a) = 0\}$.

Kui $K(t,t) = 0$ iga $t \in [a,b]$ korral, aga $\left.\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|_{s=t} \neq 0$ iga $t \in [a,b]$ korral, siis saame kahekordse diferentseerimisega pidevalt pööratava operaatori D^2A, seega ülesande mittekorrektsuse mõõt $m = 2$.

1.2.3 I liiki Abeli integraalvõrrand

Vaatleme võrrandit

$$\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds = f(t), \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Lahendivalemi saame kohe välja kirjutada:

$$u(t) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} + \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds\right).$$

Kui $H = F = C[a,b]$, on lahendi leidumiseks vaja tingimust $f(0) = 0$, sest muidu $t = 0$ korral $\dfrac{f(0)}{t^{1-\alpha}} = \infty$.

Kuna on vaja tuletist f' ja selle leidmine on mittekorrektne ülesanne, siis seda lahendivalemit eriti ei kasutata.

Tähistame murrulise integraaloperaatori

$$I^{1-\alpha}u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds.$$

Siis saab esialgne võrrand kuju $Au = f$, kus

$$Au(t) = \Gamma(1-\alpha)I^{1-\alpha}u(t).$$

Murrulise integraaloperaatori pöördoperaator on murruline diferentseerimisoperaator $D^{1-\alpha}$,

$$\Gamma(1-\alpha)u(t) = D^{1-\alpha}Au(t).$$

Siit näeme, et $D^{1-\alpha}A = \Gamma(1-\alpha)I_H$. Seega Abeli integraalvõrrandi mittekorrektsuse määr $m = 1-\alpha$. Abeli integraaloperaatori omaväärtused $\lambda_k = O\left(k^{\alpha-1}\right)$.

1.2.4 Suure konditsiooniarvuga lineaarne võrrandisüsteem

Vaatleme võrrandit $Au = f$, kus $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (st. A on $m \times n$ maatriks), $f \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^n$.

Kui $m = n$ ja $\det A \neq 0$, siis leidub ühene lahend. Kui f asemel on teada f_δ, kus $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, siis lähislahendite erinevus

$$\left\|A^{-1}f - A^{-1}f_\delta\right\| = \left\|A^{-1}\left(f - f_\delta\right)\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|f - f_\delta\|.$$

Kui $m \neq n$, siis vaadeldakse võrrandit $A^TAu = A^Tf$. Kui $\det A^TA \neq 0$, siis sellel võrrandil leidub ühene lahend. Kui f asemel on f_δ, saame

$$\left\|\left(A^TA\right)^{-1}A^Tf - \left(A^TA\right)^{-1}A^Tf_\delta\right\| \leqslant \left\|\left(A^TA\right)^{-1}A^T\right\| \|f - f_\delta\|.$$

Ka siin, kui $\left\|\left(A^TA\right)^{-1}A^T\right\|$ on liiga suur, on mõttekas vaadelda ülesannet mittekorrektsena.

Normaalvõrrand $A^TAu = A^Tf$ on alati kooskõlaline, st. lahend leidub, aga neid võib olla mitu. Tüüpiliselt otsitakse siis minimaalse normiga lahendit $\|u_*\| = \min\limits_{u\in U_1} \|u\|$, kus $U_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^n : A^TAu = A^Tf\right\}$. See ülesanne on üheselt lahenduv:

$$u_* = A^+f,$$

kus $A^+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on pseudopöördoperaator, st. $AA^+A = A$ ja $A^+AA^+ = A^+$.

1.2.5 Diferentseerimisülesanne

Tähistame $T \equiv \dfrac{d^m}{dx^m}$, kus $m > 0$, siis on meil operaator $T : C[a,b] \to C[a,b]$. Kusjuures $\mathcal{D}(T) \subset C^m[a,b]$. Olgu $\|f - f_\delta\|_{C[a,b]} \leqslant \delta$.

Diferentseerimisülesanne on mittekorrektne. Vaatleme näiteks funktsioonide jada $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$. Siis $f_n(x) \to 0$ punktiviisi. Ent

$$\left\|\frac{d^m}{dx^m} f_n(x)\right\| = n^{m-\frac{1}{2}} \cdot \left\{\begin{array}{ll} \|\sin nx\|, & n \text{ paaris}, \\ \|\cos nx\|, & n \text{ paaritu} \end{array}\right\} = n^{m-\frac{1}{2}} \to \infty.$$

Niisiis, kehtib $f(x) = 0$, $f_n \to f$ ning $f'(x) = 0$, aga $f_n' \not\to f'$.

Üldiselt, ülesanne leida $f^{(m)}(t)$, kui $f^{(i)}(t) = 0$, $i = 0, \ldots, m-1$, on samaväärne I liiki Volterra integraalvõrrandiga

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} u(s)\, ds = f(t).$$

Selle integraaloperaatori omaväärtused $\lambda_k = O\left(k^{-m}\right)$. Seega mittekorrektsuse mõõt on m.

1.2.6 Fourier' ridade summeerimine

Olgu H separaabel Hilberti ruum. Olgu (u_k) ortonormeeritud süsteem. Näiteks $L_2(0, 2\pi)$ puhul sobib süsteemiks $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$. Siis iga $u \in H$ on avaldatav kujul $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle\, u_k$. Näiteks ruumis $L_2(a, b)$ on skalaarkorrutiseks $\langle u, u_k \rangle = \displaystyle\int_a^b u(t) u_k(t)\, dt$.

Kui $\xi_k = \langle u, u_k \rangle$ asemel on teada ligikaudsed väärtused $\overline{\xi_k}$, siis vastava lähendi $\overline{u}$ erinevus elemendist u:

$$\|u - \overline{u}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k - \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\xi_k} u_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k - \overline{\xi_k}\right) u_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k - \overline{\xi_k}\right)^2}.$$

Kui $\left|\xi_k - \overline{\xi_k}\right| \leqslant \delta$, siis $\|u - \overline{u}\|$ võib olla kuitahes suur, sest liidetavaid on lõpmatu arv.

1.2.7 Dirichlet' ülesanne lainevõrrandi jaoks

Olgu piirkond $D = \{(x, t) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant t \leqslant \alpha\pi\}$, kus α on konstantne. Vaatleme võrrandit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

piirkonnas D. Olgu rajatingimused

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(x, \alpha\pi) &= \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \alpha\pi. \end{aligned}$$

Selle ülesande lahend ei sõltu pidevalt algandmetest.

Võtame $f = f_n \equiv 0$, $\psi(x) = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx \to 0$, siis lahend on

$$u_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin nt \cdot \sin nx}{\sin n\pi\alpha}.$$

Vaatleme olukorda, kui α on ratsionaalarv, st. $\alpha = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$.

Kui $n = q$, siis nimetajas siinuse argument on $n\pi\alpha = q\pi\alpha = p\pi$, seega $\sin n\pi\alpha = 0$ ehk lahend ei ole üheselt määratud. Juba sellest piisab, et ülesanne ei oleks korrektselt lahenduv. (Lähteandmed hääbuvad, aga $\|u_n\| \to \infty$, seega stabiilsuse tingimus ei ole täidetud.)

1.2.8 Funktsiooni analüütilise jätkamise ülesanne

Olgu antud funktsioon mingil piirkonna osal ja vaja on analüütiliselt jätkata teda kogu piirkonnale. Olgu D lõplik piirkond ja E tema osa. Punkt z_0 olgu piirkonna D rajapunkt, d olgu z_0 kaugus piirkonnani E, $d > 0$.

Olgu $f_1(z)$ piirkonnas D analüütiline funktsioon, analüütiline on ka $f_2(z) = f_1(z) + \frac{\varepsilon}{z - z_0}$, kus ε on väike arv, $\varepsilon > 0$. Vahe $|f_1(z) - f_2(z)| = \left|\frac{\varepsilon}{z - z_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{d}$, kui $z \in E$. Kui $z \in D$, siis vahe $|f_1(z) - f_2(z)|$ on tõkestamata.

1.2.9 Cauchy ülesanne Laplace'i võrrandi jaoks

Vaatleme võrrandit

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$ rajatingimustel

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_y(x,0) = \psi(x).$$

Valime $f \equiv 0$. Kui $\psi = \psi_1 \equiv 0$, siis lahend $u_1 \equiv 0$. Kui $\psi(x) = \psi_2(x) = \frac{1}{a} \sin ax$, $a > 0$, siis lahend $u_2(x,y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \cdot \sinh ay$, kus $\sinh ay = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}$.

Mis juhtub, kui $a \to \infty$?

$$\begin{aligned}
\sup_x |\psi_1(x) - \psi_2(x)| &= \sup_x \left|\frac{1}{a}\sin ax\right| = \frac{1}{a} \to 0, \\
\sup_x |u_1(x,y) - u_2(x,y)| &= \frac{1}{a^2}\sup_x |\sin ax \sinh ay| = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2} \to \infty
\end{aligned}$$

protsessis $a \to \infty$. Seega lähislahend ei sõltu pidevalt lähteandmetest.

1.2.10 Soojusjuhtivuse pöördülesanne

Vaatleme tõkestatud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^n$ võrrandit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a(x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \qquad a(x) > 0, \quad x \in D, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

rajatingimusel $u(x,t) = 0$, $x \in \Gamma$ (raja), $0 \leqslant t \leqslant T$, kus t on aeg.

Otsene ülesanne on sel juhul, kui on antud veel $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in D$ ning huvitab tulevik: teame algtemperatuuri $u(x,0)$, huvitab $u(x,t)$, $t > 0$.

Pöördülesanne on juhul, kui antud veel $u(x,T) = \varphi(x)$, $x \in D$ ning huvitab minevik: teame lõpptemperatuuri $u(x,T)$, huvitab $u(x,t)$, $t < T$.

Otsene ülesanne on korrektne, pöördülesanne mittekorrektne.

Vaatleme pöördülesande juhtu $n = 1$, $a \equiv 1$, siis on võrrand koos tingimustega:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in [0,1], \quad t \in [0,T], \\
u(0,t) &= 0, \qquad t \in [0,T], \\
u(1,t) &= 0, \qquad t \in [0,T], \\
u(x,T) &= \varphi(x), \qquad x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Kui $\varphi = \varphi_1 \equiv 0$, siis $u = u_1 \equiv 0$.

Kui $\varphi(x) = \varphi_2(x) = \frac{1}{n}\sin n\pi x \to 0$ protsessis $n \to \infty$, siis lahend

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n}e^{n^2\pi^2(T-t)}\sin n\pi x.$$

Seega $\sup\limits_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \to 0$, aga

$$\sup_x |u_1(x,t) - u_n(x,t)| = \sup_x |u_n(x,t)| = \frac{1}{n}e^{n^2\pi^2(T-t)} \to \infty$$

protsessis $n \to \infty$.

1.3 Lõplikumõõtmelisest regulariseerimisest

1.3.1 Regularisaatori mõiste

Olgu H ja F Banachi ruumid ning $A : H \to F$. Vaatleme ülesannet

$$Au = f. \tag{1.5}$$

Eeldame, et $f \in \mathcal{R}(A)$ (st. lahendeid leidub), $\mathcal{N}(A)$ võib olla mittetriviaalne.

Tähistame kõigi lahendite hulga $A^{-1}f$. Kui f asemel on teada f_δ, ei pruugi kehtida $f_\delta \in \mathcal{R}(A)$.

Definitsioon 6. *Ülesande (1.5)* regularisaatoriks *nimetatakse operaatorite peret $R_\delta : F \to H$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, mille korral on rahuldatud tingimus*

$$\sup_{\substack{f_\delta \in F \\ \|f_\delta - f\| \leqslant \delta}} \operatorname{dist}\left(R_\delta f_\delta, A^{-1}f\right) \to 0,$$

kui $\delta \to 0$, iga $f \in \mathcal{R}(A)$ korral. (Meenutame, et elemendi $R_\delta f_\delta$ kaugus hulgast $A^{-1}f$ on on defineeritud järgmiselt: $\operatorname{dist}\left(R_\delta f_\delta, A^{-1}f\right) = \inf\limits_{\substack{u \in H, \\ Au = f}} \|R_\delta f_\delta - u\|$*.) Kui regularisaator leidub, siis nimetatakse ülesannet* regulariseeritavaks.

Leidub tuumi esimest liiki integraalvõrrandi $\int_a^b K(t,s)u(s)\,ds = f(t)$ jaoks, mille korral ülesanne pole regulariseeritav, kui operaator A tegutseb $A : C \to L_2$. Regularisaatori olemasolu on garanteeritud, kui ruum H on refleksiivne, st. $H^{**} = H$ (näiteks L_p, $1 < p < \infty$).

Üldiselt mittekorrektsed ülesanded tekivad lõpmatumõõtmelistes ruumides. Näitame, et võttes lähislahendid lõplikumõõtmelisest ruumist saab tihti lähislahendite jada koonduma.

1.3.2 Iseregulariseerimise mõiste

Praktikas on ülesannet tihti vaja diskretiseerida, eelkõige ülesande ligikaudseks lahendamiseks arvutil. Lahendit u võib lähendada lõplikumõõtmelise vektoriga $y = (y_1, \ldots, y_n)$, kus $u = u(t)$ ja $y_i \approx u(t_i)$, või funktsiooniga

$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_i\varphi_i$, kus φ_i on baasifunktsioonid. Mõlemal juhul saab ülesande $Au = f$, $A : H \to F$ lähisülesandena vaadelda lõplikumõõtmelist ülesannet

$$A_n u_n^0 = Q_n f,$$

kus $A_n : H_n \to F_n$, $H_n \subset H$, $F_n \subset F$ ja $Q_n : F \to F_n$ on projektor ning u_n^0 on lähislahend täpse f korral.

Korrektse ülesande puhul on koonduvustingimused $u_n^0 \to u_*(n \to \infty)$ võrrandi $Au = f$ lahendiks u_* vähekitsendavad. Mittekorrektse ülesande korral on nad paljukitsendavad. Kui siiski leiab aset koondumine, on diskretiseerimisalgoritm kasutatav regularisaatorina, kui vaid diskretiseerimissamm sobivalt lähteandmete veatasemega δ ($\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$) kohandada. Sellist regulariseerimist diskretiseerimise abil nimetatakse iseregulariseerimiseks.

Lause 7. *Olgu A lineaarne. Kui võrranditel $A_n u_n^0 = Q_n f$ ja $A_n u_n = Q_n f_\delta$ leiduvad ühesed lahendid ning $u_n^0 \to u_*$ protsessis $n \to \infty$, siis valides $n = n(\delta)$ nii, et $n(\delta) \to \infty$, aga $\left\|A_n^{-1} Q_n\right\| \delta \to 0$ protsessis $\delta \to 0$, saame koonduvuse $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ ($\delta \to 0$). (See tähendab, just selle, mis iseregulariseerimise mõistes kirjas.)*

Tõestus. Lause eeldustel

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_*\| &= \left\|A_n^{-1} Q_n f_\delta - A_n^{-1} Q_n f + u_n^0 - u_*\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|A_n^{-1} Q_n (f_\delta - f)\right\| + \left\|u_n^0 - u_*\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|A_n^{-1} Q_n\right\| \|f_\delta - f\| + \left\|u_n^0 - u_*\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|A_n^{-1} Q_n\right\| \delta + \left\|u_n^0 - u_*\right\| \to 0. \quad \square
\end{aligned}$$

1.3.3 Diferentseerimisülesande lahendamine diferentsvalemi abil

Vaja leida $u(t) = f'(t)$, $f \in C^1[0,1]$. Antud on f_δ nii, et $\|f_\delta - f\|_C \leqslant \delta$.

Toome sisse diferentseerimisoperaatori

$$\Delta_h f(t) = \begin{cases}
\frac{1}{h}\left(f(t+h) - f(t)\right), & 0 < t \leqslant \frac{h}{2}, \\
\frac{1}{h}\left(f\left(t + \frac{h}{2}\right) - f\left(t - \frac{h}{2}\right)\right), & \frac{h}{2} < t < 1 - \frac{h}{2}, \\
\frac{1}{h}\left(f(t) - f(t-h)\right), & 1 - \frac{h}{2} \leqslant t < 1.
\end{cases}$$

Sileda funktsiooni f korral $\Delta_h f \to f'$ protsessis $h \to 0$. Ligikaudsete andmete korral saame võrdust

$$\|\Delta_h\| = \sup_{\|f\|=1} \|\Delta_h f\| = \frac{2}{h}.$$

kasutades veahinnangu

$$\|\Delta_h f_\delta - f'\| \leqslant \|\Delta_h (f_\delta - f)\| + \|\Delta_h f - f'\| \leqslant \frac{2}{h}\delta + \|\Delta_h f - f'\|. \tag{1.6}$$

Seega $\|\Delta_h f_\delta - f'\| \to 0$, kui $h(\delta)$ valida sõltuvalt arvust δ nii, et $h(\delta) \to 0$ ja $\dfrac{\delta}{h(\delta)} \to 0$ protsessis $\delta \to 0$. Näiteks sobib $h(\delta) = \delta^\nu$, kus $0 < \nu < 1$.

Kui $\|f''\|_C \leqslant M$, siis $\|\Delta_h f - f'\| \leqslant \dfrac{Mh}{2}$ ja (1.6) paremal pool on $\psi(h) := \dfrac{2\delta}{h} + \dfrac{Mh}{2}$. Võtame eesmärgiks valida h nii, et see minimiseeriks $\psi(h)$. Saame, et $\psi'(h) = -\dfrac{2\delta}{h^2} + \dfrac{M}{2} = 0$, millest $h^2 = \dfrac{4\delta}{M}$ ning $h = 2\sqrt{\dfrac{\delta}{M}}$. Sel juhul $\psi(h) = \sqrt{\delta M} + M\sqrt{\dfrac{\delta}{M}} = 2\sqrt{\delta M}$.

Ilmneb, et kui lähteandmed võtta täpsusega δ, siis tuletise saame täpsusega $\sqrt{\delta}$. Mittekorrektsete ülesannete korral on tüüpiline, et lahendi saame väiksema täpsusega kui lähteandmed.

Kui lähendame $f^{(m)}(t)$ diferentsvalemiga, mis täpse f korral lähendab täpsusastmega $O(h^p)$, siis koguviga on ligikaudse f_δ kasutamisel $O\left(\dfrac{\delta}{h^m} + h^p\right)$. Valides h nii, et $\dfrac{\delta}{h^m} \sim h^p$ (st. $h \sim \delta^{\frac{1}{m+p}}$), saame koguvea $O\left(\delta^{\frac{p}{p+m}}\right)$. Kui m suureneb, siis täpsus väheneb. Kui p suureneb, siis täpsus suureneb samuti.

1.3.4 Fourier' ridade summeerimine

Olgu (u_k) ortonormeeritud baas, $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, u_k \rangle u_k$. Kui $\xi_k = \langle u, u_k \rangle$ asemel on teada $\overline{\xi_k}$, $\left|\xi_k - \overline{\xi_k}\right| < \delta$, siis sellele vastab $\overline{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\xi_k} u_k$.

Võtame lähislahendiks $u_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} u_k$, siis

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k} u_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k + \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\xi_k} - \xi_k\right) u_k \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k \right\| = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\xi_k} - \xi_k\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{n}\delta + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k u_k \right\| .
\end{aligned}
$$

Protsessis $n \to \infty$ läheneb teine liidetav nullile, sest rida koondub. Seega $\left\|u_{n(\delta)} - u\right\| \to 0$, kui $n = n(\delta)$ valida nii, et $n(\delta) \to \infty$, $\sqrt{n}\delta \to 0$ protsessis $\delta \to 0$.

1.3.5 Operaatorvõrrandi lahendamine spektraallõike meetodiga

Olgu $H = F$, $A \in \mathcal{L}(H)$ kompaktne, $A = A^* \geqslant 0$. Operaatori A omaväärtused λ_k rahuldavad seost $Av_k = \lambda_k v_k$, kus v_k on λ_k-le vastav omaelement. Elemendid v_k valime ortonormeeritud, arvud λ_k valime kahanevas järjekorras (selline omaväärtuste jada leidub kompaktse operaatori korral): $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \to 0$.

Eeldame, et võrrandil $Au = f$ leidub lahend. Siis lahend avaldub Picard'i teoreemi (vt. teoreem 5) kohaselt kujul

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k .$$

Võtame lähislahendiks $u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k \rangle v_k$. Siis

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k \rangle v_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k - u \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta - f, v_k \rangle v_k \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k^{-1} \right) \left(\|f_\delta - f\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\delta}{\lambda_n} + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k \right\|.
\end{aligned}
$$

Teine liidetav ehk rea jääkliige koondub 0-ks kui $n \to \infty$, kuna eeldasime lahendi olemasolu. Seega $\|u_n - u\| \to 0$ on garanteeritud, kui $n = n(\delta)$ valida nii, et $n(\delta) \to \infty$ ja $\frac{\delta}{\lambda_n} \to 0$ protsessis $\delta \to 0$.

Vaatleme veel juhtu, kui täpne lahend esitub kujul $u_* = A^p w$, $w \in H$, $p > 0$. Siis

$$
\langle f, v_k \rangle = \left\langle A^{p+1} w, v_k \right\rangle = \left\langle w, A^{p+1} v_k \right\rangle = \left\langle w, \lambda_k^{p+1} v_k \right\rangle = \lambda_k^{p+1} \langle w, v_k \rangle .
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f, v_k \rangle v_k \right\| &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^{-1+p+1} \langle w, v_k \rangle v_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \max_{k \geqslant n+1} \lambda_k^p \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle w, v_k \rangle v_k \right\| \leqslant \\
&\leqslant \lambda_{n+1}^p \|w\| .
\end{aligned}
$$

Veahinnang

$$
\frac{\delta}{\lambda_n} + \lambda_{n+1}^p \|w\| \leqslant \frac{\delta}{\lambda_n} + \lambda_n^p \|w\| .
$$

on minimaalne, kui $\frac{\delta}{\lambda_n} \sim \lambda_n^p$, st. $\lambda_n^{p+1} \sim \delta$ ehk $\lambda_n \sim \delta^{\frac{1}{p+1}}$. Siis on veahinnang järku $O\left(\delta^{\frac{p}{p+1}}\right)$.

Mida suurem on p, seda kõrgemat järku veahinnangu saame. Päris $O(\delta)$ kätte ei saa.

1.3.6 I liiki Volterra integraalvõrrandi lahendamine kvadratuurvalemite meetodiga

Vaatleme võrrandit

$$\int_0^t K(t,s)u(s)\,ds = f(t), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1.$$

Olgu $K(t,s)$ pidev, t järgi diferentseeruv, $K(t,t) \neq 0$ kogu diagonaalil $t \in [0,1]$.

Kvadratuurvalemite meetod seisneb selles, et t asemel vaadeldakse punkte $t_i = ih$, $i = 0,\ldots,n$, $nh = 1$. Integraal lähendatakse järgmiselt:

$$\int_0^1 \Phi(s)\,ds = \sum_{j=1}^{n} c_j \Phi(t_j).$$

Integraalvõrrandi aproksimeerimisel kvadratuurvalemiga saame

$$\sum_{j=0}^{i} c_{ij} K_{ij} y_j = f_i, \qquad i = 0,1,\ldots,$$

kus $f_i = f(t_i)$, $y_j \approx u(s_j)$, $s_j = jh$, $K_{ij} = K(t_i, s_j)$.

Trapetsvalemis valitakse kaalud $c_{i0} = c_{ii} = \dfrac{h}{2}$ ning $c_{i1} = \cdots = c_{i,i-1} = h$.

Volterra võrrandis on lähislahendid võimalik saada rekurrentselt. Lähendi y_0 saamiseks diferentseerime võrrandit:

$$K(t,t)u(t) + \int_0^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} \cdot u(s)\,ds = f'(t).$$

Siit $t = 0$ korral $K(0,0)u(0) = f'(0)$, millest $y_0 = \dfrac{f'(0)}{K_{00}}$.

Valime kvadratuurvalemis $i = 1$, siis

$$c_{10}K_{10}y_0 + c_{11}K_{11}y_1 = f_1.$$

Siit leiame y_1:

$$y_1 = \frac{1}{c_{11}K_{11}}\left(f_1 - c_{10}K_{10}y_0\right).$$

Analoogiliselt jätkame, leides

$$y_i = \frac{1}{c_{ii}K_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij}K_{ij}y_j\right).$$

Kasutades trapetsvalemit, leidsime Volterra integraalvõrrandi lahendi rekurrentselt.

Trapetsvalem Keskmine ristkülikvalem

Keskmine ristkülikvalem Võrrand aproksimeeritakse kujule

$$h\sum_{j=0}^{i-1} K_{i,j+\frac{1}{2}}y_{j+\frac{1}{2}} = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

kus $s_{j+\frac{1}{2}} = s_j + \frac{h}{2}$ ja $K_{i,j+\frac{1}{2}} = K\left(t_i, s_{j+\frac{1}{2}}\right)$.

Kui $i = 1$, siis saame $y_{\frac{1}{2}} = \frac{f_1}{hK_{1,\frac{1}{2}}}$.

Üldiselt, $y_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{hK_{i,i-\frac{1}{2}}}\left(f_i - h\sum_{j=0}^{i-2} K_{i,j+\frac{1}{2}}y_{j+\frac{1}{2}}\right)$.

Kui $\|f_\delta - f\|_C \leqslant \delta$, siis küllalt sileda u korral $|y_i - u(t_i)| \leqslant c\left(h^2 + \frac{\delta}{h}\right)$ kehtib nii trapetsvalemi kui ka keskmise ristkülikvalemi jaoks. Veahinnang on optimaalne, kui $h^2 \sim \frac{\delta}{h}$ ehk $h^3 \sim \delta$ ehk $h \sim \delta^{\frac{1}{3}}$, siis veahinnang on $O\left(\delta^{\frac{2}{3}}\right)$.

Kasutades vasak- või parempoolset ristkülikvalemit, tuleb veahinnang $O\left(h + \frac{\delta}{h}\right)$, siis valik $h \sim \delta^{\frac{1}{2}}$ annab veahinnanguks $O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right)$.

1.4 Operaatorvõrrandite iseregulariseerimine projektsioonimeetoditega

Olgu H ja F Hilberti ruumid, $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Vaatleme ülesannet $Au = f$.

1.4.1 Projektsioonimeetodite kirjeldus

Olgu ruumid H_n ja F_n lõplikumõõtmelised ja võrdse dimensiooniga, $H_n \subset H$, $F_n \subset F$. Vaatleme projekteeritud võrrandit $A_n u_n = Q_n f$, kus Q_n on ortoprojektor $F \to F_n$. Seega $Q_n = Q_n^* = Q_n^2$. Olgu P_n ortoprojektor $H \to H_n$. Siis $A_n = Q_n A P_n \in \mathcal{L}(H_n, F_n)$.

Saame, et $u_n \in H_n$ rahuldab seoseid

$$A_n u_n = Q_n f \quad \Leftrightarrow \quad Q_n(Au_n - f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle Au_n - f, z_n \rangle = 0 \, \forall z_n \in F_n. \tag{1.7}$$

1.4.2 Projekteeritud võrrandi ühene lahenduvus

Lemma 8. *Olgu* $\mathcal{N}(A) \cap H_n = \{0\}$ *ja* $\tau_n = \inf\limits_{u_n \in H_n} \dfrac{\|Q_n A u_n\|}{\|Au_n\|} > 0$. *Siis projekteeritud võrrandis* A_n *on pööratav ja* $\varkappa_n \leqslant \left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\varkappa_n}{\tau_n}$*, kus*

$$\varkappa_n = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Av_n\|}.$$

Tõestus. Olgu $w_n \in H_n$ suvaline. Siis

$$\|Q_n A w_n\| = \|A_n w_n\| \geqslant \tau_n \|Aw_n\| \geqslant \frac{\tau_n}{\varkappa_n} \|w_n\|.$$

Operaatori A_n üksühesus tuleb eeldusest $\mathcal{N}(A) \cap H_n = \{0\}$. (Seega on $A_n : H_n \to F_n$ pööratav.) Võttes $z_n = A_n w_n$, saame

$$\|z_n\| \geqslant \frac{\tau_n}{\varkappa_n} \left\|A_n^{-1} z_n\right\|,$$

seega $\left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\varkappa_n}{\tau_n}$. Olgu $v_n \in H_n$ element, mille korral $\varkappa_n$ definitsioonis saavutatakse maksimum (H_n on lõplikumõõtmeline). Siis

$$\begin{aligned} \|A_n v_n\| &= \|Q_n A v_n\| \leqslant \|Q_n\| \|Av_n\| = \|Av_n\| = \frac{\|v_n\|}{\varkappa_n} = \\ &= \frac{\|A_n^{-1} A_n v_n\|}{\varkappa_n} \leqslant \varkappa_n^{-1} \left\|A_n^{-1}\right\| \cdot \|A_n v_n\|. \end{aligned}$$

Seega $\left\|A_n^{-1}\right\| \geqslant \varkappa_n$. $\square$

Vaatleme kaasoperaatorit $A^* \in \mathcal{L}(F, H)$. Saame, et

$$A_n^* = (Q_n A P_n)^* = P_n^* A^* Q_n^* = P_n A^* Q_n,$$

kus seetõttu, et P_n ja Q_n on ortoprojektorid, kehtivad $P_n^* = P_n$ ja $Q_n^* = Q_n$.

Lemma 9. *Olgu* $\mathcal{N}(A^*) \cap F_n = \{0\}$ *ja* $\tau_n^* = \inf\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|P_n A^* z_n\|}{\|A^* z_n\|} > 0$. *Siis* A_n *on pidevalt pööratav ja kehtivad hinnangud*

$$\varkappa_n^* \leqslant \left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant \frac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*},$$

kus $\varkappa_n^* = \sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}$.

Lisaks kehtivad seosed $\left\|A_n^{-1} Q_n A\right\| = \dfrac{1}{\tau_n^*}$, $\left\|A_n^{-1} Q_n A(I - P_n)\right\| = \sigma_n^*$, *kus* $\sigma_n^* = \sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|(I - P_n) A^* z_n\|}{\|P_n A^* z_n\|}$, *ja* $\dfrac{1}{\tau_n^*} = \left(1 + (\sigma_n^*)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Tõestus. Olgu $z_n \in F_n$. Siis

$$\begin{aligned} \|A_n^* z_n\| &= \|P_n A^* Q_n z_n\| = \|P_n A^* z_n\| \geqslant \\ &\geqslant \tau_n^* \|A^* z_n\| \geqslant \frac{\tau_n^*}{\varkappa_n^*} \|z_n\|. \end{aligned}$$

Olgu $z_n = (A_n^*)^{-1} v_n$, $v_n \in H_n$. Siis

$$\left\|(A_n^*)^{-1} v_n\right\| \leqslant \frac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*} \|v_n\|,$$

millest $\left\|A_n^{-1}\right\| = \left\|(A_n^*)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*}$.

Olgu $z_n \in F_n$ selline, et $\varkappa_n^* = \dfrac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|}$ (supreemum saavutatakse F_n lõplikumõõtmelisuse tõttu), see tähendab

$$\begin{aligned} \|A_n^* z_n\| &= \|P_n A^* z_n\| \leqslant \|P_n\| \|A^* z_n\| = \frac{\|z_n\|}{\varkappa_n^*} = \\ &= \frac{\left\|(A_n^*)^{-1} A_n^* z_n\right\|}{\varkappa_n^*} \leqslant \frac{\left\|(A_n^*)^{-1}\right\| \|A_n^* z_n\|}{\varkappa_n^*}, \end{aligned}$$

kust $\left\|A_n^{-1}\right\| = \left\|(A_n^*)^{-1}\right\| \geqslant \varkappa_n^*$.

On teada, et kompaktse enesekaasse operaatori B korral $\|B\| = \max|\lambda_B|$, kus λ_B on B omaväärtus (vt. E. Oja, P. Oja „Funktsionaalanalüüs" 1991, lk. 274). Võttes $B_n = A_n^{-1}Q_nA$ ja $B = B_nB_n^*$, saame $\lambda_B = \lambda_{B_n}^2$ ning $\|B_n\| = \lambda_n^{\frac{1}{2}}$ kus λ_n on operaatori $B \in \mathcal{L}(H_n, H_n)$ suurim omaväärtus. Olgu v_n vastav omaelement, siis $A_n^{-1}Q_nAA^*Q_n\left(A_n^*\right)^{-1}v_n = \lambda_nv_n$. Tähistame $x_n = \left(A_n^*\right)^{-1}v_n$, siis $A_n^{-1}Q_nAA^*Q_nx_n = \lambda_nA_n^*x_n$ ehk $Q_nAA^*Q_nx_n = \lambda_nA_nA_n^*x_n$.

On üldine fakt, et operaatori $B = B^* \in \mathcal{L}(H, H)$ suurim omaväärtus λ rahuldab seost $\lambda = \sup\limits_{v\in H}\dfrac{\langle Bv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$. Seega

$$\lambda_n = \sup_{z_n\in F_n}\frac{\langle Q_nAA^*Q_nz_n, z_n\rangle}{\langle A_n^*z_n, A_n^*z_n\rangle} = \sup_{z_n\in F_n}\frac{\|A^*Q_nz_n\|^2}{\|A_n^*z_n\|^2} = \sup_{z_n\in F_n}\frac{\|A^*z_n\|^2}{\|P_nA^*z_n\|^2} = \frac{1}{\left(\tau_n^*\right)^2},$$

kuna $Q_nz_n = z_n$. Seega võrdus $\left\|A_n^{-1}Q_nA\right\| = \dfrac{1}{\tau_n^*}$ on näidatud. Võrdus $\left\|A_n^{-1}Q_nA\left(I-P_n\right)\right\| = \sigma_n^*$ saadakse analoogiliselt.

Lõpuks,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\tau_n^*}\right)^2 &= \sup_{z_n\in F_n}\frac{\|A^*z_n\|^2}{\|P_nA^*z_n\|^2} = \sup_{z_n\in F_n}\frac{\|P_nA^*z_n\|^2 + \|(I-P_n)A^*z_n\|^2}{\|P_nA^*z_n\|^2} = \\ &= 1 + \sup_{z_n\in F_n}\frac{\|(I-P_n)A^*z_n\|^2}{\|P_nA^*z_n\|^2} = 1 + \left(\sigma_n^*\right)^2. \quad \square\end{aligned}$$

1.4.3 Projektsiooniruumi mõõtme aprioorne valik

Teoreem 10. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H, F)$, kus H ja F on Hilberti ruumid. Olgu $f \in \mathcal{R}(A)$ ning $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Olgu täidetud järgmised tingimused:*

1° $\|P_nu - u\| \to 0$ *($n \to \infty$) iga $u \in H$ korral,*

2° $\mathcal{N}(A^*) \cap F_n = \{0\}$, *kui $n \geqslant n_0$,*

3° $\|P_nA^*z_n\| \geqslant \tau^*\|A^*z_n\|$ *iga $z_n \in F_n$ korral, kus $n \geqslant n_0$ ja $\tau^* = \text{const} > 0$.*

Siis kehtivad järgmised väited.

1) Võrrandil $Au = f$ leidub ühene lahend $u_* \in H$ ning projekteeritud võrrandil $A_nu_n = Q_nf$ leidub ühene lahend $u_n \in H_n$, kui $n \geqslant n_0$.

2) Täpsete andmete ($\delta = 0$) korral $\|u_n - u_*\| \to 0$ protsessis $n \to \infty$

3) Kui andmed on ebatäpsed ($\delta > 0$), siis valides $n = n(\delta)$ nii, et

$$n(\delta) \to \infty, \quad \delta \cdot \varkappa^*_{n(\delta)} \to 0 \quad (\delta \to 0), \tag{1.8}$$

saame $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$.

Tõestus. 1) Projekteeritud võrrandi ühese lahendi garanteerib tingimus 2° (vt. lemma 9). Lahendi u_* leidumine on samaväärne sisalduvusega $f \in \mathcal{R}(A)$. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $u_0 \in H$ nii, et $u_0 \neq 0$, aga $Au_0 = 0$. Võrrandil $A_n^* z_n = P_n u_0$ leidub $n \geqslant n_0$ korral täpselt üks lahend $z_n \in F_0$. Tingimuse 1° kohaselt $P_n A^* z_n = P_n u_0 \to u_0$ ($n \to \infty$).

Tingimusest 3° saame, et

$$\|A^* z_n\| \leqslant \frac{1}{\tau^*} \|P_n A^* z_n\| \leqslant \mathrm{const},$$

kuna paremal asuv jada koondub. Seega on jada $(A^* z_n)$ tõkestatud. Tõkestatud jada sisaldab nõrgalt koonduva osajada, st. leidub v nii, et (minnes üle osajadale) $A^* z_n \xrightarrow{w} v$. Kuna $*$-nõrk topoloogia on eralduv ning korraga $P_n A^* z_n \xrightarrow{w^*} u_0$ ja $P_n A^* z_n \xrightarrow{w} v$ (seega ka w^*-topoloogias), siis $v = u_0$. Niisiis $A^* z_n \xrightarrow{w} u_0$.

Nüüd samal ajal $\langle A^* z_n, u_0\rangle \to \|u_0\|^2$ ja $\langle A^* z_n, u_0\rangle = \langle z_n, Au_0\rangle = \langle z_n, 0\rangle = 0$. Siit järeldub, et $u_0 = 0$, mis on vastuolus eeldusega $u_0 \neq 0$. Järelikult sellist elementi u_0 ei leidu.

2) Tingimus $A_n u_n = Q_n f_\delta$ annab seetõttu, et $f = Au_*$ ja $A_n = Q_n A P_n$:

$$A_n(u_n - P_n u_*) = Q_n(f_\delta - f) + Q_n A(u_* - P_n u_*).$$

Sellele võrdusele operaatorit A_n^{-1} rakendades saame

$$\begin{aligned} u_n - P_n u_* &= A_n^{-1} Q_n(f_\delta - f) + A_n^{-1} Q_n A(u_* - P_n u_*) = \\ &= A_n^{-1} Q_n(f_\delta - f) + A_n^{-1} Q_n A(I - P_n)(I - P_n)u_*. \end{aligned}$$

Järelikult kasutades lemmat 9, saame

$$\begin{aligned} \|u_n - u_*\| &\leqslant \|u_n - P_n u_*\| + \|P_n u_* - u_*\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|A_n^{-1}\right\| \|Q_n\| \|f_\delta - f\| + \left\|A_n^{-1} Q_n A(I - P_n)\right\| \|(I - P_n)u_*\| + \qquad (1.9) \\ &\qquad + \|(I - P_n)u_*\| = \\ &= \left\|A_n^{-1}\right\| \|f_\delta - f\| + (1 + \sigma_n^*) \|(I - P_n)u_*\| = \\ &= \left\|A_n^{-1}\right\| \|f_\delta - f\| + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{(\tau_n^*)^2} - 1}\right) \|(I - P_n)u_*\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*} \cdot \delta + \left(1 + \frac{\sqrt{1 - (\tau_n^*)^2}}{\tau_n^*}\right) \|(I - P_n)u_*\| . \qquad (1.10) \end{aligned}$$

Mõlemad liidetavad hääbuvad $n = n(\delta)$ valikureegli tõttu protsessis $\delta \to 0$. $\square$

1.4.4 Projektsiooniruumi mõõtme valik hälbe põhjal

Teoreem 11. *Olgu* $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ *ning kehtigu veel järgmised viis tingimust:*

1° $\|u - P_n u\| \to 0$ *iga* $u \in H$ *korral,*

2° $\mathcal{N}(A) \cap H_n = \{0\}$, *kui* $n \geqslant n_0$,

3° $\|Q_n A v_n\| \geqslant \tau \|A v_n\|$ *mingi konstandi* $\tau > 0$ *korral, kus* $v_n \in H_n$ *ja* $n \geqslant n_0$,

4° $\|P_n A^* z_n\| \geqslant \tau^* \|A^* z_n\|$ *mingi konstandi* $\tau^* > 0$ *korral, kus* $z_n \in F_n$ *ja* $n \geqslant n_0$,

5° $\varkappa_{n+1} \|(I - Q_n')A\| \leqslant \gamma' = \mathrm{const}$, *kus* Q_n' *on ortoprojektor* $F \to A(H_n)$ *ja* $n \geqslant n_0$.

Siis kehtivad järgmised väited.

1) Võrrandil $Au = f$ *leidub täpselt üks lahend* $u_* \in H$, *projekteeritud võrrandil leidub täpselt üks lahend* $u_n = H_n$, *kui* $n \geqslant n_0$.

2) Kui arv $n = n(\delta)$ *valida jadast* $1, 2, \ldots$ *selliselt, et* $n(\delta)$ *on esimene selline naturaalarv, mille korral projekteeritud võrrand on üheselt lahenduv ja* $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$, *kus* $b = \mathrm{const} > \frac{1}{\tau}$, *siis* $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$.

Tõestus. Teoreemi 10 tõestusest saame $n \geqslant n_0$ korral hinnangu (seekord hindasime $\left\|A_n^{-1}\right\|$ lemma 9 alusel)

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \frac{\varkappa_n}{\tau}\delta + c' \|(I - P_n)u_*\| .$$

Saab näidata (see pole väga lihtne), et kui on rahuldatud tingimused 2° ja 3°, siis projekteeritud võrrandi $A_n u_n = Q_n f_\delta$ lahendi u_n hälbe jaoks kehtib hinnang

$$\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \frac{1}{\tau_n} \operatorname{dist}(f_\delta, A(H_n)) = \frac{1}{\tau_n} \min_{v_n \in H_n} \|f_\delta - Av_n\| .$$

Minnes piirile, saame

$$\lim_{n\to\infty} \|Au_n - f_\delta\| \leqslant \frac{1}{\tau} \lim_{n\to\infty} \min_{v_n\in H_n} \|f_\delta - Av_n\| \leqslant \frac{1}{\tau} \|f_\delta - Au_*\| \leqslant \frac{1}{\tau}\delta.$$

Seega n valik hälbeprintsiibi abil on teostatav.

Tähistame $m = n(\delta) - 1$. Siis

$$b\delta < \|Au_m - f_\delta\| \leqslant \tau^{-1} \operatorname{dist}(f_\delta, A(H_m)) \leqslant \tau^{-1} (\delta + \operatorname{dist}(f, A(H_m))),$$

millest seetõttu, et $(I - Q'_m)AP_m u_* = 0$ (kuivõrd $AP_m u_* \in A(H_m)$), tuleb 5° põhjal

$$\begin{aligned}\left(b - \tau^{-1}\right)\delta &< \tau^{-1} \operatorname{dist}(f, A(H_m)) = \tau^{-1} \|f - Q'_m Au_*\| = \\ &= \tau^{-1} \|(I - Q'_m)\, A(I - P_m)u_*\| \leqslant \\ &\leqslant \tau^{-1} \|(I - Q'_m)\, A\| \cdot \|(I - P_m)u_*\| \leqslant \tau^{-1}\gamma' \varkappa_{n(\delta)}^{-1} \left\|(I - P_{n(\delta)-1})u_*\right\|.\end{aligned}$$

Oleme saanud, et

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \frac{\gamma'}{(b\tau - 1)\,\tau} \|(I - P_{n-1})u_*\| + c' \|(I - P_n)u_*\|. \tag{1.11}$$

Kui $n(\delta) \to \infty$ protsessis $\delta \to 0$, siis see hinnang annab koonduvuse.

Kui $n(\delta_k) \leqslant l = \text{const}$ mingi jada $\delta_k \to 0$ ($k \to \infty$) korral, siis $u_{n(\delta_k)}$ paiknevad lõplikumõõtmelises alamruumis – ruumide H_n, $n = 1, \ldots, l$, lineaarses kattes. Hinnangu (1.11) põhjal on jada $\left(u_{n(\delta_k)}\right)$ tõkestatud, seega suhteliselt kompaktne ruumis H. Kuna $\left\|Au_{n(\delta)} - f_\delta\right\| \leqslant b\delta$, siis $Au_{n(\delta_k)} \to f = Au_*$ ($k \to \infty$) (hälbed koonduvad). Seega ka $u_{n(\delta_k)} \to u_*$ ($k \to \infty$). □

Märkus 12. *Kui $H_{n+1} \subset H_n$ iga n korral, siis $n \leqslant l$ parajasti siis, kui $u_* \in H_l$.*

1.4.5 Lisandusi koonduvusteoreemile

Lause 13. *1) Kui on rahuldatud tingimus 3° ja mingi $\alpha \in (0, 1)$ korral kehtib*

6° $\varkappa_n^\alpha \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \gamma = \text{const}$ *($n \geqslant n_0$),*

siis kehtib 4°, kus $\tau^* = \tau\left(\tau^{2\alpha} + \gamma^2\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}$.

2) Kui on rahuldatud 4° ning leidub $\alpha \in (0, 1)$ nii, et kehtib

7° $(\varkappa_n^*)^\alpha \left\|(I-Q_n)(AA^*)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \gamma^* = \mathrm{const}$ *($n \geqslant n_0$),*

siis kehtib 3°, kus $\tau = \tau^* \left((\tau^*)^{2\alpha} + (\gamma^*)^2\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}$.

Tõestus. Tõestame väite 2). Kasutame operaatori A polaaresitust: $A = (AA^*)^{\frac{1}{2}} U$, kus $U \in \mathcal{L}(H,F)$ on osalise isomeetria operaator, st. $\|Uv\| \leqslant \|v\|$ iga $v \in H$ korral. Tähistame $B = (AA^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(F,F)$, siis $A = BU$. Siis momentide võrratust kasutades saame, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau_n^2} &= \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|Av_n\|^2}{\|Q_nAv_n\|^2} = \sup_{z_n \in U(H_n)} \frac{\|Bz_n\|^2}{\|Q_nBz_n\|^2} = \\
&= \sup_{z_n \in U(H_n)} \frac{\|Q_nBz_n\|^2 + \|(I-Q_n)Bz_n\|^2}{\|Q_nBz_n\|^2} = \\
&= 1 + \sup_{z_n \in U(H_n)} \frac{\|(I-Q_n)Bz_n\|^2}{\|Q_nBz_n\|^2} \leqslant \\
&\leqslant 1 + \|(I-Q_n)B^\alpha\|^2 \sup_{z_n \in U(H_n)} \frac{\|B^{1-\alpha}z_n\|^2}{\|Q_nBz_n\|^2} \leqslant \\
&\leqslant 1 + \|(I-Q_n)B^\alpha\|^2 \sup_{z_n \in U(H_n)} \frac{\|Bz_n\|^{(1-\alpha)\cdot 2}\|z_n\|^{2\alpha}}{\|Q_nBz_n\|^{2(1-\alpha)}\|QBz_n\|^{2\alpha}}.
\end{aligned}$$

Osutub, et

$$\sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|Bz_n\|}{\|Q_nBz_n\|} = \frac{1}{\tau_n}$$

ning

$$\sup_{z_n \in UH_n} \frac{\|z_n\|}{\|Q_nBz_n\|} = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|Q_nAv_n\|} = \sup_{v_n \in H_n} \frac{\|v_n\|}{\|A_nv_n\|} = \left\|A_n^{-1}\right\| \leqslant \frac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*}.$$

Seetõttu tingimuse 7° tõttu

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leqslant 1 + \|(I-Q_n)B^\alpha\|^2 \cdot \left(\frac{1}{\tau_n^2}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\varkappa_n^*}{\tau_n^*}\right)^{2\alpha} \leqslant 1 + \frac{(\gamma^*)^2}{\tau_n^{2(1-\alpha)}(\tau^*)^{2\alpha}}.$$

Siit nähtub, et $\dfrac{1}{\tau_n}$ on tõkestatud. Tõepoolest, kui $\dfrac{1}{\tau_n} \to \infty$ ($n \to \infty$), siis $\left(\dfrac{1}{\tau_n}\right)^{1-\alpha} = o\left(\dfrac{1}{\tau_n}\right)$, mis on vastuolus viimase võrratusega.

Vaja on näidata, et

$$\tau_n \geqslant \tau^* \left((\tau^*)^{2\alpha} + (\gamma^*)^2\right)^{-\frac{1}{2\alpha}},$$

mis on samaväärne sellega, et

$$\frac{1}{\tau_n^2} \leqslant \frac{\left((\tau^*)^{2\alpha} + (\gamma^*)^2\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{(\tau^*)^2} = \left(1 + \frac{(\gamma^*)^2}{(\tau^*)^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Tähistame $x = \dfrac{1}{(\tau_n)^2}$ ja $c = \dfrac{(\gamma^*)^2}{(\tau^*)^{2\alpha}}$.

Ülesanne. Näidata, et $0 < x \leqslant 1 + cx^{1-\alpha} \Rightarrow x \leqslant (1+c)^{\frac{1}{\alpha}}$.

1) osa tõestus tuleb duaalsust kasutades analoogiliselt. □

Lemma 14. *Olgu* $H = F$*,* $H_n = F_n$ *ja* $A = A^* > 0$*. Kui leidub* $\alpha \in (0,1)$ *nii, et*

$$\varkappa_n^\alpha \left\|(I - P_n)A^\alpha\right\| \leqslant \gamma = \text{const}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

siis

$$\left\|P_n A v_n\right\| \geqslant \tau \left\|A v_n\right\|, \qquad v_n \in H_n, \quad n \geqslant 1.$$

Siin $\tau = \left(1 + \gamma^2\right)^{-\frac{1}{2\alpha}}$*, kui* $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ *ning* $\tau = (1+\gamma)^{-\frac{1}{\alpha}}$*, kui* $\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Tõestus. Analoogiline lause 13 tõestusega. □

1.4.6 Kaks võrratust

Lemma 15. *Olgu* $B = B^* \geqslant 0$*,* $B \in \mathcal{L}(H,H)$*. Siis*

$$\left\|(I - P_n)B^p\right\| \leqslant \left\|(I - P_n)B^q\right\|^{\frac{p}{q}}, \qquad 0 < p \leqslant q.$$

Tõestus. Kuna B ja P_n on enesekaassed ning operaatori ja kaasoperaatori normid võrduvad, siis

$$\left\|(I - P_n)B^p\right\| = \left\|(B^p(I - P_n))^*\right\| = \left\|B^p(I - P_n)\right\|.$$

Sama saame teha tõestatava võrratuse paremal pool seisva avaldisega.

Momentide võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}
\left\|B^p(I - P_n)v\right\| &\leqslant \left\|B^q(I - P_n)v\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|(I - P_n)v\right\|^{1-\frac{p}{q}} \leqslant \\
&\leqslant \left\|B^q(I - P_n)\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|v\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|I - P_n\right\|^{1-\frac{p}{q}} \left\|v\right\|^{1-\frac{p}{q}} = \\
&= \left\|B^q(I - P_n)\right\|^{\frac{p}{q}} \left\|v\right\|.
\end{aligned}$$

Seega $\left\|B^p\left(I - P_n\right)\right\| \leqslant \left\|B^q\left(1 - P_n\right)\right\|^{\frac{p}{q}}$. □

Lemma 16. *Olgu Q'_n ortoprojektor $F \to AH_n$. Siis*

$$\|(I - Q'_n)A\| \leqslant \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\|^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \forall \alpha > 0.$$

Tõestus. Vaatleme olukorda $\alpha = \dfrac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Sellest piisaks, sest siis lemmas 15 valides $B = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ saame

$$\left\|(I - P_n)B^{\frac{1}{m}}\right\|^m \leqslant \|(I - P_n)B^\alpha\|^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \frac{1}{m} < \alpha.$$

Kasutame polaaresitust $A = UB = U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, kus U on osaline isomeetria, $\|U\| = 1$. Olgu P'_n ortoprojektor $H \to BH_n$. Kuna $UP'_nH \subset AH_n$, siis $(I - Q'_n)UP'_n = 0$. Seega

$$(I - Q'_n)A = (I - Q'_n)UB = (I - Q'_n)U(I - P'_n)B.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\|(I - Q'_n)A\| &= \|(I - Q'_n)U(I - P'_n)B\| \leqslant \\ &\leqslant \|I - Q'_n\|\,\|U\|\,\|(I - P'_n)B\| \leqslant \|(I - P'_n)B\|.\end{aligned}$$

Tähistame $P_n^{(j)}$ ortoprojektori $H \to B^{\frac{j}{m}}H_n$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Siis $P_n^{(0)} = P_n$ ja $P_n^{(m)} = P'_n$.

Kuna $\mathcal{R}(B^{\frac{1}{m}}P_n^{(j-1)}) \subset B^{\frac{j}{m}}H_n$, siis

$$\left(I - P_n^{(j)}\right) B^{\frac{1}{m}} P_n^{(j-1)} = 0, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{1.12}$$

ning

$$\left(I - P_n^{(j)}\right) B^{\frac{1}{m}} = \left(I - P_n^{(j)}\right) B^{\frac{1}{m}}(I - P_n^{(j-1)}), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Kasutades neid võrduseid järjest $j = m$, $j = m - 1$,..., $j = 1$ korral, saame

$$\begin{aligned}(I - P'_n)B &= \left(I - P_n^{(m)}\right) B = \left(I - P_n^{(m)}\right) \underbrace{B^{\frac{1}{m}}B^{\frac{1}{m}}\ldots B^{\frac{1}{m}}}_{m \text{ tükki}} = \\ &= \left(I - P_n^{(m)}\right) B^{\frac{1}{m}} \left(I - P_n^{(m-1)}\right) B^{\frac{1}{m}} \left(I - P_n^{(m-2)}\right) \cdots \left(I - P_n^{(1)}\right) B^{\frac{1}{m}}.\end{aligned}$$

Hindame iga liiget eraldi: kuna projektor ja B on enesekaassed, võib nad normi all vahetada,

$$\begin{aligned}\left\|\left(I - P_n^{(j)}\right) B^{\frac{1}{m}}\right\| &= \left\|\left(I - P_n^{(j)}\right) B^{\frac{1}{m}} \left(I - P_n^{(j-1)}\right)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|I - P_n^{(j)}\right\| \left\|B^{\frac{1}{m}} \left(I - P_n^{(j-1)}\right)\right\| \leqslant \left\|\left(I - P_n^{(j-1)}\right) B^{\frac{1}{m}}\right\| \ldots \leqslant \\ &\leqslant \left\|\left(I - P_n^{(0)}\right) B^{\frac{1}{m}}\right\| = \left\|(I - P_n)\, B^{\frac{1}{m}}\right\|.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\|(I-Q_n')\,A\| \leqslant \|(I-P_n')\,B\| \leqslant \left\|(I-P_n)\,B^{\frac{1}{m}}\right\|^m,$$

tõestuse alguses on aga märgitud, et sellest piisab võrratuse

$$\|(I-Q_n')A\| \leqslant \left\|(I-P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\|^{\frac{1}{\alpha}}$$

põhjendamiseks iga reaalarvu $\alpha > 0$ jaoks. $\square$

Järeldus 17. *Tingimus 5° teoreemist 11 on rahuldatud, kui kehtib*

$$\varkappa_{n+1}^{\alpha}\left\|(I-P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \gamma, \qquad n \geqslant n_0.$$

mingi $\alpha > 0$ *korral.*

1.4.7 Vähimruutude meetod

Otsime elementi $u_n \in H_n$, mis minimiseerib $\|Av_n - f_\delta\|$ väärtuse, kus $v_n \in H_n$. See on samaväärne $u_n \in H_n$ otsimisega, mis rahuldab $\langle Au_n - f_\delta, Av_n\rangle = 0$ iga $v_n \in H_n$ korral. Siis $Q_n : F \to AH_n$, mis tähendab, et $F_n = AH_n$. Lahend u_n leidub iga $n = 1, 2, \ldots$ korral ja on ainus, kui $\mathcal{N}(A) \cap H_n = \{0\}$. Teoreemi 11 tingimus 3° on rahuldatud, $\tau = 1$, $n_0 = 1$. Kui on antud H_n baas $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, siis $u_n \in H_n$ esitub kujul $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$. Projekteeritud võrrandi tingimus on kujul

$$\langle Au_n - f_\delta, A\varphi_j\rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n,$$

millesse u_n asendades saame

$$\left\langle A\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i - f_\delta, A\varphi_j\right\rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,\langle A\varphi_i, A\varphi_j\rangle = \langle f_\delta, A\varphi_j\rangle \qquad j = 1, \ldots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraline võrrandisüsteem kordajate c_i määramiseks.

Teoreem 18. *Olgu* $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|u - P_n u\| \to 0$ *(*$n \to \infty$*) iga* $u \in H$ *korral. Leidugu arv* $\alpha > 0$ *selliselt, et*

$$(\varkappa_n + \varkappa_{n+1})^{\alpha} \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \gamma = \text{const}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.13}$$

Kui $n = n(\delta)$ *valida nii, et* $n(\delta) \to \infty$, $\varkappa_{n(\delta)} \cdot \delta \to 0$ *(*$\delta \to 0$*), siis* $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$. *Sama koonduvus leiab aset* $n = n(\delta)$ *valikul hälbeprintsiibist:* n *on esimene arvudest* $1, 2, \ldots$, *mille korral* $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$, $b > 1$.

Vähimruutude meetodis kehtib alati $\varkappa_n^* \leqslant \varkappa_n$, aga tingimusel (1.13) kehtib lemmade 8 ja 9 ja lause 13 põhjal samuti$\varkappa_n \leqslant \dfrac{\varkappa_n^*}{\tau^*}$.

Tõestus. Esimese poole tõestamiseks piisab viidata teoreemile 10. Teine pool tuleb teoreemist 11 (3° täidetud triviaalselt $\tau = 1$ korral; 3° ja (1.13) $\Rightarrow$ 4°; 5° on rahuldatud järelduse põhjal). $\square$

1.4.8 Vähima vea meetod

Täpse f korral otsime $u_n = P_n u_*$, st. $\|u_n - u_*\| \leqslant \|v_n - u_*\|$ iga $v_n \in H_n$ korral. (Nimelt, kehtib $\|u_n - u_*\| \geqslant \|u_* - P_n u_*\|$, et aga minimiseerida, „valime“ $P_n u_* = u_n$.)

Selleks leiame u_n nii, et $\langle u_n - u_*, v_n \rangle = 0$ iga $v_n \in H_n$ korral. Kui H_n baas on $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, siis tuleb u_n leida selliselt, et $\langle u_n - u_*, \varphi_j \rangle = 0$ iga φ_j korral, $j = 1, \ldots, n$. Meetodi rakendamisel on probleemiks see, et ei tea elementi u_*, mida projekteerida.

Eeldame korraks, et leidub A pöördoperaator. Siis saaks kirjutada

$$\left\langle A^{-1} A \left(u_n - u_*\right), \varphi_j \right\rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Kuna $Au_* = f$, siis saaksime

$$\left\langle Au_n - f, \left(A^{-1}\right)^* \varphi_j \right\rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Tähistame $\psi_j = (A^*)^{-1} \varphi_j$ (siis $\varphi_j = A^* \psi_j$), nende elementide leidmisega on raskusi. Igatahes, siit aga selgus, et kui on ette võetud $\psi_j \in F_n$, siis H_n baasielemendid saame A^* rakendamisel. Seega $H_n = A^*(F_n)$ ja teoreemi 11 tingimus 4° on automaatselt täidetud.

Loobume siis kitsendavast eeldusest, et leidub A pöördoperaator. Olgu F_n baas $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Siis $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i A^* \psi_i$. Projekteerimise tingimus on

$$\langle Au_n - f_\delta, \psi_j \rangle = 0 \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Tõepoolest,

$$Q_nAu_n = Q_nf_\delta \quad \Leftrightarrow \quad Q_n(Au_n - f_\delta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (Au_n - f_\delta, \psi_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

Seega teisendades

$$\left\langle A \sum_{i=1}^{n} c_i A^* \psi_i, \psi_j \right\rangle = (f_\delta, \psi_j) \qquad j = 1, \dots, n$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle A^*\psi_i, A^*\psi_j \rangle = \langle f_\delta, \psi_j \rangle \qquad j = 1, \dots, n.$$

See on sümmeetriline lineaarne algebraline võrrandisüsteem kordajate c_i leidmiseks.

Teoreem 19. *Olgu $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$, $f \in \mathcal{R}(A)$, ruumid F_n olgu piirtihedad ruumis F (see tähendab, $\|z - Q_nz\| \to 0$ iga $z \in F$ korral).*

Siis kui $n = n(\delta)$ valida nii, et $n(\delta) \to \infty$, $\delta \cdot \varkappa^*_{n(\delta)} \to 0$ (kus $\varkappa^*_n := \sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|z_n\|}{\|A^*z_n\|}$), siis $\left\|u_{n(\delta)} - u_n\right\| \to 0$ protsessis $\delta \to 0$. Sama koonduvus kehtib n valikul hälbeprintsiibist: $n = n(\delta)$ on esimene arvudest $1, 2, \dots$, mille korral $\|Au_n - f_\delta\| < b\delta$, kus $b = \text{const} > \left(1 + (\gamma^*)^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$, kui leidub $\alpha > 0$ selliselt, et

$$(\varkappa^*_n)^\alpha \left\|(I - Q_n)(AA^*)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \gamma^* = \text{const}$$

ning

$$\left(\varkappa^*_{n+1}\right)^\alpha \left\|(I - Q_n)(AA^*)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \leqslant \text{const}.$$

Tõestus. Esimene koonduvus järeldub teoreemist 10. Kui jada (F_n) on piirtihe ruumis F, siis (H_n), kus $H_n = A^*(F_n)$, $n \in \mathbb{N}$, on piirtihe jada ruumis $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$, st.

$$\|u - P_nu\| \to 0 \quad \forall u \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}.$$

Eelduse $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ tõttu langeb see tingimus kokku teoreemi 10 tingimusega 1°.

Hälbeprintsiibi järgi koonduvus tuleb teoreemist 11. Me saame, et

$$\begin{aligned} \|(I - Q'_n)A\| &= \|(I - Q'_n)A(I - P_n)\| \leqslant \\ &\leqslant \|I - Q'_n\| \, \|(I - P_n)A^*\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|(I - Q_n)(AA^*)^{\frac{\alpha}{2}}\right\|^{\frac{1}{\alpha}}, \end{aligned}$$

kus viimases võrratuses kasutasime lemma 16 analoogi ning eelviimases võrratuses seda, et $(I - Q_n')AP_n = 0$.

Näitame, et $\varkappa_n \leqslant \varkappa_n^*$, see tähendab, $\sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|z_n\|}{\|A^* z_n\|} \geqslant \sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|A^* z_n\|}{\|AA^* z_n\|}$:

$$\|A^* z_n\|^2 = (A^* z_n, A^* z_n) = (z_n, AA^* z_n) \leqslant \|z_n\| \, \|AA^* z_n\| . \qquad \square$$

Märkus 20. *Kui u on projekteeritud võrrandi $Q_n A u = Q_n f_\delta$ vähima normiga lahend, siis u on vähima vea meetodi lähislahend.*

Tõepoolest, kui u on $Q_n A u = Q_n f_\delta$ vähima normiga lahend, siis $u \perp \mathcal{N}(Q_n A)$, st.

$$u \in \mathcal{N}(Q_n A)^\perp = \overline{\mathcal{R}((Q_n A)^*)} = \overline{\mathcal{R}(A^* Q_n^*)} = \overline{A^* F_n} = A^* F_n = H_n.$$

Eelviimane võrdus tuleneb sellest, et $A^* F_n$ on lõplikumõõtmeline ruum, seega kinnine.

1.4.9 Monotoonse vea reegel vähima vea meetodis

Vaatleme esialgu võrrandi $Au = f$ lahendamiseks suvalist regulariseerimismeetodit regulariseeritud lähislahendiga u_r, kus r on regulariseerimisparameeter. Projektsioonimeetodis on parameetriks $r = n$ projekteeritud võrrandi dimensioon, Tihhonovi meetodis $r = \frac{1}{\alpha}$. Tüüpilistes regulariseerimismeetodites täpsetele andmetele f vastava regulariseeritud lahendi viga $\|u_r^0 - u_*\| \to 0$ kui $r \to \infty$, aga ebatäpsete andmete f_δ korral viga $\|u_r - u_*\|$ parameetri r kasvades esialgu kahaneb (kuni mingi optimaalse parameetrini $r = r_{opt}$), aga r edasisel kasvul (piirkonnas $r > r_{opt}$) viga kasvab. Monotoonse vea reeglis (ingl.: monotone error rule, ME-rule) ehk ME-reeglis valitakse regulariseerimisparameetriks $r_{ME} = r(\delta)$ suurim r-väärtus, mille jaoks tingimusel $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$ saame näidata, et viga $\|u_r - u_*\|$ on monotoonselt kahanev piirkonnas $r \in (0, r_{ME}]$. Seega pidevates regulariseerimismeetodites nagu Tihhonovi meetodis, kus u_r on parameetri r diferentseeruv funktsioon, valime võrratust

$$\frac{d}{dr}\|u_r - u_*\|^2 \leqslant 0 \text{ iga } r \in (0, r_{ME}) \text{ korral}$$

garanteeriva maksimaalse r_{ME}, aga iteratsiooni- ja projektsioonimeetodites, kus regulariseerimisparameeter r on peatumisindeks $n \in N$, valime võrratust

$$\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\| \qquad \text{iga} \qquad n = 1, 2, \ldots, n_{ME} \text{ korral} \tag{1.14}$$

garanteeriva maksimaalse n_{ME}. Järgnevalt vaatleme ME-reeglit vähima vea projektsioonimeetodis. Eeldame, et alamruumid F_n rahuldavad tingimust

$$F_n \subset F_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.15}$$

ja näitame, et ME-reegel on siin kasutatav järgmisel kujul: valime $n_{ME} = n(\delta)$ vähima vea lähendis

$$u_n = A^* v_n \qquad (v_n \in F_n)$$

vähima indeksina $n = 1, 2, \ldots$, mille korral

$$d_{ME}(n) := \frac{(v_{n+1} - v_n, f_\delta)}{2\|v_{n+1} - v_n\|} \leqslant \delta. \tag{1.16}$$

Element $v_n \in F_n$ leitakse arvutustes automaatselt, see ei nõua lisatööd. Seejuures funktsioon $d_{ME}(n)$ esitub ka ekvivalentsel kujul

$$d_{ME}(n) = \frac{\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2}{2\|v_{n+1} - v_n\|}. \tag{1.17}$$

Nimelt kehtivad vähima vea meetodi lähislahendi $u_n = A^* v_n, \ (v_n \in F_n)$ kohta võrdused

$$\|u_n\|^2 = \|A^* v_n\|^2 = (AA^* v_n - f_\delta + f_\delta, v_n) = (Au_n - f_\delta, v_n) + (f, v_n),$$

seega projekteeritud võrrandi tingimuse $(Au_n - f_\delta, v_n) = 0$ tõttu ka võrdus

$$\|u_n\|^2 = (f_\delta, v_n). \tag{1.18}$$

Viimasest võrdusest järeldubki $d_{ME}(n)$ avaldiste kujude (1.16) ja (1.17) samaväärsus.

Teoreem 21. *Eeldame, et $N(A) = N(A^*) = \{0\}$ ja alamruumid F_n rahuldavad sisalduvustingimust (1.15) ja koonduvustingimust: $\|z - Q_n z\| \to 0$ kui $n \to \infty$ ($\forall z \in F$). Siis vähima vea meetod annab ühese lähendi $u_n = A^* v_n$, $v_n \in F_n$ ning kehtivad väited*

1) $\|u_n\| \leqslant \|u_{n+1}\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$,

2) $0 \leqslant d_{ME}(n) \leqslant \|Au_n - f_\delta\|/2 \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

ME-reegliga parameetri $n = n_{ME}(\delta)$ valikul kehtivad väited

3) $\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_{n-1} - u_*\| \ (n = 1, 2, \ldots, n_{ME})$;

4) kui $n_{ME} \to \infty$ *protsessis* $\delta \to 0$*, siis* $\|u_{n_{ME}} - u_*\| \to 0$ *kui* $\delta \to 0$.

Tõestus. Projekteeritud võrrandi ühene lahenduvus on näidatud Teor. 10, 19 tõestuses. Tingimusest (1.15) järeldub, et $u_{n+1} \in A^*F_{n+1}$ rahuldab mõlemat võrrandit $Q_{n+1}(Au - f_\delta) = 0$ and $Q_n(Au - f_\delta) = 0$. See fakt ja Märkuses 20 näidatud seos $u_n = \arg\min\{\|u\| : u \in H,\ Q_n(Au - f_\delta) = 0\}$ annavadki väite 1) võrratuse.

Väite 2) vasak võrratus kehtib väite 1) tõttu. Projekteeritud võrrandi lahendid $u_n = A^*v_n$ ja $u_{n+1} = A^*v_{n+1}$ rahuldavad sisalduvuse (1.15) tõttu võrduseid $(Au_n - f_\delta, v_n) = 0$, $(Au_{n+1} - f_\delta, v_n) = 0$. Seega $(A(u_{n+1} - u_n), v_n) = 0$ ja võrdused

$$0 = (A(u_{n+1} - u_n), v_n) = (AA^*(v_{n+1} - v_n), v_n) = ((v_{n+1} - v_n), Au_n)$$

annavad võrduse $(Au_n, v_{n+1} - v_n) = 0$. Seega funktsiooni $d_{\mathrm{ME}}(n)$ (1.16) lugeja võib kirjutada kujul $(v_{n+1} - v_n, f_\delta - Au_n)$ ning $d_{\mathrm{ME}}(n)$ saab hinnata avaldisega $\|Au_n - f_\delta\|/2$.

Väite 3) tõestuses kasutame võrdust (1.18) ja saame

$$\begin{aligned}\|u_n - u_*\|^2 &- \|u_{n-1} - u_*\|^2 = \|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2 - 2(u_n - u_{n-1}, u_*) \\ &= (v_n - v_{n-1}, f_\delta) - 2(A^*(v_n - v_{n-1}), u_*) \\ &= (v_n - v_{n-1}, f_\delta - 2Au_*) = (v_n - v_{n-1}, 2(f_\delta - Au_*) - f_\delta) \\ &\leqslant 2\|v_n - v_{n-1}\|\delta - (v_n - v_{n-1}, f_\delta) \\ &= 2\|v_n - v_{n-1}\|\left(\delta - d_{\mathrm{ME}}(n-1)\right). \qquad (1.19)\end{aligned}$$

Kuna $n \leqslant n_{ME}$ korral $d_{\mathrm{ME}}(n-1) > \delta$, on väide 3) tõestatud.

Väite 4) tõestust alustame veahinnanguga

$$\|u_n - u_*\| \leqslant \|u_* - P_n u_*\| + \delta\kappa_n^* \qquad (1.20)$$

mis tuleneb valemist (1.10), arvestades, et vähima vea meetodis $\tau_n^* = 1$ (selle suuruse tõime sisse Lemmas 9) . Olgu $n_0 = n_0(\delta)$ saadud suvalise aprioorse parameetrivaliku reegliga tingimuste (1.8) kohaselt, seega $\|u_{n_0(\delta)} - u_*\| \to 0$ kui $\delta \to 0$.

Kuna eeldasime, et $n_{\mathrm{ME}} \to \infty$ kui $\delta \to 0$, siis koonduvus $\|u_* - P_n u_*\| \to 0$ kui $n \to \infty$ järeldub eeldusest $\|z - Q_n z\| \to 0$ ($n \to \infty, \forall z \in F$). Kui $n_{ME} > n_0$, siis $\|u_{n_{ME}} - u_*\| \leqslant \|u_{n_0} - u_*\| \to 0$ kui $\delta \to 0$ vea monotoonsuse omaduse 3) tõttu. Juhul $n_{ME} < n_0$ kehtib $\kappa_{n_{ME}}^* < \kappa_{n_0}^*$ sisalduvuse (1.15) tõttu, seega koonduvus $\|u_{n_{ME}} - u_*\| \to 0$ kui $\delta \to 0$ järeldub seostest (1.20), (1.8).

□

1.4.10 Galjorkini meetod

Eeldame, et $F = H$, $A = A^* > 0$. Galjorkini meetodi korral $F_n = H_n$. Olgu $H_n = F_n$ baas $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Otsime lahendit kujul $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, mis rahuldaks

$$\langle Au_n - f_\delta, \varphi_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \dots, n.$$

See tähendab,

$$\left\langle A \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i - f_\delta, \varphi_j \right\rangle = 0, \qquad j = 1, \dots, n,$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle f_\delta, \varphi_j \rangle, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Kuna A on enesekaasne, siis $\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_i, A\varphi_j \rangle$. See on sümmeetriline süsteem kordajate c_i leidmiseks.

Teoreem 22. *Olgu* $F = H$, $A = A^* > 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|u - P_n u\| \to 0$ *iga* $u \in H$ *korral ning leidugu* $\alpha > 0$ *selliselt, et*

$$\varkappa_n^\alpha \|(I - P_n)A^\alpha\| \leqslant \gamma, \qquad \varkappa_{n+1}^\alpha \|(I - P_n)A^\alpha\| \leqslant \mathrm{const}.$$

Siis Galjorkini meetod määrab iga $n = 1, 2, \dots$ *korral ühese lähislahendi* u_n*. Kui* $n = n(\delta)$ *valida nii, et* $n(\delta) \to \infty$, $\varkappa_{n(\delta)} \cdot \delta \to 0$*, siis* $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$*. Sama koonduvus kehtib, kui* n *valida hälbeprintsiibi kohaselt:* n *on esimene arvudest* $1, 2, \dots$*, mil* $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$*, kus* $b = \mathrm{const} > \left(1 + \gamma^2\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$*, kui* $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$*,* $b > (1 + \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$*, kui* $\alpha > \frac{1}{2}$*.*

Tõestus. Teoreemide 10 ja 11 ning lemmade 14 ja 16 põhjal. □

1.5 Green'i funktsiooni tüüpi tuumadega I liiki integraalvõrrandite lahendamine projektsioonimeetoditega

1.5.1 Võrrandite klassi kirjeldus

Vaatleme võrrandeid kujul

$$Au(t) \equiv \int_0^1 K(t,s)u(s)\,ds = f(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Siin integraaloperaator $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, ruum $L_2(0,1)$ olgu reaalväärtustega lõigul $[0,1]$ Lebesgue'i mõttes integreeruva ruuduga funktsioonide ruum.

Rahuldagu tuum $K(t,s)$ järgmisi tingimusi.

1) $K(t,s)$ osatuletised järguni $m-2$ on pidevad kogu ruudus: $\dfrac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i} \in C(\Box)$, kus $\Box = \{(t,s) : 0 \leqslant t \leqslant 1,\, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$, $i = 0,\dots,m-2$.

2) $K(t,s)$ osatuletised järguni m on pidevad kolmnurkades: $\dfrac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i} \in C(\triangleleft) \cup C(\triangleright)$, kus $\triangleleft = \{(t,s) : 0 \leqslant s < t \leqslant 1\}$, $\triangleright = \{(t,s) : 0 \leqslant t < s \leqslant 1\}$, $i = m-1, m$.

3) Tuletisel järguga $m-1$ on hüpe diagonaalil:

$$\left.\frac{\partial^{m-1}K(t,s)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=s+0} - \left.\frac{\partial^{m-1}K(t,s)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=s-0} = a(s) > 0 \qquad \forall s \in [0,1].$$

4) $K(t,s)$ kui t funktsioon rahuldab iga $s \in [0,1]$ korral lineaarselt sõltumatuid rajatingimusi

$$\Lambda_i(v) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \big(\alpha_{ij} v^{(j)}(0) + \beta_{ij} v^{(j)}(1)\big) = 0, \qquad i = 1,\dots,m.$$

Selliseid tingimusi rahuldavad Volterra tuumad ($K(t,s) \equiv 0$, kui $t < s$), kui

$$\left.\frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i}\right|_{t=s+0} = 0, \quad i = 0,\dots,m-2, \qquad \left.\frac{\partial^{m-1}K(t,s)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=s+0} > 0,$$

kusjuures

$$\frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i} \in C(\triangleleft), \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Tingimusi 1)–4) rahuldab ka suvalise diferentsiaaloperaatori

$$L_m z = \sum_{j=0}^{m} b_j(t) z^{(j)}, \qquad b_j \in C[0,1], \quad b_m(t) = \frac{1}{a(t)}$$

Green'i funktsioon suvalistel rajatingimustel, mille korral homogeensel võrrandil $L_m z = 0$ on vaid triviaalne lahend.

1.5.2 Integraaloperaatori väärtuste piirkond

Lemma 23. *Kui $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ja tuum rahuldab tingimusi 1)–4), siis*

$$H_0^m \subset \mathcal{R}(A) \subset H^m, \tag{1.21}$$

kus $H_0^m := W_{2,0}^m(0,1)$ ja $H^m := W_2^m$.

Siin W_2^m on Sobolevi ruum ($W_2^0 = L_2$, W_2^m norm on tuletiste normide summa),

$$W_{2,0}^m = \left\{ u \in W_2^m(0,1) \,:\, u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0,\, j = 0, \ldots, m-1 \right\}.$$

Täpsemalt,

$$\mathcal{R}(A) = \{ u \in W_2^m(0,1) \,:\, \Lambda_i(u) = 0,\, i = 1, \ldots, m \}.$$

Järeldus 24. *Rahuldagu tuum $K(t,s)$ tingimuste 1)–4) analooge, mis saadakse t ja s rollide vahetamisel. Olgu transponeeritud operaatori A^T nullruum triviaalne: $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$. Siis*

$$W_{2,0}^m(0,1) \subset \mathcal{R}(A^T) \subset W_2^m(0,1).$$

Operaator $A^* = A^T$ saadakse tuumas t ja s vahetamisel, operaatorile A^* vastab tuum $K(s,t)$.

Lemma 25. *Sisalduvustest (1.21) järeldub $\left\|A^T v\right\|_{L_2} \geqslant c_0 \left\|D^{(-m)} v\right\|_{L_2}$ iga $v \in L_2(0,1)$ korral, $c_0 = \mathrm{const} > 0$, kus $D^{(-m)} = \Gamma_m D^m$, Γ_m on pöördoperaator $2m$-kordse diferentseerimise operaatorile D^{2m} rajatingimustel $z^{(j)}(0) = z^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, \ldots, m-1$ ning $A^T u(t) = A^* u(t) = \int_0^t K(s,t) u(s)\, ds$.*

Lemma 26. *Kui B on enesekaasne positiivne operaator $L_2 \to L_2$, siis $\mathcal{R}(B) \subset H^m \Rightarrow \mathcal{R}(B^\alpha) \subset H^{\alpha m}$. Sealjuures täpsustame, milline on norm ruumis H^β suvalise β korral. Üldiselt $\|u\|^2_{H^m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \left\|u^{(k)}\right\|^2$. Kui nüüd $\beta = \lfloor\beta\rfloor + \alpha$, kus $\alpha \in (0,1)$, siis*

$$\|u\|^2_{H^\beta} = \|u\|^2_{H^{\lfloor\beta\rfloor}} + \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{(\lfloor\beta\rfloor)}(t) - u^{(\lfloor\beta\rfloor)}(\tau)}{|t-\tau|^{1+2\alpha}} \, dt \, d\tau.$$

1.5.3 Splainide ruum

Fikseerime arvu $n \in \mathbb{N}$, sammu $h = \dfrac{1}{n}$ ning olgu $k \geqslant 1$, $0 \leqslant l \leqslant k-1$. Ruum S_{hkl} on H^l kuuluvate selliste funktsioonide ruum, mis igal osalõigul $[(i-1)h, ih]$ on polünoomid järguga $\leqslant k-1$.

Splainide omadused:

1) aproksimatsiooniomadus:

$$\forall u \in H^i \quad \exists u_n \in S_{hkl} \quad \left\|D^i(u-u_n)\right\|_{L_2} \leqslant ch^{j-i} \left\|D^j u\right\|_{L_2}, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant k, \quad i \leqslant l.$$

2) stabiilsus

$$\forall u_n \in S_{hkl} \quad \left\|D^j u_n\right\|_{L_2} \leqslant c' n^{j-i} \left\|D^i u_n\right\|_{L_2}, \qquad 0 \leqslant i < j \leqslant l.$$

1.5.4 Vähima vea meetod

Teoreem 27. *Olgu $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ja rahuldagu tuum $K(t,s)$ tingimusi 1)–4). Rahuldagu $f \in H^m$ rajatingimusi $\Lambda_i(f) = 0$, $i = 0, \ldots, m-1$. Siis integraalvõrrandil $Au = f$ leidub ühene lahend $u_* \in L_2$ ja vähima vea meetod*

$$u_n \in A^T S_{hkl} \quad : \quad \langle Au_n - f_\delta, z_n \rangle = 0 \quad \forall z_n \in S_{hkl}$$

määrab iga n korral ühese lahendi u_n. Kui $n = n(\delta)$ valida nii, et $n(\delta) \to 0$, $\delta \cdot n(\delta)^m \to 0$ protsessis $\delta \to 0$, siis $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\|_{L_2} \to 0$, kui $\delta \to 0$. Selline koondumine leiab aset ka n valikul hälbe printsiibist: n on esimene arvudest $1, 2, \ldots$ (või esimene arvudest $n = 2^\nu$, $\nu = \mathrm{const}$), mille korral

$$\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \sigma\delta, \quad \sigma > (1+\gamma^2)^{\frac{m}{2}}, \quad \gamma = c\left(c' c_0^{-1}\right)^{\frac{1}{m}} \left\|D\left(AA^T\right)^{\frac{1}{2m}}\right\|$$

(konstandid c_0, c, c' esinevad lemmas 25 ning punkti 1.5.3 võrratustes).

Tõestus. Tõestuseks piisab rakendada teoreemi 19. Seal oli tingimus, et $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$, aga see järeldub asjaolust, et $\overline{\mathcal{R}(A)}$ on tihe ruumis H^m. (Tõepoolest, tuntud valemi kohaselt $\mathcal{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)} = H^m$, mis tähendab, et $\mathcal{N}(A^*)$ elemendid nullivad kogu H^m, seda saab teha aga ainult nullelement.)

Vaja on hinnangut

$$(\varkappa_n^*)^{\frac{1}{m}} \left\| (I - Q_n)(AA^T)^{\frac{1}{2m}} \right\| \leqslant \gamma.$$

Kõigepealt, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}\left((AA^T)^{\frac{1}{2}}\right)$, sest $A = (AA^T)^{\frac{1}{2}} V$, kus V on osaline isomeetria. Valides lemmas 26 $B = (AA^T)^{\frac{1}{2}}$ ja $\alpha = \dfrac{1}{m}$, saame sellest, et $\mathcal{R}(A) \subset H^m$ sisalduvuse $\mathcal{R}\left((AA^T)^{\frac{1}{2m}}\right) \subset H^1$. Operaator $(AA^T)^{\frac{1}{2m}} : L_2 \to H^1$ on kinnine ja seega tõkestatud.

Aproksimatsiooniomaduses valime $u = (AA^T)^{\frac{1}{2m}} v$, $u_n = Q_n u$, $j = 1$ ja $i = 0$, $j = 1$ ning saame

$$\left\| (I - Q_n)(AA^T)^{\frac{1}{2m}} v \right\| \leqslant ch \left\| D\left((AA^T)^{\frac{1}{2m}}\right) v \right\|_{L_2} \leqslant ch \left\| D\left((AA^T)^{\frac{1}{2m}}\right) \right\|_{L_2} \|v\|_{L_2}.$$

Me teame, et $\varkappa_n^* = \sup\limits_{z_n \in F_n} \dfrac{\|z_n\|}{\|A^T z_n\|}$. Lemmast 25 $\left\|A^T z_n\right\| \geqslant c_0 \left\|D^{-m} z_n\right\|$. Operaator D^{-m} viib ruumi S_{hkl} elemendi ruumi $S_{h,k+m,l+m}$ elemendiks. Kasutades selles ruumis stabiilsuse omadust parameetritega $i = m$, $j = 0$, saame

$$\|z_n\| = \left\|D^m D^{-m} z_n\right\| \leqslant c' n^m \left\|D^{-m} z_n\right\|.$$

Viimased 2 võrratust annavad

$$\varkappa_n^* = \sup_{z_n \in F_n} \frac{\|z_n\|}{\|A^T z_n\|} \leqslant \sup_{z_n \in F_n} \frac{c' n^m \left\|D^{(-m)} z_n\right\|}{c_0 \left\|D^{(-m)} z_n\right\|} = \frac{c'}{c_0} \cdot n^m.$$

Seega selleks, et kehtiks $(\varkappa_n^*)^{\frac{1}{m}} \left\| (I - Q_n)(AA^T)^{\frac{1}{2m}} \right\| \leqslant \gamma$, võime valida

$$\gamma = c \cdot \left(\frac{c'}{c_0}\right)^{\frac{1}{m}} \left\| D(AA^T)^{\frac{1}{2m}} \right\|. \qquad \square$$

1.5.5 Vähimruutude meetod

Teoreem 28. *Rahuldagu tuum $K(t,s)$ tingimuste 1)–4) analooge, mis on saadud tingimustes 1)–4) t ja s rollide vahetamisel. Olgu $\mathcal{N}(A^T) = \{0\}$ ja*

$f \in \mathcal{R}(A)$. Siis integraalvõrrandil $Au = f$ on ühene lahend $u_* \in L_2$. Vähimruutude meetod

$$u_n \in S_{hkl} \quad : \quad \langle Au_n - f_\delta, Av_n \rangle = 0 \quad \forall v_n \in S_{hkl}$$

s määrab iga** $n = 1, 2, \ldots$ **korral ühese lahendi** $u_n \in S_{hkl}$**. Kui** $n = n(\delta)$ **valida nii, et** $n(\delta) \to \infty$**,** $\delta \cdot n(\delta)^m \to 0$ **protsessis** $\delta \to 0$**, siis** $\|u_n - u_*\| \to 0$**, kui** $\delta \to 0$**. Sama koonduvus leiab aset** $n(\delta)$ **valikul hälbe printsiibist:** n **on esimene selline arv, et** $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \tau\delta$**,** $\tau > 1$**.

Tõestus. Teoreemi tõestus on analoogiline teoreemi 27 tõestusega. $\varkappa_n$ saab hinnata nagu $\varkappa_n^*$, vahetades A ja A^* rollid. Saame $\varkappa_n^* \leqslant \varkappa_n \leqslant \mathrm{const} n^m$. Sama analoogiaga saame $\left\| (I - P_n) \left(A^T A\right)^{\frac{1}{2m}} \right\| \leqslant \mathrm{const} \cdot h$, seega

$$\varkappa_n^{\frac{1}{m}} \left\| (I - P_n)(A^T A)^{\frac{1}{2m}} \right\| \leqslant \text{const}.$$

Seega teoreem 28 järeldub teoreemist 19. □

1.5.6 Galjorkini meetod

Teoreem 29. *Olgu $K(t, s) = K(s, t)$ (siis $A^* = A$) ja määraku tuum $K(t, s)$ positiivselt määratud operaatori $A : L_2 \to L_2$. **Rahuldagu** $K(t, s)$ **tingimusi 1)–4) ja rahuldagu** $f \in H^m$ **rajatingimusi** $\Lambda_i(f) = 0$**,** $i = 0, \ldots, m - 1$**. Siis** $Au = f$ **omab ühese lahendi** $u_* \in L_2$**. Galjorkini meetod***

$$u_n \in S_{hkl} \quad : \quad \langle Au_n, f_\delta, v_n \rangle = 0 \quad \forall v_n \in S_{hkl}$$

määrab iga** $n = 1, 2, \ldots$ **korral ühese lähislahendi** u_n**. Kui valida** $n = n(\delta)$ **nii, et** $n(\delta) \to \infty$**,** $\delta n(\delta)^m \to 0$ **protsessis** $\delta \to 0$**, siis** $\|u_n - u_*\|_{L_2} \to 0$**, kui** $\delta \to 0$**. Sama koonduvus leiab aset** $n(\delta)$ **valikul hälbeprintsiibist:** n **on esimene arvudest** $1, 2, \ldots$**, mil** $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant \tau\delta$**, kus** $\tau > (1 + \gamma^2)^{\frac{m}{2}}$**, kui** $m \geqslant 2$**, või** $\tau > 1 + \gamma$**, kui** $m = 1$**. Sealjuures** $\gamma = c \left(\frac{c'}{c_0} \right)^{\frac{1}{m}} \left\| DA^{\frac{1}{m}} \right\|_{L_2 \to L_2}$**.

Tõestus. Kuna $A = A^T$, siis käesoleval juhul $(A^T A)^{\frac{1}{2m}} = A^{\frac{1}{m}}$. Analoogiliselt teoreemi 27 tõestusega saame $\varkappa_n \leqslant \frac{c'}{c_0} n^m$ ja $\left\| (I - P_n) A^{\frac{1}{m}} \right\| \leqslant \mathrm{const} \cdot h$, seega $\varkappa_n^{\frac{1}{m}} \left\| (I - P_n) A^{\frac{1}{m}} \right\| \leqslant \gamma$. □

Seni vaadeldud meetodites olid tuumale päris ranged tingimused 1)–4). Järgnevalt vaatleme regulariseerimismeetodite klassi, mis on rakendatav universaalsemalt.

Peatükk 2

Regulariseerimismeetodite klass enesekaassete ülesannete jaoks

2.1 Regulariseerimismeetodite optimaalsus

2.1.1 Regulariseerimismeetodite optimaalsuse mõiste

Olgu $A : H \to F$ operaator, kus H ja F on Banachi ruumid. Me vaatleme võrrandit $Au = f$. Olgu f_δ selline, et $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$.

Eeldame, et me teame võimalike lahendite hulka $\mathcal{M}$, olgu $u \in \mathcal{M}$. Meetodiks võib olla suvaline operaator $P : F \to H$, mis annab lähislahendiks Pf_δ. Meetodi täpsust iseloomustab suurim viga

$$\varphi(\delta, \mathcal{M}, P) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{M} \\ f_\delta \in F \\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|u - Pf_\delta\| .$$

Meetodit P_δ $(0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0)$ nimetatakse *optimaalseks*, kui

$$\varphi(\delta, \mathcal{M}, P_\delta) = \inf_P \varphi(\delta, \mathcal{M}, P).$$

Meetodit P_δ $(0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0)$ nimetatakse *asümptootiliselt optimaalseks*, kui

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(\delta, \mathcal{M}, P_\delta)}{\inf_P \varphi(\delta, \mathcal{M}, P)} = 1.$$

Meetodit P_δ ($0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$) nimetatakse *kvaasioptimaalseks* (ehk *järgu järgi optimaalseks*), kui

$$\varphi(\delta, \mathcal{M}, P_\delta) \leqslant c \inf_P \varphi(\delta, \mathcal{M}, P), \qquad c \geqslant 1.$$

2.1.2 Optimaalse meetodi veahinnang

Teoreem 30. *Olgu $\mathcal{M}$ tsentraalsümmeetriline hulk, st. $u \in \mathcal{M} \Rightarrow -u \in \mathcal{M}$. Olgu $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Siis iga meetodi P korral kehtib võrratus*

$$\varphi(\delta, \mathcal{M}, P) \geqslant \omega(\delta, \mathcal{M}) := \sup_{\substack{u \in \mathcal{M} \\ \|Au\| \leqslant \delta}} \|u\|.$$

Suurust ω nimetatakse operaatori A^{-1} pidevuse mooduliks hulgal $A(\mathcal{M})$.

Tõestus. Teame, et

$$\varphi(\delta, \mathcal{M}, P) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{M} \\ f_\delta \in F \\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|Pf_\delta - u\|.$$

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Supreemumi definitsiooni kohaselt ($\omega(\delta, \mathcal{M}) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{M} \\ \|Au\| \leqslant \delta}} \|u\|$) leiame $\overline{u} \in \mathcal{M}$ selliselt, et $\|A\overline{u}\| \leqslant \delta$ ja $\|\overline{u}\| \geqslant \omega(\delta, \mathcal{M}) - \varepsilon$. Nüüd võttes u rolli $\overline{u}$ ja $-\overline{u}$, saame

$$\begin{aligned}
\varphi(\delta, \mathcal{M}, P) &= \sup_{\substack{u \in \mathcal{M} \\ f_\delta \in F \\ \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|Pf_\delta - u\| \geqslant \\
&\geqslant \max \left\{ \sup_{\substack{f_\delta \in F \\ \|A\overline{u} - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|Pf_\delta - \overline{u}\|, \sup_{\substack{f_\delta \in F \\ \|A\overline{u} - f_\delta\| \leqslant \delta}} \|Pf_\delta + \overline{u}\| \right\} \geqslant \\
&\geqslant \max \{\|\overline{u} - P0\|, \|\overline{u} + P0\|\} \geqslant \frac{1}{2} (\|\overline{u} - P0\| + \|\overline{u} + P0\|) \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2} (\|(\overline{u} - P0) + (\overline{u} + P0)\|) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \|\overline{u}\| = \|\overline{u}\| \geqslant \omega(\delta, \mathcal{M}) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lastes nüüd $\varepsilon \to 0+$, tekib võrratus $\varphi(\delta, \mathcal{M}, P) \geqslant \omega(\delta, \mathcal{M})$. $\square$

2.1.3 Regulariseerimismeetodi veahinnang allikataolisel hulgal

Olgu H ja F Hilberti ruumid, $A : H \to F$ operaator. Hulka kujul $\mathcal{M}_{p,\rho} = \Big\{ u \in H \,:\, u = (A^*A)^{\frac{p}{2}} v,\ v \in H,\ \|v\| \leqslant \rho \Big\}$, $p > 0$, $\rho > 0$, nimetatakse *allikataoliseks hulgaks*. Lihtne kontroll näitab, et allikataoline hulk $\mathcal{M}_{p,\rho}$ on tsentraalsümmeetriline.

Teoreem 31. *Mistahes regulariseerimismeetodi P_δ korral $\varphi(\delta, \mathcal{M}_{p,\rho}, P_\delta) \geqslant \delta^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}$, kui $\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{p+1}} \in \sigma(A^*A)$, kus $\sigma(A^*A)$ on operaatori A^*A spekter.*

Reeglina nõue, et $\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{p+1}}$ oleks A^*A omaväärtus, ei ole eriti kitsendus, sest üldiselt huvitab meid olukord $\frac{\delta}{\rho} \to 0$, aga kui A^*A on kompaktne (ja nii on enamasti rakendustes), siis tema omaväärtused moodustavad ka hääbuva jada.

Tõestus. Teoreem järeldub teoreemist 30, kui näitame, et $\omega(\delta, \mathcal{M}_{p,\rho}) = \delta^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}$. Kõigepealt saame, et

$$\omega(\delta, \mathcal{M}_{p,\rho}) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{M}_{p,\rho} \\ \|Au\| \leqslant \delta}} \|u\| = \sup_{\substack{\|v\| \leqslant \rho \\ \left\|A(A^*A)^{\frac{p}{2}} v\right\| \leqslant \delta}} \left\|(A^*A)^{\frac{p}{2}} v\right\|.$$

Edasi kasutame asjaolu, et iga $w \in H$ korral

$$\|Aw\|^2 = \langle Aw, Aw \rangle = \langle w, A^*Aw \rangle = \left\langle (A^*A)^{\frac{1}{2}} w, (A^*A)^{\frac{1}{2}} w \right\rangle = \left\|(A^*A)^{\frac{1}{2}} w\right\|^2$$

ning momentide võrratust:

$$\begin{aligned}
\omega(\delta, \mathcal{M}_{p,\rho}) &= \sup_{\substack{\|v\| \leqslant \rho \\ \left\|A(A^*A)^{\frac{p}{2}} v\right\| \leqslant \delta}} \left\|(A^*A)^{\frac{p}{2}} v\right\| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{\|v\| \leqslant \rho \\ \left\|(A^*A)^{\frac{p+1}{2}} v\right\| \leqslant \delta}} \left\|(A^*A)^{\frac{p+1}{2}} v\right\|^{\frac{p}{p+1}} \|v\|^{\frac{1}{p+1}} = \\
&= \delta^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

Momentide võrratus on aga täpne omaelementide peal, ja elemendiks v võime võtta operaatori A^*A omaelemendi. Seega käesoleval juhul kehtib saadud võrratus tegelikult võrdusena. $\square$

2.1.4 Projektsioonimeetodite kvaasioptimaalsus

Lause 32. *Vähima vea meetod, Galjorkini meetod ja vähimruutude meetod on vastavate teoreemide (eelmises paragrahvis teoreemid 27, 28 ja 29) eeldustel kvaasioptimaalsed allikataoliste lahendite hulgal, kus $p \leqslant \alpha$, valides n sellise, et $\varkappa_n = c \cdot \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{p+1}}$.*

Tõestus. Vaja on näidata, et $u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho}$ korral

$$\|u_n - u_*\| \leqslant c\delta^{\frac{p}{p+1}}\rho^{\frac{1}{p+1}}.$$

Kõigis kolmes meetodis oli veahinnang kujul

$$\|u_n - u_*\| \leqslant c\left(\delta \cdot \varkappa_n^{(*)} + \|(I - P_n)u_*\|\right).$$

Kui $u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho}$, siis

$$\|(I - P_n)u_*\| = \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{p}{2}}v\right\| \leqslant \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{p}{2}}\right\| \|v\| \leqslant \gamma\varkappa_n^{-p} \cdot \rho,$$

viimase hinnangu saime sellest, et $\left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{\alpha}{2}}\right\| \varkappa_n^{\alpha} \leqslant \gamma$.

Seega

$$\|u_n - u_*\| \leqslant c\left(\delta\varkappa_n + \varkappa_n^{-p}\rho\right) \leqslant \tilde{c}\left(\delta \cdot \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{-\frac{p}{p+1}}\rho\right) = 2\tilde{c}\delta^{\frac{p}{p+1}}\rho^{\frac{1}{p+1}}. \quad \square$$

2.2 Regulariseerimismeetodite klass enesekaasse operaatori korral

2.2.1 Meetodite klassi kirjeldus

Järgnevalt vaatleme enesekaasset mittenegatiivset operaatorit $A = A^* \geqslant 0$, $A \in \mathcal{L}(H, H)$, kus H on Hilberti ruum. Vaatleme ülesannet $Au = f$, kus antud on ligikaudsed andmed f_δ, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$.

Vaatleme regulariseerimismeetodeid kujul

$$u_r = (I - Ag_r(A))u_0 + g_r(A)f_\delta. \tag{2.1}$$

Siin arvu $r > 0$ nimetatakse regulariseerimisparameetriks (näiteks iteratsioonimeetodite korral on r iteratsioonide arv.) Element $u_0 \in H$ on alglähend, enamasti valitakse $u_0 = 0$. Funktsioon $g_r(\lambda) : [0, \|A\|] \to \mathbb{R}$ on tükiti pidev genereeriv funktsioon. Spektraallahutuse kaudu kirjeldatakse funktsiooni $g_r(\lambda)$ abil operaator $g_r(A) : \mathcal{L}(H,F) \to \mathcal{L}(H,F)$. Me nõuame, et $a = \|A\|$ korral

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma \cdot r \tag{2.2}$$

ning

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant p_0, \quad p_0 > 0. \tag{2.3}$$

Suurimat arvu p_0, mille korral võrratus (2.3) kehtib, nimetatakse meetodi *kvalifikatsiooniks*.

Juhul $u_0 = 0$, $f_\delta = f$ saame $u_r = g_r(A)f$. Kui leidub A^{-1}, esitub täpne lahend kujul $u_* = A^{-1}f$. Seega peab funktsioon $g_r(\lambda)$ lähendama funktsiooni $\frac{1}{\lambda}$. Aga operaatorit A^{-1} ei pruugi eksisteerida, seega ei saa võtta $g_r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$. Erinevad meetodid erinevad genereeriva funktsiooni $g_r(\lambda)$ poolest.

2.2.2 Lavrentjevi meetod

Leiame u_α kui võrrandi $Au_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta$ lahendi. See on meetod kujul (2.1), kus $r = \alpha^{-1}$, $g_r(\lambda) = \dfrac{r}{1 + r\lambda} = \left(r^{-1} + \lambda\right)^{-1}$. Siis

$$g_r(A) = \left(r^{-1}I + A\right)^{-1} = (\alpha I + A)^{-1}.$$

Kui A on integraaloperaator, siis Lavrentjevi meetod asendab I liiki integraalvõrrandi II liiki integraalvõrrandiga. Ülesanne $(\alpha I + A)u_\alpha = f_\delta$ on iga $\alpha > 0$ korral korrektne, sest operaator $\alpha I + A$ on positiivselt määratud,

$$((\alpha I + A)u, u) = \alpha\|u\|^2 + (Au, u) \geqslant \alpha\|u\|^2 \;\Rightarrow \|(\alpha I + A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Lemma 33. *Funktsioon $g_r(\lambda) = \left(r^{-1} + \lambda\right)^{-1}$ rahuldab tingimusi (2.2) ja (2.3), kus $\gamma = 1$, $\gamma_p = p^p(1-p)^{1-p}$ ja $p_0 = 1$.*

Tõestus. Tingimuse (2.2) kontrolli juures piisab näha, et $\lambda \geqslant 0$, mistõttu

$$|g_r(\lambda)| = \frac{1}{r^{-1}+\lambda} \leqslant \frac{1}{r^{-1}} = r.$$

Tingimuse (2.3) kontroll: tähistame

$$h(\lambda) = \lambda^p \, |1-\lambda g_r(\lambda)| = \lambda^p \left(1 - \frac{\lambda}{r^{-1}+\lambda}\right) = \frac{\lambda^p \cdot r^{-1}}{r^{-1}+\lambda} = \frac{\lambda^p}{1+r\lambda}.$$

Kui $p=0$, siis võrratus kehtib iga $\lambda \geqslant 0$ korral:

$$h(\lambda) = \frac{1}{1+r\lambda} \leqslant 1, \qquad \gamma_p r^{-p} = 0^0 \cdot 1^1 \cdot r^0 = 1.$$

Kui $p=1$, siis võrratus kehtib samuti iga $\lambda \geqslant 0$ korral:

$$h(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{-1}+r} \leqslant \frac{1}{r}, \qquad \gamma_p r^{-p} = 1^1 \cdot 0^0 \cdot r^{-1} = \frac{1}{r}.$$

Leiame nüüd suvalise $p \geqslant 0$ korral funktsiooni $h(\lambda)$ maksimumkoha. Saame

$$h'(\lambda) = \frac{p\lambda^{p-1}(1+r\lambda) - \lambda^p \cdot r}{(1+r\lambda)^2} = \frac{\lambda^{p-1}}{(1+r\lambda)^2} \cdot \left(p(1+r\lambda) - r\lambda\right).$$

Niisiis

$$h'(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(1+r\lambda) = r\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{\text{extr}} = \frac{p}{r(1-p)}.$$

Vastav funktsiooni h väärtus on

$$h\left(\frac{p}{r(1-p)}\right) = \frac{\frac{p^p}{r^p(1-p)^p}}{1 + r \cdot \frac{p}{r(1-p)}} = p^p (1-p)^{1-p} \cdot r^{-p}.$$

Arv λ_{extr} on maksimumkoht, kuivõrd $h(0)=0$, aga $h\left(\lambda_{\text{extr}}\right) > 0$.

Lõpuks veendume, et tingimuses (2.3) $p_0 = 1$. Me saame, et

$$h(\lambda) = \frac{\lambda^p}{1+r\lambda} =\leqslant \mathrm{const} r^{-p}.$$

Tähistame $x = r\lambda$, siis võrratus on kujul $x^p \leqslant \mathrm{const}(1+x)$, kus $0 < x < \infty$. Selline võrratus saab kehtida ainult eeldusel $p \leqslant 1$, kuna olukorras $p > 1$ saab leida x nii, et arv x^p on suurem kui $\mathrm{const}(1+x)$. □

Märkus 34. *Kui $A = A^*$, aga $A > 0$ ei kehti, võib kasutada näiteks Lavrentjevi meetodi analoogi*

$$i\alpha u_\alpha + A u_\alpha = f_\delta,$$

kus i on imaginaarühik. Pole raske näidata, et vastav genereeriv funktsioon $g_r(\lambda) = \left(ir^{-1}+\lambda\right)^{-1}$ rahuldab tingimusi (2.2), (2.3) ning meetodi koonduvus ja koonduvuskiirus on nagu Lavrentjevi meetodil.

2.2.3 Itereeritud Lavrentjevi meetod

Fikseerime naturaalarvu $m \geqslant 1$. Leiame $u_{n,\alpha}$ kui võrrandi

$$Au_{n,\alpha} + \alpha u_{n,\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + f_\delta, \qquad n = 1, \ldots, m,$$

lahendi. Element $u_{0,\alpha}$ on alglähend, võib valida $u_{0,\alpha} = 0$.

Juhul $m = 1$, $u_{0,\alpha} = 0$ on tegemist Lavrentjevi meetodiga.

Lähislahend $u_r = u_{m,\alpha}$. Näitame, et see meetod on kujul (2.1), kus $r = \alpha^{-1}$, $g_r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - (1 + r\lambda)^{-m}\right)$ ning tingimused (2.2) ja (2.3) on rahuldatud, kui valida $\gamma = m$, $\gamma_p = \left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}}\left(1 - \frac{p}{m}\right)^{1-\frac{p}{m}}$, $p_0 = m$.

Lemma 35. *Itereeritud Lavrentjevi meetodis lähislahend esitub kujul*

$$u_{m,\alpha} = H^m u_0 + \sum_{j=0}^{m-1} H^j g_\alpha(A) f_\delta, \tag{2.4}$$

kus $H = I - Ag_\alpha(A)$ ning $g_\alpha(A) = (\alpha I + A)^{-1}$ (Lavrentjevi meetodi genereeriv funktsioon).

Tõestus. Kuna

$$\alpha g_\alpha(A) = \alpha\,(\alpha I + A)^{-1} = ((\alpha I + A) - A)\,(\alpha I + A)^{-1} = I - Ag_\alpha(A) = H,$$

siis

$$u_{1,\alpha} = (\alpha I + A)^{-1}(\alpha u_0 + f_\delta) = \alpha g_\alpha(A)u_0 + g_\alpha(A)f_\delta = Hu_0 + g_\alpha(A)f_\delta.$$

Seega (2.4) kehtib, kui $m = 1$.

Kehtigu (2.4) $m = n$ korral. Siis

$$\begin{aligned} u_{n+1,\alpha} &= (\alpha I + A)^{-1}(\alpha u_{n,\alpha} + f_\delta) = Hu_{n,\alpha} + g_\alpha(A)f_\delta = \\ &= H\left(H^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} H^j g_\alpha(A) f_\delta\right) + g_\alpha(A)f_\delta = \\ &= H^{n+1}u_0 + \sum_{j=0}^{(n+1)-1} H^j g_\alpha(A) f_\delta. \end{aligned}$$

Tähistame

$$
\begin{aligned}
g_{m,\alpha}(\lambda) &= \sum_{j=0}^{m-1} (1-\lambda g_\alpha(\lambda))^j \, g_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\lambda) \cdot \frac{1-(1-\lambda g_\alpha(\lambda))^m}{1-(1-\lambda g_\alpha(\lambda))} = \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1-(1-\lambda g_\alpha(\lambda))^m\right),
\end{aligned}
$$

seega $1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda) = (1-\lambda g_\alpha(\lambda))^m$.

Kontrollime üle tingimuste (2.2) ja (2.3) täidetuse. Kuna $1-\lambda g_\alpha(\lambda) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\lambda} \leqslant 1$, siis

$$
g_{m,\alpha}(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} (1-\lambda g_\alpha(\lambda))^j \cdot \frac{1}{\alpha+\lambda} \leqslant \frac{m}{\alpha} = mr.
$$

Seega tingimuses (2.2) $\gamma = m$.

Meenutame Lavrentjevi meetodi genereeriva funktsiooni jaoks hinnangut (2.3) $\sup\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p \left|1-\lambda g_\alpha(\lambda)\right| \leqslant \gamma_p \alpha^p$, kus $p_0 = 1$. Seda kasutades kirjutame

$$
\begin{aligned}
\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p \left|1-\lambda g_{m,\alpha}(\lambda)\right| &= \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p \left|1-\lambda g_\alpha(\lambda)\right|^m = \\
&= \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \left(\lambda^{\frac{p}{m}} \left|1-\lambda g_\alpha(\lambda)\right|\right)^m \leqslant \\
&\leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \left(\gamma_{\frac{p}{m}} \alpha^{\frac{p}{m}}\right)^m = \\
&= \left(\left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}} \left(1-\frac{p}{m}\right)^{1-\frac{p}{m}}\right)^m \alpha^p \leqslant \gamma_p \alpha^p.
\end{aligned}
$$

See tähendab, et praeguses olukorras $\dfrac{p_0}{m} = 1$, ehk $p_0 = m$, ning tingimus (2.3) kehtib konstandiga $\gamma_p = \left(\dfrac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m}} \left(1-\dfrac{p}{m}\right)^{1-\frac{p}{m}}$ (eelviimases reas tähistas $\gamma_{\frac{p}{m}}$ Lavrentjevi meetodi konstanti). □

2.2.4 Ilmutatud iteratsioonimeetod

Meetod on kujul

$$
u_n = u_{n-1} - \mu\left(Au_{n-1} - f_\delta\right), \qquad 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.5}
$$

Lähend u_n esitub kujul

$$u_n = (I - \mu A)^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (I - \mu A)^j \mu f_\delta.$$

Seda näidatakse nagu lemmas 35. Kõigepealt,

$$u_1 = u_0 - \mu(Au_0 - f_\delta) = (I - \mu A)u_0 + \mu f_\delta.$$

Kui võrdus (2.5) kehtib $m = n$ korral, siis

$$u_{n+1} = (I - \mu A)u_n + \mu f_\delta = (I - \mu A)^{n+1}u_0 + \sum_{j=0}^{n}(I - \mu A)^j \mu f_\delta.$$

Regulariseerimisparameeter $r = n$. Genereeriv funktsioon on seega kujul

$$g_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1}(1 - \mu\lambda)^j \mu = \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - (1 - \mu\lambda)^n).$$

Kontrollime üle tingimused (2.2) ja (2.3). Me saame, et

$$|g_n(\lambda)| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |1 - \mu\lambda|^j \mu \leqslant n\mu,$$

kuna $\lambda \leqslant \|A\|$, mis koos nõudega $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A\|}$ annab $0 < \mu\lambda < 2$. Seega sobib $\gamma = \mu$.

Tingimuses (2.3) saame

$$h_n(\lambda) := \lambda^p |1 - \lambda g_n(\lambda)| = \lambda^p |1 - \mu\lambda|^n.$$

Juhul $\lambda < \dfrac{1}{\mu}$ kehtib $h_n(\lambda) = \lambda^p (1 - \mu\lambda)^n$. Siis võtame tuletise ja leiame ekstreemumkoha (see tuleb maksimum, sest $h_n(0) = 0$, aga ekstreemum osutub positiivseks):

$$h'_n(\lambda) = p\lambda^{p-1} (1 - \mu\lambda)^n - n\mu\lambda^p (1 - \mu\lambda)^{n-1},$$

seega $h'_n(\lambda) = 0$ parajasti siis, kui $p(1 - \mu\lambda) = n\mu\lambda$ ehk $\lambda = \dfrac{p}{\mu(p+n)}$. Ekstreemum:

$$\begin{aligned} h_n\left(\frac{p}{\mu(p+n)}\right) &= \left(\frac{p}{\mu(p+n)}\right)^p \left(1 - \frac{p}{p+n}\right)^n = \\ &= p^p\mu^{-p}(p+n)^{-p}n^n(p+n)^{-n} = \\ &= p^p\mu^{-p}\left(\frac{n}{n+p}\right)^{n+p} \cdot n^{-p} \leqslant \\ &\leqslant p^p\mu^{-p} \cdot n^{-p}. \end{aligned}$$

Seega võime valida $\gamma_p = p^p \mu^{-p}$.

Kui $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, siis $h_n(\lambda) = 0$ ja sobib mis tahes γ_p.

Kui $\dfrac{1}{\mu} < \lambda < \dfrac{2}{\mu}$, siis $h_n(\lambda) = \lambda^p (\mu\lambda - 1)^n$. Siin

$$h_n'(\lambda) = p\lambda^{p-1} (\mu\lambda - 1)^n + \lambda^p n\mu (\mu\lambda - 1)^{n-1} > 0$$

mistõttu $h_n(\lambda)$ saavutab maksimumi vahemiku parempoolses otsas (st. kui $\lambda = a$). Saame $h_n(\lambda) \leqslant h_n(a) = a^p (\mu a - 1)^n$. Kokkuvõttes sobib

$$\gamma_p = \max \left\{ \left(\frac{p}{\mu} \right)^p, \max_{n \geqslant 1} a^p (\mu a - 1)^n n^p \right\}.$$

Kuna avaldises $a^p (\mu a - 1)^n n^p$ funktsioon $(\mu a - 1)^n$ kahaneb n kasvades eksponentsiaalselt, aga n^p kasvab ainult polünomiaalselt, siis on $a^p (\mu a - 1)^n n^p$ tõkestatud ja leidub maksimum.

Et arvule p mingit tõket arutelus ei tekkinud, on $p_0 = \infty$.

2.2.5 Ilmutamata iteratsioonimeetod

Meetod on kujul

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f_\delta, \qquad \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Eeskiri on nagu itereeritud Lavrentjevi meetodis, kuid itereeritud Lavrentjevi meetodis oli iteratsioonide arv m ja regulariseerimisparameeter oli α. Ilmutamata iteratsioonimeetodis iteratsioonide arv pole piiratud ja regulariseerimisparameeter ongi iteratsioonide arv n. Sealjuures α on fikseeritud konstant.

Näitamine, et meetod kuulub vaadeldavasse klassi, toimub nagu lemmas 35. Lähislahendi esitus on sama:

$$u_n = H^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} H^j (\alpha I + A)^{-1} f_\delta, \qquad H = \alpha g_\alpha(A).$$

Genereeriv funktsioon on kujul $g_n(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} (1 - (1 - \lambda g_\alpha(\lambda))^m)$. Kasutades itereeritud Lavrentjevi meetodi hinnanguid, saame

$$|g_n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot n,$$

millest $\gamma = \dfrac{1}{\alpha}$. Seevastu hinnang (2.3) tuleb itereeritud Lavrentjevi meetodi eeskujul selline:

$$\lambda^p \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \leqslant p^p \alpha^p n^{-p},$$

millest $\gamma_p = (p\alpha)^p$ ja $p_0 = \infty$.

2.2.6 Cauchy ülesande meetod

Ülesandeks on lahendada diferentsiaalvõrrand

$$u'(t) + Au(t) = f_\delta,$$

algtingimusel $u_0 = u(0)$. Sealjuures muutuja t tähendab enamasti aega.

Valime diskretiseerimissammu $\tau > 0$ ning tähistame $u_k = u(k\tau)$, $k = 1, 2, \ldots$. Tuletise $u'(t)$ lähendamiseks võib kasutada diferentsi ette või diferentsi taha: vastavalt

$$u'_{n-1} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}, \qquad u'_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau}.$$

Kummalgi juhul saame vastavalt võrrandi

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} + Au_{n-1} = f_\delta, \qquad \frac{u_n - u_{n-1}}{\tau} + Au_n = f_\delta$$

ehk

$$u_n = u_{n-1} - \tau\left(Au_{n-1} - f_\delta\right), \qquad u_n + \tau Au_n = u_{n-1} + \tau f_\delta.$$

Esimene võrrand (saadud kasutades diferentsi ette) on ilmutatud iteratsiooniskeem, kus $\mu = \tau$. Teine võrrand (saadud kasutades diferentsi taha) on aga ilmutamata iteratsiooniskeem, kus $\tau = \alpha^{-1}$.

Seega Cauchy ülesande meetod on iteratsioonimeetodite pidev analoog.

Cauchy ülesande meetodi lahend on $u(t) = e^{-tA}u_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)A} f_\delta(s)\, ds$. See on lahend, sest

$$\begin{aligned} u'(t) &= -Ae^{-tA}u_0(t) - A\int_0^t e^{-(t-s)A} f_\delta(s)\, ds + e^{-(t-s)A} f_\delta(s)|_{s=t} = \\ &= -Ae^{-tA}u_0(t) - A\int_0^t e^{-(t-s)A} f_\delta(s)\, ds + f_\delta(t) = -Au(t) + f_\delta(t). \end{aligned}$$

Genereeriv funktsioon on siin $g_t(\lambda) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)\lambda}\, ds$, regulariseerimisparameeter on $r = t$.

Tingimus (2.2) on täidetud konstandiga $\gamma = 1$, sest

$$|g_t(\lambda)| \leqslant \int_0^t ds = t.$$

Arvutame integraali välja:

$$g_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-(t-s)\lambda}|_{s=0}^{s=t} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-t\lambda}\right).$$

Seega

$$\lambda^p \left|1 - \lambda g_t(\lambda)\right| = \lambda^p e^{-t\lambda} =: h_t(\lambda).$$

Saame, et $h_t'(\lambda) = p\lambda^{p-1}e^{-t\lambda} - t\lambda^p e^{-t\lambda} = \lambda^{p-1}e^{-t\lambda}(p - t\lambda)$, millest leiame ekstreemumpunkti $p = t\lambda$, st. $\lambda = \dfrac{p}{t}$. See on maksimumpunkt, kuna $h_t(0) = 0$. Järelikult

$$\lambda^p \left|1 - \lambda g_t(\lambda)\right| \leqslant \left(\frac{p}{t}\right)^p \cdot e^{-p} = \left(\frac{p}{e}\right)^p \cdot t^{-p}.$$

Seega $\gamma_p = \left(\dfrac{p}{e}\right)^p$ ja $p_0 = \infty$.

2.2.7 Spektraallõike meetod

Olgu $A = A^* \geqslant 0$ kompaktne operaator. Tema omaelemendid v_k olgu ortonormeeritud ning omaväärtused λ_k moodustavad hääbuva jada, $k = 1, 2, \ldots$. Siis $Av_k = \lambda_k v_k$ ja võime kirjutada välja $f_\delta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k$. Lahend $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k$. Lähislahendiks võetakse enamasti lõplik summa

$$u_r = \sum_{\lambda_k \geqslant \frac{1}{r}} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k \tag{2.6}$$

(lõikame spektrit). Aga lähislahendiks võib võtta ka

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_r &= \sum_{\lambda_k \geqslant \frac{1}{r}} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k + \sum_{\lambda_k < \frac{1}{r}} r \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k = \\
&= \sum_{\lambda_k \geqslant \frac{1}{r}} \lambda_k^{-1} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k + r\left(f_\delta - \sum_{\lambda_k \geqslant \frac{1}{r}} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k\right) = \\
&= r f_\delta + \sum_{\lambda_k \geqslant \frac{1}{r}} \left(\lambda_k^{-1} - r\right) \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k.
\end{aligned}$$

Genereerivad funktsioonid nendes lähislahendites on vastavalt

$$g_r(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \lambda \geqslant \dfrac{1}{r}, \\ 0, & \lambda < \dfrac{1}{r}, \end{cases} \qquad \tilde{g}_r(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & \lambda \geqslant \dfrac{1}{r}, \\ r, & \lambda < \dfrac{1}{r}. \end{cases}$$

Veendume, et tingimused (2.2) ja (2.3) on mõlema genereeriva funktsiooni korral täidetud.

Me saame, et $|g_r(\lambda)| \leqslant r$ ja $|\tilde{g}_r(\lambda)| \leqslant r$, seega mõlemal juhul sobib $\gamma = 1$.

Esimesel juhul hindame vahetult (tähtsust omab ainult juhtum $\lambda < \frac{1}{r}$):

$$\lambda^p \left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right| \leqslant \lambda^p < r^{-p},$$

mistõttu sobib $\gamma_p = 1$ ja $p_0 = \infty$.

Teisel juhul võib ka saada sama γ_p vahetult hinnates. Teeme siiski tuletise abil, sest sel juhul tekib parem konstant. Tähistame $\tilde{h}_r(\lambda) = \lambda^p(1 - \lambda r)$ (ka siin omab tähtsust vaid juhtum $\lambda < \frac{1}{r}$), siis

$$\tilde{h}_r'(\lambda) = \lambda^{p-1}p(1 - \lambda r) - r\lambda^p = \lambda^{p-1}\left(p - p\lambda r - \lambda r\right),$$

seega $\tilde{h}_r'(\lambda) = 0$ maksimumkohas $\lambda = \dfrac{p}{r(p+1)}$ ja seega

$$\lambda^p \left|1 - \lambda \tilde{g}_r(\lambda)\right| \leqslant \left(\frac{p}{r(p+1)}\right)^p \left(1 - \frac{p}{p+1}\right) = p^p\,(p+1)^{-(p+1)}\,r^{-p},$$

kust saame $\gamma_p = p^p\,(p+1)^{-(p+1)}$, $p_0 = \infty$.

Veendumine, et spektraallõike meetod on kujul (2.1), tuleb ka vahetult.

Spektraallõike meetodit vaatlesime juba punktis 1.3.5. Sealne lähend

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} \left\langle f_\delta, v_k \right\rangle v_k \tag{2.7}$$

langeb kokku valemi (2.6) lähendiga, kui võtta summeeritavate arvuks n suurim $n \in N$, mille korral $\dfrac{1}{\lambda_n} < r$.

Veendume veel, et lähend (2.7) langeb kokku ka mitmete projektsioonimeetodite lähenditega, kui alamruumide baasiks võtta omaelemendid. Nimelt valitakse projektsioonimeetodis lähislahend $u_n \in H_n$ tingimuse (1.7) kohaselt ligikaudsete andmete korral tingimusest

$$\langle Au_n, z_n \rangle = \langle f_\delta, z_n \rangle \quad \forall z_n \in F_n. \tag{2.8}$$

Juhul $A = A^*$ võime Galjorkini meetodis võtta $H_n = F_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ (siin 'span' tähistab järel olevate elementide lineaarset kombinatsiooni). Omaelementide v_i ortonormeerituse tõttu saame valemist (2.7) võrduse

$$\langle Au_n, v_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle f_\delta, v_k\rangle\, v_k, v_j \right\rangle = \langle f_\delta, v_j\rangle \ \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Seega $F_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ tõttu on tingimus (2.8) rahuldatud. Juhul $A = A^*$ langevad Galjorkini meetodiga kokku nii vähimruutude meetod (kui $H_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, siis $F_n = AH_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$) kui vähima vea meetod (kui $F_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$, siis $H_n = A^*F_n = AF_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$).

2.2.8 Regulariseerimismeetodite koonduvus

Lemma 36. *Olgu* $A = A^* \geqslant 0$ *ja* $g(\lambda)$ *olgu pidev (või tükiti pidev) funktsioon* $[0, a] \to \mathbb{R}$. *Siis* $Ag(A) = g(A)A$.

Tõestus. Pidev funktsioon $g(\lambda)$ on kuitahes hästi lähendatav polünoomidega $p(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\lambda^k$. Aga polünoomid kommuteeruvad operaatoriga:

$$Ap(A) = A\left(\sum_{k=0}^{n} c_kA^k\right) = \sum_{k=0}^{n} c_kA^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} c_kA^k\right)A = p(A)A.$$

□

Lemma 37. *Olgu* $H = F$ *Hilberti ruum,* $A = A^* \geqslant 0$, $\|A\| \leqslant a$ *ja rahuldagu funktsioon* $g_r(\lambda)$ *tingimusi (2.2) ja (2.3). Siis iga* $w \in \mathcal{N}(A)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)}$ *korral* $(I - Ag_r(A))\, w \to 0$, *kui* $r \to \infty$.

Tõestus. Koonduvuse $\|(I - Ag_r(A))\, w\| \to 0$ näitamiseks kasutame Banach-Steinhausi teoreemi. Selle põhjal leiab koonduvus aset, kui operaatorite normid on tõkestatud ning koonduvus on olemas tihedal hulgal. Operaatorite normide tõkestatus tuleb tingimusest (2.3)

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^p\, |(1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p} \quad \forall p \in [0, p_0],$$

valides seal $p = 0$:

$$\|I - Ag_r(A)\| \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_0.$$

Kuna $w \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, võime hulgal $\overline{\mathcal{R}(A)}$ tiheda hulgana kasutada hulka $\mathcal{R}(A) = \{Av : v \in H\}$. Siis iga $v \in H$ jaoks

$$\begin{aligned} \|(I - Ag_r(A))Av\| &\leqslant \|(I - Ag_r(A))A\| \, \|v\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 - \lambda g_r(\lambda)) \, \lambda| \, \|v\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |(1 - \lambda g_r(\lambda)) \, \lambda| \, \|v\| \, . \end{aligned}$$

Nüüd kasutame tingimust (2.3) parameetri $p = q := \min(1, p_0)$ korral (meid huvitab, et $0 < q \leqslant 1$) ja saame tingimuse $r(\delta) \to \infty$ (kui $\delta \to 0$) tõttu

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |(1 - \lambda g_r(\lambda)\lambda| = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^q \, |(1 - \lambda g_r(\lambda)| \, \lambda^{1-q} \leqslant \gamma_q r^{-q} a^{1-q} \to 0. \qquad \square$$

Teoreem 38. *Olgu* $A = A^* \geqslant 0$*,* $A \in \mathcal{L}(H, H)$*,* $f \in \mathcal{R}(A)$*,* $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$*. Vaatleme regulariseerimismeetodit (2.1), kus genereeriv funktsioon* $g_r(\lambda)$ *rahuldab tingimusi (2.2) ja (2.3). Valime regulariseerimisparameetri* $r = r(\delta)$ *nii, et* $r(\delta) \to \infty$*,* $\delta r(\delta) \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$*. Siis* $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \to 0$*, kui* $\delta \to 0$*, kus* u_* *on alglähendile* u_0 *lähim võrrandi* $Au = f$ *lahend.*

Tõestus. Kirjutame

$$\begin{aligned} u_* &= (I - Ag_r(A)) \, u_* + Ag_r(A)u_* = (I - Ag_r(A)) \, u_* + g_r(A)Au_* = \\ &= (I - Ag_r(A)) \, u_* + g_r(A)f. \end{aligned}$$

Seega

$$u_r - u_* = (I - Ag_r(A)) \, (u_0 - u_*) + g_r(A) \, (f_\delta - f)$$

ning järelikult

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \|(I - Ag_r(A)) \, (u_0 - u_*)\| + \|g_r(A)\| \, \|f_\delta - f\|$$

Mittenegatiivse enesekaasse operaatori A funktsiooni $g_r(A)$ normi võib hinnata funktsiooni absoluutväärtuse supreerumiga operaatori A spektril $\sigma(A)$:

$$\|g_r(A)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |g_r(\lambda)| \leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r.$$

Seega teise liidetava koonduvus tuleb tingimuse (2.2) abil lihtsalt: parameetri $r = r(\delta)$ valikureegli tõttu

$$\|g_r(A)\| \, \|f_\delta - f\| \leqslant \gamma r \delta \to 0 \text{ kui } \delta \to 0.$$

Kuna u_* on alglähendile u_0 lähim võrrandi $Au = f$ lahend, siis $u_0 - u_* \in \mathcal{N}(A)^\perp$ ning võrduse $H = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ tõttu $u_0 - u_* \in \overline{\mathcal{R}(A)}$. Võttes lemmas 37 $w = u_0 - u_*$, saame koonduvuse $\|(I - Ag_r(A)) \, (u_0 - u_*)\| \to 0$ kui $r \to \infty$.

$\square$

2.2.9 Koonduvuskiirus hulgal $\mathcal{M}_{p,\rho,u_0}$

Tähistame

$$\mathcal{M}_{p,\rho,u_0} = \{u \in H \,:\, u - u_0 = A^p v,\ \|v\| \leqslant \rho\}\,, \qquad p > 0,\ \rho > 0.$$

Teoreem 39. *Olgu* $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $A = A^* \geqslant 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. *Kui lahend* $u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho,u_0}$, *siis valides* $r = r_p(\delta) := d_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}}$, *kus* $d_p = \left(\dfrac{p\gamma_p}{\gamma}\right)^{\frac{1}{p+1}}$, *saame veahinnangu* $\|u_r - u_*\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}$, *kus* $p \leqslant p_0$ *ja* $c_p = \gamma^{\frac{p}{p+1}} \gamma_p^{\frac{1}{p+1}} \left(p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}\right)$. *(See tähendab kvaasioptimaalsust.)*

Tõestus. Eeldust $u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho,u_0}$ ja tingimusi (2.2), (2.3) kasutades saame

$$\begin{aligned} \|u_r - u_*\| &\leqslant \|(I - Ag_r(A)A^p v\| + \gamma r\delta \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |(1 - \lambda g_r(\lambda))\lambda^p|\, \|v\| + \gamma r \delta \leqslant \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |(1 - \lambda g_r(\lambda))\lambda^p|\, \|v\| + \gamma r \delta \leqslant \\ &\leqslant \gamma_p r^{-p} \rho + \gamma r \delta =: h(r). \end{aligned}$$

Leiame veahinnangus saadud funktsiooni $h(r)$ miinimumi:

$$h'(r) = -\gamma_p p r^{-p-1} \rho + \gamma \delta = 0 \Leftrightarrow r = r_p(\delta).$$

Arvutades $h(r_p(\delta))$ saame ka konstandi c_p. $\square$

Arv p eelduses $u_* \in \mathcal{M}_{p,\rho,u_0}$ näitab lahendi siledust: mida suurem p, seda siledam on lahend. Meetodi kvalifikatsioon p_0 näitab meetodi võimekust: kui suure siledustaseme $p \leqslant p_0$ korral on veel võimalik saada parim võimalik täpsusjärk, s.o. veahinnangus on δ astmenäitaja $\dfrac{p}{p+1}$. Siit on näha suurema kvalifikatsiooniga p_0 meetodite eelis: on võimalus saada paremaid veahinnanguid suurema siledusega lahendite korral. Näiteks Lavrentjevi meetodis on veahinnangu parim järk $\sqrt{\delta}$, aga m korda itereeritud Lavrentjevi meetodis on parim järk $\delta^{\frac{m}{m+1}}$.

2.2.10 Optimaalsed ja asümptootiliselt optimaalsed meetodid hulgal $\mathcal{M}_{p,\rho,u_0}$

1) Spektraallõike meetod $\tilde{u}_r$. Seal $\gamma = 1$, $\gamma_p = p^p\,(p+1)^{-p-1}$. Nüüd
$$\begin{aligned} c_p &= \left(p^p\,(p+1)^{-p-1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}\right) = \\ &= p^{\frac{p}{p-1}}\,(p+1)^{-1} \left(p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}\right) = \\ &= (p+1)^{-1} + p\,(p+1)^{-1} = 1, \end{aligned}$$
seega see meetod on optimaalne iga p korral.

Järgnevate meetodite optimaalsuse analüüs on keeruline, toome vaid tulemused.

2) Cauchy ülesande meetod on optimaalne hulgal $\mathcal{M}_{\mu,\rho,u_0}$, kui $p \leqslant 1{,}043$, kus $1{,}043$ on võrrandi $(p+1)\,p^{-1}\,(\ln(1+p))^2 = 1$ lahend.

3) Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetod on optimaalsed hulgal $\mathcal{M}_{\mu,\rho,u_0}$ parameetri valiku $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[m]{p+1}} \left(\dfrac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}}$, $p \leqslant p_m$ korral, kus p_m on võrrandi
$$\frac{p+1}{p}\left(\sqrt[m]{p+1} - 1\right)^2 m^2 - 1 = 0$$
ainus lahend. Lastes $m = 1, 2, \ldots$, saame jada $p_1 < p_2 < \ldots$, kus näiteks $p_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$, $\lim\limits_{m\to\infty} p_m \approx 1{,}043$.

4) Ilmutatud iteratsioonimeetod on asümptootiliselt optimaalne $p \in (0, 1{,}043)$ korral, kui iteratsioonide arv n valida
$$n = n(\delta) = \left\lfloor \frac{\ln(1+p)}{\mu}\,(\rho\delta)^{\frac{1}{p+1}} \right\rfloor.$$

2.3 Hälbeprintsiip

Vaatleme ülesannet $Au = f$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $A = A^* \geqslant 0$, $A \in \mathcal{L}(H, H)$, kus H on Hilberti ruum. Olgu $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Teoreemis 39 vaadeldud aprioorne (arvutuste eelne) parameetrivalik nõudis suuruste p, ρ teadmist, järgnevalt vaadeldav aposterioorne (arvutuste järgne) parameetrivalik seda ei vaja.

Hälbeprintsiip: valime $r = r(\delta)$ seosest $\|Au_r - f_\delta\| \sim \delta$.

2.3.1 Hälbe muutumispiirid

Lemma 40. *Olgu* $H = F$, $A = A^* \geqslant 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. *Siis*

1) $\lim\limits_{r\to 0} \|Au_r - f_\delta\| = \|Au_0 - f_\delta\|$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| = \inf\limits_{u\in H} \|Au - f_\delta\| \leqslant \delta$.

Tõestus. 1) Kuna A ja $g_r(A)$ kommuteeruvad, siis

$$\begin{aligned} Au_r - f_\delta &= A\left(I - Ag_r(A)\right)u_0 + Ag_r(A)f_\delta - f_\delta = \\ &= \left(I - Ag_r(A)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right). \end{aligned}$$

Seega

$$\|Au_r - f_\delta\| \leqslant \|Au_0 - f_\delta\| + \|A\|\,\|g_r(A)\|\,\|Au_0 - f_\delta\|\,.$$

Tagurpidi kolmnurga võrratusest saame:

$$\begin{aligned} \|Au_r - f_\delta\| &\geqslant \|Au_0 - f_\delta\| - \|A\|\,\|g_r(A)\|\,\|Au_0 - f_\delta\|\,, \\ \|g_r(A)\| &\leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |g_r(A)| \leqslant \gamma r \to 0, \qquad r \to 0. \end{aligned}$$

Järelikult $\lim\limits_{r\to 0} \|Au_r - f_\delta\| = \|Au_0 - f_\delta\|$.

2) Toome sisse ortoprojektori $P : H \to \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A)^\perp$. Ka operaator $I - P : H \to \mathcal{N}(A)$ on ortoprojektor. Näitame, et

$$(I - Ag_r(A))\,v \to (I - P)v \text{ kui } r \to \infty \quad \forall v \in \overline{\mathcal{R}(A)}. \tag{2.9}$$

Paneme tähele, et $A(I - P)v = 0$, sest $(I - P)v \in \mathcal{N}(A)$. Seega A ja $g_r(A)$ kommuteeruvuse tõttu $Ag_r(A)(I - P)v = 0$ iga $v \in H$ korral, mis annab võrduse

$$(I - Ag_r(A))\,(I - P)\,v = (I - P)\,v, \qquad v \in H.$$

Kasutades lemmat 37 $w = Pv$ korral, saame ka koonduvuse $(I - Ag_r(A))\,Pv \to 0$ protsessis $r \to \infty$. Siit ja viimasest võrdusest järeldubki koonduvus (2.9).

Valides nüüd $v = Au_0 - f_\delta$, saame (2.9) põhjal koondumise

$$\begin{aligned} Au_r - f_\delta &= (I - Ag_r(A))\,v \to (I - P)v = (I - P)\,(Au_0 - f_\delta) = \\ &= (I - P)\,Au_0 + (P - I)\,f_\delta = (P - I)\,f_\delta. \end{aligned}$$

Kui $f_\delta \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, siis $Pf_\delta = f_\delta$, mistõttu $(P - I)\,f_\delta = 0$. Üldiselt aga

$$\inf_{u\in H} \|Au - f_\delta\| \leqslant \|Au_* - f_\delta\| = \|f - f_\delta\| \leqslant \delta.$$

$\square$

2.3.2 Regulariseerimisparameetri valik ja abitulemused

Reegel Π1. Valime konstandid b_1 ja b_2 nii, et $b_2 \geqslant b_1 > 1$. Kui $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b_2\delta$, valime $r(\delta) = 0$ (siis $u_r = u_0$). Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 0$ nii, et kehtiksid võrratused

$$b_1\delta \leqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| \leqslant b_2\delta.$$

Iteratsioonimeetodite jaoks formuleerime järgmise reegli.

Reegel Π2. Valime $\Theta \in (0,1)$, $b > 1$. Kui $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b\delta$, siis $r(\delta) = 0$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 0$ nii, et

$$\left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| \leqslant b\delta \tag{2.10}$$

ja mingi $s \in [\Theta r(\delta), r(\delta)]$ korral

$$\|Au_s - f_\delta\| \geqslant b\delta. \tag{2.11}$$

Iteratsioonimeetodite korral valime parameetriks $n = r(\delta)$ vähima täisarvu, mille korral (2.10) on täidetud, siis (2.11) on automaatselt täidetud $s = n - 1$ ja $\Theta = \dfrac{n-1}{n} \in (0,1)$ korral.

Lemma 41. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $A = A^* \geqslant 0$ ja rahuldagu $g_r(A)$ tingimust (2.2). Kui tõkestatud jada (r_n), $r_n \leqslant \bar{r} = \mathrm{const}$, ja $v_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp$ korral*

$$y_n = A\left(I - Ag_{r_n}(A)\right)v_0 \to 0$$

protsessis $n \to \infty$, siis ka

$$x_n = \left(I - Ag_{r_n}(A)\right)v_0 \to 0$$

protsessis $n \to \infty$.

Tõestus. Paneme tähele, et x_n on tõkestatud:

$$\begin{aligned}\|x_n\| &\leqslant \|v_0\| + \left\|Ag_{r(n)}(A)\right\|\|v_0\| \leqslant \|v_0\| + \|A\|\,\|g_{r_n}(A)\|\,\|v_0\| \leqslant \\ &\leqslant \|v_0\| + \|A\|\left(\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}|g_{r_n}(\lambda)|\right)\|v_0\| \leqslant (1 + \gamma\bar{r}\,\|A\|)\,\|v_0\|\,.\end{aligned}$$

Tõkestatud jadast saab eraldada nõrgalt koonduva osajada, st. leidub lõpmatu osahulk $N' \subset \mathbb{N}$, et $x_n \xrightarrow{w} x$, $n \in N'$. Pidev operaator teisendab nõrgalt koonduva jada punktiviisi koonduvaks, seega $Ax_n \to Ax$. Samas, $Ax_n =$

$y_n \to 0$. Seetõttu $Ax = 0$, mis tähendab, et $x \in \mathcal{N}(A)$. Osutus, et $Ax_n \to 0$, $n \in N'$.

Näitame, et $\|x_n\| \to 0$, kui $n \in N'$. Tõepoolest,

$$\|x_n\|^2 = \langle x_n, x_n \rangle = \left\langle \left(I - Ag_{r(n)}(A)\right) v_0, x_n \right\rangle = \langle v_0, x_n \rangle - \left\langle g_{r(n)}(A)v_0, Ax_n \right\rangle \to 0,$$

kuna $v_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp$, $x_n \to x \in \mathcal{N}(A)$ ning $g_{r(n)}(A)v_0$ on tõkestatud ja $Ax_n \to 0$. □

Lemma 42. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H, H)$, $A = A^* \geqslant 0$ ja $g_r(\lambda)$ rahuldagu tingimust (2.3). Siis iga $v \in \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A)^\perp$ korral $r^p \|A^p (I - Ag_r(A)) v\| \to 0$, kui $r \to \infty$ ($0 \leqslant p < p_0$).*

Tõestus. Tähistame $G_r = I - Ag_r(A)$. Tõestame koondumise Banach-Steinhausi teoreemi abil. Saame, et

$$r^p \|A^p G_r\| \leqslant r^p \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant r^p \gamma_p r^{-p} = \gamma_p.$$

Hulgas $\overline{\mathcal{R}(A)}$ on tihe hulk $\mathcal{R}(A^{p_0 - p})$, st. $\overline{\mathcal{R}(A^{p_0-p})} = \overline{\mathcal{R}(A)}$. Ent elementide $v = A^{p_0-p}w$, $\|w\| \leqslant \rho$ hulgal toimub koondumine:

$$\begin{aligned} r^p \left\|A^p G_r A^{p_0-p} w\right\| &= r^p \|A^{p_0} G_r w\| \leqslant r^p \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant a} \lambda^{p_0} |1 - \lambda g_r(\lambda)| \, \rho \leqslant \\ &\leqslant \rho r^p \gamma_p r^{-p_0} = \rho r^{p-p_0} \gamma_p \to 0 \end{aligned}$$

protsessis $r \to \infty$. □

Teoreem 43. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H, H)$, $A = A^* \geqslant 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $p_0 > 1$, $\gamma_0 = 1$. Kui valida $r = r(\delta)$ hälbeprintsiibist $\Pi 1$ või $\Pi 2$, siis $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \to 0$ ning $\delta r(\delta) \to 0$ protsessis $\delta \to 0$.*

Kui $u_* - u_0 = A^p v$, $\|v\| \leqslant \rho$, siis $r(\rho) \leqslant \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{p+1}} d_p$, $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}$, kus reegli $\Pi 1$ korral

$$d_p = \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad c_p = (b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p$$

ning reegli $\Pi 2$ korral

$$d_p = \Theta^{-1} \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad c_p = (b + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p.$$

Tõestus. Esitame tõestuse reegli $\Pi 1$ jaoks.

1. Abitulemused Kehtivad seosed

$$
\begin{aligned}
u_r - u &= (I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*) + g_r(A)\,(f_\delta - f)\,, && (2.12)\\
Au_r - f_\delta &= A\,(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*) - (I - Ag_r(A))\,(f_\delta - f)\,. && (2.13)
\end{aligned}
$$

Viimase seose saame teisendustest

$$
\begin{aligned}
Au_r - f_\delta &= A\,(I - Ag_r(A))\,u_0 + Ag_r(A)f_\delta - f_\delta = \\
&= A\,(I - Ag_r(A))\,u_0 + Ag_r(A)f_\delta - f_\delta + (I - Ag_r(A))(f - Au_*) = \\
&= A\,(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*) - (I - Ag_r(A))\,(f_\delta - f)\,.
\end{aligned}
$$

Kasutades võrratusi $\|u\| - \|v\| \leqslant \|u \pm v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, saame seose (2.12) põhjal, et

$$
\left\|u_{r(\delta)} - u\right\| \leqslant \left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta \qquad (2.14)
$$

ning võrratuse

$$
\|(I - Ag_r(A))\,(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma_0\,\|f_\delta - f\| \leqslant \delta
$$

põhjal seosed

$$
\begin{aligned}
\left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\leqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| + \delta \leqslant (b_2 + 1)\,\delta, && (2.15)\\
\left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\geqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| - \delta \geqslant (b_1 - 1)\,\delta. && (2.16)
\end{aligned}
$$

2. Koondumise tõestus Oletame esmalt, et reegel $\Pi 1$ annab meile $r(\delta) = 0$ iga $\delta > 0$ korral. Kuna sel juhul $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b_2\delta \to 0$, kui $\delta \to 0$, siis

$$
\|Au_0 - f\| \leqslant \|Au_0 - f_\delta\| + \|f_\delta - f\| \leqslant (b_2 + 1)\,\delta \to 0, \text{ kui } \delta \to 0.
$$

Järelikult $Au_0 = f$, $u_* = u_0$ ning sel juhul on kõik teoreemi väited triviaalselt täidetud.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $r(\delta) > 0$ küllalt väikese δ korral. Näitame esmalt, et $\delta r(\delta) \to 0$, kui $\delta \to 0$. Viimane väide kehtib triviaalselt juhul, kui parameeter $r(\delta)$ jääb tõkestatuks protsessis $\delta \to 0$. Vaatleme seega juhtu, kus $\delta \to 0$ korral $r(\delta) \to \infty$.

Korrutades võrratuse (2.16) läbi parameetriga $r(\delta)$, saame

$$
(b_1 - 1)\,r(\delta) \cdot \delta \leqslant r(\delta)\left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\|,
$$

millest lemma 42 põhjal (võttes $p = 1$, siin on oluline, et $p_0 > 1$) saame, et

$$
r(\delta)\left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| \to 0, \qquad r(\delta) \to \infty
$$

ning seega $\delta r(\delta) \to 0$ ka juhul, kui $r(\delta) \to \infty$.

Näitame nüüd koondumise $u_{r(\delta)} \to u_*$ ($\delta \to 0$). Võrratuse (2.14) põhjal

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant \left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta \tag{2.17}$$

ning koondumise näitamiseks peame veel kontrollima, et

$$\left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{2.18}$$

Kui $r(\delta) \to \infty$ protsessis $\delta \to 0$, siis koondumise (2.18) saame lemma 37 põhjal. Kui aga $r(\delta) \leqslant \bar{r} = \mathrm{const}$ protsessis $\delta \to 0$, siis järeldub koondumine (2.18) lemmast 41. Tõepoolest, $u_0 - u_* \in \mathcal{N}(A)^\perp$ ning võrratuse (2.15) põhjal $\left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| \to 0$, kui $\delta \to 0$. Siis lemma 41 põhjal kehtib ka (2.18) ning võrratusest (2.17) järeldub koondumine $u_{r(\delta)} \to u_*$ protsessis $\delta \to 0$.

3. Veahinnangute tõestus Hindame esmalt parameetrit $r(\delta)$ ülalt. Kasutades võrratust (2.3), saame $p + 1 \leqslant p_0$ korral

$$\begin{aligned} \|A(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| &= \left\|A^{p+1}(I - Ag_r(A))v\right\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{p+1}|1 - \lambda g_r(\lambda)|\,\|v\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma_{p+1} r^{-(p+1)}\rho, \end{aligned}$$

millest $r = r(\delta)$ korral võrratuse (2.16) põhjal saame

$$(b_1 - 1)\,\delta \leqslant \gamma_{p+1} r(\delta)^{-(p+1)}\rho.$$

Viimasest võrratusest saame, et

$$r(\delta) \leqslant \left(\frac{\gamma_{p+1}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{-\frac{1}{p+1}} = d_p \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{-\frac{1}{p+1}}. \tag{2.19}$$

Lähislahendi veahinnangu saamiseks lähtume taas võrratusest (2.14):

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant \left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta.$$

Võrratuse (2.19) tõttu

$$\gamma r(\delta)\delta \leqslant \gamma d_p \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Võrratuse (2.14) parema poole esimese liidetava hindamiseks kasutame momentide võrratust ja tingimusest (2.3) tulenevat võrratust $\|I - Ag_r(A)\| \leqslant$

$\gamma_0 = 1$:

$$\begin{aligned}\|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| &= \|A^p (I - Ag_r(A)) v\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|A^{p+1}(I - Ag_r(A)) v\right\|^{\frac{p}{p+1}} \|(I - Ag_r(A)) v\|^{\frac{1}{p+1}} \leqslant \\ &\leqslant \|A (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}.\end{aligned}$$

Siit saame $r = r(\delta)$ korral võrratust (2.15) arvestades

$$\begin{aligned}\left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\leqslant \left\|A\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} \leqslant \\ &\leqslant (b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame võrratuse (2.14) põhjal

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant \left((b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma d_p\right) \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Reegli $\Pi 1$ jaoks on teoreem tõestatud. Reegli $\Pi 2$ korral erineb tõestus vaid üksikutes detailides. Võrratuse (2.16) asemel kehtib võrratus

$$\|A (I - Ag_s(A))(u_0 - u_*)\| \geqslant (b_1 - 1)\,\delta,$$

millest järeldub, et

$$r(\delta) \leqslant \Theta^{-1} s \leqslant \Theta^{-1} d_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}}. \qquad \square$$

2.3.3 Hälbe monotoonsus

Kui kehtib $|1 - \lambda g_{r_2}(\lambda)| \leqslant |1 - \lambda g_{r_1}(\lambda)|$, kus $0 < r_1 \leqslant r_2$, siis $\|Au_r - f_\delta\|$ on r kasvades monotoonselt kahanev. Hälve on monotoonne kõigis vaadeldud meetodites peale ilmutatud iteratsioonimeetodi. Ilmutatud iteratsioonimeetodis võib valida $\mu \in \left(0, \dfrac{2}{\|A\|}\right)$, aga hälve on monotoonne, kui $\mu \in \left(0, \dfrac{1}{\|A\|}\right)$.

2.3.4 Hälbe kriitiline tase

Eeldame

$$g_r(\lambda) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant 1 - \lambda g_r(\lambda) \leqslant \frac{g_r(\lambda)}{\varkappa_r}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant a,\ r > 0,\ \varkappa_r = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} g_r(\lambda) \tag{2.20}$$

ning

$$\beta r \leqslant \varkappa_r \leqslant \gamma r, \qquad r > 0,\ \beta = \text{const} > 0,\ \gamma = \text{const} > 0 \tag{2.21}$$

Tingimused (2.20) ja (2.21) on rahuldatud kõigis eespool vaadeldud meetodites, välja arvatud spetraallõike meetodi 1. variandis ning ilmutatud iteratsioonimeetodis $\mu \in \left[\frac{1}{\|A\|}, \frac{2}{\|A\|}\right]$ korral. Kõigis meetodites $\sup\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant a} g_r(\lambda) = g_r(0)$, erand on spetraallõike meetodi 1. variant (2.6)], kus $\sup\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant a} g_r(\lambda) = g_r(r^{-1}) = r$.

Teoreem 44. *Olgu H Hilberti ruum, $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $A = A^* > 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|Au_0 - f_\delta\| > \delta$. Kehtigu $r > 0 \Rightarrow (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) \neq 0$, tingimused (2.20) ja (2.21) ning koondumine $gr_n(\lambda) \to g_r(\lambda)$ protsessis $r_n \to r$ iga $\lambda \in [0, \|A\|]$ korral. Siis iga arvu $M \geqslant 0$ ja piisavalt väikese δ korral leidub vabaliige $f_\delta = f_{\delta,M} \in H$ selliselt, et $\|f_\delta - f\| = \delta$, kuid parameetri valikul eeskirja $\left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| = \delta$ kohaselt $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| > M$.*

2.4 Regulariseerimisparameetri valikureeglite kvaasioptimaalsus

Kvaasioptimaalsuse mõiste võimaldab lahutada meetodi ja regulariseerimisparameetri valikureegli headuse uurimise. Kui oleme saanud mingi tulemuse kvaasioptimaalsuse eeldusel, siis see kehtib ükskõik millisesse lahendite klassi lahend ka ei kuulu (kas $u_0 - u_*$ esitub kujul $A^p v$ (allikataoline hulk, kui $\|v\| \leqslant \rho$), kujul $(\ln A)^p\, v$ või midagi muud).

2.4.1 Kvaasioptimaalse valikureegli mõiste

Olgu antud regulariseerimismeetod M (esitatav kujul (2.1)). Olgu R parameetri mingi valikureegel (näiteks hälbeprintsiip), olgu reegli R põhjal valitud parameeter $r(R)$.

Definitsioon 45. *Reegel R on* nõrgalt kvaasioptimaalne *(ehk* kvaasioptimaalne*) meetodi M jaoks, kui iga $f_\delta \in H$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, korral kehtib veahinnang*

$$\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \leqslant C \inf_{r\geqslant 0} \left(\|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r\delta\right).$$

Kehtib seos

$$u_r - u_* = (I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_\delta - f).$$

Kuna $\|g_r(A)(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma r\delta$, siis $\|u_r - u_*\| \leqslant \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r\delta$.

Definitsioon 46. *Reegel R on tugevalt kvaasioptimaalne meetodi M jaoks, kui iga $f_\delta \in H$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ korral kehtib*

$$\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \leqslant C \sup_{\substack{\tilde{f} \\ \left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta}} \inf_{r \geqslant 0} \|\tilde{u}_r - u_*\|,$$

kus $\tilde{u}_r = u_r(\tilde{f}) = (I - Ag_r(A))\, u_0 + g_r(A)\tilde{f}$.

Lause 47. *Kui reegel R on tugevalt kvaasioptimaalne, siis reegel R on ka nõrgalt kvaasioptimaalne.*

Tõestus. Kuna $\sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} F(x,y) \leqslant \sup\limits_{x \in X} F(x,y)$ iga $y \in Y$ korral, siis saame võrratuse pooltest infiimumi võttes $\sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} F(x,y) \leqslant \inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} F(x,y)$. Seega

$$\begin{aligned}
\sup_{\left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta} \inf_{r\geqslant 0} \|\tilde{u}_r - u_*\| &\leqslant \inf_{r\geqslant 0} \sup_{\left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta} \|\tilde{u}_r - u_*\| \leqslant \\
&\leqslant \inf_{r\geqslant 0} \sup_{\left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta} \left(\|(I - g_r(A))\,(u_0 - u_*)\| + \|g_r(A)\| \left\|\tilde{f} - f\right\| \right) \leqslant \\
&\leqslant \inf_{r\geqslant 0} \left(\|(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*)\| + \gamma r \delta \right).
\end{aligned}$$

□

Teoreem 48. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $A = A^* \geqslant 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Kui reegel R on nõrgalt kvaasioptimaalne meetodi M korral ning $u_0 - u_* = A^p v$, $\|v\| \leqslant \rho$, $p > 0$, siis kehtib veahinnang*

$$\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 < p \leqslant p_0.$$

Tõestus. Hindame:

$$\begin{aligned}
\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| &\leqslant C \inf_{r\geqslant 0} \left(\|(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*)\| + \gamma r \delta \right) \leqslant \\
&\leqslant C \inf_{r\geqslant 0} \left(\gamma_p r^{-p} \rho + \gamma r \delta \right) \leqslant C \cdot c_p \cdot \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant p_0.
\end{aligned}$$

Koondumine $\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \to 0$ leiab aset protsessis $\delta \to 0$, kuna

$$\inf_{r\geqslant 0} \left(\|(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*)\| + \gamma r \delta \right) \to 0.$$

□

2.4.2 Täiendavad tingimused funktsioonile $g_r(\lambda)$

(A1) Funktsioon $h(r) = g_r(\lambda)$ on pidevalt diferentseeruv iga $\lambda \in [0, a]$ korral.

(A2) Funktsioon $h(r) = g_r(\lambda)$ on mittenegatiivne ja monotoonselt kasvav funktsioon (r järgi).

(A3) $\lambda g_r(\lambda) \leqslant 1$, kui $0 \leqslant \lambda \leqslant a$, $0 \leqslant r < \infty$.

(A4) $\left.\dfrac{\partial g_s(\lambda)}{\partial s}\right|_{s=r} \leqslant \gamma\overline{\gamma}\beta_r(\lambda)\left(1 - \lambda g_r(\lambda)\right)$, kus $\beta_r(\lambda) = \begin{cases} 1, & p_0 = \infty, \\ (1 - \lambda g_r(\lambda))^{\frac{1}{p_0}}, & p_0 < \infty. \end{cases}$

(A5) $\sup\limits_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda\beta_{r_1}(\lambda)\left(1 - \lambda g_{r_1}(\lambda)\right)\left(1 - \lambda g_{r_2}(\lambda)\right)^{-1} \leqslant d_M\left(r_1 - r_2\right)^{-1}$, kus $0 \leqslant r_2 < r_1$.

(A6) $\lim\limits_{r \to \infty} \lambda g_r(\lambda) = 1$.

(A7) Funktsioon $h(r) = \dfrac{g_r(\lambda)}{r}$ on monotoonselt kahanev.

Lemma 49. *Tingimused (A1)–(A7) on täidetud Lavrentjevi, itereeritud Lavrentjevi, ilmutamata iteratsioonimeetodi ja Cauchy ülesande meetodi korral. Ilmutatud iteratsioonimeetodi korral on (A1)–(A7) täidetud, kui* $0 < \mu < \dfrac{1}{\|A\|}$.

Tõestus. Vaatleme Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetodit. Siis $g_r(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{1}{(1 + r\lambda)^m}\right)$. Kontrollimist vajavad vaid (A4), (A5), (A7), ülejäänud on ilmsed.

Tingimus (A4) kehtib võrdusena:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial g_s(\lambda)}{\partial s}\right|_{s=r} &= \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda m\left(1 + r\lambda\right)^{-(m+1)} = m\left(1 + r\lambda\right)^{-1}\left(1 + r\lambda\right)^{-m} = \\ &= m\left(1 + r\lambda\right)^{-1}\left(1 - \lambda g_r(\lambda)\right),\end{aligned}$$

kusjuures

$$\beta_r(\lambda) = \left(1 - \lambda g_r(\lambda)\right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\left(1 + r\lambda\right)^{-m}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(1 + r\lambda\right)^{-1},$$

$\gamma = m$, $\overline{\gamma} = 1$.

Tingimus (A5):

$$\begin{aligned}(r_1 - r_2)\cdot\frac{\lambda\beta_{r_1}(\lambda)\left(1-\lambda g_{r_1}(\lambda)\right)}{1-\lambda g_{r_2}(\lambda)} &= (r_1-r_2)\cdot\frac{\lambda\left(1+r_2\lambda\right)^m}{\left(1+r_1\lambda\right)^{m+1}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\lambda\left(r_1-r_2\right)}{1+r_1\lambda} \leqslant \frac{\lambda r_1}{1+r_1\lambda} \leqslant 1.\end{aligned}$$

Seega $d_M = 1$.

Tingimus (A7): teeme asenduse $x = r\lambda$, siis

$$h(r) = \frac{g_r(\lambda)}{r} = \frac{1}{\lambda r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+r\lambda\right)^m}\right) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{\left(1+x\right)^m}\right).$$

Leiame tuletise:

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{\left(1+x\right)^m}\right) + \frac{1}{x}\cdot m(1+x)^{-(m+1)} = \\ &= \frac{1}{x^2}\cdot\left(-1+\frac{1+x}{(1+x)^{m+1}} + \frac{mx}{\left(1+x\right)^{m+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{x^2}\cdot\left(-1+\frac{1+(m+1)x}{\left(1+x\right)^{m+1}}\right).\end{aligned}$$

Kuna Newtoni binoomvalemist $(1+x)^{m+1} = 1+(m+1)x+\ldots \geqslant 1+(m+1)x$, siis $h'(x) \leqslant 0$.

Ilmutamata iteratsioonimeetodi korral $g_r(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\cdot\left(1-\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r\right)$, kus $\alpha > 0$. Kontrollime tingimusi (A4) ja (A5). Tingimuse (A7) kontroll on tülikas ja üsna analoogiline Lavrentjevi meetodi omaga. Ülejäänud on ilmsed.

Tingimus (A4): kasutame võrratust $\ln(1+x) \leqslant x$ (kehtib, kui $x \geqslant 0$),

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial g_s(\lambda)}{\partial s}\right|_{s=r} &= -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r \ln\frac{\alpha}{\alpha+\lambda} = \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r \ln\frac{\alpha+\lambda}{\alpha} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r\cdot\frac{\lambda}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\alpha}\cdot\left(1-\lambda g_r(\lambda)\right),\end{aligned}$$

sealjuures $\gamma = \dfrac{1}{\alpha}$ ja $\overline{\gamma} = 1$.

Tingimus (A5): viimases võrratuses kasutame tingimust (2.3),

$$\begin{aligned}
\lambda\beta_{r_1}(\lambda)\left(1-\lambda g_{r_1}(\lambda)\right)\left(1-\lambda g_{r_2}(\lambda)\right)-1 &= \lambda\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{r_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{-r_2} = \\
&= \lambda\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^{r_1-r_2} = \\
&= \lambda\left(1-\lambda g_{r_1-r_2}(\lambda)\right) \leqslant \gamma_1\left(r_1-r_2\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Siit $d_M = 1$.

Üldiselt iteratsioonimeetodite korral kehtib $(1-\lambda g_{r_1}(\lambda))(1-\lambda g_{r_2}(\lambda)) = 1-\lambda g_{r_1+r_2}(\lambda)$, sest ilmutatud iteratsioonimeetodis $1-\lambda g_r(\lambda) = (1-\mu\lambda)^r$ ja ilmutamata iteratsioonimeetodis $1-\lambda g_r(\lambda) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^r$. □

2.4.3 Modifitseeritud hälbeprintsiip

Hälbeprintsiip ei ole nõrgalt kvaasioptimaalne Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetodi jaoks. (See järeldub kasvõi sellest, et hinnang on kuni (p_0-1)-ni, aga peaks olema p_0-ni.) Seetõttu vaatleme modifitseeritud hälbeprintsiipi.

Defineerime operaatori

$$B_r = \begin{cases} I, & p_0 = \infty, \\ \left(I - Ag_r(A)\right)^{\frac{1}{p_0}}, & p_0 < \infty. \end{cases}$$

Siis $B_r = \beta_r(A)$. Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetodi korral $B_r = (I+rA)^{-1}$.

Reegel Π**3** (modifitseeritud hälbeprintsiip)**.** Anname ette konstandid $b_2 \geqslant b_1 > 1$. Kui $\|B_0\left(Au_0 - f_\delta\right)\| \leqslant b_2\delta$, siis võtame $r(\delta) = 0$, vastasel juhul valime $r(\delta)$ nii, et kehtiksid võrratused

$$b_1\delta \leqslant \left\|B_{r(\delta)}\left(Au_{r(\delta)} - f_\delta\right)\right\| \leqslant b_2\delta.$$

Reegel Π3 erineb hälbeprintsiibist ainult juhul, kui on tegemist lõpliku kvalifikatsiooniga meetodiga.

Kehtib seos $B_r\left(Au_{r,m} - f_\delta\right) = Au_{r,m+1} - f_\delta$. Veendume selles. Üldiselt kehtib

$$Au_r - f_\delta = A\left(I - Ag_r(A)\right)u_0 + Ag_r(A)u_0 - f_\delta = \left(I - Ag_r(A)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right).$$

Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetodi korral

$$(I - Ag_r(A))\,(Au_0 - f_\delta) = (I + rA)^{-m}\,(Au_0 - f_\delta) = Au_{r,m} - f_\delta,$$

seega

$$\begin{aligned} B_r\,(Au_{r,m} - f_\delta) &= (I + rA)^{-1}\,(I + rA)^{-m}\,(Au_0 - f_\delta) = \\ &= (I + rA)^{-(m+1)}\,(Au_0 - f_\delta) = Au_{r,m+1} - f_\delta. \end{aligned}$$

Kui tavaline hälve kahaneb r järgi, siis ka modifitseeritud hälve kahaneb r järgi.

Järeldus 50. *Funktsioon $h(r) = \|B_r\,(Au_r - f_\delta)\|$ on monotoonselt kahanev vaadeldud meetodite korral,*

$$\lim_{r\to\infty} \|B_r\,(Au_r - f_\delta)\| \leqslant \delta.$$

Lemma 51. *Kehtigu parameetri $r(\delta)$ korral võrratus*

$$\left\|AB_{r(\delta)}\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)v\right\| \leqslant c\delta, \qquad v \in H, \quad c > 0. \tag{2.22}$$

Siis $r(\delta) \geqslant r_0$, kus r_0 on väärtus, milles funktsioonil

$$\Phi(r) = \|(I - Ag_r(A))\,v\| + \gamma\overline{\gamma}cr\delta$$

on globaalne miinimum.

Lemma 51 väidab, et me ei peatu liiga vara: mitte enne, kui $\Phi(r)$ miinimumkoht.

Tõestus. Kui $r_0 = 0$, st. globaalne miinimum on punktis 0, siis on lemma väide triviaalne. Olukord $r_0 = \infty$ pole võimalik, sest $\gamma\overline{\gamma}cr\delta \to \infty$. Seega vaatleme juhtu, kus $0 < r_0 < \infty$. Miinimumkoha tõttu $\Phi'(r_0) = 0$.

Kirjutame

$$\Phi(r) = \left(\|(I - Ag_r(A))\,v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \gamma\overline{\gamma}cr\delta,$$

siis

$$\Phi'(r) = \frac{1}{2}\left(\|(I - Ag_r(A))\,v\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dr}\|(I - Ag_r(A))\,v\|^2 + \gamma\overline{\gamma}c\delta.$$

Meenutame, et kui operaatorit D_r genereeriv funktsioon on pidevalt diferentseeruv, siis $\frac{d}{dr}\|D_r v\|^2 = 2\left\langle D_r v, \frac{dD_r}{dr}v\right\rangle$.

Niisiis

$$\frac{d}{dr}\left\|(I-Ag_r(A))\,v\right\|^2 = 2\left\langle (I-Ag_r(A))\,v, -A\frac{dg_r(A)}{dr}v\right\rangle.$$

Kuna $A=A^*$, $B_r=B_r^*$ ning kehtivad tingimused (A3) ja (A4), siis

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dr}\left\|(I-Ag_r(A))\,v\right\|^2 &= 2\left\langle A\,(I-Ag_r(A))\,v, \frac{dg_r(A)}{dr}v\right\rangle \leqslant \\
&\leqslant 2\left\langle A\,(I-Ag_r(A))\,v, \gamma\overline{\gamma}B_r\,(I-Ag_r(A))\,v\right\rangle = \\
&= 2\gamma\overline{\gamma}\left\|A^{\frac{1}{2}}B_r^{\frac{1}{2}}\,(I-Ag_r(A))\,v\right\|^2.
\end{aligned}$$

Miinimumpunktis r_0 saame

$$\begin{aligned}
\gamma\overline{\gamma}c\delta &= -\frac{1}{2}\left(\left\|(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dr}\left(\left\|(I-Ag_r(A))\,v\right\|^2\right)\Big|_{r=r_0} \leqslant \\
&\leqslant \gamma\overline{\gamma}\left\|(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|^{-1}\left\|A^{\frac{1}{2}}B_r^{\frac{1}{2}}\,(I-Ag_{r_0})\,v\right\|^2.
\end{aligned}$$

Momentide võrratusest

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}B_{r_0}^{\frac{1}{2}}\,(I-Ag_{r_0})\,v\right\| \leqslant \left\|AB_{r_0}\,(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|^{\frac{1}{2}}.$$

Seega jõuame võrratuseni

$$\begin{aligned}
c\delta &\leqslant \left\|(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|^{-1}\left\|AB_{r_0}\,(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|\left\|(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\| = \\
&= \left\|AB_{r_0}\,(I-Ag_{r_0}(A))\,v\right\|. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Olgu $h(r)=\|AB_r\,(I-Ag_r(A))\,v\|$. Tingimustest (A2) ja (A3) järeldub, et h on monotoonselt kahanev (r järgi). Seega võrratuste (2.22) ja (2.23) abil

$$h\,(r(\delta)) \leqslant c\delta \leqslant h\,(r_0),$$

millest h kahanevuse tõttu järeldub, et $r(\delta)\geqslant r_0$. $\square$

Teoreem 52. *Olgu $A=A^*\geqslant 0$, $\|A\|\leqslant a$, $f\in\mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\|\leqslant\delta$ ja funktsioon $g_r(\lambda)$ rahuldagu tingimusi (2.2), (2.3), (A1)–(A5) ning olgu $\gamma_0=1$. Olgu $r(\delta)$ valitud reegli $\Pi 3$ põhjal, siis*

$$\left\|u_{r(\delta)}-u_*\right\| \leqslant C(b_1,b_2)\cdot\inf_{r\geqslant 0}\left(\left\|(I-Ag_r(A))\,(u_0-u_*)\right\| + \gamma r\delta\right)$$

(st. reegel $\Pi 3$ on nõrgalt kvaasioptimaalne), kus

$$C(b_1,b_2) = 1+\max\left\{\frac{d_M\gamma}{b_1-1}, (b_2+1)\,\overline{\gamma}\right\}.$$

Lavrentjevi meetodi korral näiteks $d_M = 1$, $\overline{\gamma} = 1$, $b_1 = b_2$, $\gamma = 1$, st. $\dfrac{1}{b-1} = b+1$, millest $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$ ja $C(b,b) = 2+\sqrt{2} \approx 3{,}4$. Kui teha tõestus väga täpselt, siis on konkreetselt Lavrentjevi meetodis võimalik valida parem b, millega tuleb koguni $C(b,b) < 2$.

Tõestus. Kehtivad järgmised hinnangud.

$$
\begin{aligned}
\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| &\leqslant \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r(\delta)\delta, \\
\|B_r\| &\leqslant 1, \\
\|B_r (I - Ag_r(A))(f_\delta - f)\| &\leqslant \|(I - Ag_r(A))(f_\delta - f)\| \leqslant \gamma_0 \|f_\delta - f\| \leqslant \delta, \\
\left\|B_{r(\delta)} A \left(I - Ag_{r(\delta)} A\right)(u_0 - u_*)\right\| &\leqslant \left\|B_{r(\delta)}\left(Au_{r(\delta)} - f_\delta\right)\right\| + \delta \leqslant (b_2 + 1)\,\delta, \\
\left\|B_{r(\delta)}\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\geqslant \left\|B_{r(\delta)}\left(Au_{r(\delta)} - f_\delta\right)\right\| - \delta \geqslant (b_1 - 1)\,\delta.
\end{aligned}
$$

Olgu r_* funktsiooni $\psi(r) = \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r\delta$ globaalne miinimumkoht. Vaatleme kaht juhtu.

Olgu $r_* < r(\delta)$. Kuna $h(r) = \|(I - Ag_r(A))\,v\|$ on monotoonselt kahanev (r järgi), siis

$$
\begin{aligned}
\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| &\leqslant \left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta \leqslant \\
&\leqslant \|(I - Ag_{r_*}(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r(\delta)\delta = T \cdot \psi(r_*) = \\
&= T \cdot \inf_{r \geqslant 0} \psi(r),
\end{aligned}
$$

kus

$$
T = \frac{\|(I - Ag_{r_*}(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r(\delta)\delta}{\|(I - Ag_{r_*}(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma r_*\delta}.
$$

Kuna $\dfrac{\gamma r(\delta)\delta}{\gamma r_*\delta}$ võib olla kuitahes suur, siis suuruse T ülalt hindamiseks on vaja hinnata $\|(I - Ag_{r_*}(A))(u_0 - u_*)\|$ alt (nimelt, kui $\|(I - Ag_{r_*}(A))(u_0 - u_*)\| = 0$, siis $T = \dfrac{\gamma r(\delta)\delta}{\gamma r_*\delta}$ oleks ülalt tõkestamata).

Me saame tingimuse (A5) abil, et

$$\begin{aligned}
(b_1-1)\,\delta &\leqslant \left\|B_{r(\delta)}A\left(I-Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0-u_*)\right\| = \\
&= \left\|B_{r(\delta)}A\left(I-Ag_{r(\delta)}(A)\right)\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)^{-1}\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)(u_0-u_*)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|B_{r(\delta)}A\left(I-Ag_{r(\delta)}(A)\right)\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)^{-1}\right\| \cdot \\
&\qquad \cdot \left\|\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)(u_0-u_*)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left(\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\left|\beta_{r(\delta)}(\lambda)\lambda\left(1-\lambda g_{r(\delta)}(\lambda)\right)\left(1-\lambda g_{r_*}(\lambda)\right)^{-1}\right|\right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left\|\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)(u_0-u_*)\right\| \leqslant \\
&\leqslant d_M \cdot \left(r(\delta)-r_*\right)^{-1}\left\|\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)(u_0-u_*)\right\|.
\end{aligned}$$

Siit

$$\left\|\left(I-Ag_{r_*}(A)\right)(u_0-u_*)\right\| \geqslant \frac{b_1-1}{d_M}\cdot\delta\left(r(\delta)-r_*\right).$$

Kuna eeldusel $a > b$ on funktsioon $f(x) = \dfrac{x+a}{x+b}$ kahanev, siis valides $x = \|(I-Ag_{r_*}(A))(u_0-u_*)\|$, $a = \gamma r(\delta)\delta$ ja $b = \gamma r_*\delta$, saame

$$T \leqslant \frac{(b_1-1)\,d_M^{-1}\left(r(\delta)-r_*\right)\delta + \gamma r(\delta)\delta}{(b_1-1)\,d_M^{-1}\left(r(\delta)-r_*\right)\delta + \gamma r_*\delta}.$$

Tähistame $a = \dfrac{b_1-1}{\gamma d_M}$ ja $\varepsilon = \dfrac{r_*}{r(\delta)}$, siis

$$T \leqslant \frac{a(1-\varepsilon)+1}{a(1-\varepsilon)+\varepsilon} \leqslant \sup_{0\leqslant\varepsilon<1}\frac{a(1-\varepsilon)+1}{a(1-\varepsilon)+\varepsilon}.$$

Kuna $\dfrac{a(1-\varepsilon)+1}{a(1-\varepsilon)+\varepsilon} \leqslant \dfrac{a+1}{a}$ (sest $\varepsilon \geqslant 0$), siis

$$T \leqslant 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{d_M\gamma}{b_1-1}.$$

Järelikult juhul $r_* < r(\delta)$ kehtib võrratus

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant \left(1 + \frac{d_M\gamma}{b_1-1}\right)\inf_{r\geqslant 0}\psi(r).$$

Olgu nüüd $r_* \geqslant r(\delta)$. Olgu r_0 funktsiooni

$$\Psi(r) = \left\|\left(I-Ag_r(A)\right)(u_0-u_*)\right\| + (b_2+1)\overline{\gamma}\gamma r\delta$$

globaalne miinimumkoht. Siis lemma 51 põhjal $r(\delta) \geqslant r_0$ (lemma 51 tähistes $c = b_2 + 1$). Nüüd

$$\begin{aligned}
\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| &\leqslant \left\|\left(I - Ag_{r(\delta)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta \leqslant \\
&\leqslant \left\|(I - Ag_{r_0}(A))(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r(\delta)\delta \leqslant \\
&\leqslant \Psi(r_0) + \gamma r_*\delta \leqslant \Psi(r_*) + \gamma r_*\delta \leqslant \\
&\leqslant (b_2 + 1)\,\overline{\gamma}\psi(r_*) + \psi(r_*) = ((b_2 + 1)\,\overline{\gamma} + 1)\,\psi(r_*).
\end{aligned}$$

Siit järeldub teoreemi väide. □

2.4.4 Hälbeprintsiibi ja modifitseeritud hälbeprintsiibi numbriline realiseerimine Lavrentjevi ja itereeritud Lavrentjevi meetodi korral

Eesmärk on praktikas leida r, et $b_1\delta \leqslant \|Au_r - f_\delta\| \leqslant b_2\delta$. (Mõnikord märgitakse seda koguni kujul $\|Au_r - f_\delta\| = b\delta$.)

Valitakse parameetrite jada $r_k = qr_{k-1}$, kus r_0 on antud, suhteliselt väike algväärtus. Regulariseerimisparameetriks $r(\delta)$ võetakse r_k, kus k on vähim indeks, mille korral

$$\|B_{r_k}(Au_{r_k} - \delta)\| \leqslant b\delta.$$

(Mõnikord võetakse praktikas ka viimane k, mille korral veel $\|Br_k\,(Au_{r_k} - \delta)\| > b\delta$, aga see ei ole põhimõtteliselt hea, sest teoreetilised tulemused on esimese k jaoks, kus $\|Br_k\,(Au_{r_k} - \delta)\| \leqslant b\delta$.)

2.4.5 Nõrgalt kvaasioptimaalsete valikute pere

Rakendame modifitseeritud hälbele $B_r\,(Au_r - f_\delta)$ k korda operaatorit rAB_r.

Olgu $2k$ täisarv (st. $k \in \left\{\frac{m}{2} : m \in \mathbb{Z}\right\}$), $\varphi_k(r) = r^k \left\|A^k B_r^{k+1}(Au_r - f_\delta)\right\|$.

Lemma 53. *Kui $g_r(\lambda)$ rahuldab põhitingimust (2.3), siis iga $f_\delta \in H$ korral*

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_k(r) = 0, \qquad k > 0.$$

Kui võtaks ülaltoodud lemmas $k = 0$, oleks $\varphi_k(r)$ avaldis $\|B_r\,(Au_r - f_\delta)\| \leqslant \delta$, aga ei oleks selge, kas $\|B_r\,(Au_r - f_\delta)\| \to 0$. (Üldiselt sellist koondumist aset ei leia.)

Tõestus. Olgu $P : H \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ ortoprojektor. Siis $\|Pv\| = \|v\|$, $v \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, ning $AP = PA$. (Kontrollida!) Teame, et

$$\begin{aligned} Au_r - f_\delta &= A\left(I - Ag_r(A)\right)u_0 + Ag_r(A)f_\delta - f_\delta = \\ &= \left(I - Ag_r(A)\right)Au_0 - \left(I - Ag_r(A)\right)f_\delta = \\ &= \left(I - Ag_r(A)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right). \end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned} \varphi_k(r) &= r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(Au_r - f_\delta\right)\right\| = \\ &= r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right)\right\| = \\ &= r^k \left\|PA^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right)\right\| = \\ &= r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)P\left(Au_0 - f_\delta\right)\right\|. \end{aligned}$$

Koonduvuse $\varphi_k(r) \to 0$ ($r \to \infty$) näitamiseks kasutame Banach-Steinhausi teoreemi. Näitame operaatorite normide jada $r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)\right\|$ tõkestatust.

$$\begin{aligned} r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)\right\| &\leqslant r^k \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^k \cdot \left|\left(1 - \lambda g_r(\lambda)\right)^{\frac{k+1}{p_0}}\left(1 - \lambda g_r(\lambda)\right)\right| = \\ &= r^k \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^k \left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right|^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} = \\ &= r^k \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \left(\lambda^{\frac{kp_0}{k+1+p_0}}\left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right|\right)^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} \leqslant \\ &\overset{(2.3)}{\leqslant} r^k \left(c_{k,p_0} r^{-\frac{kp_0}{k+1+p_0}}\right)^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} = \\ &= c_{k,p_0}^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} = \text{const}. \end{aligned}$$

Näitame, et $\overline{\mathcal{R}(A)}$ tihedal hulgal $\mathcal{R}(A)$ leiab aset punktiviisi koondumine. Olgu siis $P\left(Au_0 - f_\delta\right) = Av$ mingi $v \in H$ korral. Saame, et

$$\begin{aligned} & r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)P\left(Au_0 - f_\delta\right)\right\| = r^k \left\|A^k B_r^{k+1}\left(I - Ag_r(A)\right)Av\right\| \leqslant \\ & \leqslant r^k \left(\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{k+1}\left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right|^{\frac{k+1+p_0}{p_0}}\right)\|v\| = \\ & = r^k \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \left(\lambda^{\frac{(k+1)p_0}{k+1+p_0}}\left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right|\right)^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} \|v\| \leqslant \\ & \overset{(2.3)}{\leqslant} r^k \left(c_{k,p_0} r^{-\frac{(k+1)p_0}{k+1+p_0}}\right)^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} \|v\| = c_{k,p_0}^{\frac{k+1+p_0}{p_0}} \cdot r^{-1}\|v\| \to 0 \end{aligned}$$

protsessis $r \to \infty$. $\square$

Tähistame

$$\tilde{\gamma}_p = \begin{cases} \gamma_p, & p_0 = \infty, \\ \left(\gamma_{\frac{pp_0}{1+p+p_0}}\right)^{\frac{p_0+1+p}{p_0}}, & p_0 < \infty. \end{cases}$$

Näiteks Lavrentjevi meetodi korral $\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} = \dfrac{16}{25\sqrt{5}}$, $\tilde{\gamma}_1 = \dfrac{4}{27}$.

Järgneva lemma võtame tõestuseta.

Lemma 54. *Olgu $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, $\|u_0 - u_*\| \leqslant M$, $b > \tilde{\gamma}_k$. Siis iga $r \geqslant R_{M,\delta} = \dfrac{c_k M}{(b - \tilde{\gamma}_k)\,\delta}$ korral kehtib $\varphi_k(r) \leqslant b\delta$.*

Näiteks Lavrentjevi meetodi korral $p_0 = 1$, seega $\tilde{\gamma}_k = \left(\gamma_{\frac{k}{k+2}}\right)^{\frac{k+2}{k}}$.

Reegel Π4. Olgu $b_2 \geqslant b_1 > \tilde{\gamma}_k$. Kui $\varphi_k(1) \leqslant b_2\delta$, siis võtame $r(\delta) = 1$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 1$, mille korral $\varphi_k(r) \leqslant b_2\delta$ iga $r \geqslant r(\delta)$ jaoks, ning $\varphi_k(r(\delta)) \geqslant b_1\delta$. (Kuna $\varphi_k(r) \to 0$, siis vähemalt ühe sellise r me leiame.)

Põhjus, miks on nõue $\forall r \geqslant r(\delta)$, on see, et $\varphi_k(r)$ ei pruugi olla monotoonne.

Me alustame arvust 1, sest $(0,1)$ vahel läheb $\varphi_k(r)$ kiiresti nulli.

Selleks, et saavutada $\varphi_k(r) \geqslant b_2\delta$ iga $r \geqslant r(\delta)$ korral, tuleb kasutada lemmat 54. Seal on vaja aga hinnangut $\|u_0 - u_*\| \leqslant M$, kus M võib olla kuitahes jäme hinnang. (Mingit hinnangut me reeglina ikka oskame anda.) Lemma 54 kaudu läheb M indeksi $r(\delta)$ avaldisse.

Teoreem 55. *Reegel Π4 on nõrgalt kvaasioptimaalne meetodite klassi (2.1) korral, kus $g_r(\lambda)$ peab rahuldama teatud täiendavaid tingimusi (mis on täidetud näiteks Lavrentjevi meetodi, iteratsioonimeetodite, Cauchy ülesande meetodi korral).*

Praeguseni saadud tulemused on kõik eeldusel $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Niipea, kui näiteks $\|f_\delta - f\| = 2\delta$ ja valime modifitseeritud hälbeprintsiibis $b = 1{,}5$, võib lähislahendi viga olla kuitahes suur. Praktikas minnakse sellest kitsaskohast mööda sellega, et valitakse δ piisavalt suur. Igatahes aga seni vaadeldud meetodid ei ole stabiilsed lähteandmete vea suhtes (st. kui lähteandmete viga on suurem kui δ, siis lähislahendi viga võib osutuda kuitahes suureks).

Ideaalne reegel R oleks:

$$\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \leqslant C \cdot \max\left\{\frac{\left\|\tilde{f} - f\right\|}{\delta}, 1\right\}^q \inf_{r \geqslant 0} \left(\left\|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\right\| + \gamma r \delta\right),$$

kus $q > 0$. Sellist ideaali ei ole praeguseks saavutatud. Stabiilsuse lähteandmete vea suhtes võib siiski saada.

2.4.6 Hälbeprintsiibi tugev kvaasioptimaalsus lõpmatu kvalifikatsiooniga meetodite korral

Meenutame, et reegel R on tugevalt kvaasioptimaalne meetodi M jaoks, kui iga f_δ korral, mis rahuldab $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, kehtib

$$\left\|u_{r(R)} - u_*\right\| \leqslant C \sup_{\substack{\tilde{f} \\ \left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta}} \inf_{r \geqslant 0} \left\|\tilde{u}_r - u_*\right\|.$$

See tähendab, viga $\left\|u_{r(R)} - u_*\right\|$ on minimaalne kõigi vabaliikmete keras keskpunktiga f raadiusega δ.

Tugevalt kvaasioptimaalset valikureeglit ei ole õnnestunud leida lõpliku kvalifikatsiooniga meetodite kohta. (Näiteks hälbeprintsiip, modifitseeritud hälbeprintsiip ega $\Pi 4$ ei ole tugevalt kvaasioptimaalsed lõpliku kvalifikatsiooniga meetodite jaoks.) Aga lõpmatu kvalifikatsiooniga meetodite korral küll.

Lemma 56. *Olgu $r(c)$ parameeter, mille korral*

$$\left\|A\left(I - Ag_{r(c)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| = c\delta, \qquad c > 1.$$

Siis

$$\left\|\left(I - Ag_{r(c)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| \leqslant c \sup_{\left\|\tilde{f}-f\right\| \leqslant \delta} \inf_{r \geqslant 0} \left\|u_r(\tilde{f}) - u_*\right\|.$$

Lemma 56 olulisus seisneb järgmises. Nimelt

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\| + \|g_r(A)(f_\delta - f)\|.$$

Tähistame $\psi_1(r) = \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*)\|$ ning $\psi_2(r) = \psi_1(r) + \|g_r(A)(f_\delta - f)\|$, siis $\|u_r - u_*\| \leqslant \psi_2(r)$.

Nõrga kvaasioptimaalsuse korral jaotasime lähislahendi veahinnangu tõestuse kahte ossa: $r_* < r(\delta)$ ja $r_* \geqslant r(\delta)$. Kuna tugeva kvaasioptimaalsuse korral funktsionaali miinimum on väiksem, siis tekib probleem: kas veahinnang kehtib, kui $r(\delta) < r_*(\psi_2)$. Teisisõnu, kas me ei peatu liiga vara. Kui oleme peatunud liiga vara, tuleb $\psi_1(r)$ liiga suur. (Liige $\|g_r(A)\,(f_\delta - f)\|$ on kasvav, seega tema on piisavalt väike.) Lemma 56 ütlebki, et kui $r(c)$ on valitud nii, nagu lemmas 56, siis me ei peatu liiga vara.

Kui reegel on tugevalt kvaasioptimaalne, siis ta muuhulgas töötab hästi ka suure konditsiooniarvuga maatriksite korral. Nõrgalt kvaasioptimaalsed reeglid töötavad hästi vaid siis, kui A omaväärtuste kuhjumispunkt on nullpunkt.

Lemma 56 tõestuse idee. Konstrueerime elemendi f_c selliselt, et $\|f_c - f\| \leqslant \delta$ ning näitame, et

$$\left\|\left(I - Ag_{r(c)}(A)\right)(u_0 - u_*)\right\| \leqslant c \inf_{r \geqslant 0} \|u_r(f_c) - u_*\|\,. \tag{2.24}$$

Kui (2.24) kehtib, siis võrratuse

$$\inf_{r\geqslant 0} \|u_r(f_c) - u_*\| \leqslant \sup_{\substack{\tilde f \\ \|\tilde f - f\| \leqslant \delta}} \inf_{r \geqslant 0} \left\|\tilde u_r(\tilde f) - u_*\right\|$$

tõttu on lemma 56 tõestatud.

Valime siis $f_c = f + c^{-1}A\left(I - Ag_{r(c)}(A)\right)(u_0 - u_*)$. Siis eeldusest $\|f_c - f\| = \delta$. Nüüd kasutades esitust $\|Au\|^2 = \displaystyle\int_0^a \lambda^2\, d\langle P(\lambda)u, u\rangle$, saame

$$\begin{aligned}
\|u_r(f_c) - u_*\|^2 &= \|(I - Ag_r(A))(u_0 - u_*) + g_r(A)(f_c - f)\|^2 = \\
&= \left\|\left((I - Ag_r(A)) + c^{-1}g_r(A)A\left(I - Ag_{r(c)}(A)\right)\right)(u_0 - u_*)\right\|^2 = \\
&= \int_0^a \left(1 - \lambda g_r(\lambda) + c^{-1}g_r(\lambda)\lambda(1 - \lambda g_{r(c)}(\lambda)\right)^2 d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle.
\end{aligned}$$

Kuna omadusest (A3) $1 - \lambda g_r(\lambda) \geqslant 0$ ja eeldusest $c^{-1} < 1$, siis kasutades omadusi (A2) ning (A6), saame

$$\begin{aligned}
&1 - \lambda g_r(\lambda) + c^{-1}g_r(\lambda)\cdot\lambda\left(1 - \lambda g_{r(c)}(\lambda)\right) \geqslant \\
&\quad \geqslant c^{-1}\left(1 - \lambda g_r(\lambda) + \lambda g_r(\lambda) - \lambda^2 g_r(\lambda) g_{r(c)}(\lambda)\right) \geqslant \\
&\quad \geqslant \lim_{r\to\infty} c^{-1}\left(1 - \lambda^2 g_r(\lambda) g_{r(c)}(\lambda)\right) = \\
&\quad = c^{-1}\left(1 - \lambda g_{r(c)}(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Siit järeldub, et

$$\begin{aligned}
\|u_r(f_c) - u_*\|^2 &= \int_0^a \left(1 - \lambda g_r(\lambda) + c^{-1} g_r(\lambda)\lambda(1 - \lambda g_{r(c)}(\lambda)\right)^2 d\langle P(\lambda)\,(u_0 - u_*)\,, u_0 - u_*\rangle \geqslant \\
&\geqslant \int_0^a \left(1 - \lambda g_{r(c)}(\lambda)\right)^2 d\,\langle P(\lambda)\,(u_0 - u_*)\,, u_0 - u_*\rangle = \\
&= \left\|\left(I - A g_{r(c)}(A)\right) u_0 - u_*\right\|^2 .
\end{aligned}$$

□

Teoreem 57. *Olgu* $A = A^* \geqslant 0$*,* $\|A\| \leqslant a$*,* $f \in \mathcal{R}(A)$*,* $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$*. Rahuldagu funktsioon* $g_r(\lambda)$ *tingimusi (2.2), (2.3), (A1)–(A3) ja (A5)–(A7). Olgu* $r(\delta)$ *valitud hälbeprintsiibi järgi (*Π*1 või* Π*2). Siis kehtib hinnang*

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant C(b_1, b_2) \cdot \sup_{\left\|\tilde f - f\right\| \leqslant \delta} \inf_{r \geqslant 0} \left\|u_r(\tilde f) - u_*\right\|,$$

kus

$$C(b_1, b_2) = \max\left\{\sqrt{2}\left(1 + \frac{d_M \gamma}{b_1 - 1}\right), b_2 + 2\right\},$$

kusjuures konstant d_M *pärineb tingimusest (A5).*

Peatükk 3

Regulariseerimismeetodite klass mitteenesek. ülesannetes

3.1 Mitteenesekaasse operaatoriga ülesanne

3.1.1 Ülesande seade

Olgu H ja F Hilberti ruumid. Vaatleme võrrandit

$$Au = f, \qquad f \in F, \quad A \in \mathcal{L}(H, F). \tag{3.1}$$

Siin $\mathcal{R}(A)$ võib olla mittekinnine, $\mathcal{N}(A)$ võib olla mittetriviaalne. Kaasoperaator $A^* \in \mathcal{L}(F, H)$ on määratud võrdusega $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$. Kehtivad järgmised omadused:

1) $A^*A : H \to H$ ja $AA^* : F \to F$ on lineaarsed mittenegatiivsed enesekaassed operaatorid;

2) $\mathcal{N}(A) = \overline{\mathcal{R}(A^*)}^{\perp}$ ja $\mathcal{N}(A^*) = \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}$, see tähendab, $H = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ ja $F = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Vaatleme lisaks veel võrrandeid

$$A^*Au = A^*f \tag{3.2}$$

ning

$$Au = Qf, \tag{3.3}$$

kus $Q : F \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ on ortoprojektor.

Alapeatükis 1.1.11 näidati, et võrrandite (3.2) ja (3.3) lahendite hulgad langevad kokku. Võrrandite (3.1) ja (3.2) lahenduvuse vahekorra kohta saadi järgmised tulemused.

a) Kui $f \in \mathcal{R}(A)$, siis võrrandite (3.1) ja (3.2) lahendite hulgad langevad kokku.

b) Kui $Qf \in \mathcal{R}(A)$, aga $f \notin \mathcal{R}(A)$, siis (3.1) ei ole lahenduv, kuid (3.2) on lahenduv. (Öeldakse, et võrrandil (3.1) leidub kvaasilahend.)

c) Kui $Qf \notin \mathcal{R}(A)$, siis ka (3.2) ei ole lahenduv.

Sealjuures ülesanne (3.2) on enesekaasne.

Olgu nüüd võrrand $Au = f_\delta$, selle sümmetriseerimisel saame $A^*Au = A^*f_\delta$. Vaatleme meetodite klassi

$$u_r = (I - A^*Ag_r(A^*A))\, u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta, \tag{3.4}$$

kusjuures nõuame, et $g_r(\lambda)$ rahuldaks põhitingimusi (2.2) ja (2.3) ning $\|A\|^2 \leqslant a$. Siis $\|A^*A\| = \|A\|^2 \leqslant a$. (On selge, et $\|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$. Võrdus järeldub siin sellest, et $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leqslant \|A^*A\|\,\|x\|^2$.)

Meetodite klassi (3.4) näiteid.

1) Tihhonovi meetod
$$u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*f_\delta,$$
siin $r = \dfrac{1}{\alpha}$.

2) Itereeritud Tihhonovi meetod
$$\alpha u_{n,\alpha} + A^*Au_{n_\alpha} = \alpha u_{n-1,\alpha} + A^*f_\delta, \qquad n = 1, 2, \ldots, m.$$
Kui $m = 1$ ja $u_0 = 0$, siis on tegemist Tihhonovi meetodiga.

3) Ilmutatud iteratsioonimeetod
$$u_n = u_{n-1} - \mu\left(A^*Au_{n-1} - A^*f_\delta\right), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$
siin $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A\|^2}$.

4) Ilmutamata iteratsioonimeetod

$$\alpha u_n + A^*Au_n = \alpha u_{n-1} + A^*f_\delta, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

siin $\alpha > 0$.

5) Cauchy ülesande meetod

$$u'(t) + A^*Au(t) = A^*f_\delta, \qquad u(0) = u_0.$$

3.1.2 Abitulemused

Lineaarsete operaatorite teooriast on teada [Dunford-Schwarz], et iga $A \in \mathcal{L}(H, F)$ korral leiduvad operaatorid $U \in \mathcal{L}(H, F)$ ja $U^\circ \in \mathcal{L}(F, H)$, mille korral

$$\begin{aligned} \|Uu\| &= \|u\| \quad \forall u \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}, \qquad & \|Uu\| &= 0 \quad \forall u \in \mathcal{N}(A), \\ \|U^\circ z\| &= \|z\| \quad \forall z \in \overline{\mathcal{R}(A)}, \qquad & \|U^\circ z\| &= 0 \quad \forall z \in \mathcal{N}(A), \end{aligned}$$

kusjuures

$$A = U\,(A^*A)^{\frac{1}{2}} = (AA^*)^{\frac{1}{2}}\,U, \qquad A^* = U^\circ\,(AA^*)^{\frac{1}{2}} = (A^*A)^{\frac{1}{2}}\,U^\circ. \tag{3.5}$$

Sealjuures ülaltoodud nõuetest järeldub, et $U^* = U^\circ$. Operaatori A ja A^* esitusi kujul (3.5) nimetatakse operaatorite A ja A^* polaaresitusteks.

Vahetult on näha, et $\|U\| = 1$, $\|U^\circ\| = 1$.

Tähistame $P = U^*U$ ja $Q = UU^*$, siis $P \in \mathcal{L}\left(H, \overline{\mathcal{R}(A^*)}\right)$ ja $Q \in \mathcal{L}\left(F, \overline{\mathcal{R}(A)}\right)$ on projektorid.

Lemma 58. *Olgu g tõkestatud tükiti pidev funktsioon lõigul $[0, a]$, $A \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$. Siis $A^*g(AA^*) = g(A^*A)A^*$ ja $Ag(A^*A) = g(AA^*)A$.*

Tõestus. Vaatleme juhtu, kus g on pidev funktsioon. Weierstrassi lähendusteoreemi põhjal

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g(\lambda) - g_n(\lambda)| \to 0,$$

kui $n \to \infty$ ja g_n on teatud n-astme polünoom. Nõue $\|A\|^2 \leqslant a$ garanteerib, et $\sigma(AA^*) \subset [0, a]$ ning $\sigma(A^*A) \subset [0, a]$. Seega

$$\begin{aligned} \|g(AA^*) - g_n(AA^*)\| &\leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(AA^*)} |g(\lambda) - g_n(\lambda)| \leqslant \varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty), \\ \|g(A^*A) - g_n(A^*A)\| &\leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(A^*A)} |g(\lambda) - g_n(\lambda)| \leqslant \varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Näitame, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrdus

$$A^* (AA^*)^k = (A^*A)^k A^*. \tag{3.6}$$

Tõepoolest,

$$A^* (AA^*)^k = A^* \underbrace{(AA^*)(AA^*)\dots(AA^*)}_{k} = \underbrace{(A^*A)(A^*A)\dots(A^*A)}_{k} A^* = (A^*A)^k A^*.$$

Analoogiliselt põhjendame seose

$$A (A^*A)^k = (AA^*)^k A. \tag{3.7}$$

Seosed (3.6) ja (3.7) jäävad muidugi kehtima, kui operaatorite astmed $(AA^*)^k$ ja $(A^*A)^k$ asendada vastavate operaatorite lineaarkombinatsiooniga $k = 0, 1, \dots, n$ korral, seega polünoomidega:

$$A^* g_n (AA^*) = g_n (A^*A) A^*, \qquad A g_n (A^*A) = g_n (AA^*) A.$$

Esimene võrdus lubab hinnata:

$$\begin{aligned} \|A^*g(AA^*) - g(AA^*)A^*\| &\leqslant \|A^*g(AA^*) - A^*g_n(AA^*)\| + \\ &\qquad + \|A^*g_n(AA^*) - g_n(A^*A)A^*\| + \\ &\qquad + \|g_n(A^*A)A^* - g(A^*A)A^*\| \leqslant \\ &\leqslant 2\|A^*\|\varepsilon_n \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Analoogiliselt põhjendame teise võrduse. □

Sõnastame järgnevalt 3 lemmat, mis on analoogid vastavate lemmadele enesekaasse operaatori kohta, tõestused praktiliselt samad, kasutades operaatori A asemel operaatorit A^*A.

Lemma 59 (Lemma 37 analoog)**.** . *Olgu H, F Hilberti ruumid, $A \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$ ja rahuldagu funktsioon $g_r(\lambda)$ tingimusi (2.2) ja (2.3). Siis*

$$(I - A^*Ag_r(A^*A))\, v \to 0 \quad \forall v \in \mathcal{N}(A)^\perp \textbf{\textit{ kui }} r \to \infty,$$

$$(I - AA^*g_r(AA^*))\, z \to Qz \quad \forall z \in F \textbf{\textit{ kui }} r \to \infty.$$

Tõestus. Lemmast 37 saame operaatori A asemel operaatorit A^*A kasutades lemma esimese väite ning operaatorit $AA^* : F \to F$ kasutades saame

$$(I - AA^*g_r(AA^*))\, z_0 \to 0 \quad \forall z_0 \in \overline{\mathcal{R}(A)}^\perp \text{ kui } r \to \infty.$$

Kuna iga $z \in F$ esitub kujul $z = Qz + (I - Q)z$, siis eelmise rea koondumisest $z_0 = (I - Q)z$ korral saame lemma teise väite. □

Lemma 60 (Lemma 41 analoog)**.** ***Olgu*** $A \in \mathcal{L}(H,F)$***,*** $\|A\|^2 \leqslant a$ ***ja rahuldagu*** $g_r(\lambda)$ ***põhitingimust (2.3). Kui tõkestatud jada*** (r_n)***,*** $r_n \leqslant \bar{r} = \mathrm{const}$ ***ja*** $v_0 \in \mathcal{N}(A)^\perp$ ***korral***

$$A\left(I - A^*Ag_{r_n}(A^*A)\right)v_0 \to 0,$$

kui $n \to \infty$***, siis ka***

$$\left(I - A^*Ag_{r_n}(A^*A)\right)v_0 \to 0,$$

kui $n \to \infty$***.***

Lemmat 60 läheb tarvis hälbeprintsiibi koondumise tõestamisel.

Lemma 61 (Lemma 42 analoog)**.** ***Olgu*** $A \in \mathcal{L}(H,F)$***,*** $\|A\| \leqslant a$ ***ja rahuldagu*** $g_r(\lambda)$ ***põhitingimust (2.3). Olgu*** $0 \leqslant p < 2p_0$***. Siis iga*** $v \in \mathcal{N}(A)^\perp$ ***korral kehtib***

$$r^{\frac{p}{2}}\, \||A|^p\left(I - A^*A\right)g_r(A^*A)v\| \to 0 \textbf{ kui } r \to \infty, \quad (\textbf{tähis } |A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}})$$

ning iga $w \in \mathcal{N}(A^*)^\perp$ ***korral kehtib***

$$r^{\frac{p}{2}}\, \||A^*|^p\left(I - AA^*\right)g_r(AA^*)w\| \to 0 \textbf{ kui } r \to \infty, \quad (\textbf{tähis } |A^*| := (AA^*)^{\frac{1}{2}}\,.)$$

Edaspidi läheb vaja hinnangut

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \sqrt{\lambda}\,|g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_*\sqrt{r}, \qquad r \geqslant 0,\ \gamma_* = \mathrm{const}. \tag{3.8}$$

Võrratus (3.8) järeldub põhitingimustest (2.2) ja (2.3) konstandiga $\gamma_* = \sqrt{\gamma\,(1+\gamma_0)}$.

Tõepoolest, $|1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_0$ (valides (2.3) $p = 0$) ning seega

$$|\lambda g_r(\lambda)| \leqslant 1 + |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant 1 + \gamma_0.$$

Nüüd aga

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \sqrt{\lambda}\,|g_r(\lambda)| \leqslant \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \sqrt{\lambda}\,|g_r(\lambda)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} |g_r(\lambda)|^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1+\gamma_0}\cdot\sqrt{\gamma r}.$$

See hinnang on üldiselt väga jäme. Näiteks Tihhonovi meetodi korral annab ta $\gamma_* = \sqrt{2}$, aga vahetult saame $g_r(\lambda) = \dfrac{r}{1+r\lambda}$ korral hinnates

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \sqrt{\lambda} g_r(\lambda) = \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \frac{r\sqrt{\lambda}}{1+r\lambda} \leqslant \frac{\sqrt{r}}{2},$$

kuna funktsiooni $h(\lambda) = \dfrac{r\sqrt{\lambda}}{1+r\lambda}$ tuletis annab maksimumkoha tingimuseks $\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\,(1+r\lambda) - r\sqrt{\lambda} = 0$ ehk $\lambda_{\max} = \dfrac{1}{r}$. Siit tuleb $\gamma_* = \dfrac{1}{2}$.

3.1.3 Sümmetriseerimise teine variant

Otsime võrrandile

$$Au = f_\delta \tag{3.9}$$

lahendit kujul $u = A^*v$. See on lähend; üldiselt normaallahend $u \in \overline{\mathcal{R}(A^*)}$, kuid $u \in \mathcal{R}(A^*)$ ei kehti. Samas on ka üldine lähend (3.4) kujul $u_r \in \mathcal{R}(A^*)$, kui $u_0 = 0$, sest siis $u_r = g_r(A^*A)A^*f_\delta = A^*g_r(AA^*)f_\delta$. Läheme võrrandilt (3.9) üle võrrandile

$$AA^*v = f_\delta \tag{3.10}$$

Võrrand (3.10) on enesekaasne ülesanne ning sellele leiame lähislahendi kujul

$$v_r = (I - AA^*g_r(AA^*))\,v_0 + g_r(AA^*)f_\delta, \tag{3.11}$$

kus $v_0 \in F$ on alglähend.

Lähislahend $u_r = A^*v_r$ langeb kokku lähislahendiga (3.4), kui $u_0 = A^*v_0$. Tõepoolest, sel juhul

$$\begin{aligned}
u_r &= A^*v_r = \\
&= A^*\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)v_0 + A^*g_r(AA^*)f_\delta = \\
&= \left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)A^*v_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta = \\
&= \left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta.
\end{aligned}$$

Sümmetriseerimise teist varianti on mõistlik kasutada, kui $\dim F \ll \dim H$. Näiteks, kui $F = \mathbb{R}^m$, $H = \mathbb{R}^n$, $m \ll n$. Siis $AA^* : F \to F$ on ainult $m \times m$ maatriks, aga $A^*A : H \to H$ on $n \times n$ maatriks.

3.1.4 Regulariseerimisparameetri aprioorne valik

Teoreem 62 (Teoreemi 38 analoog). *Olgu $A \in \mathcal{L}(H,F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $Qf \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ ning rahuldagu $g_r(\lambda)$ põhitingimusi (2.2) ja (2.3). Siis kehtivad järgmised väited.*

1) *Kui lähislahendi (3.4) korral $r = r(\delta)$ valida nii, et $r(\delta) \to \infty$, kuid $\delta\sqrt{r(\delta)} \to 0$, kui $\delta \to 0$, siis $u_{r(\delta)} \to u_*$, kus u_* on alglähendile u_0 lähim võrrandi (3.9) (kvaasi)lahend.*

2) *Kui $u_0 - u_* = |A|^p\,v$, kus $\|v\| \leqslant \rho$ (meenutame: $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$) ning $r(\delta)$ valida kujul $r(\delta) = d_p\rho^{\frac{2}{p+1}}\delta^{-\frac{2}{p+1}}$, kus $d_p = \left(\frac{p\gamma_{\frac{p}{2}}}{\gamma_*}\right)^{\frac{2}{p+1}}$, siis $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant c_p\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$, kus $0 < p \leqslant 2p_0$ ja $c_p = \left(p^{\frac{1}{p+1}} + p^{-\frac{p}{p+1}}\right)\gamma_*^{\frac{p}{p+1}}\gamma_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{p+1}}$.*

Võrreldes teoreemiga 38 on erinevus selles, et kasutame hinnangut $\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\left|\sqrt{\lambda}g_r(\lambda)\right| \leqslant \gamma_*\sqrt{r}$, see toob c_p ja d_p avaldisse suuruse γ_*.

Tõestus. Lähislahendi viga avaldub kujul

$$\begin{aligned} u_r - u_* &= (I - A^*Ag_r(A^*A))\, u_0 + g_r(A^*A)A^*f_\delta - u_* = \\ &= (I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*) + g_r(A^*A)A^*f_\delta - A^*Ag_r(A^*A)u_* = \\ &= (I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*) + g_r(A^*A)A^*(f_\delta - Au_*). \end{aligned}$$

Kuna ortoprojektor $Q : F \to \overline{R(A)}$ jätab $\forall v \in H$ korral elemendid Av samaks, kehtib võrdus $QA = A$, seega samuti kaasoperaatorite võrdus $A^*Q = A^*$ (kasutasime ortoprojektori omadust $Q^* = Q$). Kuna eelduse põhjal kehtib $Au_* = Qf$, siis $A^*Au_* = A^*Qf = A^*f$. Seega

$$u_r - u_* = (I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*) + g_r(A^*A)A^*(f_\delta - f).$$

Hindame teist liidetavat:

$$\begin{aligned} \|g_r(A^*A)A^*\,(f_\delta - f)\| &\leqslant \|g_r(A^*A)A^*\|\,\|f_\delta - f\| \leqslant \\ &\leqslant \|g_r(A^*A)A^*\| \cdot \delta = \left\|g_r(A^*A)\,(A^*A)^{\frac{1}{2}}\,U^*\right\| \cdot \delta \leqslant \\ &\leqslant \left\|g_r(A^*A)\,(A^*A)^{\frac{1}{2}}\right\| \cdot \delta \leqslant \\ &\leqslant \left(\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\left|g_r(\lambda)\sqrt{\lambda}\right|\right) \cdot \delta \leqslant \gamma_*\sqrt{r}\delta. \end{aligned}$$

Oleme saanud, et

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \|(I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*)\| + \gamma_*\sqrt{r}\delta.$$

Lemma 59 põhjal $\|\,(I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*)\,\| \to 0$ kui $r \to \infty$. Seega teoreemi 1) väide kehtib, $r(\delta)$ valikureegel garanteerib veahinnangu mõlema liikme koondumise, kui $\delta \to 0$.

Hindame esimest liidetavat, kasutades põhitingimust (2.3):

$$\begin{aligned} \|(I - A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0 - u_*)\| &= \left\|(I - A^*Ag_r(A^*A))\,(A^*A)^{\frac{p}{2}}\,v\right\| \leqslant \\ &\leqslant \rho \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{\frac{p}{2}}\,|1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \rho \cdot \gamma_{\frac{p}{2}} r^{-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Nüüd

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \gamma_{\frac{p}{2}}\rho r^{-\frac{p}{2}} + \gamma_*\sqrt{r}\delta. \tag{3.12}$$

Leidmaks parempoolse avaldise miinimumkohta, minimiseerime funktsiooni $h(r) = \gamma_{\frac{p}{2}}\rho r^{-\frac{p}{2}} + \gamma_* \sqrt{r}\delta$ tuletise abil: $h'(r) = -\dfrac{p}{2}\gamma_{\frac{p}{2}}\rho r^{-\frac{p}{2}-1} + \dfrac{1}{2}\gamma_* r^{-\frac{1}{2}}\delta$. Nõue $h'(r) = 0$ annab, et $\gamma_*\delta = p\gamma_{\frac{p}{2}}\rho r^{-\frac{p+1}{2}}$, millest järeldubki $r(\delta) = d_p\rho^{\frac{2}{p+1}}\delta^{-\frac{2}{p+1}}$.

Kui saadud $r(\delta)$ avaldis asetada hinnangusse (3.12), saame teoreemi väite. □

3.1.5 Parameetri aposterioorne valik. Hälbeprintsiip

Lemma 63 (Hälbe muutumispiirid, Lemma 40 analoog)**.** *Olgu* $A \in \mathcal{L}(H,F)$*,* $f \in \mathcal{R}(A)$*,* $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$*. Siis*

1) $\lim\limits_{r\to 0}\|Au_r - f_\delta\| = \|Au_0 - f_\delta\|$*,*

2) $\lim\limits_{r\to\infty}\|Au_r - f_\delta\| = \inf\limits_{u\in H}\|Au - f_\delta\| \leqslant \delta$*.*

Tõestus. Analoogiline lemma 40 tõestusega. Hälve $Au_r - f_\delta$ on esitatav kujul

$$\begin{aligned}
Au_r - f_\delta = A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)u_0 + Ag_r(A^*A)A^*f_\delta - f_\delta = \\
= \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)A\left(u_0 - u_*\right) + \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)\left(Au_* - f_\delta\right) \\
= \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)\left(Au_0 - f_\delta\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Seega

$$\|Au_r - f_\delta\| \leqslant (1 + \|A\|^2\|g_r(AA^*)\|\|Au_0 - f_\delta)\|,$$
$$\|Au_r - f_\delta\| \geqslant \|Au_0 - f_\delta)\| - \|A\|^2\|g_r(AA^*)\|\|Au_0 - f_\delta)\|$$

ning koonduvus $\|g_r(AA^*)\| \leqslant \gamma r \to 0$ kui $r \to 0$ annab 1) väite. Lemma 59 2. väide annab siinse lemma 2. väite. □

Tekib küsimus, kuidas käitub hälve, kui $Qf \in \mathcal{R}(A)$, aga $f \notin \mathcal{R}(A)$, st. kui võrrandil (3.9) on ainult kvaasilahend. Selgitame, et sel juhul ei pruugi suurus $\inf\limits_{u\in H}\|Au - f_\delta\|$ olla δ kaudu hinnatav. Me saame tagurpidi kolmnurga võrratuse abil, et

$$\begin{aligned}
\inf_{u\in H}\|Au - f_\delta\| &= \inf_{u\in H}\|Au - Qf + Qf - f_\delta\| \geqslant \\
&\geqslant \|Qf - f_\delta\| - \inf_{u\in H}\|Au - Qf\| = \|Qf - f_\delta\|.
\end{aligned}$$

Samal viisil ka

$$\|Qf - f_\delta\| \geqslant \|Qf - f\| - \|f - f_\delta\| \geqslant \|Qf - f\| - \delta.$$

Ent suurus $\|Qf - f\|$ võib põhimõtteliselt olla kuitahes suur ning ta ei sõltu arvust δ. Saadud võrratuse $\inf\limits_{u \in H} \|Au - f_\delta\| \geqslant \|Qf - f\| - \delta$ tõttu võib siis ka $\inf\limits_{u \in H} \|Au - f_\delta\|$ olla kuitahes suur.

Reegel Π**1'.** Olgu $b_1 \geqslant 1$ ja $b_2 \geqslant b_1$. Kui $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b_2\delta$, siis valime $r(\delta) = 0$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 0$ nii, et

$$b_1\delta \leqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| \leqslant b_2\delta.$$

Erinevus reeglist $\Pi 1$ enesekaasse operaatori juhul oli, et reeglis $\Pi 1$ nõuti $b_1 > 1$, kuid reeglis $\Pi 1$' on lubatud ka võrdus.

Iteratsioonimeetodite jaoks anname reegli $\Pi 2$ analoogi.

Reegel Π**2'.** Olgu $b \geqslant 1$ ning $\theta \in (0, 1)$. Kui $\|Au_0 - f_\delta\| \leqslant b\delta$, siis valime $r(\delta) = 0$. Vastupidisel juhul valime $r = r(\delta) > 0$ nii, et $\left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| \leqslant b\delta$ ja mingi $s \in [\theta r(\delta), r(\delta)]$ korral $\|Au_s - f_\delta\| \geqslant b\delta$.

Praktikas on mõistlik valida b_1 arvude 1 ja 2 vahelt, näiteks $b_1 = 1{,}5$ või $b_1 = 1{,}6$. Arv b on otstarbekas valida võimalikult lähedane 1-le: $b = 1{,}03$, $b = 1{,}05$ vms.

Teoreem 64 (Teoreemi 43 analoog)**.** *Olgu* $A \in \mathcal{L}(H, F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$, *ning rahuldagu* $g_r(\lambda)$ *põhitingimusi (2.2) ja (2.3), kus* $p_0 > \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = 1$. *Olgu parameeter* $r = r(\delta)$ *valitud reegli* Π*1' või* Π*2' põhjal ning olgu vastavalt* $b_1 > 1$ *või* $b > 1$. *Siis*

1) $\delta\sqrt{r(\delta)} \to 0$ *ja* $u_{r(\delta)} \to u_*$ *protsessis* $\delta \to 0$.

2) Kui $u_0 - u_* = |A|^p v$, *kus* $\|v\| \leqslant \rho$, $p > 0$, *siis*

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \quad r(\delta) \leqslant d_p^2 \rho^{\frac{2}{p+1}} \delta^{-\frac{2}{p+1}},$$

kui $0 < p \leqslant 2p_0 - 1$. *Sealjuures eeskirja* Π*1' korral*

$$d_p = \left(\frac{\gamma_{\frac{p+1}{2}}}{b_1 - 1}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \qquad c_p = (b_2 + 1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_* d_p.$$

Tähelepanuväärne on, et hälbeprintsiip on rakendatav Tihhonovi meetodi korral (Lavrentjevi meetodi korral ei ole!).

Kui lubada $b_1 = 1$ või $b = 1$, siis saab ka tõestada teoreemiga 64 analoogilise teoreemi, aga tõestus erineb oluliselt.

Tõestus. Üldiselt on tõestus analoogiline teoreemi 43 tõestusega. Teeme siin läbi ainult veahinnangu tõestuse.

Me saame, nagu teoreemi 62 tõestuses, et

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant \left\|\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(u_0 - u_*)\right\| + \gamma_*\sqrt{r(\delta)}\delta.$$

Hälve $Au_r - f_\delta$ on esitatav kujul

$$\begin{aligned}
Au_r - f_\delta &= A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)u_0 + Ag_r(A^*A)A^*f_\delta - f_\delta = \\
&= A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)(u_0 - u_*) + \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)Au_* - \\
&\qquad - \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)f_\delta = \\
&= A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)(u_0 - u_*) - \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - Au_*) = \\
&= A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)(u_0 - u_*) - \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - f).
\end{aligned}$$

Teise liidetava hinnang:

$$\left\|\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - f)\right\| \leqslant \gamma_0\delta = \delta.$$

Esimest liidetavat hindame ülalt ja alt:

$$\begin{aligned}
\left\|A\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\leqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| + \delta \leqslant && (3.14)\\
&\leqslant b_2\delta + \delta = (b_2 + 1)\delta, \\
\left\|A\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(u_0 - u_*)\right\| &\geqslant \left\|Au_{r(\delta)} - f_\delta\right\| - \delta \leqslant && (3.15)\\
&\leqslant b_1\delta - \delta = (b_1 - 1)\delta.
\end{aligned}$$

Hindame parameetrit $r(\delta)$ ülalt. Kõigepealt selle tõttu, et $u_0 - u_* \in \mathcal{N}(A)^\perp$, kehtib $(A^*A)^{\frac{1}{2}}\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(A^*A)^{\frac{p}{2}}v \in \mathcal{N}(A)^\perp$ (Kontrollida!!). Kuna $\|Uu\| = \|u\|$, kui $u \in \mathcal{N}(A)^\perp$, siis

$$\begin{aligned}
(b_1 - 1)\delta &\leqslant \left\|A\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(u_0 - u_*)\right\| = \\
&= \left\|U(A^*A)^{\frac{1}{2}}\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(A^*A)^{\frac{p}{2}}v\right\| = \\
&= \left\|(A^*A)^{\frac{1}{2}}\left(I - A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)(A^*A)^{\frac{p}{2}}v\right\| \leqslant \\
&\leqslant \rho \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{\frac{p+1}{2}}\left|1 - \lambda g_{r(\delta)}(\lambda)\right|.
\end{aligned}$$

Kasutame nüüd põhitingimust (2.3) (selleks on vaja, et $\dfrac{1+p}{2} \leqslant p_0$ ehk $p \leqslant 2p_0 - 1$), siis saame

$$(b_1 - 1)\delta \leqslant \rho \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \lambda^{\frac{p+1}{2}}\left|1 - \lambda g_{r(\delta)}(\lambda)\right| \leqslant \rho\gamma_{\frac{p+1}{2}}r(\delta)^{-\frac{p+1}{2}}.$$

Järelikult
$$r(\delta)^{\frac{p+1}{2}} \leqslant \frac{\rho\gamma_{\frac{p+1}{2}}}{(b_1-1)\,\delta},$$
millest
$$r(\delta) \leqslant \left(\frac{\gamma_{\frac{p+1}{2}}}{b_1-1}\right)^{\frac{2}{p+1}} \rho^{\frac{2}{p+1}}\delta^{-\frac{2}{p+1}}.$$

Tõestame nüüd veahinnangu. Kasutame momentide võrratust:
$$\begin{aligned}
\|(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\| &= \left\|(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(A^*A)^{\frac{p}{2}}\,v\right\| = \\
&= \left\|(A^*A)^{\frac{p}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,v\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|(A^*A)^{\frac{p+1}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,v\right\|^{\frac{p}{p+1}} \cdot \\
&\qquad \cdot \|(I-A^*Ag_r(A^*A))\,v\|^{\frac{1}{p+1}} \leqslant \\
&\leqslant \left\|(A^*A)^{\frac{1}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\right\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}
\end{aligned}$$

Edasi, kuna $(A^*A)^{\frac{1}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*) \in \mathcal{N}(A)^\perp$, siis
$$\begin{aligned}
\|(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\| &\leqslant \left\|(A^*A)^{\frac{1}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\right\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} = \\
&= \left\|U\,(A^*A)^{\frac{1}{2}}\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\right\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}} = \\
&= \|A\,(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\|^{\frac{p}{p+1}} \rho^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$
Võrratuse (3.14) abil saame, et
$$\|(I-A^*Ag_r(A^*A))\,(u_0-u_*)\| \leqslant (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}}\rho^{\frac{1}{p+1}}.$$

Kokkuvõttes
$$\begin{aligned}
\left\|u_{r(\delta)}-u_*\right\| &\leqslant (b_2+1)^{\frac{p}{p+1}}\,\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_* d_p \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{-\frac{1}{p+1}}\delta = \\
&= \left((b_2+1)^{\frac{p}{p+1}} + \gamma_* d_p\right)\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}},
\end{aligned}$$
kusjuures nõuame, et $0 < p \leqslant 2p_0 - 1$. □

3.1.6 Aposterioorsete valikureeglite kvaasioptimaalsus

Definitsioon 65 (Definitsiooni 45 analoog). *Valikureegel R on* nõrgalt kvaasioptimaalne *meetodi M jaoks (esitatud valemi (3.4) abil), kui iga f_δ, $\|f_\delta - f\| \leqslant$*

δ, korral

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant C \cdot \inf_{r \geqslant 0} \left(\|(I - A^*Ag_r(A^*A))\| + \gamma_* \sqrt{r}\delta \right) + O(\delta)$$

ning konstant C ei sõltu suurustest A, u_* ja f_δ.

Teoreem 66 (Teoreemi 48 analoog)**.** ***Olgu** $A \in \mathcal{L}(H, F)$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. **Kui reegel** R **on nõrgalt kvaasioptimaalne ja** $u_0 - u_* = |A|^p v$, **kus** $\|v\| \leqslant \rho$, $p > 0$, **siis kehtib veahinnang***

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 < p \leqslant 2p_0.$$

Saab näidata, et hälbeprintsiip on nõrgalt kvaasioptimaalne iteratsioonimeetodite korral, aga ei ole nõrgalt kvaasioptimaalne lõpliku kvalifikatsiooniga meetodite (Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi) korral. Seega analoogiliselt enesekaasse juhuga võtame kasutusele modifitseeritud hälbeprintsiibi.

Tähistame

$$B_r = \begin{cases} I, & p_0 = \infty, \\ (I - AA^*g_r(AA^*))^{\frac{1}{2p_0}}, & p_0 < \infty. \end{cases}$$

Sellega on defineeritud operaator $B_r : F \to F$.

Näiteks Tihhonovi meetodi korral $g_r(\lambda) = \dfrac{r}{1 + r\lambda}$, mistõttu $1 - \lambda g_r(\lambda) = \dfrac{1}{1 + r\lambda}$. Seega $B_r = (I + rAA^*)^{-\frac{1}{2}}$.

Reegel П3'. Anname ette arvud $b_2 \geqslant b_1 \geqslant 1$. Kui $\|B_0 (Au_0 - f_\delta)\| \leqslant b_2\delta$, siis valime $r(\delta) = 0$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 0$ nii, et

$$b_1\delta \leqslant \left\|B_{r(\delta)} \left(Au_{r(\delta)} - f_\delta\right)\right\| \leqslant b_2\delta.$$

Sealjuures normi $\left\|B_{r(\delta)} \left(Au_{r(\delta)} - f_\delta\right)\right\|$ on hõlbus leida järgmisest valemist.

$$\begin{aligned} \left\|B_{r(\delta)} (Au_{r,m} - f_\delta)\right\| &= \langle B_r (Au_{r,m} - f_\delta), B_r (Au_{r,m} - f_\delta) \rangle = \\ &= \langle Au_{r,m} - f_\delta, B_r^2 (Au_{r,m} - f_\delta) \rangle = \\ &= \langle Au_{r,m} - f_\delta, Au_{r,m+1} - f_\delta \rangle. \end{aligned}$$

Tõepoolest,

$$Au_r - f_\delta = (I - AA^*g_r(AA^*)) (Au_0 - f_\delta),$$

millest

$$\begin{aligned} B_r^2 (Au_r - f_\delta) &= (I + rAA^*)^{-1} (I + rAA^*)^{-m} (Au_0 - f_\delta) = \\ &= (I + rAA^*)^{-(m+1)} (Au_0 - f_\delta) = \\ &= Au_{r,m+1} - f_\delta. \end{aligned}$$

Teoreem 67 (Teoreemi 52 analoog)**.** *Olgu $A \in \mathcal{L}(H,F)$, $\|A\|^2 \leqslant a$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ ning rahuldagu $g_r(\lambda)$ põhitingimusi (2.2), (2.3) ja tingimusi (A1)–(A5). Olgu $r(\delta)$ valitud reegli Π3' järgi. Siis*

$$\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant C(b_1, b_2) \inf_{r \geqslant 0} \left(\|(I - A^*Ag_r(A^*A))(u_0 - u_*)\| + \gamma_* \sqrt{r}\delta\right),$$

st. modifitseeritud hälbeprintsiip on nõrgalt kvaasioptimaalne.

Märkus 68. *Kui $p_0 = \infty$, siis hälbeprintsiip on tugevalt kvaasioptimaalne.*

Saab näidata, et Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi jaoks ei hälbeprintsiip ega modifitseeritud hälbeprintsiip ei ole tugevalt kvaasioptimaalsed.

Märkus 69. *Modifitseeritud hälbeprintsiip ei ole nõrgalt kvaasioptimaalne, kui $Qf \in \mathcal{R}(A)$ ja $f \notin \mathcal{R}(A)$.*

3.1.7 Nõrgalt kvaasioptimaalsete valikureeglite pere

Defineerime operaatorid $D_r = r\,|A^*|^2\,B_r^2$ ning funktsionaalid $\varphi_k(r) = \left\|D_r^k B_r (Au_r - f_\delta)\right\|$.

Reegel Π4'. Olgu $b_2 \geqslant b_1 > \tilde{\gamma}_k$, kus $\tilde{\gamma}_k = \left(\gamma_{\frac{kp_0}{k+1+p_0}}\right)^{\frac{k+1+p_0}{p_0}}$. Kui $\varphi_k(1) \leqslant b_2\delta$, siis valime $r(\delta) = 1$. Vastupidisel juhul valime $r = r(\delta) > 1$ nii, et $\varphi_k(r) \leqslant b_2\delta$ iga $r \geqslant r(\delta)$ korral ning $\varphi_k(r(\delta)) \geqslant b_1\delta$.

Märgime, et kui $k = 0$, siis reegel Π4' kujutab endast modifitseeritud hälbeprintsiipi.

Edaspidi selgub, et kui $k > 0$, siis Π4' on nõrgalt kvaasioptimaalne ka juhul, kui ülesandel on ainult kvaasilahend. (Ja seda kõigi senivaadeldud meetodite jaoks.) Reegel Π4' on lihtsalt realiseeritav juhul $2k \in \mathbb{N}$.

3.1.8 Monotoonse vea reegel (itereeritud) Tihhonovi meetodis

Monotoonse vea reegel osutub Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi korral paremaks kui modifitseeritud hälbeprintsiip.

Reegel Π**5.** Valime regulariseerimisparameetri $r(\delta)$ tingimusest

$$d(r) := \frac{\langle Au_{r,m} - f_\delta, Au_{r,m+1} - f_\delta \rangle}{\|Au_{r,m+1} - f_\delta\|} = b\delta,$$

kus $b \geqslant 1$.

Praktikas valitakse arvuks b mingi 1 lähedane arv, näiteks $b = 1{,}03$.

Reegli $\Pi 5$ avaldise võib ümber vormistada kujul

$$d(r) = \frac{\|B_r (Au_{r,m} - f_\delta)\|^2}{\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\|}.$$

Teoreem 70. *Kui $d(r) \geqslant \delta$, siis Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi korral on funktsioon $t(r) := \|u_r - u_*\|$ monotoonselt kahanev.*

Lause 71. *Olgu r_{MHP}, r_{HP}, r_{ME} vastavalt modifitseeritud hälbeprintsiibi, hälbeprintsiibi ja monotoonse vea reegli põhjal valitud parameetrid: $\|B_{r_{MHP}} (Au_{r_{MHP}} - f_\delta)\| = b\delta$, $\|Au_{r_{HP}} - f_\delta\| = b\delta$, $d(r_{ME}) = b\delta$ (suurus $b \geqslant 1$ on kõigile ühine).*

Siis kehtivad järgmised väited.

1) $r_{MHP} \leqslant r_{ME} \leqslant r_{HP}$,

2) $\|u_{r_{ME}} - u_*\| \leqslant \|u_{r_{MHP}} - u_*\|$.

Tõestus. Tõestame 1). Me saame, et

$$d(r) = \frac{\|B_r (Au_r - f_\delta)\|^2}{\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\|} \geqslant \|B_r (Au_r - f_\delta)\|,$$

kuna $\|B_r (Au_r - f_\delta)\| \geqslant \left\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\right\|$. (Nimelt, $\|B_r\| \leqslant 1$.)

Teiselt poolt momentide võrratust kasutades

$$d(r) = \frac{\|B_r (Au_r - f_\delta)\|^2}{\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\|} \leqslant \frac{\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\| \, \|Au_r - f_\delta\|}{\|B_r^2 (Au_r - f_\delta)\|} = \|Au_r - f_\delta\|.$$

Oleme saanud, et

$$\|B_r(Au_r - f_\delta)\| \leqslant d(r) \leqslant \|Au_r - f_\delta\|.$$

Kuna kõik kolm funktsiooni on monotoonselt kahanevad, siis siit järeldub 1). □

Teoreem 72. *Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi korral funktsioon* $t(r) = \|u_r - u_*\|$ *on monotoonselt kahanev, kui* $d(r) \geqslant \delta$*, kus*

$$d(r) = \frac{\|B_r(Au_r - f_\delta)\|^2}{\|B_r^2(Au_r - f_\delta)\|}.$$

Tõestus. Näitame, et $\frac{d}{dr}\|u_r - u_*\|^2 \leqslant 0$, kui $d(r) \geqslant \lambda$. Kehtib

$$\begin{aligned} u_r - u_* &= (I - A^*Ag_r(A^*A))\,u_0 - g_r(A^*A)A^*f_\delta - u_* = \\ &= g_r(A^*A)A^*(f_\delta - Au_0) + (u_0 - u_*). \end{aligned}$$

Tihhonovi ja itereeritud Tihhonovi meetodi korral $g_r(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - (1 + r\lambda)^{-m}\right)$. Niisiis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}g_r(\lambda) &= m \cdot \frac{1}{\lambda}(1 + r\lambda)^{-(m+1)}\lambda = m\left(1 - (1 + r\lambda)^{-m}\right) = \\ &= \gamma(1 + r\lambda)^{-1}(1 - \lambda g_r(\lambda)) = \\ &= \lambda\beta_r^2(\lambda)(1 - \lambda g_r(\lambda)), \end{aligned}$$

kus $\beta_r(\lambda) = (1 + r\lambda)^{-\frac{1}{2}}$.

Nüüd

$$\frac{d}{dr}g_r(A^*A)A^*(f_\delta - Au_0) = \gamma\bar{B}_r^2(I - A^*Ag_r(A^*A))\,A^*(f_\delta - Au_0),$$

kus $\bar{B}_r = (I - rA^*A)^{-\frac{1}{2}}$.

Arvutame:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\|u_r - u_*\|^2 &= 2\left\langle u_r - u_*, \frac{d(u_r - u_*)}{dr}\right\rangle = \\ &= 2\left\langle u_r - u_*, \gamma\bar{B}_r^2(I - A^*Ag_r(A^*A))\,A^*(f_\delta - Au_0)\right\rangle = \\ &= 2\gamma\left\langle u_r - u_*, A^*B_r^2(I - AA^*g_r(AA^*))(f_\delta - Au_0)\right\rangle = \\ &= 2\gamma\left\langle Au_r - f, B_r^2(I - AA^*g_r(AA^*))(f_\delta - Au_0)\right\rangle. \end{aligned}$$

Kuna

$$
\begin{aligned}
(I - AA^*g_r(AA^*))\,(f_\delta - Au_0) &= (I - AA^*g_r(AA^*))\,f_\delta - (I - AA^*g_r(AA^*))\,Au_0 = \\
&= f_\delta - Ag_r(A^*A)A^*f_\delta - A\,(I - A^*Ag_r(A^*A))\,u_0 = \\
&= f_\delta - Au_r,
\end{aligned}
$$

siis

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\|u_r - u_*\|^2 &= 2\gamma\left\langle Au_r - f, B_r^2\,(I - AA^*g_r(AA^*))\,(f_\delta - Au_0)\right\rangle = \\
&= -2\gamma\left\langle Au_r - f, B_r^2\,(Au_r - f_\delta)\right\rangle \leqslant \\
&\leqslant -2\gamma\left\langle Au_r - f_\delta, B_r^2\,(Au_r - f_\delta)\right\rangle + 2\gamma\,\|f_\delta - f\|\,\left\|B_r^2\,(Au_r - f_\delta)\right\| \leqslant \\
&\leqslant -2\gamma\,\|B_r\,(Au_r - f_\delta)\|^2 + 2\gamma\delta\,\left\|B_r^2\,(Au_r - f_\delta)\right\| \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

kui $d(r) \geqslant \delta$. □

Seega väiksema r korral, kui pakub välja monotoonse vea reegel, pole mõtet peatuda.

Järeldus 73. $\|u_{r_{ME}} - u_*\| \leqslant \|u_{r_{MHP}} - u_*\|$.

Siit saab järeldada ka nõrga kvaasioptimaalsuse jne. Kui veatase on täpselt teada, siis monotoonse vea reegel on parim.

Need meetodid ei tööta kvaasilahendiga ülesande korral.

3.1.9 Regulariseerimisparameetri valik kvaasilahendiga ülesande korral

Vaatleme juhtu, kus $Au = f$, $f \notin \mathcal{R}(A)$ ja $Qf \in \mathcal{R}(A)$. (See tähendab, ülesandel on vaid kvaasilahend.) Sel juhul hälbeprintsiibi, modifitseeritud hälbeprintsiibi ja monotoonse vea reeglid ei sobi parameetri valikuks (ei anna koonduvat lähislahendit).

Parameetri valikuks sobib reegel $\Pi 4$ (kvaasioptimaalne valikute pere), kus $k > 0$.

Valime $k = \dfrac{1}{2}$.

Meil oli $\varphi_k(r) = r^k \left\| |A^*|^{2k}\, B_r^{2k+1}\,(Au_r - f_\delta)\right\|$. Nüüd siis

$$
\varphi_{\frac{1}{2}}(r) = \sqrt{r}\,\left\|A^*B_r^2\,(Au_r - f_\delta)\right\|.
$$

Sõnastame täielikkuse huvides uuesti meie konkreetsel juhul reegli $\Pi 4$.

Reegel Π**4.** Olgu $b_2 \geqslant b_1 > \tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}$. Kui $\varphi_{\frac{1}{2}}(1) \leqslant b_2\delta$, siis $r(\delta) = 1$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta) > 1$ sellise, et $\varphi_{\frac{1}{2}}(r) \leqslant b_2\delta$ iga $r \geqslant r(\delta)$ korral ja $\varphi_{\frac{1}{2}}(r(\delta)) \geqslant b_1\delta$.

Teoreem 74. *Olgu* $A \in \mathcal{L}(H,F)$*,* $Qf \in \mathcal{R}(A)$*,* $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ *ning rahuldagu funktsioon* $g_r(\lambda)$ *põhitingimusi (2.2), (2.3) ja (A1)–(A4). Olgu* $\gamma_0 \leqslant 1$ *ning parameeter* $r(\delta)$ *valitud reegli* Π*4 järgi. Siis kehtivad järgmised väited.*

1) Kui $\delta \to 0$*, siis* $\delta\sqrt{r(\delta)} \to 0$ *ning* $u_{r(\delta)} \to u_*$*.*

2) Kui $u_0 - u_* = |A|^p v$*,* $\|v\| \leqslant \rho$*,* $p > 0$*, siis* $r(\delta) \leqslant d_p \rho^{\frac{2}{p+1}} \delta^{-\frac{2}{p+1}}$ *ning* $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\| \leqslant c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}$*,* $0 < p \leqslant 2p_0$*.*

Põhjus, miks muud reeglid ei tööta, on see, et me ei suuda garanteerida võrratust $\lim\limits_{r\to\infty} \|Au_r - f_\delta\| \leqslant \delta$.

Tõestus. Tõestame vaid veahinnangu.

$$\begin{aligned}
Au_r - f_\delta &= A\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)u_0 + Ag_r(A^*A)A^*f_\delta - f_\delta = \\
&= \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(Au_0 - f_\delta) = \\
&= \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)A\left(u_0 - u_*\right) - \left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - Qf).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
A^*B_r^2\left(Au_r - f_\delta\right) &= A^*B_r^2\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)A\left(u_0 - u_*\right) - \\
&\quad - A^*B_r^2\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - Qf).
\end{aligned}$$

Me teame, et $A^*Q = A^*$, niisiis

$$\begin{aligned}
A^*B_r^2\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - Qf) &= B_r^2\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)(A^*f_\delta - A^*Qf) = \\
B_r^2\left(I - A^*Ag_r(A^*A)\right)(A^*f_\delta - A^*f) &= \\
A^*B_r^2\left(I - AA^*g_r(AA^*)\right)(f_\delta - f).
\end{aligned}$$

Järelikult, kasutades esitust $A^* = U^*\left(A^*A\right)^{\frac{1}{2}}$, saame hinnangu

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{1}{2}}(r) &\leqslant \sqrt{r}\left\|A^*B_r^2\left(I - AA^*g_r(AA^*)\left(f_\delta - f\right)\right)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \delta\sqrt{r} \cdot \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} \sqrt{\lambda}\left|1 - \lambda g_r(\lambda)\right|^{1+\frac{1}{p_0}} \leqslant \\
&\leqslant \delta\sqrt{r}\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} = \tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}\delta.
\end{aligned}$$

Seega saame hinnangud

$$\sqrt{r}\left\|A^*B_r^2\left(I-AA^*g_r(AA^*)\right)A\left(u_0-u_*\right)\right\| \leqslant \left(b_2+\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}\right)\delta \quad \forall r\geqslant r(\delta), \tag{3.16}$$

$$\sqrt{r(\delta)}\left\|A^*B_{r(\delta)}^2\left(I-AA^*g_{r(\delta)}(AA^*)\right)A\left(u_0-u_*\right)\right\| \leqslant \left(b_1-\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}\right)\delta. \tag{3.17}$$

Kui nüüd $u_0-u_*=|A|^p\,v$, $\|v\|\leqslant\rho$, siis

$$\begin{aligned}
&\sqrt{r}\left\|A^*B_r^2\left(I-AA^*g_r(AA^*)\right)A\left(u_0-u_*\right)\right\| = \\
&= \sqrt{r}\left\|A^*B_r^2\left(I-AA^*g_r(AA^*)\right)A(A^*A)^{\frac{p}{2}}v\right\| = \\
&= \sqrt{r}\left\|(A^*A)^{1+\frac{p}{2}}\,\bar{B}_r^2\left(I-A^*Ag_r(A^*A)\right)v\right\| \leqslant \\
&\leqslant \tilde{\gamma}_{1+\frac{p}{2}}r^{-\frac{1+p}{2}}\rho.
\end{aligned}$$

Kasutades võrratust (3.17), saame, et

$$r(\delta)\leqslant d_p\rho^{\frac{2}{p+1}}\delta^{-\frac{2}{p+1}}.$$

Teine hinnang:

$$\|u_r-u_*\|\leqslant\left\|\left(I-A^*Ag_r(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|+\gamma\sqrt{r}\delta.$$

Esimese liidetava hindamiseks kasutame lemmaga 51 analoogilist tulemust. Nimelt saab tõestada, et kui mingi $c>1$ jaoks kehtib

$$\sqrt{r}\left\|\bar{B}_r^2A^*A\left(I-A^*Ag_r(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|\leqslant c\delta \tag{3.18}$$

iga $r\geqslant r_c$ jaoks, siis $r_c\geqslant r_0$, kus r_0 on funktsiooni

$$\Phi_c(r)=\left\|\left(I-A^*Ag_r(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|+2\gamma\bar{\gamma}c\sqrt{r}\delta$$

globaalne miinimumkoht (konstant $\bar{\gamma}$ pärineb nõudest (A4)).

Rakendame viimast tulemust $c=b_2+\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}$ korral. Võrratuse (3.16) põhjal $r(\delta)\geqslant r_c$ (sest r_c on vähim arv r, mille korral kehtib tingimus (3.18)). Kuna $r_c\geqslant r_0$, siis $r(\delta)\geqslant r_0$. Nüüd saame, et

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(I-A^*Ag_{r(\delta)}(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|\leqslant\left\|\left(I-A^*Ag_{r_0}(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|\leqslant \\
&\leqslant\inf_{r\geqslant 0}\left(\left\|\left(I-A^*Ag_r(A^*A)\right)\left(u_0-u_*\right)\right\|+2\gamma\bar{\gamma}\left(b_2+\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{r}\delta\right)\leqslant \\
&\leqslant c_{p,b_2}\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}},\qquad 0<p\leqslant 2p_0.
\end{aligned}$$

□

3.2 Veaga antud operaatori juht

Olgu H Hilberti ruum. Vaatleme ülesannet $A \in \mathcal{L}(H,H)$, $Au = f$, $f \in \mathcal{R}(A)$, $A = A^* \geqslant 0$. Eeldame, et f asemel on antud $f_\delta \in F$ selliselt, et $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ ning A asemel on antud mingi lähend $A_\eta \in \mathcal{L}(H,H)$, $A_\eta = A_\eta^*$, nii, et $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$.

Kui $A = A^* \geqslant 0$, $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$, siis $\sigma(A_\eta) \subset [-\eta, \|A\| + \eta]$. Selleks, et garanteerida A_η mittenegatiivsust, tähistame $A'_\eta = A_\eta + \eta I$ ning kasutame operaatorit A'_η operaatori A lähendina. Nüüd $A'_\eta \geqslant 0$, aga muidugi $\left\|A'_\eta - A\right\| \leqslant \left\|A'_\eta - A_\eta\right\| + \|A_\eta - A\| \leqslant 2\eta$.

Järgnevas eeldame (vajadusel kasutades eelmises lõigus kirjeldatud võtet), et $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$.

Lähislahend on kujul

$$u_r = (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, u_0 + g_r(A_\eta) f_\delta.$$

Kui on ülesanne, kus $A \in \mathcal{L}(H,F)$ ning ei nõuta, et A on enesekaasne, siis

$$u_r = \left(I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)\right) u_0 + g_r(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* f_\delta.$$

Lemma 75. *Olgu* $A = A^* \geqslant 0$*,* $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$*,* $\|A - A_\eta\| \leqslant \eta$*. Siis iga* $p \geqslant 0$ *korral*

$$\left\|A_\eta^p - A^p\right\| \leqslant c_p \eta^{\min\{1,p\}}.$$

Kui $\|A\| \leqslant a$*,* $\|A_\eta\| \leqslant a$ *ja* $g_r(\lambda)$ *rahuldab põhitingimust (2.3), siis*

$$\left\|A_\eta \left(I - A_\eta g_r(A_\eta)\right) \left(A_\eta^p - A^p\right)\right\| \leqslant \varepsilon_{r,p}\eta,$$

kus $\varepsilon_{r,p} \to 0$*, kui* $r \to \infty$ *iga* $p \geqslant 0$ *korral.*

Lemma 76. *Olgu* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H,F)$*,* $\|A - A_\eta\| \leqslant \eta$*. Siis iga* $p \geqslant 0$ *korral*

$$\||A_\eta|^p - |A|^p\| \leqslant c_p \left(1 + |\ln \eta|\right) \eta^{\min\{1,p\}},$$

kus $|A_\eta| = \left(A_\eta^* A_\eta\right)^{\frac{1}{2}}$*. Kui* $\|A\|^2 \leqslant a$*,* $\|A_\eta\|^2 \leqslant a$ *ja* $g_r(\lambda)$ *rahuldab põhitingimust (2.3), siis*

$$\left\|A_\eta \left(I - A_\eta^* A_\eta g_r(A_\eta^* A_\eta)\right) \left(|A_\eta|^p - |A|^p\right)\right\| \leqslant \varepsilon_{r,p}\eta,$$

kus $\varepsilon_{r,p} \to 0$*, kui* $r \to \infty$ *iga* $p \geqslant 0$ *korral.*

Teoreem 77. *Olgu* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H,H)$*,* $A = A^* \geqslant 0$*,* $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$*,* $\|A - A_\eta\| \leqslant \eta$*,* $f \in \mathcal{R}(A)$*,* $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$ *ning rahuldagu* $g_r(\lambda)$ *tingimusi (2.2) ja (2.3). Siis kehtivad järgmised väited.*

1) *Kui valida* $r = r(\delta, \eta)$ ***nii, et*** $r(\delta,\eta) \to \infty$, $(\delta+\eta)r(\delta,\eta) \to 0$ ***protsessides*** $\delta \to 0$ ***ja*** $\eta \to 0$, ***siis*** $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$.

2) ***Kui*** $u_0 - u_* = A^p v$, $\|v\| \leqslant \rho$, $0 < p \leqslant p_0$, ***ning*** $r(\delta,\eta) = d \cdot (\delta+\eta)^{-\frac{1}{p+1}}$, ***kus*** $d = \mathrm{const} > 0$, ***siis***

$$\left\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\right\| \leqslant c_{p,\rho,d} \cdot (\delta+\eta)^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 < p \leqslant p_0.$$

Tõestus. Tõestame kõigepealt koondumise. Saame, et

$$\begin{aligned} u_r - u_* &= (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, u_0 + g_r(A_\eta) f_\delta - u_* = \\ &= (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*) + g_r(A_\eta)\, (f_\delta - A_\eta u_*)\,. \end{aligned}$$

Esimese liidetava norm r järgi kahaneb, teise norm aga kasvab. Seega hindame kõigepealt teist liidetavat:

$$f_\delta - A_\eta u_* = f_\delta - A u_* + A u_* - A_\eta u_* = f_\delta - f + (A - A_\eta)\, u_*,$$

mille abil

$$\|f_\delta - A_\eta u_*\| \leqslant \|f_\delta - f\| + \|A - A_\eta\|\, \|u_*\| \leqslant \delta + \eta\, \|u_*\|\,.$$

Kuna $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$, siis põhitingimuse (2.2) põhjal $\|g_r(A_\eta)\| \leqslant \gamma r$. Nüüd

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*)\| + \gamma r\, (\delta + \eta\, \|u_*\|)\,.$$

Kui $(\delta+\eta)\, r(\delta,\eta) \to 0$, siis eeldusel $\delta \to 0$, $\eta \to 0$ saame $\gamma r\, (\delta + \eta\, \|u_*\|) \to 0$.

Liidetava $\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*)\|$ hääbumise tõestame Banach-Steinhausi teoreemi abil. Võrratus $\|I - A_\eta g_r(A_\eta)\| \leqslant \gamma_0$ kehtib põhitingimuse (2.3) tõttu. Valime nüüd tiheda hulga ruumis $\overline{\mathcal{R}(A)}$: kus $u_0 - u_* = Aw$. Siis

$$\begin{aligned} \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*)\| &= \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, Aw\| = \\ &= \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, ((A - A_\eta) + A_\eta)\, w\| \leqslant \\ &\leqslant \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (A - A_\eta)\, w\| + \\ &\qquad \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, A_\eta w\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma_0 \eta\, \|w\| + r^{-1} \gamma_1\, \|w\| \to 0, \end{aligned}$$

kui $r(\delta,\eta) \to 0$, $\eta \to 0$, $\delta \to 0$.

Lähislahendi veahinnangu saamiseks märgime kõigepealt, et

$$\gamma_r\, (\delta + \eta\, \|u_*\|) = \gamma d\, (\delta+\eta)^{-\frac{1}{p+1}}\, (\delta + \eta\, \|u_*\|) \leqslant c'\, (\delta+\eta)^{\frac{p}{p+1}}\,.$$

Tõepoolest, kui $\|u_*\| \leqslant 1$, siis $\delta + \eta \|u_*\| \leqslant \delta + \eta$. Kui aga $\|u_*\| > 1$, siis $\delta + \eta \|u_*\| \leqslant \|u_*\| \left(\frac{\delta}{\|u_*\|} + \eta \right)$.

Nüüd

$$\begin{aligned} \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))(u_0 - u_*)\| &= \|(I - A_\eta g_r(A_\eta)) A^p v\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta)) \left(A_\eta^p - A^p\right) v\right\| + \\ &\qquad + \left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta)) A_\eta^p v\right\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma_0 \left\|A_\eta^p - A^p\right\| + \gamma_p r^{-p} \rho \leqslant \\ &\leqslant \gamma_0 c_p \eta^{\min\{1,p\}} + \gamma_p r^{-p} \rho \leqslant \\ &\leqslant c''' (\delta + \eta)^{\frac{p}{p+1}} , \end{aligned}$$

kus $r = d (\delta + \eta)^{-\frac{1}{p+1}}$ ning kasutasime hinnanguid

$$\gamma_p r^{-p} \rho \leqslant c'' (\delta + \eta)^{\frac{p}{p+1}} , \qquad \eta^{\min\{1,p\}} \leqslant (\delta + \eta)^{\frac{p}{p+1}} .$$

□

3.2.1 Hälbeprintsiip

Kehtivad seosed

$$\begin{aligned} \lim_{r \to \infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| &= \inf_{u \in H} \|A_\eta u - f_\delta\| \leqslant \|A_\eta u_* - f_\delta\| = \\ &= \|A_\eta u_* - A u_* + A u_* - f_\delta\| \leqslant \delta + \eta \|u_*\| . \end{aligned}$$

Sealjuures hinnang $\lim_{r \to \infty} \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant \delta + \eta \|u_*\|$ ei ole üldjuhul parandatav (st. leidub juhtumeid, kus kehtib võrdus).

Reegel Π**6.** Olgu $b_1 > 1$, $b_2 \geqslant b_1$. Kui

$$\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \leqslant b_2 (\delta + \eta \|u_*\|) , \tag{3.19}$$

siis valime $r(\delta, \eta) = 0$. Vastasel juhul valime $r = r(\delta, \eta) > 0$ nii, et

$$b_1 (\delta + \eta \|u_*\|) \leqslant \|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant b_2 (\delta + \eta \|u_*\|) . \tag{3.20}$$

Reegel Π6 on otseselt hälbeprintsiibi üldistus. Reegli Π6 puuduseks on asjaolu, et tarvis on teada arvu $\|u_*\|$ või sellele üsna täpset hinnangut.

Reegel Π**7.** Teeme muu samamoodi nagu reeglis $\Pi6$, ainult võrratuses (3.19) asendame arvu $\|u_*\|$ arvuga $\|u_0\|$ ning võrratuses (3.20) asendame arvu $\|u_*\|$ arvuga $\|u_r - u_0\| + \|u_0\|$.

Võib juhtuda, et reegli $\Pi7$ korral ei õnnestu määrata lõplikku parameetri väärtust. Kui nii, siis valime $r(\delta, \eta) = \dfrac{d}{\delta + \eta}$, kus d on konstant. Mitteeneseкaassel juhul, kui $A \in \mathcal{L}(H, F)$, siis valime aga $r(\delta, \eta) = \dfrac{d}{(\delta + \eta)^2}$.

Teoreem 78. *Olgu* $A \in \mathcal{L}(H, H)$*,* $A = A^* \geqslant 0$*,* $A_\eta = A_\eta^* \geqslant 0$*,* $\|A - A_\eta\| \leqslant \eta$*,* $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$*,* $f \in \mathcal{R}(A)$*. Rahuldagu* $g_r(\lambda)$ *põhitingimusi (2.2) ja (2.3). Olgu* $r(\delta, \eta)$ *valitud reegli* $\Pi6$ *või* $\Pi7$ *järgi. Siis kehtivad järgmised väited.*

1) Kui $\delta \to 0$ *ja* $\eta \to 0$*, siis* $(\delta + \eta)\, r(\delta, \eta) \to 0$ *ja* $u_{r(\delta,\eta)} \to u_*$*.*

2) Kui $u_0 - u_* = A^p v$*,* $\|v\| \leqslant \rho$*, siis*

$$\left\|u_{r(\delta,\eta} - u_*\right\| \leqslant c_{r,p}\, (\delta + \eta)^{\frac{p}{p+1}}, \qquad 0 < p \leqslant p_0 - 1.$$

Kõik enne saadud tulemused (modifitseeritud hälbeprintsiip, kvaasioptimaalsete valikute pere, monotoonse vea reegel) on üpris lihtsasti üle kantavad veaga operaatori juhule.

Veahinnangu tõestuse skeem. Reegli $\Pi6$ korral kehtivad väited

$$\begin{aligned} A_\eta u_r - f_\delta &= A_\eta\, (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*) - \\ &\quad - (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (f_\delta - A_\eta u_*)\,, \\ \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (f_\delta - A_\eta u_*)\| &\leqslant \delta + \eta\, \|u_*\|\,. \end{aligned}$$

Siit jõuame võrratusteni

$$(b_1 - 1)\, (\delta + \eta\, \|u_*\|) \leqslant \left\|A_\eta \left(I - A_\eta g_{r(\delta,\eta)}(A_r)\right) (u_0 - u_*)\right\| \leqslant (b_2 + 1)\, (\delta + \eta\, \|u_*\|)\,. \tag{3.21}$$

Kui nüüd $u_0 - u_* = A^p v$, kus $\|v\| \leqslant \rho$, siis

$$\begin{aligned} \|A_\eta\, (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, (u_0 - u_*)\| &= \|A_\eta\, (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, A^p v\| \leqslant \\ &\leqslant \left\|A_\eta\, (I - A_\eta g_r(A_\eta))\, A_\eta^p v\right\| + \\ &\quad + \left\|A_\eta\, (I - A_\eta g_r(A_\eta)) \left(A^p v - A_\eta^p v\right)\right\| \leqslant \\ &\leqslant \gamma_{p+1} r^{(-p+1)} \rho + \varepsilon_{r,p} \eta \rho, \end{aligned} \tag{3.22}$$

kus $\varepsilon_{r,p} \to 0$, kui $r \to \infty$. Viimases võrratuses kasutasime lemmat 75.

Võrratustest (3.21) ja (3.22) saame, et

$$(b_1 - 1)\,(\delta + \eta\,\|u_*\|) \leqslant \gamma_{p+1} r(\delta,\eta)^{-(p+1)}\rho + \varepsilon_{r,p}\eta\rho,$$

kus $\varepsilon_{r,p} \to 0$, kui $r \to \infty$. Seega

$$r(\delta,\eta) \leqslant d\,(\delta + \eta)^{-\frac{1}{p+1}}\,.$$

Võrratuse

$$\left\|u_{r(\delta,\eta)} - u_*\right\| \leqslant \|(I - A_\eta g_r(A_n))\,(u_0 - u_*)\| + \gamma r(\delta,\eta)\,(\delta+\eta)\,\|u_*\|$$

parema poole teise liidetava hindame $r(\delta,\eta)$ tõkestatuse tõttu avaldisega $c\,(\delta+\eta)^{\frac{p}{p+1}}$. Esimese liidetava hindame aga järgmiselt.

$$\begin{aligned}
\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\,(u_0 - u_*)\| &= \|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\,A^p v\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\,A_\eta^p v\right\| + \\
&\qquad + \left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\left(A_\eta^p - A^p\right)v\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\,A_\eta^p v\right\| + c_p \eta^{\min\{1,p\}}\rho.
\end{aligned}$$

Avaldist $\left\|(I - A_\eta g_r(A_\eta))\,A_\eta^p v\right\|$ hindame momentide võrratust kasutades. $\square$

3.3 Parameetri valik mitte teada oleva või ligikaudselt teada oleva veataseme suhtes

Vaatleme ülesannet $Au = f$, kus $f \in \mathcal{R}(A)$ ning f asemel on teada $\tilde{f} \in F$.

3.3.1 Mitte teada oleva veataseme juht

Reegel Π**8 (Kvaasioptimaalsusprintsiip).** Olgu $A \in \mathcal{L}(H,F)$. Regulariseerimisparameetriks r valitakse funktsiooni $\sqrt{r}\varphi_{\frac{1}{2}}(r)$ suurim lokaalne miinimum. (Reegli mõnede muude variantide korral võidakse valida ka mõni teine lokaalne miinimum.) Siin

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(r) = \left\|D_r^{\frac{1}{2}} B_r \left(Au_{r_*} - \tilde{f}\right)\right\|, \qquad D_r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}A^* B_r,$$

see tähendab,

$$\sqrt{r}\varphi_{\frac{1}{2}}(r) = r\left\|A^* B_r^2 \left(Au_r - \tilde{f}\right)\right\|.$$

Kui aga $A \in \mathcal{L}(H, H)$, $A = A^* \geqslant 0$, siis parameetri r väärtuseks võetakse funktsiooni $r \left\| B_r \left(Au_r - \tilde{f} \right) \right\|$ suurim lokaalne miinimum.

Veatasemest mitte sõltuvaid parameetri valikuid nimetatakse δ-vabadeks valikuteks. Need valikureeglid on sellised, et üldisel juhul lähislahendi koonduvust näidata ei õnnestu. Bakušinski (1982): Ei leidu δ-vaba parameetri valikut, mis ilma täiendavate eeldusteta annaks koonduva lähislahendi.

Praktikas annavad 90% juhtudel δ-vabad valikureeglid siiski väga hea r väärtuse.

3.3.2 Ligikaudselt teada oleva veataseme juht

On antud mingi veatase δ, kuid ei ole garanteeritud, et võrratus $\left\| f - \tilde{f} \right\| \leqslant \delta$ kehtiks.

Definitsioon 79. *Parameetri valiku reegel* Π *on stabiilne veataseme suhtes, kui leidub konstant* c *nii, et*

$$\frac{\left\| f - \tilde{f} \right\|}{\delta} \leqslant c \quad \Rightarrow \quad \left\| u_{r(\Pi)} - u_* \right\| \to 0$$

protsessis $\delta \to 0$.

Reegel Π**9.** Olgu $b_2 \geqslant b_1 > \tilde{\gamma}_k$, $k > 0$. Kui $\varphi_k(1) \leqslant b_2\delta$, siis valime $r(\delta) = 1$. Vastasel juhul valime $r(\delta) > 1$ nii, et $\varphi_k(r(\delta)) \leqslant b_2\delta$ ning $\varphi_k(r) \geqslant b_1\delta$ iga $r \in [1, r(\delta)]$ korral.

Teoreem 80. *Olgu* $r(\delta)$ *valitud reegli* $\Pi 9$ *põhjal, siis Lavrentjevi, itereeritud Lavrentjevi, ilmutatud iteratsiooni-, ilmutamata iteratsiooni- ja Cauchy ülesande meetodi korral kehtivad järgmised väited.*

1) *Kehtib* $\left\| u_{r(\delta)} - u_* \right\| \to 0$, *kui* $\dfrac{\left\| \tilde{f} - f \right\|}{\delta} \leqslant c = \text{const}$, *protsessis* $\delta \to 0$. *(See tähendab, reegel* $\Pi 9$ *on stabiilne.)*

2) *Kui* $\left\| \tilde{f} - f \right\| \leqslant \delta$, *siis kehtib*

$$\left\| u_{r(\delta)} - u_* \right\| \leqslant C(b_1, b_R) \inf_{r \geqslant 0} \Psi(r),$$

kus

$$b_R = \max_{r(\delta)\leqslant r\leqslant R(\delta)} \frac{\varphi_(r)}{\varphi_k(r(\delta))}$$

ning** $R(\delta)$ **on suurim parameetri** r **väärtus, mille korral** $\varphi_k(r) = b_2(\delta)$. **Funktsioon** $\Psi(r) = \|(I - Ag_r(A))\,(u_0 - u_*)\| + (b_2 + 1)\delta$ **on tuttav juba teoreemi 52 tõestusest.

Märgime, et kui funktsiooni $\varphi_k(r)$ graafik on taoline, nagu paremal kujutatud, siis $b_R = b_2$.

Vabaliikme kohta võib olla antud info ka ühel järgmistest kujudest.

1) $\tilde{f}$ on juhuslik suurus ning me teame hinnangut vabaliikme ruutkeskmisele veale: $E\left\|\tilde{f} - f\right\|^2 \leqslant \sigma^2$, kus σ on teada olev arv. Parameetri valikuks saab kasutada reeglit Π9, kui võtta $\delta = \sigma$.

   Kui $\tilde{f} \sim \mathcal{N}(f, \varepsilon^2)$, tulevad päris head parameetrid.

2) Antud on kaks vabaliiget $\tilde{f}_1$ ja $\tilde{f}_2$. Siis kasutame reeglit Π9, veatasemeks δ võib võtta $c\left\|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\right\|$, kus $c = \mathrm{const}$.

Hea oleks saada veel hinnanguid kujul, kus $\left\|u_{r(\delta)} - u_*\right\|$ hinnang sõltuks arvust $\dfrac{\left\|\tilde{f} - f\right\|}{\delta}$. Teoorias seni saadud hinnangud piirduvad lähislahendi hinnangu sõltuvusega suurusest $e^{\frac{\|\tilde{f}-f\|}{\delta}}$, mis on üsna halb.

3.4 Normaalselt lahenduvad ülesanded

Olgu $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Vaatleme ülesannet $Au = f$, kus f asemel on teada f_δ, kusjuures $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Samuti on A asemel teada A_η, kus $\|A_\eta - A\| \leqslant \eta$. Ülesannet $Au = f$ nimetatakse *normaalselt lahenduvaks*, kui $\mathcal{R}(A)$ on kinnine.

Normaalselt lahenduv ülesanne võib olla mittekorrektne, $\mathcal{N}(A)$ võib olla mittetriviaalne või kehtida mittevõrdus $\mathcal{R}(A) \neq F$.

Näited normaalselt lahenduvatest ülesannetest:

- II liiki integraalvõrrand, kus integraalvõrrandi ees on kordaja, mis kuulub operaatori spektrisse;
- lineaarne võrrandisüsteem.

Seni oli $\|u_r - u_*\|$ suurusjärk suurem kui $\delta + \eta$. Normaalselt lahenduva ülesande veahinnang

$$\|u_r - u_*\| \leqslant c\frac{\delta + \|u_*\|}{\mu - \eta} + \frac{\|f - Qf\|}{(\mu - \eta)^2}\eta,$$

kus $Q : F \to \mathcal{R}(A)$ on ortoprojektor.

Tähistame

$$\mu = \inf_{\substack{u \in H \\ u \perp \mathcal{N}(A) \\ \|u\|=1}} \|Au\|.$$

Saab näidata, et $\mu > 0$ parajasti siis, kui $\mathcal{R}(A)$ on kinnine.

Vaatleme juhtu, kus $\eta < \dfrac{\mu}{2}$.

Lähislahendi konstrueerimisel kasutame genereerivat funktsiooni $g_r(\lambda)$, mis rahuldagu juba tuttavaid tingimusi:

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} |g_r(\lambda)| \leqslant \gamma r, \tag{3.2}$$

$$\sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant a} \lambda^p |1 - \lambda g_r(\lambda)| \leqslant \gamma_p r^{-p}, \tag{3.3}$$

$$0 \leqslant 1 - \lambda g_r(\lambda) \leqslant 1. \tag{3.23}$$

Kui $f \in \mathcal{R}(A)$, valime

$$u_r = g_r\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* f_\delta, \qquad u_0 = 0.$$

Kui $f \notin \mathcal{R}(A)$, valime

$$\overline{u_r} = g_r\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* A_\eta u_r = \overline{g_r}\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* f_\delta,$$

kus $\overline{g_r}(\lambda) = \lambda g_r^2(\lambda)$.

Normaalselt lahenduvate ülesannete korral on iseloomulik, et nullpunkt kuulub spektrisse, aga ülejäänud spektri punktid on nullpunktist eraldatud. Nimelt,

$$\begin{aligned} \sigma(A^*A), \sigma(AA^*) &\subseteq \{0\} \cup [\mu^2, \|A\|^2], \\ \sigma\left(A_\eta^* A_\eta\right), \sigma\left(A_\eta A_\eta^*\right) &\subseteq [0, \eta^2] \cup [\mu_\eta^2, \|A_\eta\|^2], \end{aligned}$$

kus μ_η on $A_\eta^* A_\eta$ spektri vähim väärtus väljaspool lõiku $[0, \eta^2]$. Sealjuures $\mu_\eta \geqslant \mu - \eta$.

Teoreem 81. *Kehtigu tingimused (2.2), (2.3) ja (3.23) $p = 1$ korral. Valides $r = (\gamma \mu_\eta \eta)^{-1}$ või $r = (\gamma \mu \eta)^{-1}$, kehtib $f \in \mathcal{R}(A)$ jaoks*

$$\|u_r - u_*\| \leqslant \frac{\delta + c_1 \|u_*\| \eta}{\mu - \eta}$$

ning suvalise $f \in F$ jaoks

$$\|\overline{u_r} - u_*\| \leqslant \frac{\delta + c_1 \|u_*\|}{\mu - \eta} + \frac{\|f - Qf\|}{(\mu - \eta)^2} \eta.$$

3.4.1 Hälbeprintsiip

Teame, et kui $f \in \mathcal{R}(A)$, siis $\|A_\eta u_r - f_\delta\| \leqslant \delta + \|u_*\| \eta$. Valime r nii, et $\|A_\eta u_r - f_\delta\| = b(\delta + \eta \|u_*\|)$, $b > 1$.

Suvalise $f \in F$ korral valime aga r nii, et $\left\|A_\eta^* (A_\eta u_r - f_\delta)\right\| = b \|f_\delta\| \eta$, $b > 1$.

Teoreem 82. *Olgu $f \in \mathcal{R}(A)$ ning kehtigu tingimused (2.2), (2.3) ja (3.23). Valime $b > \dfrac{\mu}{\mu - \eta}$. Siis hälbeprintsiibiga valitud r korral*

$$\|u_r - u_*\| \leqslant c_{b,\eta} \frac{\delta + \eta}{\mu - \eta}.$$

Suvalise $f \in F$ korral

$$\lim_{r \to \infty} \left\|A_\eta^* (A_\eta u_r - f_\delta)\right\| = 0.$$

Suvalise $f \in F$ juhul garanteerib hälbeprintsiip hinnangu

$$\|\overline{u_r} - u_*\| \leqslant c_{b,\eta} \frac{\delta + \eta}{\mu - \eta} + \frac{b \|f_\delta\| + \overline{c}_{b,\eta} \|f - Qf\| \eta}{(\mu - \eta)^2}.$$

3.5 Regulariseeritud projektsioonimeetodid

3.5.1 Regulariseeritud projektsioonimeetodite näited

Olgu $A \in \mathcal{L}(H, F)$. Vaatleme ülesannet $Au = f$, kus f asemel on teada f_δ nii, et $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$.

Ülesannet arvutiga lahendades tuleb ta mingil etapil diskretiseerida. Võib kõigepealt regulariseerida ja seejärel diskretiseerida. Meie teeme vastupidi: kõigepealt projekteerime (diskretiseerime) ja siis regulariseerime.

Projekteeritud võrrand on kujul

$$A_n u_n = Q_n f_\delta,$$

kus $H_n \subset H$, $F_n \subset F$, $Q_n : F \to F_n$ on ortoprojektor, $P_n : H \to H_n$ on ortoprojektor, $u_n \in H_n$ ning $A_n = Q_n A P_n : H_n \to F_n$.

Kui H_n baas on $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ja F_n baas on $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, siis lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ kordajad $c_1, \ldots, c_n$ leiame süsteemist $\sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i, \psi_j) c_i = (f_\delta, \psi_j)$, $j = 1, \ldots, n$, mis omab maatrikskuju $B * c = fd$, $B_{ij} = (A\varphi_i, \psi_j)$.

On mõeldav regulariseerida seda maatriksvõrrandit. Juhul $B = B^T \geqslant 0$ annaks Lavrentjevi meetodiga regulariseerimine võrrandi $(\alpha I + B) * c = fd$, üldjuhul annaks Tihhonovi meetodiga regulariseerimine võrrandi $(\alpha I + B^T B) * c = B^T * fd$. Aga siis regulariseerime c leidmist, mitte lähislahendi u_n leidmist.

Kui $F = H$ ning $A = A^* \geqslant 0$, kasutame projekteerimiseks Galjorkini meetodit, $F_n = H_n$. Kui on mitteenesekaasne operaator, siis kasutame vähimruutude või vähima vea meetodit.

Regulariseerimiseks kasutatakse üldist regulariseerimisskeemi genereeriva funktsiooniga $g_r(\lambda)$, mis rahuldab tingimusi (2.2) ja (2.3). Lähislahend enesekaassel juhul on

$$u_{n,r} = (I - A_n g_r(A_n))\, P_n u_0 + g_r(A_n) P_n f_\delta,$$

üldjuhul

$$u_{n,r} = (I - A_n^* A_n g_r(A_n^* A_n))\, P_n u_0 + g_r(A_n^* A_n) A_n^* Q_n f_\delta.$$

Enesekaassel juhul diskretiseerimine Galjorkini meetodiga ($\varphi_i = \psi_i$) ja regulariseerimine Lavrentjevi meetodiga annavad võrrandi

$$(\alpha I + A_n)\, u_{n,\alpha} = P_n f_\delta$$

Regulariseerimisel ilmutatud iteratsioonimeetodiga saame

$$u_{n,k} = u_{n,k-1} - \mu \left(A_n u_{n,k-1} - P_n f_\delta\right), \qquad \mu \in \left(0, \frac{2}{\|A\|}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Üldjuhul: projekteeritud võrrandi regulariseerimisel Tihhonovi meetodiga saame

$$(\alpha I + A_n^* A_n)\, u_{n,\alpha} = A_n^* Q_n f_\delta,$$

regulariseerimisel ilmutatud iteratsioonimeetodiga saame

$$u_{n,k} = u_{n,k-1} - \mu A_n^* \left(A_n u_{n,k-1} - Q_n f_\delta\right), \qquad \mu \in \left(0, \frac{2}{\|A\|^2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

3.5.2 Meetodite maatrikskuju

a)Enesekaasne ülesanne. Olgu $H_n = SPAN\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Tähistame $G_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$, $B_{i,j} = (A\varphi_i, \varphi_j)$, $fd_i = (f_\delta, \varphi_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ kordajad $c_1, \ldots, c_n$ leiame Lavrentjevi meetodis süsteemist $(\alpha G + B)c = fd$. Ilmutatud iteratsioonimeetodis leiame r-ndal iteratsioonil kordajate lähisvektori c^r (siin r pole astmenäitaja) kujul

$$c^r = c^{r-1} - \mu(G^{-1}Bc^{r-1} - G^{-1})fd, r = 1, 2, \ldots),$$

ilmutamata iteratsioonimeetodis aga võrrandist

$$(G^{-1}B + \mu I_n)c^r = \mu c^{r-1} + G^{-1}fd, r = 1, 2, \ldots), \quad c^0 = G^{-1}((\varphi_i, u_0))^T_{i=1,\ldots,n}$$

2)Mitteenekaasne ülesanne. Tähistame $GH_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)(i, j = 1, \ldots, n)$,$GF_{i,j} = (\psi_i, \psi_j)(i, j = 1, \ldots, m)$, $B_{i,j} = (A\varphi_i, \varphi_j)(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$, $fd_j = (f_\delta, \varphi_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Lähislahendi $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ kordajad $c_1, \ldots, c_n$ leiame a) Tihhonovi meetodis

$$(\alpha GH + B^T * GF^{-1} * B)c = B^T * GF^{-1} fd.$$

b)ilmutatud iteratsioonimeetodis

$$GH * c^r = GHc^{r-1} - \mu(B^T * GF^{-1}Bc^{r-1} - B^T * GF^{-1})fd, r = 1, 2, \ldots),$$

c) ilmutamata iteratsioonimeetodis

$$(GH{*}B{+}B^T{*}GF^{-1}B{*}c^r = \mu GHc^{r-1}{+}B^T{*}GF^{-1}fd, r = 1, 2, \ldots), \quad c^0 = G^{-1}((\varphi_i, u_0))^T_{i=1,\ldots,n}$$

3.5.3 Näide I liiki integraalvõrrandi lahendusmeetoditest

Olgu $(Au)(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)\,ds$. Vaatleme võrrandit $Au = f$, kus $F = H = L_2(a,b)$.

A. Enesekaasne juht. Piisav tingimus on $K(t,s) = K(s,t)$, siis $A = A^*$.

Piisav tingimus on $\int_a^b \int_a^b K(t,s)v(s)v(t)\,ds\,dt \geqslant 0$ iga $v \in H$ korral, siis $A \geqslant 0$.

Valime diskretiseerimissammu $h = \dfrac{b-a}{n}$, kasutame sõlmi $s_j = a + jh$, $j = 0,\ldots,n$. Olgu baasfunktsioonid $\Phi_j(s) = \begin{cases} 0, & s \notin (s_{j-1}, s_j) \\ 1, & s \in (s_{j-1}, s_j)\,. \end{cases}$

Galjorkini meetodis $u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \Phi_j$. Lavrentjevi meetodiga regulariseerimisel saame süsteemi

$$\left(h^{-1}B + \alpha I_n\right)\underline{c} = h^{-1}\underline{f_\delta},$$

kus $\underline{c} = (c_1,\ldots,c_n)$, $B = (b_{ij})$,

$$b_{ij} = \int_{s_{i-1}}^{s_i}\int_{s_{j-1}}^{s_j} K(t,s)\,ds\,dt, \qquad \left(\underline{f_\delta}\right)_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f_\delta(t)\,dt, \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

ning I_n on n-järku ühikmaatriks.

Meenutame punktist 1.5.3 splainide aproksimatsiooniomadust:

$$\forall v \in H^l \quad \exists v_n \in S_{hkl} \quad \|v - v_n\|_{L_2} \leqslant ch^{\min\{k,l\}} \left\|D^l v\right\|_{L_2}. \tag{3.24}$$

Võtame $H_n = S_{hkl}$. Valitud baasfunktsioonid $\Phi_j(s)$ vastavad tükiti konstantsele splainile, kus $k = 1$. Võttes viimases hinnangus ka $l = 1$, saame $v = A^*z, z \in L_2$, $v_n = P_n v$ jaoks

$$\|A^*z - P_nA^*z\|_{L_2} \leqslant ch\|\int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} z(t)dt\|_{L_2} \leqslant ch\|\int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} dt\|_{L_2}\|z\|_{L_2}.$$

Diskretiseerimise viga iseloomustab suurus

$$\|A\,(I - P_n)\| = \|(I-P_n)\,A^*\| \leqslant c_1 h, \qquad c_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_a^b\int_a^b \left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right|^2 dt\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

(täpsustasime konstanti). Integraalid võib leida kvadratuurvalemiga, koguni kõige lihtsamaga:

$$b_{ij} \approx h^2 K_{ij} = h^2 K\left(s_i - \frac{h}{2}, s_j - \frac{h}{2}\right), \qquad \left(\underline{f_\delta}\right)_i \approx h f_\delta\left(s_i - \frac{h}{2}\right).$$

B. Üldjuht. Olgu $F_m \subset F$, baasfunktsioonid $\{\Psi_1, \ldots, \Psi_m\}$, $\Psi_i(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (t_{i-1}, t_i), \\ 1, & t \in (t_{i-1}, t_i). \end{cases}$ Kasutame sõlmi $t_i = a + i\tau$, kus $\tau = \dfrac{b-a}{m}$ on diskretiseerimissamm.

Lähislahend $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \Phi_i$. Kordajate vektori $\underline{c}$ leiame Tihhonovi meetodiga. Tekib süsteem

$$\alpha h \underline{c} + \tau^{-1} B^T B \underline{c} = \tau^{-1} B^T \underline{f_\delta},$$

kus

$$\left(\underline{f_\delta}\right)_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_\delta(t)\, dt, \quad b_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K(t,s)\, ds\, dt, \qquad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Diskretiseerimisviga iseloomustab: ruumi H suunas

$$\begin{aligned} \|A(I - P_n)\| &= \|(I - P_n) A^*\| \leqslant c_1 h, \qquad c_1 = \frac{1}{2} \|A_1\|_{L_2 \to L_2}, \\ (A_1 f)(s) &= \int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial s} f(t)\, dt \end{aligned}$$

ning ruumi F suunas

$$\|(I - Q_m) A\| \leqslant c_2 \tau, \qquad c_2 = \frac{1}{2} \|A_2\|_{L_2 \to L_2}, \quad (A_2 u)(t) = \int_a^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t} u(s)\, ds.$$

Neid integraale saab samamoodi ligikaudu arvutada, näiteks lõigu keskpunkti ja ristküliku keskpunkti järgi.

Kui teha kõigepealt Tihhonovi meetodiga ja siis projekteerida, tulevad integreerimismuutujad vastupidises järjekorras võrreldes praegusega.

3.5.4 Regulariseerimisparameetri aprioorne valik

Olgu $H = F$, $A = A^* > 0$, $F_n = H_n$ (Galjorkini meetod), $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Tähistame $\xi_{n,p} = \left\|(I - P_n)(A^*A)^{\frac{p}{2}}\right\|$, $\chi_{n,\varepsilon} = \inf\limits_{\alpha > 0} \left(\xi_{n,\alpha}\left(1 + \varepsilon^2\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, kus $p > 0$, $\varepsilon > 0$. Olgu

$P_n : H \to H_n$ ja $Q_n : F \to F_n$ ortoprojektorid. (Praegu $P_n = Q_n$.) Tähistame $A_n = Q_n A P_n$, praegu enesekaassel juhul tuleb $A_n = P_n A P_n$. Siis $\xi_{n,p}$ kahaneb n ja p kasvuga, $\chi_{n,\varepsilon}$ kasvab ε kasvuga ning kahaneb n kasvuga.

Teoreem 83. *Olgu täidetud tingimused*

$$\varepsilon \in (0, 1/2], \qquad \lim_{n\to\infty} \|(P_n - I)\, u\| = 0\, \forall u \in H. \tag{3.25}$$

Kui lähislahendis

$$u_{n,r} = (I - A_n g_r(A_n))\, P_n u_0 + g_r(A_n) P_n f_\delta$$

valida $r = r(\delta, n)$ *nii, et* $r \to \infty$*,* $r\delta \to 0$ *ning* $r\chi_{n,\varepsilon} \leqslant \mathrm{const}$ *protsessis* $\delta \to 0$*,* $n \to \infty$*, siis* $\|u_{n,r} - u_*\| \to 0$ *protsessis* $\delta \to 0$*,* $n \to \infty$*.*

Kui

$$u_* = (A^*A)^{\frac{p}{2}} z, \quad \|z\| \leqslant \rho, \qquad u_0 - u_* = (A^*A)^{\frac{p}{2}} z_1, \quad \|z_1\| \leqslant \rho \tag{3.26}$$

ja

$$\mathrm{const}\left(\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \chi_{n,\frac{1}{2}}\right) \leqslant r^{-1} \leqslant \mathrm{const}\left(\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}} + \xi_{n,p}^{\frac{1}{p}}\right),$$

siis

$$\|u_{n,r} - u_*\| \leqslant \mathrm{const}\left((\rho\delta^p)^{\frac{1}{p+1}} + \rho\xi_{n,p}\right).$$

Märkus 84. *Diskretiseerimisviga* $\rho\xi_{n,p}$ *on optimaalset järku, sest kui* $z \in H$ *on selline, et* $\|z\| = \rho$ *ning ühtlasi* z *on operaatori* $(P_n - I)\,(A^*A)^{\frac{p}{2}}$ *omaelement, mis vastab suurimale omaväärtusele (mis teatavasti võrdub* $\left\|(P_n - I)\,(A^*A)^{\frac{p}{2}}\right\|$*), siis*

$$\|u_{n,r} - u_*\| \geqslant \|P_n u_* - u_*\| = \left\|(P_n - I)\,(A^*A)^{\frac{p}{2}} z\right\| = \left\|(P_n - I)\,(A^*A)^{\frac{p}{2}}\right\| \|z\| = \xi_{n,p}\rho.$$

Sealjuures võrratus kehtib seetõttu, et $u_{n,r} \in H_n$*, aga* $P_n u_*$ *on täpsele lahendile* u_* *lähim element ruumis* H_n*.*

Mitteenesekaassel juhul tuleb võtta r asemel $r^{\frac{1}{2}}$. Siis on lähislahendi kuju

$$u_{n,r} = (I - A_n^* A_n g_r(A_n^* A_n))\, P_n u_0 + g_r(A_n^* A_n)\, A_n^* Q_n f_\delta$$

3.5.5 Regulariseerimisparameetri aposterioorne valik

Tähistame

$$B_{n,r} = \begin{cases} I, & p_0 = \infty, \\ (I - A_n g_r(A_n))^{\frac{1}{p_0}}, & p_0 < \infty, A = A^* > 0, \\ (I - A_n^* A_n g_r(A_n^* A_n))^{\frac{1}{2p_0}}, & p_0 < \infty, A = A^* > 0 \text{ ei kehti.} \end{cases}$$

Juhul $A = A^* > 0$ tähistame $\overline{r} = \chi_{n,\varepsilon}^{-1}$, muul juhul $\overline{r} = \chi_{n,\varepsilon}^{-2}$.

Sõnastame modifitseeritud hälbeprintsiibi.

Reegel MH. Olgu $b_2 \geqslant b_1 > 1$, $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Kui $\|B_{n,0}(A_n u_0 - Q_n f_\delta)\| \leqslant b_1\delta$, võtame $r = 0$. Vastasel korral valime $r \in (0, \overline{r}]$ sellise, et

$$b_1\delta \leqslant \|B_{n,r}(A_n u_{n,r} - Q_n f_\delta)\| \leqslant b_2\delta.$$

Kui sellist r ei leidu, siis võtame $r = \overline{r}$.

Reegel MH iteratsioonimeetodites. Olgu $b > 1$, $\varepsilon \in (0, 1/2]$. Valime esimese $m \leqslant \overline{r}$, mille korral $\|B_{n,m}(A_n u_{n,m} - Q_n f_\delta)\| \leqslant b\delta$. Kui sellist m pole, valime $m = \lfloor \overline{r} \rfloor$.

Hälbeprintsiibi saame, jättes reegli MH avaldistest $B_{n,r}$ ära.

Teoreem 85. *Olgu $F = H$, $A = A^* > 0$, $F_n = H_n$. Kehtigu tingimused (3.25). Olgu r valitud hälbeprintsiibi või modifitseeritud hälbeprintsiibi abil. Eeldame, et $p_1 > 0$, kus $p_1 = p_0$ reegli MH korral, $p_1 = p_0 - 1$ hälbeprintsiibi korral. Siis $\|u_{n,r} - u_*\| \to 0$ protsessis $\delta \to 0$, $n \to \infty$.*

Kui on allikataoline esitus (3.26), siis

$$r(\delta, n) \leqslant \text{const}\left(\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{-\frac{1}{p'+1}} + \varepsilon^{-1}\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\xi_{n,p}\right),$$

kus $p' = \min\{p, p_1\}$, ning

$$\|u_{n,r} - u_*\| \leqslant \text{const}\left((\rho\delta^p)^{\frac{1}{p+1}} + \varepsilon^{-1}\rho\xi_{n,p}\right), \qquad p \leqslant p_1.$$

Teoreem 86. *Kehtigu tingimused (3.25). Olgu mitteenesekaassel juhul $r = r(\delta, n)$ valitud hälbeprintsiibi või modifitseeritud hälbeprintsiibi abil. Olgu $p_1 > 0$, kus $p_1 = 2p_0$ reegli MH korral ja $p_1 = 2p_0 - 1$ hälbeprintsiibi korral. Siis $\|u_{n,r} - u_*\| \to 0$ protsessis $\delta \to 0$, $u \to \infty$.*

Eeldusel, et on allikataoline esitus (3.26) saame, et

$$\|u_{n,r} - u_*\| \leqslant \text{const}\left((\rho\delta^p)^{\frac{1}{p+1}} + \varepsilon^{-1}\rho(\xi_{n,p} + e(Q_n))\right), \qquad p \leqslant p_1,$$

kus

$$e(Q_n) = \begin{cases} \left\| (I - Q_n)(AA^*)^{\frac{p}{4}} \right\|^2, & p \leqslant 2, \\ \|(I - Q_n) A\| \left\| (I - Q_n)(AA^*)^{\frac{p-1}{2}} \right\|, & p \geqslant 2. \end{cases}$$

Juhul** $p = 2$ **on need** $e(Q_n)$ **avaldised võrdsed.

3.5.6 Diskretiseerimisparameetri n valik

Enesekaasne juht. Kui p ja ρ allikataolises esituses (3.26) on teada, võib valida diskretiseerimisparameetri tingimusest, et diskretiseerimisviga on sama suurusjärku lähteandmete ebatäpsusest põhjustatud veaga: $\rho\xi_{n,p} \sim \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$, seega

$$\xi_{n,p} \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Kui p või ρ pole teada, valime n seosest

$$\xi_{n,\lambda}^{\frac{1}{\lambda}} \sim \delta, \qquad \lambda = \begin{cases} 1, & \text{kui } p_0 = \infty, \\ \dfrac{p_1}{p_1 + 1}, & \text{kui } p_0 < \infty. \end{cases}$$

Veendume, et siis diskretiseerimisviga ei ületa andmete ebatäpsusest tingitud viga $\mathrm{const}\delta^{\frac{p}{p+1}}$.

a) Kui $p \leqslant \lambda$, siis momentide võrratusest saame

$$\xi_{n,p} = \|(I - P_n) A^p\| \leqslant \left\|(I - P_n) A^\lambda\right\|^{\frac{p}{\lambda}} = \xi_{n,\lambda}^{\frac{p}{\lambda}} \sim \delta^p \leqslant \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

b) Kui $p > \lambda$, siis

$$\xi_{n,p} \leqslant \left\|(I - P_n) A^\lambda\right\| \left\|A^{p-\lambda}\right\| \leqslant \mathrm{const}\xi_{n,\lambda} \sim \delta^\lambda \leqslant \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Viimases võrratuses tuleb eraldi läbi vaadata mõlemad juhud $\lambda = 1$ ja $\lambda = \dfrac{p_1}{p_1 + 1}$.

Mitteenesekaasne juht. Kui p ja ρ on teada, valime n seosest

$$\xi_{n,p} \sim \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

Vastasel juhul valime n eeskirja

$$\left\|(I-P_n)(A^*A)^{\frac{\lambda}{2}}\right\|^{\frac{1}{\lambda}}+\left\|(I-Q_n)(AA^*)^{\frac{\lambda}{4}}\right\|^{\frac{2}{\lambda}}\sim\delta$$

kohaselt, kusjuures λ avaldises p_1 on teoreemi 86 tähis.

Märkus 87. *Kui* $(Au)(t)=\int_0^1 K_1(t,s)u(s)\,ds$, *kus* $K_1(t,s)=K_1(s,t)$ *on selline, et* $A=A^*\geqslant 0$ *ruumis* $H=F=L_2(0,1)$, *siis saame diskretiseerimisparameetri valida järgmiselt. Tähistame itereeritud tuuma*

$$K_n(t,s)=K_n(s,t)=\int_0^1 K_{n-1}(\sigma,t)K_1(\sigma,s)\,d\sigma,\qquad n=2,3,\ldots.$$

Olgu l_n, $n=1,2,\ldots$, *suurimad naturaalarvud, mille korral*

$$\int_0^1\int_0^1\left|\frac{\partial^{l_n}K_n(t,s)}{\partial t^{l_n}}\right|dt\,ds<\infty,\qquad n=1,2,\ldots.$$

Olgu H_n *splain astmega* $k-1$, $h=\dfrac{1}{n}$. *Siis*

$$\xi_{n,p}=\|(I-P_n)A^p\|=O\left(h^{\min\left\{\frac{pl_n}{n},k\right\}}\right).$$

Seega valides $n=1$, $p=\lambda$, *saame* $\xi_{n,\lambda}^{\frac{1}{\lambda}}=O\left(h^{\min\left\{l_1,\frac{k}{\lambda}\right\}}\right)$. *Järelikult diskretiseerimisparameeter*

$$h\sim\delta^{\max\left\{\frac{\lambda}{k},l_1^{-1}\right\}},\qquad \chi_{n,\varepsilon}\leqslant\left(\xi_{n,\beta}(1+\varepsilon)^2\right)^{\frac{1}{\beta}},\qquad \beta=\min\left\{\frac{k}{l_1},1\right\}.$$

Peatükk 4

Iteratsioonimeetodid

4.1 Lähislahendite täpsuse võrdlusest

4.1.1 Lähislahendite täpsuse võrdluse tingimus

Vaatleme ülesannet $Au = f$, $A \in \mathcal{L}(H, F)$, H, F- Hilberti ruumid,$f \in \mathcal{R}(A)$, $\|f_\delta - f\| \leqslant \delta$. Järgmine lihtne tulemus võimaldab võrrelda erinevate lähislahendite täpsust.

Teoreem 88. *Olgu $u \in H$ ja $u' \in H$, $u' = u + A^*z$, $z \in F$. Tähistame $w = (u + u')/2 = u + A^*z/2$. Kehtib järeldus*

$$D(z) := \frac{(f_\delta - Aw, z)}{\|z\|} > \delta \Longrightarrow \|u' - u_*\| < \|u - u_*\|. \tag{4.1}$$

Kehtib ka võrratus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|u' - u_*\|^2 - \|u - u_*\|^2) &= (Aw - f, z) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|A^*z\|^2 + (Au - f_\delta, z) + \delta\|z\| = \|z\|(\delta - D(z)).\end{aligned}$$

Tõestus.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|u' - u_*\|^2 - \|u - u_*\|^2) &= (A^*z/2 + u - u_*, A^*z) = (Aw - f, z) \\ &= (Aw - f_\delta, z) + (f_\delta - f, z) \leqslant (Aw - f_\delta, z) + \delta\|z\| = \|z\|(\delta - D(z)).\end{aligned}$$

□

Teoreemi 88 kasutamiseks võiks antud $u \in H$ korral minimiseerida $F(z) := \frac{1}{2}\|A^*z\|^2 + (Au - f_\delta, z) + \delta\|z\|$, aga funktsiooni minimiseerimine lõpmatumõõtmelises ruumis on raske ülesanne. Teine võimalus teoreemi 88 kasutamiseks on iteratsioonimeetodites peatumisindeksi leidmine monotoonse vea reegli alusel.

4.1.2 Monotoonse vea reegel iteratsioonimeetodites

Teoreem 89. *Vaatleme iteratsioonimeetodit üldkujul*

$$u_n = u_{n-1} + A^*z_{n-1}, n = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Siis

$$\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\| \quad n = 1, 2, \ldots, n_{ME}, \tag{4.3}$$

kus n_{ME} *on esimene indeks jadast* $n = 1, 2, \ldots$, *mille korral*

$$d_{ME}(n) := \frac{((f_\delta - Au_n) + (f_\delta - Au_{n+1}), z_n)}{2\|z_n\|} = \frac{(f_\delta - Au_n) - \|A^*z_n\|^2/2}{\|z_n\|} \leqslant \delta. \tag{4.4}$$

Tõestus. Võtame teoreemi 88 seoses (4.1) $u = u_{k-1}$, $u' = u_k$, $z = z_k$. Siis $w = (u_{k-1} + u_k)/2 = u_{k-1} + A^*z_k/2$, funktsioon $D(z)$ omandab kuju $d_{ME}(k-1)$ ning järeldus (4.1) kuju

$$d_{ME}(k-1) > \delta \Longrightarrow \|u_k - u_*\| < \|u_{k-1} - u_*\|.$$

See järeldus annabki väite (4.3), sest eeldus $d_{ME}(k-1) > \delta$ on rahuldatud $k = 1, 2, \ldots, n_{ME}$ korral. □

4.2 Peatumisindeksi valik gradientmeetodites

4.2.1 Lihtsamad gradientmeetodid

Iteratsioonimeetodite 4.2 alamklassiks on gradientmeetodid, kus $z_n = \beta_n r_n$ ja $r_n = f_\delta - Au_n$ on hälve ja β_n on sammu pikkus:

$$u_n = u_{n-1} + \beta_{n-1}A^*(f_\delta - Au_{n-1}), n = 1, 2, \ldots.$$

Neis meetodeis omandab funktsioon $d_{ME}(n)$ kuju

$$d_{ME}(n) := \frac{(r_n + r_{n+1}, r_n)}{2\|r_n\|}.$$

Teoreem 90. *Olgu $A^* f_\delta \neq 0$. Kui gradientmeetodites*

$$0 < \beta_n \leqslant \frac{\|A^* r_n\|^2}{\|AA^* r_n\|^2} \tag{4.5}$$

siis:

1) funktsioonid $d_D(n) := \|r_n\|$ ja $d_{ME}(n)$ on monotoonselt kahanevad ja kehtivad võrratused

$$\|r_{n+1}\|^2 \leqslant (r_n, r_{n+1}) < \|r_n\|^2$$
$$d_D(n+1) < d_{ME}(n) < d_D(n);$$

2) olgu Q ortojektor $F \to \overline{R(A)}$; kui $\beta_n \geqslant c > 0$ iga $n \in N$ korral, siis

$$\lim_{n\to\infty} d_{ME}(n) = \lim_{n\to\infty} d_D(n) = \|(I-Q)f_\delta\|$$

3) kui $\|(I-Q)f_\delta\| < \delta$, siis n valikul kas hälbe printsiibi või ME-reegli alusel (esimene $n = 1, 2, \ldots$, mil $d_D(n) \leqslant C\delta$ või $d_{ME}(n) \leqslant \delta$) kehtib:

a) $\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\| \quad n = 1, 2, \ldots, n_{ME}$ (kui hälbeprintsiibis $C = 1$, siis $n_{ME} \in \{n_D - 1, n_D\}$, kus n_D on hälbeprintsiibiga saadud indeks)

b) koonduvus $\|u_n - u_*\| \to 0$ kui $\delta \to 0$,

c) juhul $u_0 - u_* \in R((A^*A)^{p/2})$ kehtib ka veahinnang $\|u_n - u_*\| \leqslant C\delta^{p/(p+1)}$.

Toome näiteid gradientmeetoditest, kus sammu pikkused β_n rahuldavad tingimust (4.5).

M1. Landweberi meetod, kus $\beta_n = \beta \in (0, 1/\|A\|^2]$.

M2. Mittestatsionaarne (muutuva sammuga) Landweberi meetod, kus $\beta_n \in (c, 1/\|A\|^2]$, $c > 0$.

M3. Kiireima languse meetod: $\beta_n = \|A^* r_n\|^2 / \|A^* r_n\|^2$. See meetod minimiseerib hälvet $\|r_n\|$.

M4. α-protsessid sammuga $\beta_n = \|D^{\alpha+1} r_n\|^2 / \|D^{\alpha+2} r_n\|^2$, kus $D = (AA^*)^{1/2}$. Neid meetodeid saab rakendada, kui $\alpha \geqslant -1$, kusjuures $\alpha = -1$ annab minimaalse vea meetodi, mis minimiseerib $\|A^{-1} f_\delta - u_n\|$ (eeldusel $A^{-1} f_\delta \in H$). Aga tingimus (4.5) on rahuldatud, kui $\alpha \geqslant 0$.

4.2.2 Kaasgradientide meetod

Kaasgradientide tüüpi meetodid koonduvad palju kiiremini kui eelnevas osas 4.2.1 vaadeldud lihtsamad gradientmeetodid, kaasgradientide meetodis tehtud n iteratsiooni on võrreldavad osa 4.2.1 meetodite n^2 iteratsiooniga: $n \leqslant n_{opt} :=$ argmin$\{\|u_n - u_*\|, n \in N\}$ korral on kaasgradientide tüüpi meetodis viga $\|u_n - u_*\|$ lähedane osa 4.2.1. meetodite veale $\|u_{n^2} - u_*\|$.

Kaasgradientide meetod (CG-meetod, *conjugate gradient method*) on formuleeritud ülesannete $Au = f$ jaoks, kus $A = A^* \geqslant 0$. Olgu $u_0 \in H$ alglähend ja $r_0 = Au_0 - f_\delta$. Olgu $x_0 = 0$ ja $r_{-1} = \infty$. Arvutame $n = 1, 2, \ldots$ korral

$$\beta_{n-1} = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{\|r_{n-2}\|^2}, \quad x_n = r_{n-1} + \beta_{n-1}x_{n-1}, \quad v_n = Ax_n,$$

$$\eta_n = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{(x_n, v_n)}, \quad u_n = u_{n-1} - \eta_n x_n, \quad r_n = r_{n-1} - \eta_n v_n.$$

Mitteenesekaassete ülesannete lahendamiseks on erinevad kaasgradientide tüüpi meetodid sõltuvalt ülesande sümmetriseerimisviisist.

a) Kui rakendame kaasgradientide meetodit kujul $A^*Au = A^*f$ sümmetriseeritud ülesandele, saame CGLS-meetodi (*conjugate gradient least squares method*). Olgu $u_0 \in H$ alglähend ja $r_0 = Au_0 - f_\delta$. Olgu $x_0 = 0$ ja $p_{-1} = \infty$. Arvutame $n = 1, 2, \ldots$ korral

$$p_{n-1} = A^*r_{n-1}, \quad \beta_{n-1} = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2}, \quad x_n = p_{n-1} + \beta_{n-1}x_{n-1},$$

$$v_n = Ax_n, \quad \eta_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|v_n\|^2}, \quad u_n = u_{n-1} - \eta_n x_n, \quad r_n = r_{n-1} - \eta_n v_n.$$

b) Kui rakendame kaasgradientide meetodit kujul $AA^*z = f$, $u = A^*z$ sümmetriseeritud ülesandele, saame CGME-meetodi (*conjugate gradient minimal error method*). Olgu $u_0 \in H$ alglähend ja $r_0 = Au_0 - f_\delta$. Olgu $x_0 = 0$ ja $r_{-1} = \infty$. Arvutame $n = 1, 2, \ldots$ korral

$$p_{n-1} = A^*r_{n-1}, \quad \beta_{n-1} = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{\|r_{n-2}\|^2}, \quad x_n = p_{n-1} + \beta_{n-1}x_{n-1},$$

$$v_n = Ax_n, \quad \eta_n = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{\|x_n\|^2}, \quad u_n = u_{n-1} - \eta_n x_n, \quad r_n = r_{n-1} - \eta_n v_n.$$

Peatumisindeksi n valikuks monotoonse vea reegli alusel on vaja elementi z_n iteratsioonieeskirjas $u_n = u_{n-1} - A^*z_n$. Selleks võime meetodite CGLS ja CGME algoritmides asendada valemi $x_n = p_{n-1} + \beta_{n-1}x_{n-1}$ 2 valemiga $w_n = r_{n-1} + \beta_{n-1}w_{n-1}$ ja $x_n = A^*w_n$, võttes $w_0 = 0$. Siis $z_n = \eta_n w_n$ning valemi 4.4 kohaselt valime ME-reeglis esimese n, mille korral $d_{ME}(n) = (r_n + r_{n+1}, z_n)/\|z_n\| \leqslant \delta$.

Teoreem 91. *Täpsete andmete korral $\delta = 0$ CGLS-meetod koondub: $\|u_n - u_*\| \to 0$, kui $n \to \infty$. Kui ligikaudsete andmete korral valida $n = n(\delta)$ hälbeprintsiibist kui esimene $n = 1, 2, \ldots$, mille korral $\|Au_n - f_\delta\| \leqslant b\delta$, kus $b > 1$, siis $\|u_{n(\delta)} - u_*\| \to 0$, kui $\delta \to 0$; kui seejuures $u_* = (A^*A)^{p/2}v$, $\|v\| \leqslant \rho$, siis $n(\delta) \leqslant \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{p+1}}$, $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \leqslant C\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$.*

Teoreem 92. *Täpsete andmete korral $\delta = 0$ CGME-meetod koondub: $\|u_n - u_*\| \to 0$, kui $n \to \infty$. Kui ligikaudsete andmete korral valida $n = n(\delta)$ hälbeprintsiibi analoogist kui esimene $n = 1, 2, \ldots$, mille korral $[\sum_{i=0}^{n} \|Au_n - f_\delta\|^{-2}]^{-1/2} \leqslant b\delta$, kus $b > 1$, siis $\|u_{n(\delta)} - u_*\| \to 0$, kui $\delta \to 0$; kui seejuures $u_* = (A^*A)^{p/2}v$, $\|v\| \leqslant \rho$, siis $n(\delta) \leqslant \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{\frac{1}{p+1}}$, $\left\|u_{n(\delta)} - u_*\right\| \leqslant C\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}$.*

4.3 Peatumisindeksi valik ilmutamata iteratsioonimeetodites

Vaatleme ilmutamata iteratsioonimeetodeid kujul 4.2, kus $z_n = (\beta_n I + AA^*)^{-1} r_n$, $r_n = f_\delta - Au_n$ ja $\beta_n > 0$ on reaalarvud. Siis iteratsioonimeetodi 4.2 kuju on

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + A^*(AA^* + \beta_{n-1}I)^{-1}(f_\delta - Au_{n-1}) \qquad (4.6)\\ &= (A^*A + \beta_{n-1}I)^{-1}(\beta_{n-1}u_{n-1} + A^*f_\delta), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

Kehtib valem $r_n = \beta_{n-1}(AA^* + \beta_{n-1}I)^{-1} r_{n-1}$. Seega element $z_n = (\beta_n I + AA^*)^{-1} r_n$ omab kuju $z_n = \beta_n^{-1} r_{n+1}$ ning ME-reegli funktsioon 4.4 omandab kuju

$$d_{ME}(n) = \frac{(r_n + r_{n+1}, r_{n+1})}{2\|r_{n+1}\|}.$$

Teoreem 93. *Olgu $A^*f_\delta \neq 0$ ja β_n suvalised positiivsed arvud. Siis ilmutamata iteratsioonimeetodis 4.6 kehtivad väited:*

1) funktsioonid $d_D(n) := \|r_n\|$ ja $d_{ME}(n)$ on monotoonselt kahanevad ja kehtivad võrratused

$$\|r_{n+1}\|^2 \leqslant (r_n, r_{n+1}) < \|r_n\|^2,$$

$$d_D(n+1) < d_{ME}(n) < d_D(n),$$

$$\|u_n - u_*\| < \|u_{n-1} - u_*\| \quad n = 1, 2, \ldots, n_{ME};$$

2) kui

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^{-1} = \infty, \quad \beta_n^{-1} \leqslant C \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{-1} \quad (n \geqslant 1),$$

siis n ***valik kas hälbe printsiibi või ME-reegli alusel (esimene*** $n = 1, 2, \ldots,$ ***mil*** $d_D(n) \leqslant C\delta$ ***või*** $d_{ME}(n) \leqslant \delta$***) on teostatav (kui hälbeprintsiibis*** $C = 1$***, siis*** $n_{ME} \in \{n_D - 1, n_D\}$***) ning kehtib***

a) koonduvus $\|u_n - u_*\| \to 0$ ***kui*** $\delta \to 0$***,***

b) juhul $u_0 - u_* \in R((A^*A)^{p/2})$ ***kehtib ka veahinnang*** $\|u_n - u_*\| \leqslant C\delta^{p/(p+1)}$***.***