Mittekorrektsetest ülesannetest

Mis on mittekorrektsed ülesanded?

Korrektsed ülesanded on ülesanded, mis rahuldavad Hadamard'i kolme tingimust (1923):

- Ülesandel leidub lahend
- Lahend on ühene
- Lahend sõltub pidevalt sisendandmetest

Mittekorrektsed ülesanded on ülesanded, mis ei rahulda vähemalt ühte neist tingimustest.

Kas kõik ülesanded on korrektsed?

- Hadamard arvas, et iga praktilist huvi pakkuva füüsikalise ülesande matemaatiline mudel peab rahuldama neid kolme tingimust.
- Kuid tänapäeval on palju olulisi teaduslikke ja tehnilisi ülesandeid selle definitsiooni mõistes mittekorrektsed.

Mis on mittekorrektsed ülesanded?

Korrektsed ülesanded on ülesanded, mis rahuldavad Hadamard'i kolme tingimust (1923):

- Ülesandel leidub lahend
- Lahend on ühene
- Lahend sõltub pidevalt sisendandmetest

Kõige olulisem on kolmas tingimus.

- Esimesed kaks tingimust saab täita üldistatud lahendi mõiste sissetoomisega.
- Kolmanda tingimuse kehtimine sõltub ülesande sisemistest karakteristikutest.

Iseloomulik omadus. Väike viga sisendandmetes võib kaasa tuua suure vea lahendis.

Lihtne näide: lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine

Suur konditsiooniarv. Kui võrrandisüsteemi maatriksi konditsiooniarv on suur, siis on lahend väga tundlik vabaliikme häirete suhtes.

- Näiteks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x + 10\,y &= 11 \\ 10\,x + 100{,}1\,y &= 110{,}1 \end{aligned}$$

  lahend on $x = 1$ ja $y = 1$.

- Võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} x + 10\,y &= 11{,}1 \\ 10\,x + 100{,}1\,y &= 110{,}1 \end{aligned}$$

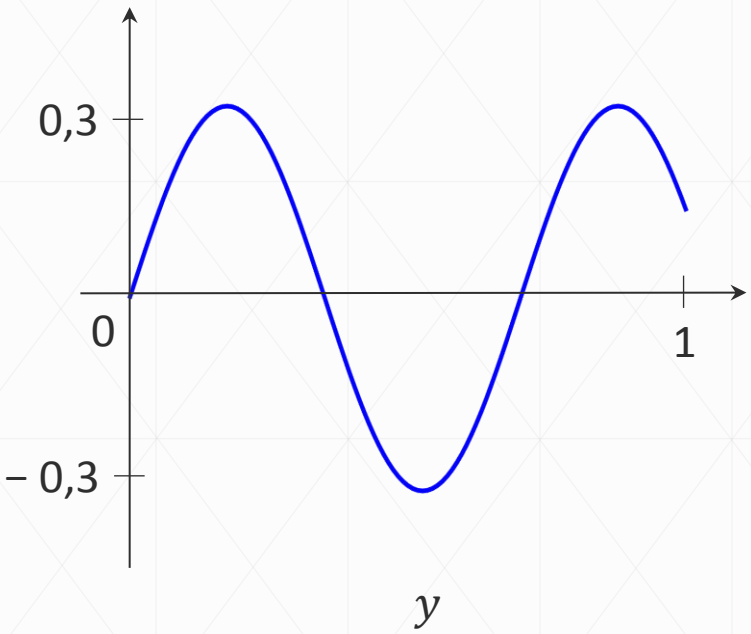
  lahend on $x = 101{,}1$ ja $y = -9$.

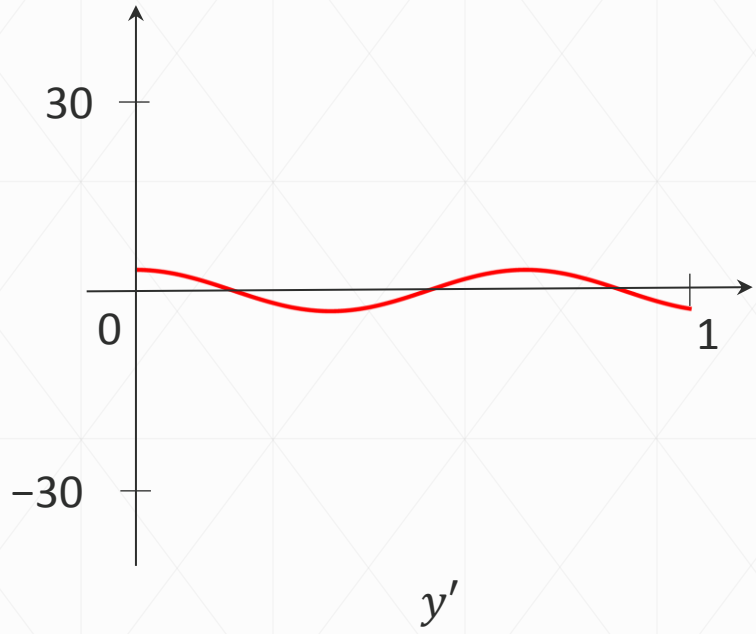
Lihtne näide: tuletise leidmine

Tuletise leidmine on mittekorrektne ülesanne. Funktsioonide jada võib koonduda nullfunktsiooniks, aga tuletiste jada samal ajal mitte.

- Vaatleme funktsiooni $y(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$, kus n on naturaalarvuline parameeter. Selle funktsiooni tuletis on $y'(x) = n\cos(n^2 x)$.

$\boldsymbol{n = 3}$



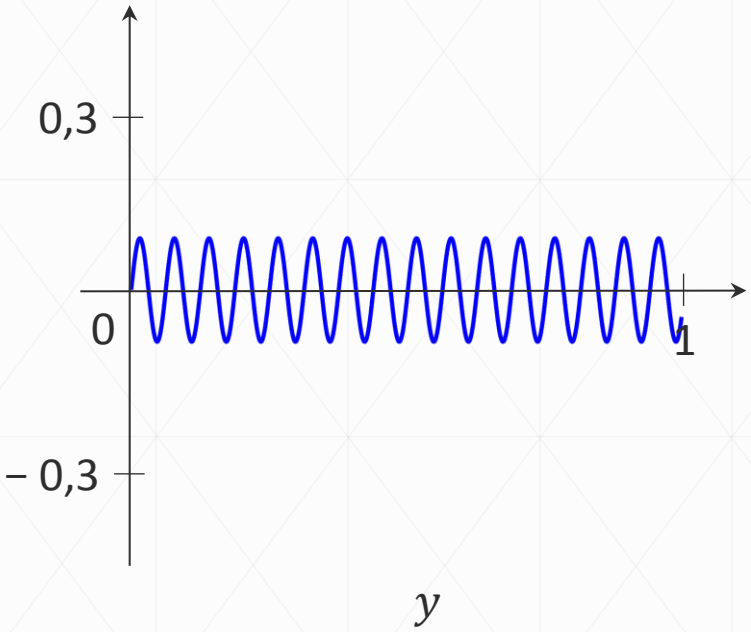


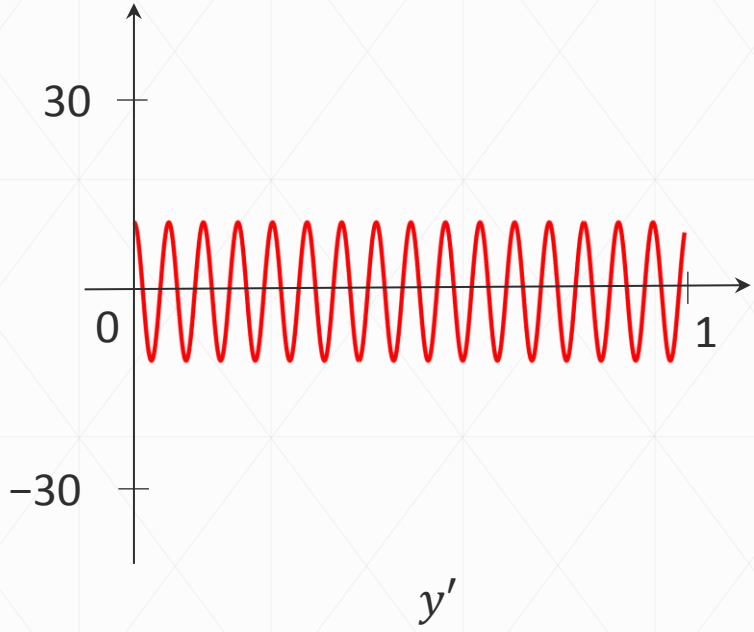
Lihtne näide: tuletise leidmine

Tuletise leidmine on mittekorrektne ülesanne. Funktsioonid võivad koonduda nullfunktsiooniks, aga tuletiste jada samal ajal mitte.

- Vaatleme funktsiooni $y(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$, kus n on naturaalarvuline parameeter. Selle funktsiooni tuletis on $y'(x) = n\cos(n^2 x)$.

$$\boldsymbol{n = 10}$$



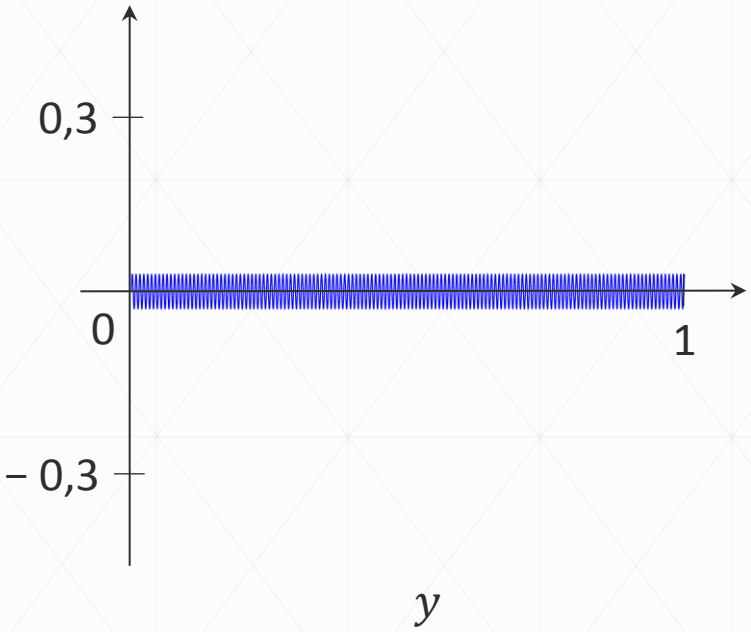


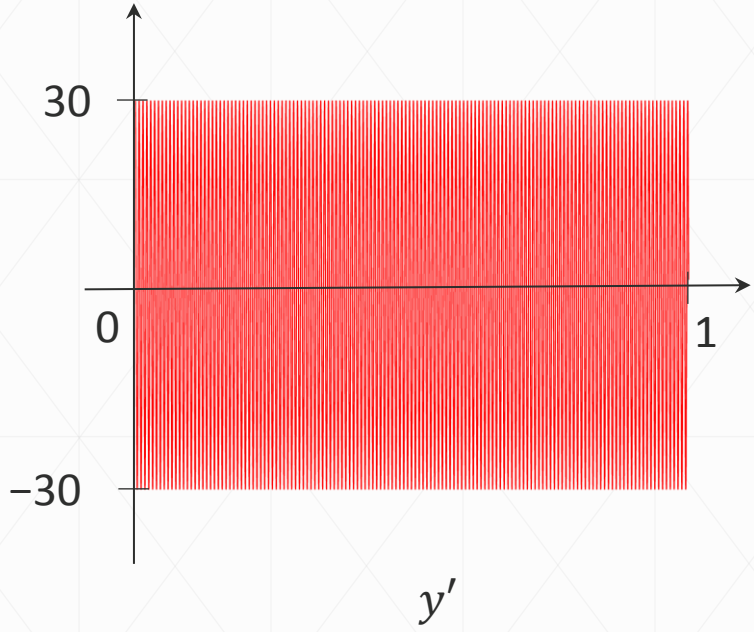
Lihtne näide: tuletise leidmine

Tuletise leidmine on mittekorrektne ülesanne. Funktsioonid võivad koonduda nullfunktsiooniks, aga tuletiste jada samal ajal mitte.

- Vaatleme funktsiooni $y(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$, kus n on naturaalarvuline parameeter. Selle funktsiooni tuletis on $y'(x) = n\cos(n^2 x)$.

$$\boldsymbol{n = 30}$$

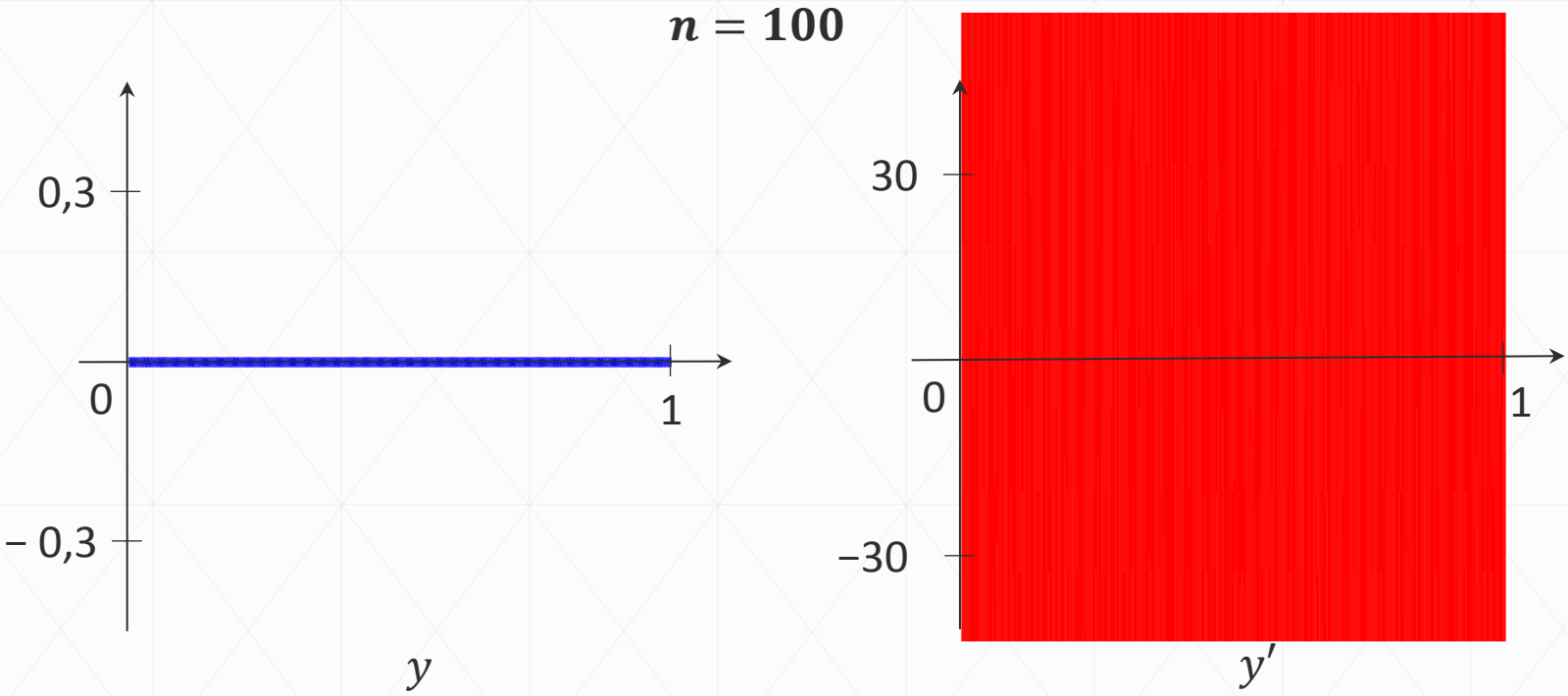




Lihtne näide: tuletise leidmine

Tuletise leidmine on mittekorrektne ülesanne. Funktsioonid võivad koonduda nullfunktsiooniks, aga tuletiste jada samal ajal mitte.

- Vaatleme funktsiooni $y(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$, kus n on naturaalarvuline parameeter. Selle funktsiooni tuletis on $y'(x) = n\cos(n^2 x)$.



Vigade võimendumine

Mõõtmisvead.

- Väike viga mõõtmistulemustes võib kaasa tuua kordades või isegi suurusjärkudes suurema vea arvutatud lahendis.
- Mõõtmisvead on praktikas vältimatud, veataseme vähendamine tehniliste vahenditega on tihti liiga kallis või üldse võimatu.

Diskretiseerimismisvead.

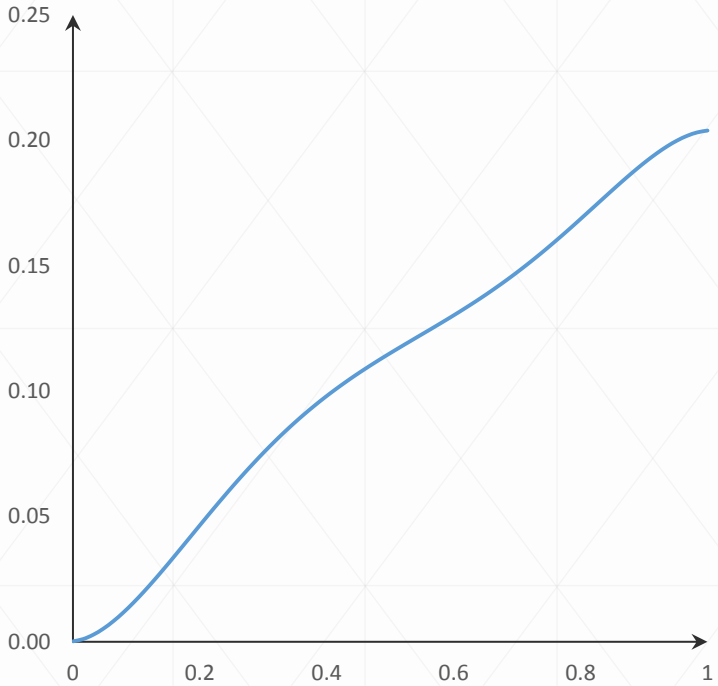
- Arvutis lahendamiseks on vaja nähtust kirjeldav funktsioon esitada lõpliku arvude järjendina.
- Liiga jäme diskretiseerimine esitab funktsiooni ebatäpselt, liiga peen vajab palju arvutusressurssi.

Järeldus. „Puhtakujulise“ ülesande asemel on meil käes ligikaudne ülesanne.

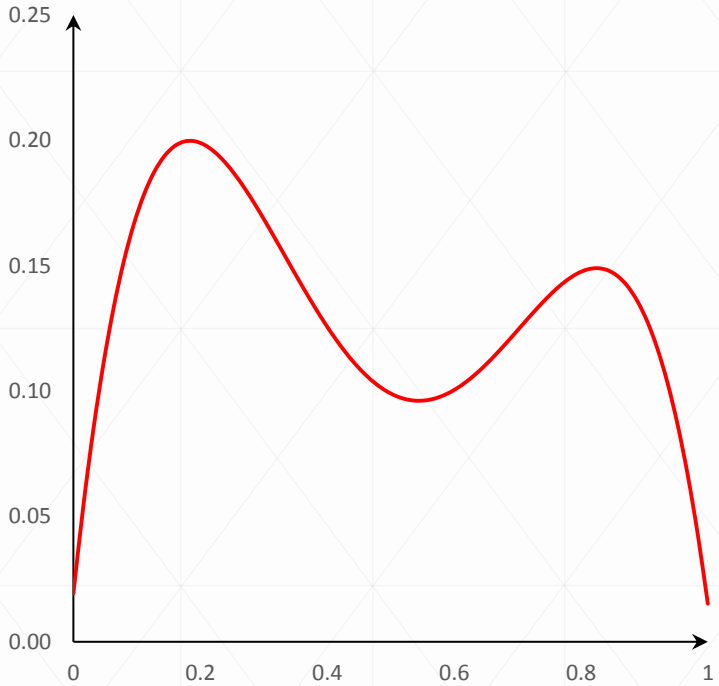
Näide: veataseme mõju lahendile

Ülesanne. Leida järgmise funktsiooni tuletis, kui funktsiooni väärtused on antud mõõtmisvigadega.

veatase = 0



Funktsioon

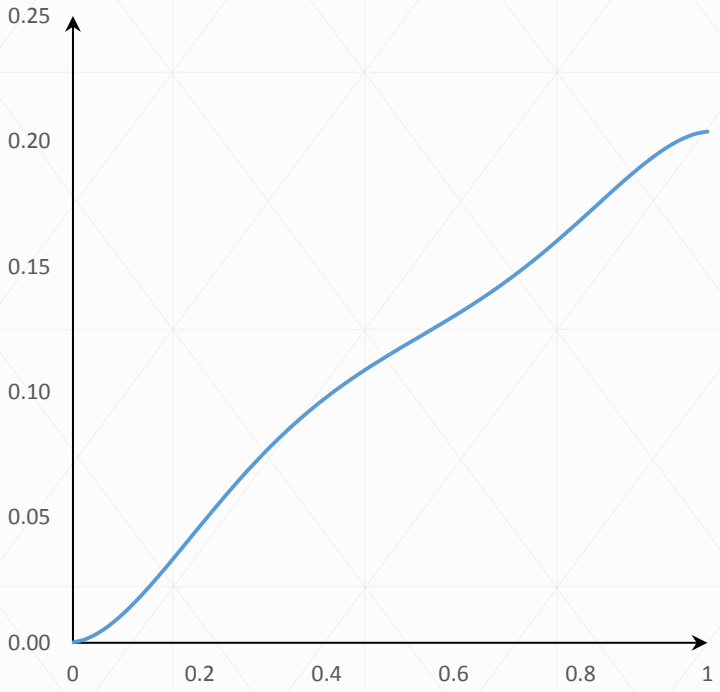


Tuletis

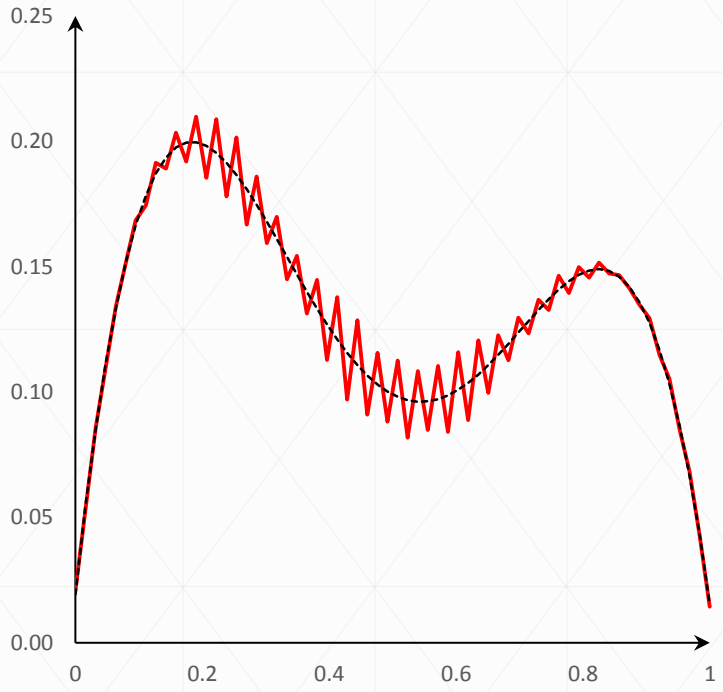
Näide: veataseme mõju lahendile

Ülesanne. Leida järgmise funktsiooni tuletis, kui funktsiooni väärtused on antud mõõtmisvigadega.

veatase = 10^{-4}



Funktsioon

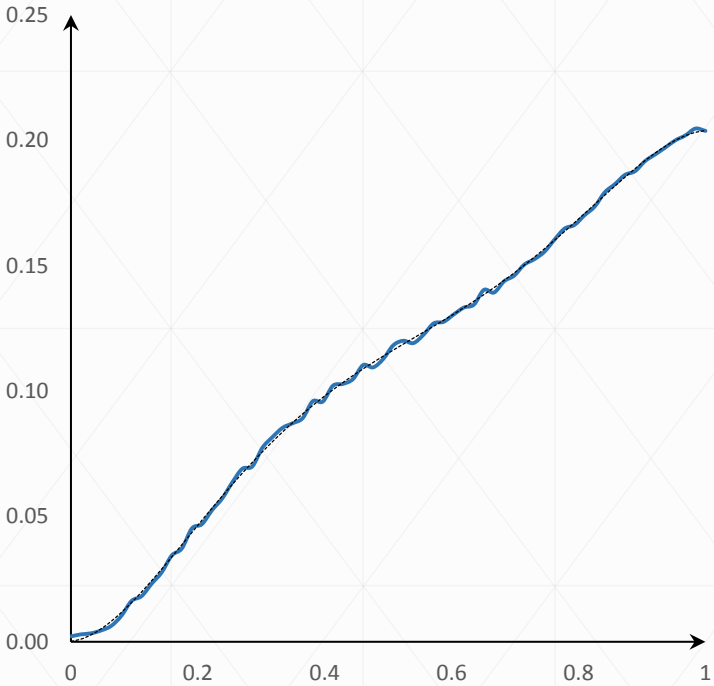


Tuletis

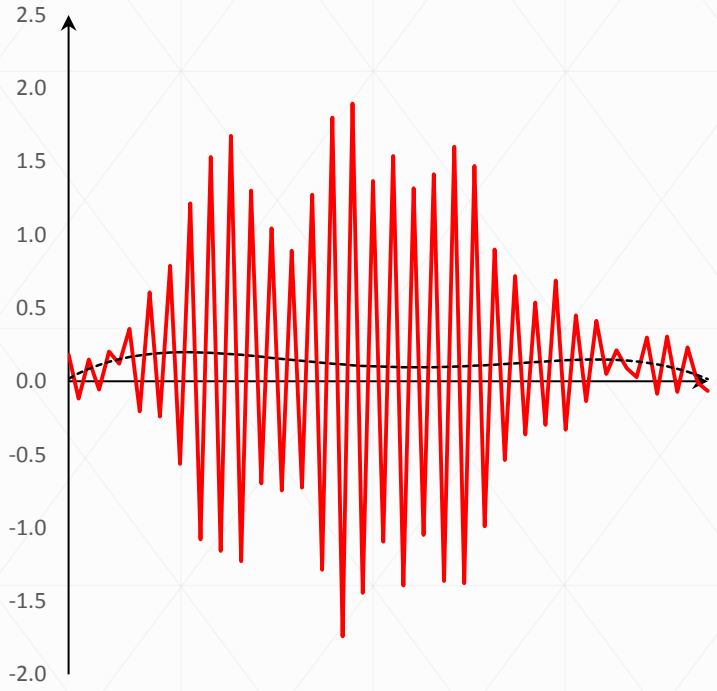
Näide: veataseme mõju lahendile

Ülesanne. Leida järgmise funktsiooni tuletis, kui funktsiooni väärtused on antud mõõtmisvigadega.

veatase = 10^{-2}



Funktsioon



Tuletis

Kuidas mittekorrektseid ülesandeid lahendatakse?

Eesmärk. Lahendada ülesanne stabiilsel viisil.

Regulariseerimine.

- Esialgse ülesande asemel lahendame lähedase stabiilse ülesande.
- „Lähedust“ kirjeldavad meetodis esinevad arvulised parameetrid.

Näide.

- Lineaarvõrrandisüsteem

$$Ax = y$$

- Vähimruutude meetod

$$\|Ax - y\|^2 \to \min \qquad \text{ehk} \qquad A^*Ax = A^*y$$

- Regulariseerimine Tihhonovi meetodil

$$\|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min \qquad \text{ehk} \qquad (A^*A + \alpha I)x = A^*y$$

Parameetrivalik

Liiga lähedane ja liiga kauge on mõlemad halvad.

- Kui lahendatav ülesanne on esialgsega liiga sarnane, siis hakkab mõju avaldama esialgse ülesande ebastabiilsus.
- Liiga erineval ülesandel on aga esialgse ülesandega vähe ühist.
- Regulariseerimismeetodis on oluline leida sobivad parameetrite väärtused.

Parameetrivaliku reeglid.

- Hälbeprintsiip: vali parameeter α võrrandi

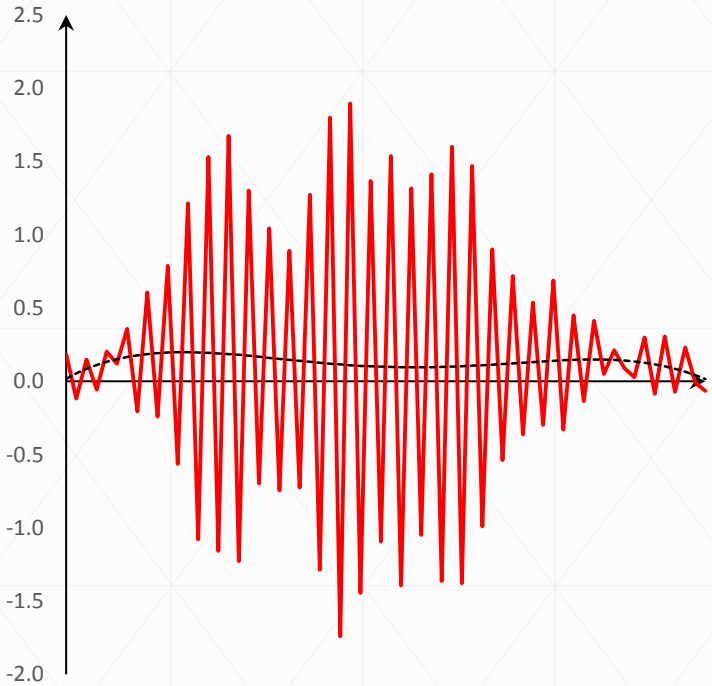
$$\|Ax - y\| = \delta$$

  lahendina, kus δ on veatase.
- Monotoonse vea reegel, reeglid R1 ja R2, kvaasioptimaalsuse kriteerium, üldistatud ristvalideerimine, tasakaaluprintsiip, L-kõvera reegel jne.

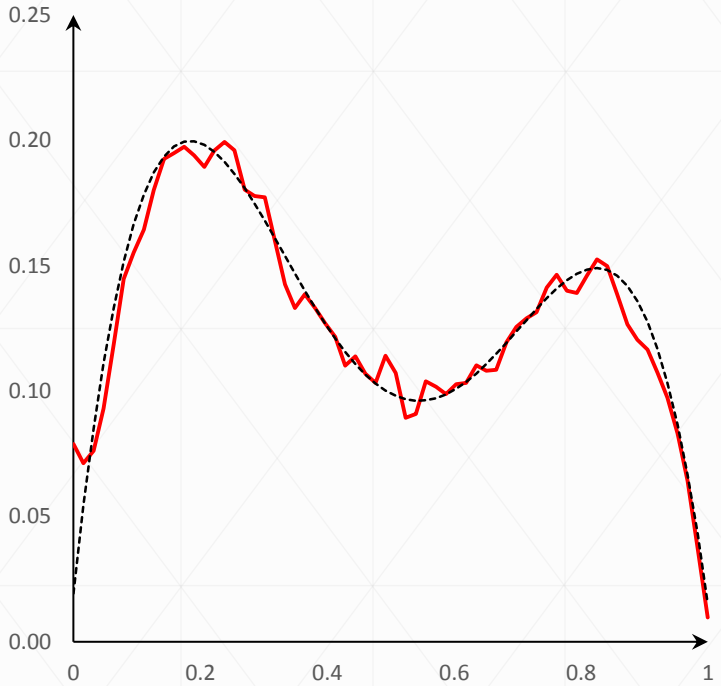
Näide: regulariseeritud lahend

Regulariseerimine annab kasutuskõlbliku lahendi. Lahendame Tihhonovi meetodiga, valides regulariseerimisparameetri hälbeprintsiibist.

veatase = 10^{-2}



Ilma regulariseerimata



Regulariseerimisega

Mida matemaatikud uurivad?

Teoreetiline uurimistöö.

- Uute regulariseerimisalgoritmide loomine, mis võtavad arvesse erinevat liiki teadaolevat infot ja võimaldavad lahendit arvutada täpsemini ja kiiremini.
- Regulariseerimisalgoritmide laiendamine uutele ülesandeklassidele, näiteks mittelineaarsetele ülesannetele.
- Meetodite koonduvuse ja veahinnangute tõestamine.
- Arvutuseksperimentide tegemine, et uurida meetodite käitumist mitmesugustes olukordades ja avastada uusi seaduspärasusi.

Konkreetsed rakenduslikud ülesanded.

- Rakenduslike ülesannete modelleerimine.
- Mudelite lahendite olemasolu, ühesuse, stabiilsuse jm omaduste tõestamine.
- Ülesande iseärasusi arvestavate lahendusalgoritmide koostamine.

Praktilisi mittekorrektseid ülesandeid

Meditsiin. Keha siseehituse uuringud.

- Röntgentomograafia, magnetresonantstomograafia, impedantstomograafia, positsioonemissioontomograafia
- Ultraheliuuringud

Geoloogia ja geofüüsika.

- Maavarade otsimine elektrilise, magnetilise või gravimeetrilise potentsiaali abil
- Maa siseehituse määramine seismiliste lainete levimise järgi
- Põhjavee filtratsioonikordaja määramine

Kaugkaardistus.

- Radarisignaalide järgi taimkatte paksuse arvutamine
- Jääkaartide koostamine satelliitide abil
- Õhu ja vee kvaliteedi monitoorimine

Praktilisi mittekorrektseid ülesandeid

Majandus.

- Optimaalse juhtimise teooria
- Finantsmatemaatika

Klassikaliste soojusjuhtivuse ülesannete pöördülesanded.

- Soojusjuhtivuse ülesanne vastupidise ajasuunaga
- Keha pinna temperatuurijaotuse leidmine sisemuse mõõtmise abil

Standardsed andmetöötluse ülesanded.

- Lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine
- Mõõtmisvigadega andmete numbriline diferentseerimine
- Andmete interpoleerimine
- Ligikaudsete kordajatega Fourier’ ridade summeerimine
- Mitmed lineaarplaneerimise ülesanded

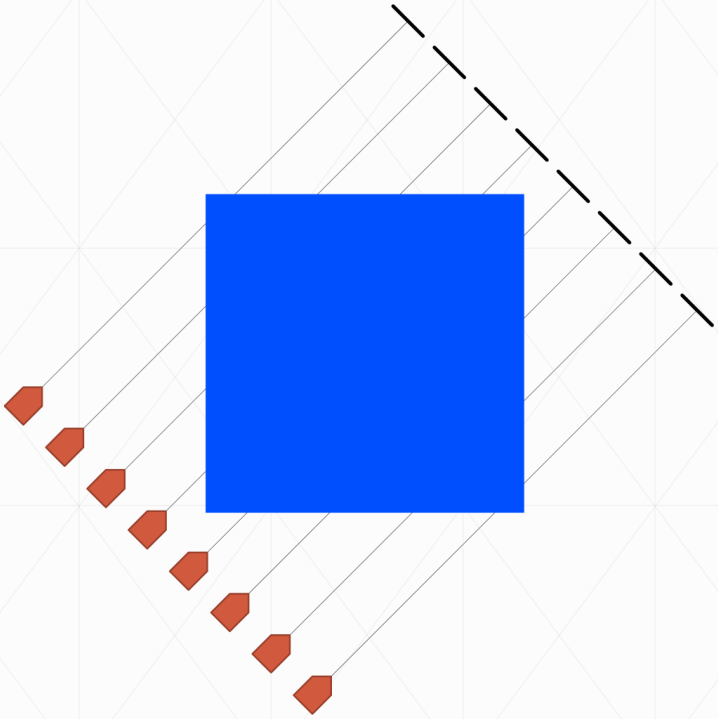
Näide: röntgentomograafia

Küsimus. Mis on selle objekti sees?

- Vaadata on võimalik ainult küljelt.
- Objekt peab jääma terveks.

Näide: röntgentomograafia

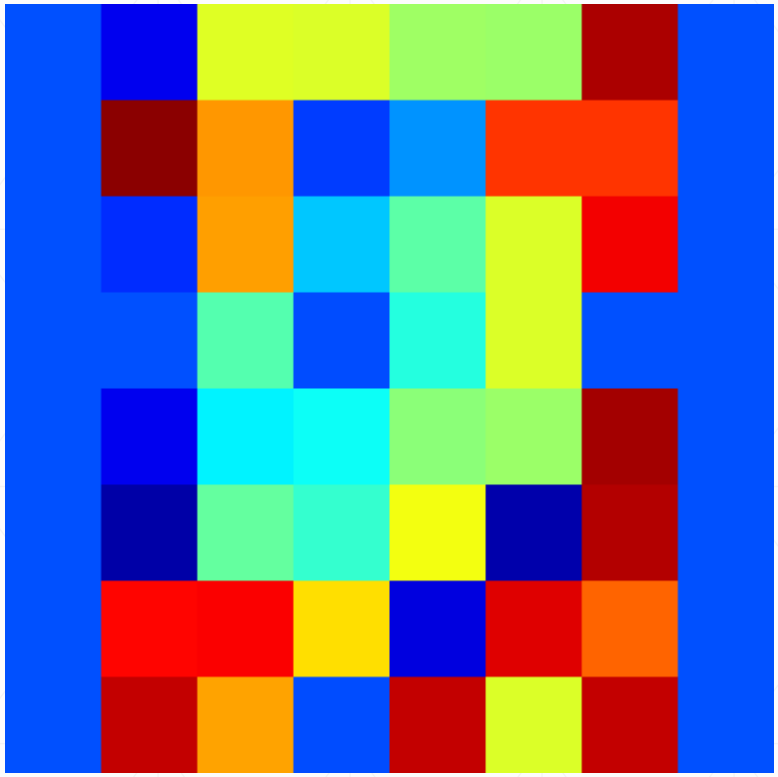
Lahendusmeetod. Mõõdame objekti läbivate röntgenkiirte sumbuvust.



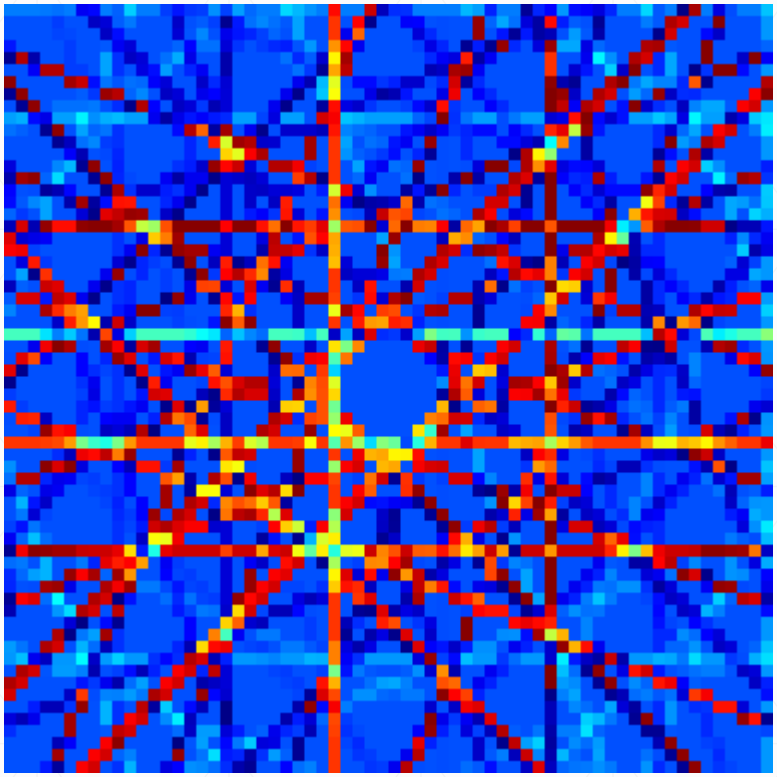
- Mõõtmisi teeme paljude eri nurkade all.
- Tulemuste järgi arvutame tihedusjaotuse pildi objekti sees.

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 8, nurkade arv 8



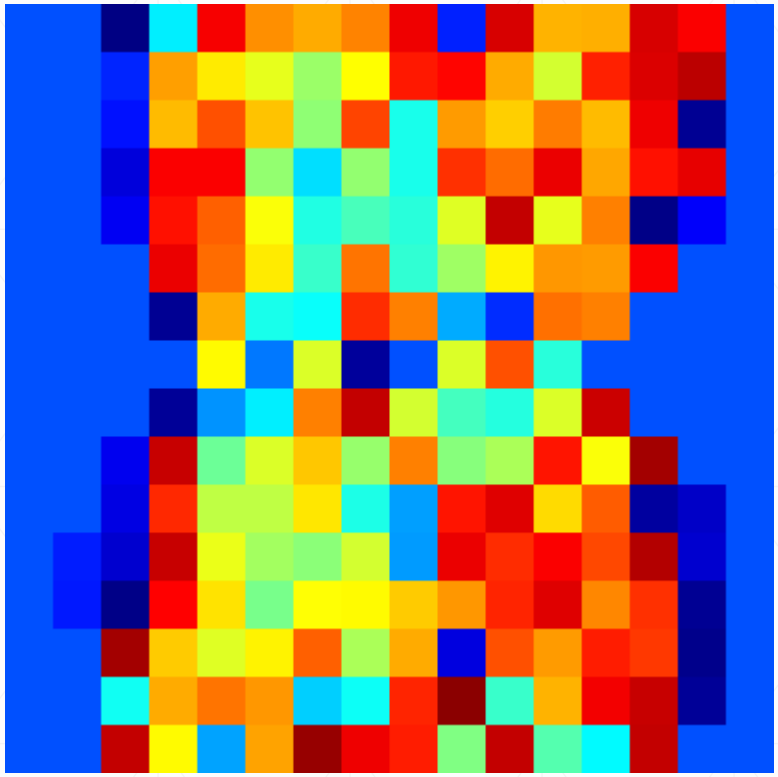
Lähteandmed



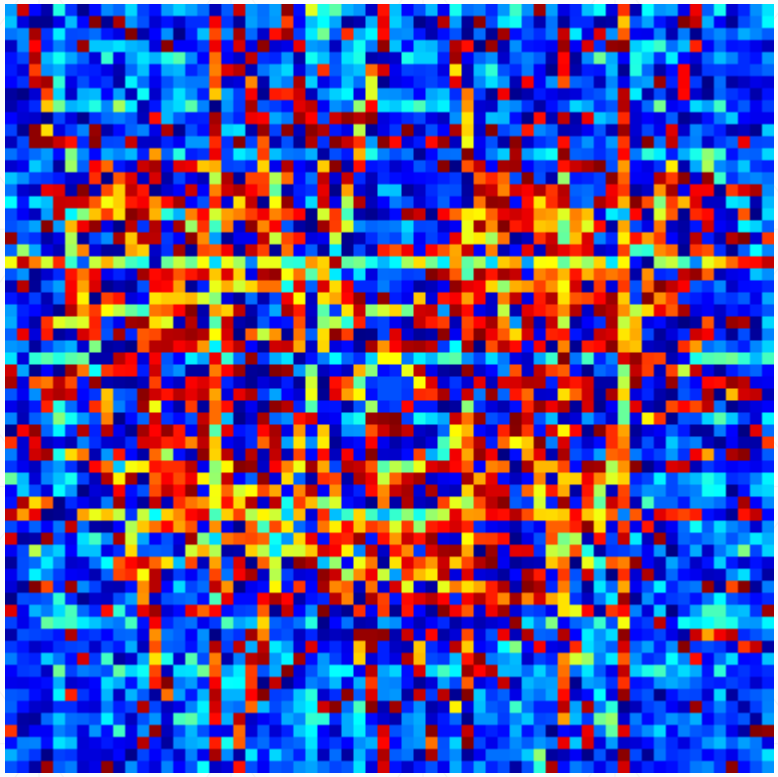
Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 16, nurkade arv 16



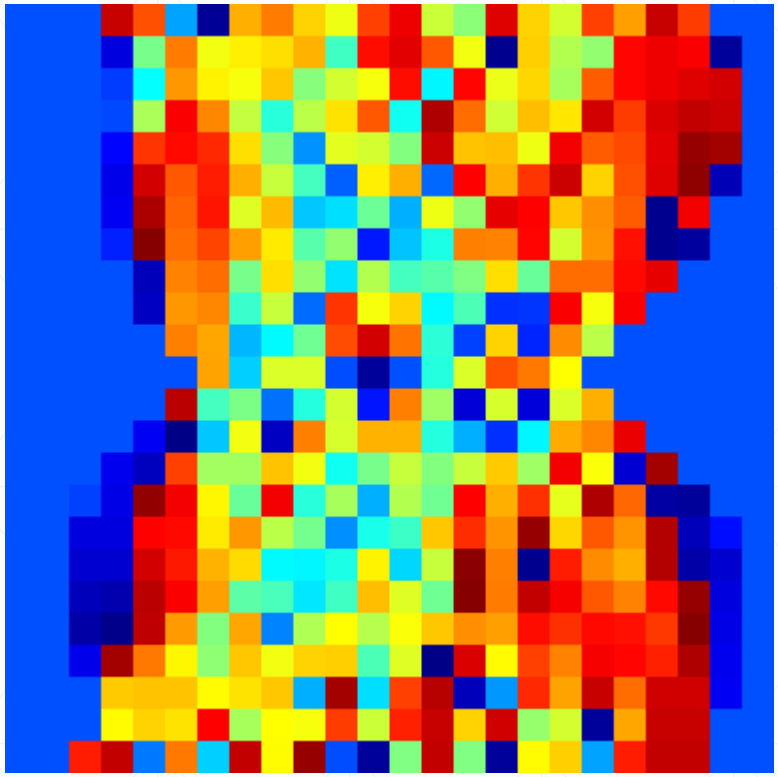
Lähteandmed



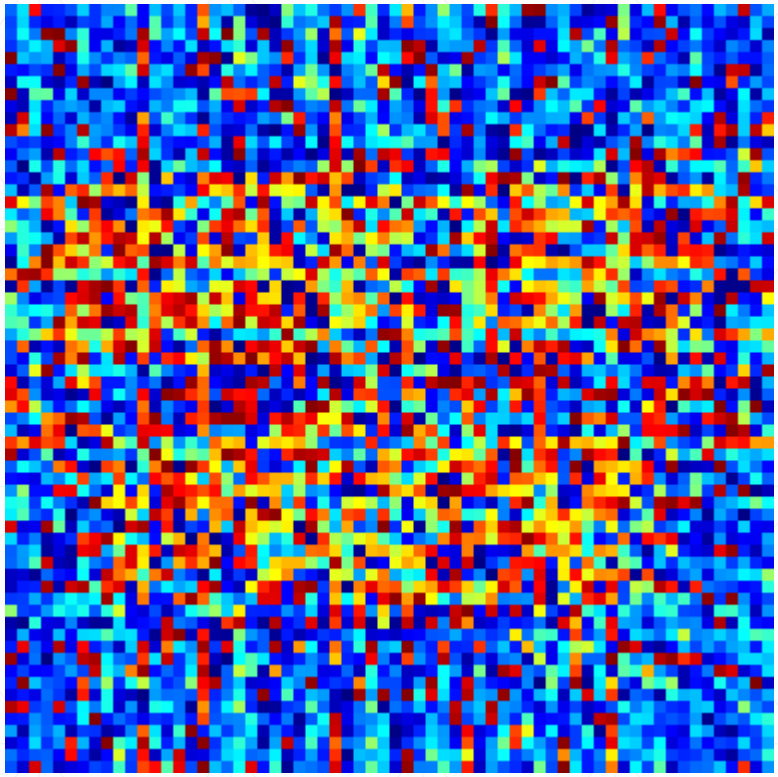
Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 24, nurkade arv 24



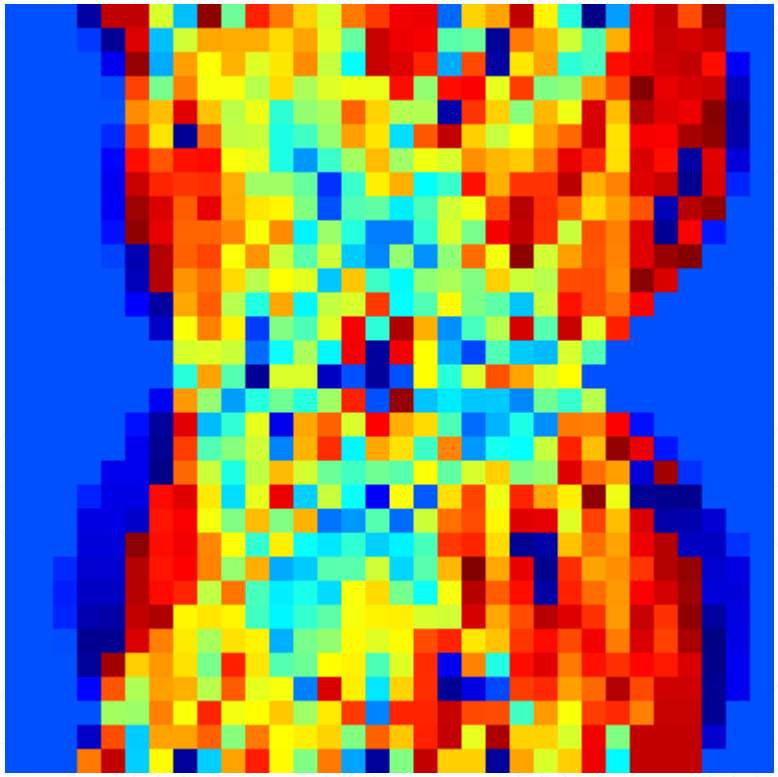
Lähteandmed



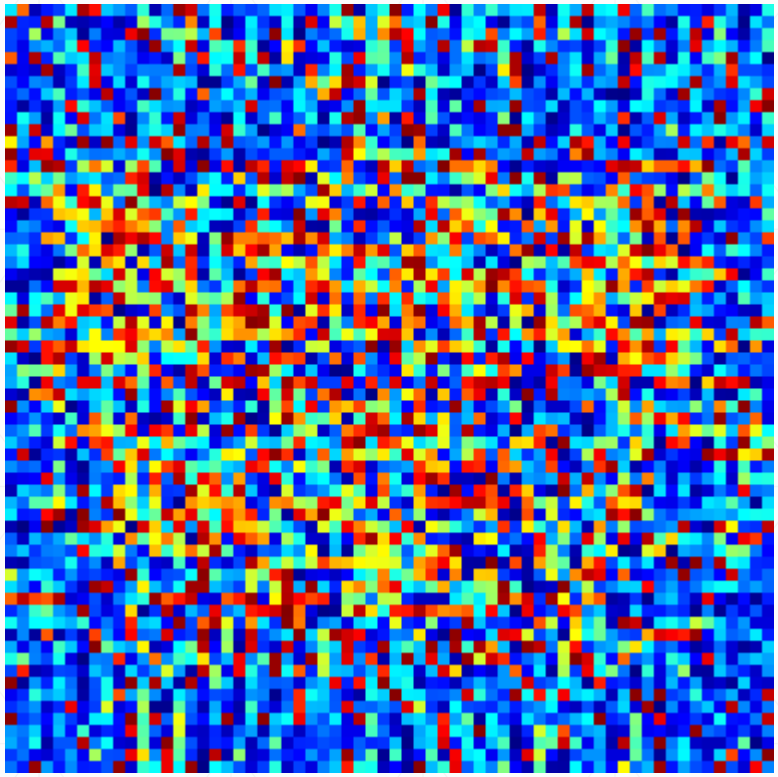
Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 32, nurkade arv 32



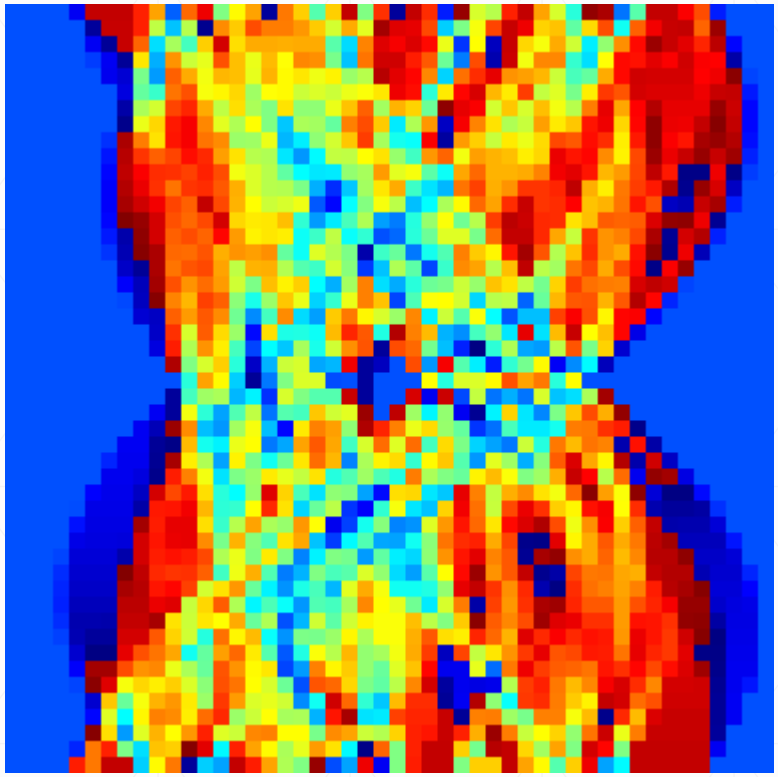
Lähteandmed



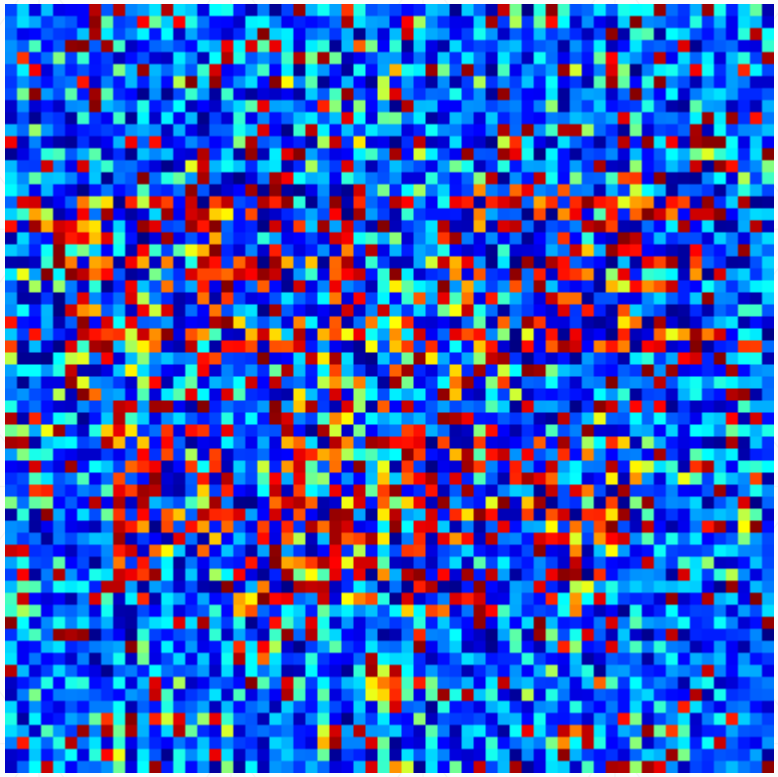
Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 48, nurkade arv 48



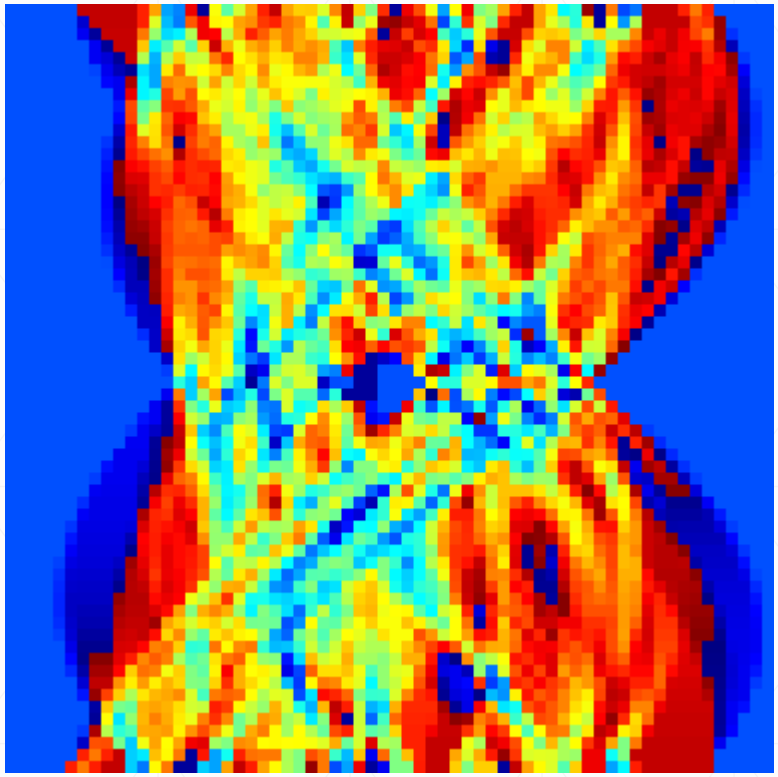
Lähteandmed



Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 64, nurkade arv 64

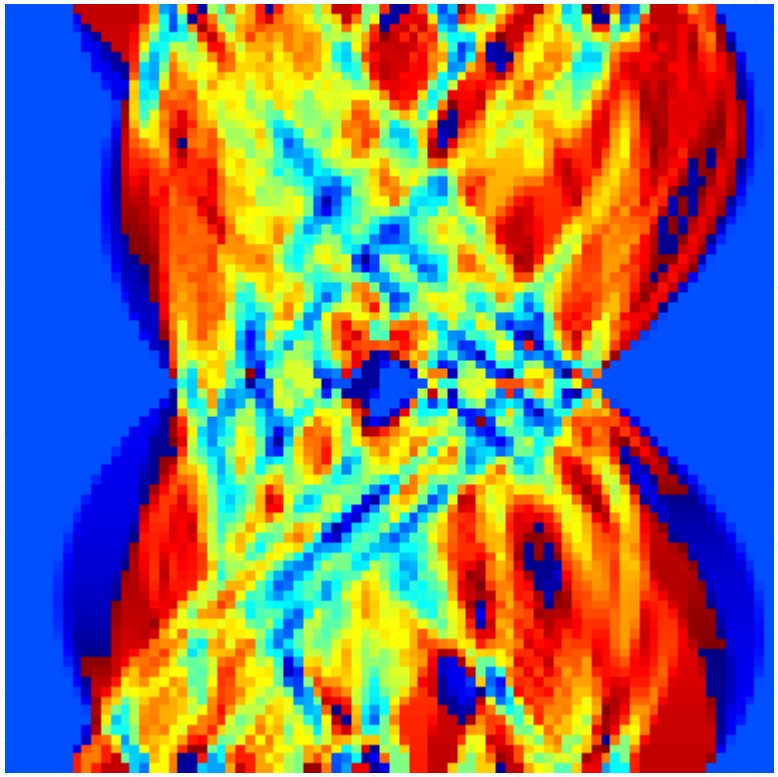


Lähteandmed

Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Kiirte arv 80, nurkade arv 80



Lähteandmed

Lahend

Näide: röntgentomograafia

- Tegelik lahend

Kokkuvõte

Mittekorrektsed ülesanded on põnev valdkond!

- Ühendab endas matemaatika ja arvutid.
- Rakenduste hulk on väga lai ja suureneb pidevalt.
- Võimaldab rakendada funktsionaalanalüüsi kõige kaasaegsemaid meetodeid.
- Koostöövõimalused nii teoreetikute kui ka praktikutega.

Mittekorrektsete ülesannete uurimisrühm

- reg.cs.ut.ee
- Uurimistöö põhisuundade kirjeldused
- Publikatsioonid
- Tarkvara