Võreteooria

Sügis 2017

Lektor: Valdis Laan

Eessõna

See on kursuse Võreteooria loengukonspekt. Kursust loeti 2017. aasta sügissemestril Tartu Ülikoolis.

Konspekti on koostanud põhiliselt Valdis Laan, kuid paragrahvide 2.3 ja 2.4 teksti on kirjutanud Ülo Reimaa. Hetkel sisaldab konspekt veel omajagu vigu ja puudusi, mille avastamisel võiks teada anda Valdis Laanele.

Peatükk 1

Põhimõisted

1.1 Järjestatud hulgad

Olgu A mingi hulk. Binaarse seose $\rho \subseteq A \times A$ korral võib vaadelda järgmisi tingimusi:

- $(\forall a \in A)\ a\,\rho\,a$ (refleksiivsus),
- $(\forall a, b, c \in A)(a\,\rho\,b \wedge b\,\rho\,c \Rightarrow a\,\rho\,c)$, (transitiivsus),
- $(\forall a, b \in A)(a\,\rho\,b \wedge b\,\rho\,a \Rightarrow a = b)$, (antisümmeetria),
- $(\forall a, b \in A)(a\,\rho\,b \Rightarrow b\,\rho\,a)$, (sümmeetria),
- $(\forall a, b \in A)(a\,\rho\,b \vee b\,\rho\,a)$, (lineaarsus).

Meenutame, et

- **eeljärjestus**[1] on refleksiivne ja transitiivne seos,
- **järjestusseos**[2] on antisümmeetriline eeljärjestus,
- **ekvivalentsiseos**[3] on sümmeetriline eeljärjestus.

Järjestusseoseid tähistatakse reeglina sümboliga $\leqslant$ või mõne sarnase sümboliga. Kui $\leqslant$ on järjestusseos, siis kirjutis $a < b$ tähendab seda, et $a \leqslant b$ ja $a \neq b$. Kirjutis $b \geqslant a$ tähistab sama asja mis $a \leqslant b$.

Järjestatud hulk[4] on paar $(A, \leqslant)$, kus A on hulk ja $\leqslant$ on mingi järjestusseos sellel hulgal.

Ahel[5] on järjestatud hulk, mille järjestusseos on lineaarne.

Järjestatud hulga $(A, \leqslant)$ elemente a ja b nimetatakse **võrreldavateks**[6], kui kas $a \leqslant b$ või $b \leqslant a$. Vastasel korral öeldakse, et a ja b on **mittevõrreldavad**[7] ja kirjutatakse $a \parallel b$. Seega ahel on järjestatud hulk, kus kõik elemendid on võrreldavad.

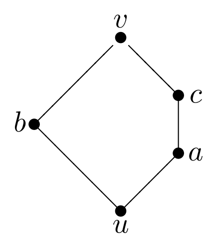
Öeldakse, et element b **katab**[8] elementi a (ja kirjutatakse $\prec$), kui $a < b$ ja ei leidu sellist elementi c, et $a < c < b$. Me kirjutame $a \preceq b$, kui $a \prec b$ või $a = b$.

[1] eeljärjestus = *preorder*
[2] järjestusseos = *order relation*
[3] ekvivalentsiseos = *equivalence relation*
[4] järjestatud hulk = *ordered set* = *poset*
[5] ahel = *chain*
[6] võrreldavad elemendid = *comparable elements*
[7] mittevõrreldavad elemendid = *incomparable elements*
[8] katab = *covers*

Näide 1.1 1. Järjestatud hulgas $(\mathbb{N}, \leqslant)$ katab element $n+1$ elementi n iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

2. Järjestatud hulgas $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ ei ole selliseid elemente, mis kataks mõnda teist elementi.

Lõplike järjestatud hulkade esitamisel on mugav kasutada diagramme. Sellistel diagrammidel tähistatakse hulga elemente täppide abil ning täppide vahele tõmmatakse joon, kui neile vastavad elemendid on katmisseoses. Seejuures kattev element peab diagrammil asuma kaetavast elemendist kõrgemal. Näiteks diagrammilt



võib lugeda, et $u \prec b \prec v$ ja $u \prec a \prec c \prec v$, kuid elemendid a ja b ei ole võrreldavad, nii nagu ka c ja b.

Kui $(A, \leqslant)$ on järjestatud hulk, siis seos

$$\{(a,b) \in A \times A \mid b \leqslant a\}$$

on samuti järjestusseos ning seda seost me tähistame sümboliga $\geqslant$. Seega ka $(A, \geqslant)$ on järjestatud hulk, mida nimetatakse esialgse järjestatud hulgaga **duaalseks järjestatud hulgaks**[9] ning mida me tähistame sümboliga A^{op}.

Kui Φ on mingi järjestatud hulkade kohta käiv väide, siis väite Φ^{op} all peame silmas sellist väidet, mis on saadud esialgsest kõigi sümbolite $\leqslant$ asendamisel sümboliga $\geqslant$.

Duaalsusprintsiip[10]**.** *Kui väide Φ kehtib kõigi järjestatud hulkade korral, siis ka väide Φ^{op} kehtib kõigi järjestatud hulkade korral.*

1.2 Võre definitsioon

Definitsioon 1.2 Olgu $(A, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $X \subseteq A$. Elementi c nimetatakse hulga X **ülemiseks tõkkeks**[11], kui $x \leqslant c$ iga $x \in X$ korral. Analoogiliselt saab defineerida alumised tõkked[12].

Mingil hulgal võib olla üks ülemine tõke, mitu ülemist tõket või hoopis mitte ühtegi ülemist tõket.

Näide 1.3 Olgu A kõigi hetkel elusolevate inimeste hulk. Vaatleme sellel hulgal seost $\leqslant$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a = b \text{ või } a \text{ on } b \text{ järeltulija.}$$

Siis $(A, \leqslant)$ on järjestatud hulk, kus ülemised ja alumised tõkked võivad nii leiduda kui puududa.

[9] duaalne järjestatud hulk = *dually ordered set*
[10] duaalsusprintsiip = *duality principle*
[11] ülemine tõke = *upper bound*
[12] alumine tõke = *lower bound*

Definitsioon 1.4 Olgu $(A, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $X \subseteq A$. Hulga X **ülemiseks rajaks**[13] nimetatakse selle hulga vähimat ülemist tõket. See tähendab, et hulga X ülemine tõke c on selle hulga ülemine raja, kui selle hulga iga ülemise tõkke d korral $c \leqslant d$. Analoogiliselt saab defineerida alumised rajad[14].

Alamhulga X ülemist raja tähistatakse $\vee X$ ja alumist raja $\wedge X$. Juhul, kui $X = \{a, b\}$, siis tähistakse ülemist raja harilikult $a \vee b$ ja alumist raja $a \wedge b$.

Definitsioon 1.5 Võre[15] on järjestatud hulk, mille igal kahe-elemendilisel alamhulgal leidub ülemine ja alumine raja.

Matemaatilise induktsiooni abil on lihtne näidata, et kehtib järgmine väide.

Lemma 1.6 *Järjestatud hulk on võre parajasti siis, kui selle igal lõplikul mittetühjal alamhulgal on olemas ülemine ja alumine raja.*

Definitsioon 1.7 Täielik võre[16] on järjestatud hulk, mille igal alamhulgal on olemas ülemine raja ja alumine raja.

Muuhulgas peab täielikus võres ka tühjal alamhulgal leiduma ülemine raja. Kuna tühja hulga ülemiseks tõkkeks on kõik vaadeldava järjestatud hulga elemendid, siis see ülemine raja peab olema kõigist elementidest väiksem, s.t. ta on selle hulga vähim element. Analoogliselt on tühja hulga alumine raja vaadeldava järjestatud hulga suurim element. Vähimat elementi tähistatakse harilikult sümboliga 0 ja suurimat sümboliga 1. Kui järjestatud hulgas leiduvad vähim ja suurim element, siis öeldakse, et see järjestatud hulk on **tõkestatud**. Seega täielikud võred on tõkestatud.

Lemmast 1.6 järeldub kohe, et iga lõplik võre on täielik. Lõpmatu võre ei pruugi täielik olla.

Lause 1.8 *Järjestatud hulga L korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. *L on täielik võre.*
2. *Hulga L igal alamhulgal on olemas alumine raja.*
3. *Hulga L igal mittetühjal alamhulgal on olemas alumine raja ning hulk L sisaldab suurimat elementi.*

TÕESTUS. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. See on ilmne.

$3 \Rightarrow 1$. Peame näitama, et mistahes alamhulgal leidub ülemine raja. Olgu $A \subseteq L$ ja vaatleme selle hulga kõigi ülemiste tõkete hulka $A^{\triangle}$. Kuna $1 \in L$, siis $A^{\triangle} \neq \emptyset$ ja sellel hulgal peab leiduma alumine raja. Olgu $x = \wedge A^{\triangle} \in L$. Kui $A = \emptyset$, siis $A^{\triangle} = L$ ja x on hulga L vähim element. Kui $A \neq \emptyset$, siis $x \leqslant c$ hulga A iga ülemise tõkke c korral. Jääb veel veenduda, et x ise on ka hulga A ülemine tõke. Kui $a \in A$, siis iga $d \in A^{\triangle}$ korral $a \leqslant d$. Seega $a \leqslant x$, sest x on alumine raja hulgale $A^{\triangle}$. See tähendab, et x on hulga A ülemine tõke. Järelikult $x = \vee A$. $\square$

Tõestatud lause on väga kasulik, sest tihti on tingimust 3 lihtsam kontrollida kui tingimust 1.

[13]ülemine raja = *join* = *the least upper bound* = *supremum*
[14]alumine raja = *meet* = *the greatest lower bound* = *infimum*
[15]võre = lattice
[16]complete lattice

Näide 1.9 1. Hulga A kõigi alamhulkade hulk $\mathcal{P}(A)$ koos sisalduvusseosega $\subseteq$ on võre. Selles võres A alamhulkade X ja Y alumiseks rajaks on $X \cap Y$ ja ülemiseks rajaks on $X \cup Y$. See võre on ka täielik.

2. Hulga A kõigi lõplike alamhulkade hulk $\mathcal{P}_{fin}(A)$ koos sisalduvusseosega $\subseteq$ on võre. Ka selles võres A alamhulkade X ja Y alumiseks rajaks on $X \cap Y$ ja ülemiseks rajaks on $X \cup Y$.

3. Iga lineaarselt järjestatud hulk (s.t. ahel) on võre, kus $a \wedge b = \min(a, b)$ ja $a \vee b = \max(a, b)$. Ahel $(\mathbb{N}, \leqslant)$ ei ole täielik, sest selles puudub suurim element.

4. Vektorruumi V kõigi alamruumide hulk $\mathcal{A}(V)$ on võre, kus alamruumide V_1 ja V_2 alumine raja on $V_1 \cap V_2$ ja ülemine raja on $V_1 + V_2$. See võre on täielik, sest suurim element on V ja mistahes mittetühja hulga alamruumide ühisosa on ka alamruum.

5. Eelmise paragrahvi joonisel kujutatud 5-elemendiline järjestatud hulk $\{a, b, c, u, v\}$ on võre.

6. Hulk $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on võre järjestusseose suhtes, mis on defineeritud komponenthaaval, s.t.

$$(a, b) \leqslant (c, d) \Longleftrightarrow a \leqslant c \wedge b \leqslant d.$$

7. Hulk $\mathbb{Z}$ jaguvusseose suhtes on võre.

8. Hulk $\{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$ koos jaguvusseosega ei ole võre. Siin on elementidel 2 ja 3 olemas kolm ülemist tõket (12, 18 ja 36), kuid neis ükski ei ole vähim ülemine tõke.

Tuleb välja, et võret on võimalik defineerida ka algebralise struktuurina.

Definitsioon 1.10 **Võre** on mittetühi hulk L, millel on defineeritud kaks kahekohalist algebralist tehet $+$ ja $\cdot$ (liitmine ja korrutamine) nii, et mistahes $a, b, c \in L$ korral

$$\begin{array}{rclrcll}
(a+b)+c & = & a+(b+c) & (ab)c & = & a(bc) & \text{(assotsiatiivsus)} \\
a+b & = & b+a & ab & = & ba & \text{(kommutatiivsus)} \\
a+a & = & a & aa & = & a & \text{(idempotentsus)} \\
(a+b)a & = & a & ab+a & = & a & \text{(neelduvus).}
\end{array}$$

On lihtne aru saada, et esimese tulba omadused on duaalsed teise tulba omadega selles mõttes, et kui liitmine asendada korrutamisega ja vastupidi, siis saame esimese tulba omadusest samas reas asuva teise tulba omaduse.

Lemma 1.11 *Olgu $(L, +, \cdot)$ võre definitsiooni 1.10 mõttes. Siis mistahes $a, b \in L$ korral*

$$a = ab \iff b = a + b.$$

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Kui $a = ab$, siis neelduvuse ja kommutatiivsuse tõttu $a + b = ab + b = ba + b = b$.

PIISAVUS. Kui $b = a + b$, siis jällegi neelduvust kasutades saame, et $ab = a(a + b) = a$. □

Teoreem 1.12 *1. Kui $(L, \leq)$ on võre, definitsiooni 1.5 mõttes ja defineerime*

$$a + b := a \vee b,$$
$$ab := a \wedge b,$$

siis $(L, +, \cdot)$ on võre definitsiooni 1.10 mõttes.

2. Kui $(L, +, \cdot)$ on võre, definitsiooni 1.10 mõttes ja defineerime

$$a \leq b \Longleftrightarrow a = ab,$$

siis $(L, \leq)$ on võre definitsiooni 1.5 mõttes. Selles võres

$$a \leq b \implies ac \leq bc \quad ja \quad a + c \leq b + c \tag{1.1}$$

mistahes $a, b, c \in L$ korral.

TÕESTUS. 1. Näitame, et kehtivad definitsiooni 1.10 parempoolses tulbas toodud samasused. Vasakpoolse tulba omaduste kontroll on sarnane.

Assotsiatiivsus. Veendume, et $(ab)c = a(bc)$ ehk $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$. Tähistame $d := (a \wedge b) \wedge c$ ja $e := a \wedge (b \wedge c)$. Siis $d \leq a \wedge b$ ja $d \leq c$, järelikult ka $d \leq a$ ja $d \leq b$. Seega $d \leq b \wedge c$ ning koos võrratusega $d \leq a$ saame, et $d \leq a \wedge (b \wedge c) = e$. Võrratuse $e \leq d$ tõestus on analoogiline. Antisümmeetria põhjal $e = d$.

Kommutatiivsus. On selge, et $a \wedge b = b \wedge a$.

Idempotentsus. On ilmne, et $a \wedge a = a$.

Neelduvus. Tõestame võrduse $a = ab + a$ ehk $a = (a \wedge b) \vee a$. Kuna $a \wedge b \leq a$ ja $a \leq a$, siis a on elementide $a \wedge b$ ja a ülemine tõke. Olgu nüüd $a \wedge b \leq x$ ja $a \leq x$. Võrratus $a \leq x$ ütleb kohe, et a on väiksem või võrdne elementide $a \wedge b$ ja a iga ülemise tõkkega. Seega $a = (a \wedge b) \vee a$.

2. Veendume, et $\leq$ on järjestusseos.

Refleksiivsus. Kuna $aa = a$, siis $a \leq a$.

Antisümmeetria. Olgu $a \leq b$ ja $b \leq a$. Siis $a = ab$ ja $b = ba$. Järelikult $a = ab = ba = b$.

Transitiivsus. Olgu $a \leq b$ ja $b \leq c$. Siis $a = ab$ ja $b = bc$. Järelikult $a = ab = a(bc) = (ab)c = ac$, kust $a \leq c$.

Tõestame nüüd, et $a \wedge b = ab$, s.t. et ab on elementide a ja b alumine raja. Kasutame selleks alumise raja definitsiooni.

1) Kuna $(ab)a = a(ba) = a(ab) = (aa)b = ab$, siis $ab \leq a$. Et $(ab)b = a(bb) = ab$, siis $ab \leq b$.

2) Oletame, et $x \leq a$ ja $x \leq b$. Siis $x = xa$ ja $x = xb$. Järelikult $x(ab) = (xa)b = xb = x$ ehk $x \leq ab$. Sellega on näidatud, et $a \wedge b = ab$.

Kasutades seda, et $a \leq b$ parajasti siis, kui $b = a + b$, saab tõestada, et $a \vee b = a + b$.

Tõestuse lõpetamiseks näitame, et kehtib implikatsioon (1.1). Olgu $a \leq b$. Siis $a = ab$, kust $(ac)(bc) = abcc = acc = ac$ ehk $ac \leq bc$.

Võrratusest $a \leq b$ järeldub ka, et $b = a+b$, kust $(a+c)+(b+c) = a+b+c+c = b+c+c = b+c$ ehk $a + c \leq b + c$. □

1.3 Alamvõred

Definitsioon 1.13 Võre L alamhulka L' nimetatakse **alamvõreks**[17], kui

$$(\forall a, b \in L')(a \wedge b \in L' \text{ ja } a \vee b \in L').$$

Näide 1.14 1. $\mathcal{P}_{fin}(A)$ on võre $\mathcal{P}(A)$ alamvõre.

2. Mistahes võres on ühe-elemendiline alamhulk alamvõre.

3. Antud definitsiooni järgi on alati L ja $\emptyset$ võre L alamvõred.

Definitsioon 1.15 Võre L alamvõret L' nimetatakse **kumeraks**[18], kui

$$(\forall x, y, z \in L)(x, z \in L', x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow y \in L').$$

Näide 1.16 Reaalarvude võres $\mathbb{R}$ (hariliku järjestusega) on nii lõik $[0, 1]$ kui ka vahemik $(0, 1)$ kumerad alamvõred.

Definitsioon 1.17 Olgu a ja b järjestatud hulga A elemendid, kusjuures $a \leqslant b$. Hulka

$$[a, b] := \{x \in A \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

nimetatakse **lõiguks**[19] otspunktidega a ja b.

---

[17] alamvõre = *sublattice*

[18] kumer alamvõre = *convex sublattice*

[19] lõik = *interval*

Lause 1.18 *Võre L iga lõik on kumer alamvõre.*

TÕESTUS. ... □

Lause 1.19 *Lõpliku võre iga kumer alamvõre on lõik.*

TÕESTUS. Kui $L' = \{b_1, \ldots, b_n\}$ on lõpliku võre L kumer alamvõre, siis saab näidata, et $L' = [b_1 \wedge \ldots \wedge b_n, b_1 \vee \ldots \vee b_n]$. □

Ülesanne 1.20 *Tõestada, et võre L on ahel parajasti siis, kui iga mittetühi alamhulk $A \subseteq L$ on alamvõre.*

1.4 Homomorfismid

Definitsioon 1.21 Olgu L_1 ja L_2 võred. Kujutust $f : L_1 \longrightarrow L_2$ nimetatakse

- **$\wedge$-homomorfismiks**[20], kui
$$(\forall a, b \in L_1)\ f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b);$$
- **$\vee$-homomorfismiks**[21], kui
$$(\forall a, b \in L_1)\ f(a \vee b) = f(a) \vee f(b);$$
- **homomorfismiks**[22], kui f on $\wedge$-homomorfism ja $\vee$-homomorfism;
- **isomorfismiks**[23], kui f on bijektiivne homomorfism.

Lause 1.22 *$\wedge$-homomorfism, $\vee$-homomorfism ja homomorfism säilitavad järjestust.*

TÕESTUS. Olgu $f : L_1 \longrightarrow L_2$ $\wedge$-homomorfism ja $a \leqslant b$, kus $a, b \in L_1$. Siis $a = a \wedge b$ ja
$$f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$
millest järeldame, et $f(a) \leqslant f(b)$. □

Lause 1.23 *Olgu L_1 ja L_2 võred. Siis järgmised tingimused on samaväärsed:*

1. *f on võrede isomorfism,*
2. *f on võrede homomorfism ja leidub võrede homomorfism $g : L_2 \to L_1$ nii, et $gf = 1_{L_1}$ ja $fg = 1_{L_2}$.*
3. *f on bijektiivne kujutus ja*
$$(\forall a, b \in L_1)(a \leqslant b \Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b));$$
4. *f on sürjektiivne kujutus ja*
$$(\forall a, b \in L_1)(a \leqslant b \Longleftrightarrow f(a) \leqslant f(b)).$$

TÕESTUS. ... □

Kui leidub isomorfism f võrest L_1 võresse L_2, siis ütleme, et võred L_1 ja L_2 on **isomorfsed**[24] ja kirjutame $L_1 \simeq L_2$.

[20] $\wedge$-homomorfism = *meet homomorphism*
[21] $\vee$-homomorfism = *join homomorphism*
[22] homomorfism = homomorphism
[23] isomorfism = *isomorphism*
[24] isomorfsed võred = *isomorphic lattices*

1.5 Kongruentsid

Definitsioon 1.24 Olgu L võre. Ekvivalentsiseost ρ hulgal L nimetatakse võre L **kongruentsiks**[25], kui mistahes $a, b, c, d \in L$ korral

$$(a, b), (c, d) \in \rho \Longrightarrow (a \wedge c, b \wedge d), (a \vee c, b \vee d) \in \rho.$$

Lause 1.25 *Olgu L võre ja ρ selle võre kongruents. Siis mistahes elemendi $a \in L$ korral on kongruentsiklass*

$$[a]_\rho = \{b \in L \mid (a, b) \in \rho\}$$

võre L kumer alamvõre.

TÕESTUS. Vaatleme mingit kongruentsiklassi K ja olgu $a, b \in K$. Siis $(a, b) \in \rho$ ja $(a, a) \in \rho$. Kongruentsi definitsiooni põhjal ka $(a \wedge a, a \wedge b) \in \rho$ ehk $(a, a \wedge b) \in \rho$. Seega $a \wedge b \in [a]_\rho = K$. Analoogiliselt saab näidata, et K on kinnine ülemise raja võtmise suhtes.

Olgu nüüd $a, b \in K$ ja $x \in L$ selline, et $a \leqslant x \leqslant b$. Kuna $(a, b) \in \rho$ ja $(x, x) \in \rho$, siis $(a \wedge x, b \wedge x) \in \rho$ ehk $(a, x) \in \rho$. Järelikult $x \in [a]_\rho = K$. □

Definitsioon 1.26 Võrede homomorfismi $f : L_1 \longrightarrow L_2$ **tuumaks**[26] nimetatakse binaarset seost

$$\ker f := \{(a, b) \in L_1 \times L_1 \mid f(a) = f(b)\}$$

hulgal L_1.

Lause 1.27 *Võrede homomorfismi tuum on kongruents.*

TÕESTUS. Selle jätame lugejale läbimõtlemiseks. □

Lause 1.28 *Olgu ρ võre L kongruents. Siis*

$$(\forall a, b \in L)((a, b) \in \rho \Longleftrightarrow (a \wedge b, a \vee b) \in \rho).$$

TÕESTUS. Olgu $(a, b) \in \rho$. Et ka $(a, a) \in \rho$, siis $(a, a \vee b) \in \rho$ ja $(a, a \wedge b) \in \rho$. Transitiivsuse tõttu $(a \wedge b, a \vee b) \in \rho$.

Vastupidise näitamiseks eeldame, et $(a \wedge b, a \vee b) \in \rho$. Kuna ka $(a, a), (b, b) \in \rho$, siis saame, et

$$(a \vee (a \wedge b), a \vee (a \vee b)) \in \rho \text{ ja } (b \vee (a \wedge b), b \vee (a \vee b)) \in \rho.$$

Neelduvuse tõttu võime öelda, et

$$(a, a \vee b), (b, a \vee b) \in \rho.$$

Tänu transitiivsusele $(a, b) \in \rho$. □

Olgu L võre ja ρ selle võre kongruents. Defineerime kongruentsiklasside hulgal

$$L/\rho = \{[a]_\rho \mid a \in L\}$$

[25]kongruents = *congruence*
[26]tuum = *kernel*

kaks tehet võrdustega

$$[a]_\rho \wedge [b]_\rho = [a \wedge b]_\rho,$$

$$[a]_\rho \vee [b]_\rho = [a \vee b]_\rho.$$

Lihtne on veenduda, et need tehted on korrektselt defineeritud ja et hulk L/ρ on nende tehete suhtes võre. Seda võret nimetatakse võre L **faktorvõreks**[27] kongruentsi ρ järgi.

Nii nagu mistahes teistegi algebraliste struktuuride korral saab ka võrede jaoks tõestada homomorfismiteoreemi.

Teoreem 1.29 *Olgu $f : L_1 \longrightarrow L_2$ sürjektiivne võrede homomorfism. Siis*

$$L_1/\ker f \simeq L_2.$$

Võre L kõigi kongruentside hulka tähistame sümboliga $\mathsf{Con}L$. Lihtne on aru saada, et see hulk on järjestatud hulk sisalduvusseose suhtes.

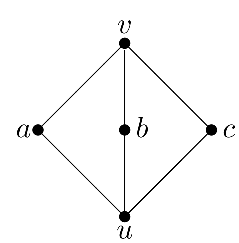
Lause 1.30 *Võre kongruentside hulk on täielik võre.*

TÕESTUS. Olgu L võre. On selge, et $L \times L$ on võre L kongruents ning see on järjestatud hulga $(\mathsf{Con}L, \subseteq)$ suurim element. Kui I on mittetühi hulk ja $\rho_i \in \mathsf{Con}L$, $i \in I$, siis ka $\cap_{i \in I} \rho_i \in \mathsf{Con}L$. Lihtne on kontrollida, et $\cap_{i \in I} \rho_i$ on kongruentside ρ_i, $i \in I$ alumine raja järjestatud hulgas $(\mathsf{Con}L, \subseteq)$. Lause 1.8 põhjal on $\mathsf{Con}L$ täielik võre. □

Märgime veel, et võre $\mathsf{Con}L$ vähimaks elemendiks on võrdusseos

$$\Delta_L = \{(a, a) \mid a \in L\}.$$

Ülesanne 1.31 Teha kindlaks, millised on võre



kongruentsid.

Ülesanne 1.32 Millised on ahela kongruentsid?

1.6 Ideaalid ja filtrid

Definitsioon 1.33 Järjestatud hulga $(A, \leqslant)$ alamhulka B nimetatakse **allapoole kinniseks**[28], kui

$$(\forall x \in A)(\forall b \in B)(x \leqslant b \Longrightarrow x \in B).$$

Duaalselt defineeritakse ülespoole kinnised alamhulgad[29].

[27] faktorvõre = *quotient lattice*
[28] allapoole kinnine alamhulk = *down-closed subset*
[29] ülespoole kinnine alamhulk = *up-closed subset*

Definitsioon 1.34 Võre **ideaal**[30] on tema allapoole kinnine alamvõre. Võre **filter**[31] on tema ülespoole kinnine alamvõre.

Märkus 1.35 Definitsiooni järgi on ka tühi hulk nii ideaal kui filter. Mittetühjade ideaalide ühisosa on alati mittetühi. Oletame, et I, J on võre L mittetühjad ideaalid. Siis leiduvad mingid elemendid $i \in I$ ja $j \in J$. Nüüd $i \wedge j \leqslant i$ ja $i \wedge j \leqslant j$, kust järeldub, et $i \wedge j \in I$ ja $i \wedge j \in J$, ning seega ka $i \wedge j \in I \cap J$.

Lemma 1.36 *Võre L alamhulk I on ideaal parajasti siis, kui*

1. $(\forall a, b \in I)\ a \vee b \in I$,
2. $(\forall a \in I)(\forall x \in L)\ a \wedge x \in I$.

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu I ideaal. Kuna I on alamvõre, siis kehtib tingimus 1. Oletame, et $a \in I$ ja $x \in L$. Et $a \wedge x \leqslant a$ ja I on allapoole kinnine, siis $a \wedge x \in I$. Seega kehtib ka tingimus 2.
PIISAVUS. Rahuldagu hulk I tingimusi 1 ja 2. Siis I on alamvõre. Oletame, et $a \in I$ ja $x \in L$, kusjuures $a \leqslant x$. Siis $a = a \wedge x \in I$ ning seega I on allapoole kinnine. Definitsiooni põhjal I on ideaal. □

Näide 1.37 Võres $(\mathbb{N}, \leqslant)$ on ideaalideks $\mathbb{N}$ ja kõik alamhulgad $\{1, 2, \ldots, n\}$, kus $n \in \mathbb{N}$. Selle võre kõik mittetühjad filtrid on lõpmatud.

Lause 1.38 *Kui K on võre L alamvõre, siis hulk*

$$\downarrow K = \{x \in L \mid (\exists k \in K)\ x \leqslant k\}$$

on võre L ideaal ja hulk

$$\uparrow K = \{x \in L \mid (\exists k \in K)\ k \leqslant x\}$$

on võre L filter.

TÕESTUS. ... □

Meenutame, et kui L on võre ja $a \in L$, siis ühe-elemendiline hulk $\{a\}$ on alamvõre.

Järeldus 1.39 *Kui a on võre L element, siis hulk*

$$\downarrow a = \{x \in L \mid x \leqslant a\}$$

on võre L ideaal ja hulk

$$\uparrow a = \{x \in L \mid a \leqslant x\}$$

on võre L filter.

Ideaali $\downarrow a$ nimetatakse elemendi a poolt tekitatud **peaideaaliks**[32] ja filtrit $\uparrow a$ võre L **peafiltriks**[33].

Sümboliga $\mathsf{Id}L$ tähistame võre L kõigi ideaalide hulka. See on järjestatud hulk sisalduvusseose suhtes.

---

[30] ideaal = *ideal*
[31] filter = *filter*
[32] peaideaal = *principal ideal*
[33] peafilter = *principal filter*

Lause 1.40 *Kui L on võre, siis järjestatud hulk $(\mathsf{Id}L, \subseteq)$ on täielik võre.*

TÕESTUS. Ideaal L on järjestatud hulga $(\mathsf{Id}L, \subseteq)$ suurim element. Lihtne on veenduda, et mittetühja hulga ideaalide ühisosa on ideaal ja et see on vaadeldavate ideaalide alumine raja. Seega $\mathsf{Id}L$ on täielik võre lause 1.8 põhjal. □

Järgmine tulemus ütleb, et iga võre on sisestatav täielikku võresse.

Teoreem 1.41 *Võre L on isomorfne täieliku võre $\mathsf{Id}L$ mingi alamvõrega.*

TÕESTUS. Kui $L = \emptyset$, siis $\mathsf{Id}L$ on ühe-elemendiline (ta koosneb tühjast ideaalist) ja L on isomorfne $\mathsf{Id}L$ tühja alamvõrega. Edasises vaatleme olukorda, kus L ei ole tühi.

Vaatleme peaideaalide hulka

$$P = \{\downarrow a \mid a \in L\} \subseteq \mathsf{Id}L.$$

See hulk on kinnine alumiste ja ülemiste rajade võtmise suhtes, sest

$$\downarrow a \wedge \downarrow b = \downarrow (a \wedge b),$$
$$\downarrow a \vee \downarrow b = \downarrow (a \vee b).$$

Defineerime kujutuse

$$f : L \longrightarrow P, \quad a \mapsto \downarrow a.$$

Tänu eelpoolmainitule on f võrede homomorfism. Kuna mistahes $a, b \in L$ korral

$$a \leqslant b \iff \downarrow a \subseteq \downarrow b,$$

siis kujutus f säilitab ja peegeldab järjestust. Ilmselt on f ka sürjektiivne ja seega võrede isomorfism tänu lausele 1.23. □

Lause 1.42 *Võre ideaali ja filtri ühisosa on kumer alamvõre. Iga mittetühi kumer alamvõre on ühesel viisil esitatav ideaali ja filtri ühisosana.*

TÕESTUS. Esimene väide on ilmne. Teise väite tõestamiseks vaatame võre L mittetühja kumerat alamvõret C. Siis vastavalt lausele 1.38 on $\downarrow C$ ideaal ja $\uparrow C$ filter. Veendume, et

$$C = \downarrow C \cap \uparrow C.$$

Sisalduvus $C \subseteq \downarrow C \cap \uparrow C$ on ilmne. Oletame, et $x \in \downarrow C \cap \uparrow C$. Siis leiduvad sellised $c_1, c_2 \in C$, et $x \leqslant c_1$ ja $c_2 \leqslant x$. Kumeruse tõttu $x \in C$. Seega ka $\downarrow C \cap \uparrow C \subseteq C$.

Esituse ühesuse näitamiseks oletame, et $C = I \cap F$, kus I on ideaal ja F on filter. Tõestame, et $I = \downarrow C$.

Kuna $C \subseteq I$ ja I on allapoole kinnine, siis $\downarrow C \subseteq I$. Olgu nüüd $a \in I$. Valime hulgast C suvalise elemendi c (C on mittetühi!). Siis $a \vee c \in I$, sest I on alamvõre. Kuna $a \vee c \geqslant c \in F$ ja F on ülespoole kinnine, siis $a \vee c \in F$. Seega $a \vee c \in I \cap F = C$. Et aga $a \leqslant a \vee c \in C$, siis $a \in \downarrow C$. Seega $I \subseteq \downarrow C$ ja kokkuvõttes $I = \downarrow C$. Duaalselt saab näidata, et $F = \uparrow C$. □

Peatükk 2

Täielikud võred

2.1 Piisavaid tingimusi täielikkuseks

Meenutame, et võre on täielik, kui tema mistahes alamhulgal leidub alumine ja ülemine raja. Selles paragrahvis anname mõned piisavad tingimused, mille abil saab kindlaks teha, kas vaadeldav võre on täielik. Selleks toome sisse jadade kasvamise ja kahanemisega seotud tingimused (DCC) ja (ACC).

Lause 2.1 *Mistahes järjestatud hulga $(A, \leqslant)$ korral on järgmised tingimused samaväärsed:*

- *(***Minimaalsuse tingimus**[1]**.***) Hulga A igal mittetühjal alamhulgal on olemas minimaalne element.*

- *(***Kahanevate jadade stabiliseerumise tingimus**[2] *ehk* **(DCC)***.) Hulga A elementide iga kahaneva jada*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$$

  korral leidub selline indeks n, et $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$.

Tõestus. On ilmne, et minimaalsuse tingimusest järeldub (DCC). Näitame vastupidist.

Rahuldagu $(A, \leqslant)$ tingimust (DCC). Olgu B hulga A mittetühi alamhulk ja valime sellest mingi elemendi b_1. Siis b_1 on hulga B minimaalne element või leidub mingi element $b_2 \in B$ nii, et $b_1 > b_2$. Kui peab paika teine võimalus, siis b_2 on alamhulga B minimaalne element või leidub alement $b_3 \in B$ nii, et $b_1 > b_2 > b_3$. Samal moel edasi arutades saame kas lõpmatult pikendada rangelt kahanevat B elementide jada või satume selle alamhulga minimaalsele elemendile. Tingimuse (DCC) tõttu rangelt kahanevat jada tekkida ei saa, seega peab leiduma minimaalne element. □

Eelmise lause duaalne versioon ütleb järgmist.

Lause 2.2 *Mistahes järjestatud hulga $(A, \leqslant)$ korral on järgmised tingimused samaväärdes:*

- *(***Maksimaalsuse tingimus**[3]**.***) Hulga A igal mittetühjal alamhulgal on olemas maksimaalne element.*

[1] minimaalsuse tingimus = *minimality condition*
[2] kahanevate jadade stabiliseerumise tingimus = *descending chains condition*
[3] maksimaalsuse tingimus = *maximality condition*

- *(***Kasvavate jadade stabiliseerumise tingimus**[4] *ehk* **(ACC)***.) Hulga A elementide iga kasvava jada*
$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots$$
korral leidub selline indeks n, et $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$.

Lemma 2.3 *Kui ahelas leidub maksimaalne element, siis on see ahela suurim element.*

TÕESTUS. Kui C on ahel, m selle maksimaalne element ja c on ahela C suvaline element, siis kas $c \leqslant m$ või $m \leqslant c$. Teisel juhul ei ole maksimaalsuse tõttu võimalik, et $m < c$. Seega $m = c$. Niisiis iga $c \in C$ korral $c \leqslant m$, mis tähendab, et m on ahela C suurim element. □

Lause 2.4 *Järjestatud hulk ei sisalda lõpmatuid ahelaid parajasti siis, kui ta rahuldab tingimusi (ACC) ja (DCC).*

TÕESTUS. Tarvilikkus on ilmne.

Piisavuse tõestamiseks eeldame, et A on järjestatud hulk, mis rahuldab tingimusi (ACC) ja (DCC). Oletame vastuväiteliselt, et A sisaldab lõpmatut ahelat C. Olgu $B \subseteq C$ mittetühi alamhulk. Lause 2.2 põhjal sisaldab B mingit maksimaalset elementi m. Kuna C on ahel, siis ka B on ahel ja lemma 2.3 põhjal on m hulga B suurim element. Niisiis hulga C igas mittetühjas alamhulgas leidub suurim element. Muuhulgas ka hulgas C leidub suurim element x_1, hulgas $C \setminus \{x_1\}$ leidub suurim element x_2 ja nii edasi. Nii tekib meil rangelt kahanev jada
$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots,$$
mis on vastuolus tingimusega (DCC). □

Teoreem 2.5 *Võre L on täielik järgmistel juhtudel:*

1. *võres L on olemas vähim element ja see võre rahuldab tingimust (ACC);*

2. *võre L ei sisalda lõpmatuid ahelaid.*

TÕESTUS. 1. Olgu võres L olemas vähim element ning rahuldagu ta tingimust (ACC). Tänu lausele 1.8 piisab täielikkuse näitamiseks sellest, kui veendume, et igal mittetühjal alamhulgal $A \subseteq L$ leidub ülemine raja. Vaatleme hulka
$$B = \{\vee F \mid \emptyset \neq F \subseteq A, F \text{ on lõplik}\} \subseteq L.$$
Kuna $B \neq \emptyset$ (sest võttes suvalise $a \in A$ kehtib $a = \vee\{a\} \in B$), siis lause 2.2 põhjal leidub hulgas B maksimaalne element $m = \vee F$, kus F on hulga A mingi lõplik mittetühi alamhulk. Näitame ülemise raja definitsiooni kasutades, et
$$m = \vee A.$$

a) Olgu $a \in A$. Siis $\vee(F \cup \{a\}) \in B$ ja $m = \vee F \leqslant \vee(F \cup \{a\})$. Kuna m on maksimaalne element hulgas B, siis
$$m = \vee F = \vee(F \cup \{a\}),$$
millest järeldub, et $a \leqslant m$. Seega m on hulga a ülemine tõke.

b) Olgu $x \in L$ hulga A mingi ülemine tõke. Kuna $F \subseteq A$, siis x on ka hulga F ülemine tõke ja seega $m = \vee F \leqslant x$.

2. Kui võre ei sisalda lõpmatuid ahelaid, siis on temas olemas vähim element ning ta rahuldab tingimust (ACC). Seega eeleneva põhjal on võre täielik. □

[4] kasvavate jadade stabiliseerumise tingimus = *ascending chains condition*

2.2 Täielikud võred ja püsipunktid

Selles paragrahvis anname täielike võrede kirjelduse järjestust säilitavate teisenduste püsipunktide abil.

Definitsioon 2.6 Hulga A teisenduse f **püsipunktideks**[5] nimetatakse selliseid elemente a, mille korral $f(a) = a$.

Meil läheb vaja Zorni lemmat.

Lemma 2.7 (Zorni lemma) *Kui mittetühja järjestatud hulga iga alamahel on ülevalt tõkestatud, siis selles hulgas leidub vähemalt üks maksimaalne element.*

Järjestatud hulga A alamhulga S korral tähistab $S^{\triangle}$ sellle hulga ülemiste tõkete hulka ja $S^{\triangledown}$ selle hulga alumiste tõkete hulka.

Teoreem 2.8 (Alfred Tarski, Anne Davis) *Võre L on täielik parajasti siis, kui tema igal järjestust säilitaval teisendusel leidub püsipunkt.*

TÕESTUS.
TARVILIKKUS. Olgu L täieliku võre L järjestust säilitav teisendus. Täielikkuse tõttu peab hulgal

$$P = \{x \in L \mid x \leqslant f(x)\} \subseteq L$$

leiduma ülemine raja; olgu

$$a = \vee P.$$

Siis iga $x \in P$ korral $x \leqslant a$ ja $x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$, mis tähendab, et $f(a)$ on hulga P ülemine tõke. Järelikult $a \leqslant f(a)$ ning samuti $f(a) \leqslant f(f(a))$. See tähendab, et $f(a) \in P$. Et $a = \vee P$, siis $f(a) \leqslant a$. Antisümmeetria tõttu $f(a) = a$.

PIISAVUS. Oletame, et L ei ole täielik. Meie eesmärk on näidata, et leidub L järjestust säilitav teisendus, millel puuduvad püsipunktid. Selleks me konstrueerime kaks ahelat $C, D \subseteq L$ nii, et

(1) ahelal C pole alumist raja;

(2) $(\forall d \in D)(\forall c \in C)(d \leqslant c)$;

(3) ei leidu sellist elementi $x \in L$, et $(\forall d \in D)(\forall c \in C)(d \leqslant x \leqslant c)$.

Oletame, et $1 \in L$ (s.t. võres L leidub suurim element). Kuna L ei ole täielik, siis leidub alamhulk $S \subseteq L$, millel puudub ülemine raja. (Märgime, et S võib olla ka tühi hulk, sellisel juhul puudub võres L vähim element.) Vaatleme hulka

$$\mathcal{P} = \{C \subseteq S^{\triangle} \mid C \text{ on ahel, mis rahuldab tingimust (ACC)}\}.$$

See hulk on mittetühi, sest näiteks $\{1\} \subseteq S^{\triangle}$ ja $\{1\}$ on ahel, mis rahuldab tingimust (ACC). Järjestame hulga $\mathcal{P}$ järgmiselt:

$$C_1 \leqslant C_2 \Longleftrightarrow C_1 \text{ on filter võres } C_2.$$

Me soovime hulgale $\mathcal{P}$ rakendada Zorni lemmat. Selleks kontrollime lemma eeldust.

[5]püsipunkt = *fixed point*

Vaatleme hulgas $\mathcal{P}$ suvalist ahelat $\{C_i \mid i \in I\}$. Me tahame näidata, et sellel ahelal leidub ülemine tõke. Olgu

$$C := \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq L.$$

Näitame, et $C \in \mathcal{P}$. Kuna $C_i \subseteq S^{\triangle}$ iga $i \in I$ korral, siis ka $C \subseteq S^{\triangle}$. Veendume, et C on ahel. Olgu $x, y \in C$. Siis leiduvad $i, j \in I$ nii, et $x \in C_i$ ja $y \in C_j$. Kuna $\{C_i \mid i \in I\}$ on ahel, siis kas $C_i \leqslant C_j$ või $C_j \leqslant C_i$. Esimesel juhul $x, y \in C_j$, teisel juhul $x, y \in C_i$. Kuna C_i ja C_j on ahelad, siis mõlemal juhul on x ja y võrreldavad. Sellega on tõestatud, et C on ahel.

Näitame veel, et C rahuldab tingimust (ACC). Vaatleme hulgas C kasvavat jada

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \dots . \tag{2.1}$$

Siis iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub $i_n \in I$ nii, et $x_n \in C_{i_n}$. Vaatleme elemente $x_1 \in C_{i_1}$ ja $x_2 \in C_{i_2}$. On kaks võimalust:

a) C_{i_1} on filter võres C_{i_2}. Siis võrratusest $x_1 \leqslant x_2$ järeldub, et $x_2 \in C_{i_1}$.

b) C_{i_2} on filter võres C_{i_1}. Siis $x_2 \in C_{i_2} \subseteq C_{i_1}$.

Seega mõlemal juhul $x_2 \in C_{i_1}$. Analoogiliselt saab näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \in C_{i_1}$. Kuna C_{i_1} rahuldab tingimust (ACC), siis ahel (2.1) stabiliseerub. Sellega on tõestatud, et $C \in \mathcal{P}$.

Zorni lemmat kasutades saame, et hulgas $\mathcal{P}$ leidub vähemalt üks maksimaalne element, mida tähistame C_m.

Väide. *Ahelal C_m puudub alumine raja.*

Oletame vastuväiteliselt, et $a = \wedge C_m$. Näitame, et sellisel juhul

$$a = \vee S,$$

mis annab meile vastuolu eeldusega, et hulgal S puudub ülemine raja. Kontrollime ülemise raja definitsiooni tingimusi.

a) Kuna $C_m \subseteq S^{\triangle}$, siis

$$(\forall s \in S)(\forall c \in C_m)\ s \leqslant c.$$

Seega iga $s \in S$ korral s on hulga C_m alumine tõke ning seega $s \leqslant \wedge C_m = a$. Järelikult a on hulga S ülemine tõke.

b) Olgu ka $t \in L$ hulga S ülemine tõke. Oletame vastuväiteliselt, et $a \nleqslant t$. Siis $a \neq a \wedge t$. On selge, et ka $a \wedge t$ on hulga S ülemine tõke, s.t. $a \wedge t \in S^{\triangle}$. Seega

$$C_m \subseteq C_m \cup \{a \wedge t\} \subseteq S^{\triangle}.$$

Kuna $a \wedge t < a \leqslant x$ iga $x \in C_m$ korral, siis $C_m \cup \{a \wedge t\}$ on ahel. Samuti on selge, et kui lisame elemendi $a \wedge t$ hulgale C_m, siis saame hulga, mis rahuldab tingimust (ACC). Seega $C_m \cup \{a \wedge t\} \in \mathcal{P}$ ja $C_m \leqslant C_m \cup \{a \wedge t\}$, mis on vastuolus sellega, et C_m pidi olema $\mathcal{P}$ maksimaalne element. Järelikult peab olema $a \leqslant t$.

Oleme saanud vastuolu $a = \vee S$, mis näitab, et ahelal C_m ei saa leiduda alumist raja.

Defineerime nüüd hulga

$$C := \begin{cases} C_m, & \text{kui } 1 \in L, \\ \emptyset, & \text{kui } 1 \notin L. \end{cases}$$

Siis C on ahel, millel puudub alumine raja, s.t. kehtib väide (1).

Asume konstrueerima ahelat D. Selleks vaatleme hulka

$$\mathcal{Q} = \{D \subseteq C^{\triangledown} \mid D \text{ on ahel, mis rahuldab tingimust (DCC)}\}$$

koos järjestusega

$$D_1 \leqslant D_2 \Longleftrightarrow D_1 \text{ on ideaal võres } D_2.$$

See hulk $\mathcal{Q}$ võib põhimõtteliselt olla tühi. Aga kui ta on mittetühi, siis sarnaselt hulgaga $\mathcal{P}$ saab veenduda, et ta rahuldab Zorni lemma eeldust. Seega leidub selles hulgas maksimaalne element D_m. Defineerime

$$D := \begin{cases} D_m, & \text{kui } \mathcal{Q} \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{kui } \mathcal{Q} = \emptyset. \end{cases}$$

Siis on selge, et kehtib ka tingimus (2).

Olgu $x \in L$. Defineerime hulgad

$$C(x) = \{c \in C \mid x \nleqslant c\},$$
$$D(x) = \{d \in D \mid d \nleqslant x\}.$$

Näitame, et

$$(\forall x \in L)(C(x) \neq \emptyset \text{ või } D(x) \neq \emptyset), \tag{2.2}$$

mis on samaväärne tingimusega (3). Selleks oletame vastuväiteliselt, et leidub selline $x \in L$, et iga $c \in C$ ja $d \in D$ korral $x \leqslant c$ ja $d \leqslant x$. Sellisel juhul x on hulga C alumine tõke. Kuna hulgal C puudub alumine raja, siis leidub C alumine tõke y nii, et $y \nleqslant x$. Siis aga

$$(\forall d \in D)(d \leqslant x < x \vee y).$$

Lisaks sellele iga $c \in C$ korral $x \vee y \leqslant c$, mis tähendab, et $x \vee y \in C^{\triangledown}$ ja

$$D_m \subset D_m \cup \{x \vee y\} \in \mathcal{Q},$$

mis on vastuolus ahela D_m maksimaalsusega. Sellega on tõestatud (2.2).

Nüüd saame defineerida kujutuse $f : L \longrightarrow L$ võrdusega

$$f(x) := \begin{cases} \text{hulga } C(x) \text{ suurim element}, & \text{kui } C(x) \neq \emptyset, \\ \text{hulga } D(x) \text{ vähim element}, & \text{kui } C(x) = \emptyset. \end{cases}$$

Märgime, et selliste elementide leidumise garanteerib see, et C rahuldab tingimust (ACC) ja D rahuldab tingimust (DCC) (vt. lauset 2.2, lauset 2.1 ja lemmat 2.3). Definitsiooni põhjal

$$(\forall x \in L)(x \nleqslant f(x) \text{ või } f(x) \nleqslant x),$$

seega f ei oma püsipunkte.

Tõestuse lõpetamiseks jääb veel näidata, et f säilitab järjestust. Selleks oletame, et $x \leqslant y$, $x, y \in L$. Vaatleme kahte juhtu.

a) $C(x) \neq \emptyset$. Siis $f(x) \in C$ ja $x \nleqslant f(x)$. Järelikult $y \nleqslant f(x)$, sest vastasel juhul $x \leqslant y \leqslant f(x)$. Seega $f(x) \in C(y)$ ja $C(y) \neq \emptyset$. Kuna $f(y)$ on hulga $C(y)$ suurim element, siis $f(x) \leqslant f(y)$.

b) $C(x) = \emptyset$. Siis $f(x) \in D(x)$ ja $f(x)$ on hulga $D(x)$ vähim element. On kaks võimalust.

b1) Kui $C(y) \neq \emptyset$, siis $f(y) \in C$ ja $f(x) \leqslant f(y)$, sest kõik D elemendid on väikemad D elementidest (vt. (2)).

b2) Kui $C(y) = \emptyset$, siis $f(y) \in D(y)$, seega $f(y) \in D$ ja $f(y) \nleqslant y$. Kui oletaksime, et $f(y) \leqslant x$, siis $f(y) \leqslant x \leqslant y$, mis on vastuolus sellega, et $f(y) \nleqslant y$. Seega $f(y) \nleqslant x$, mis tähendab, et $f(y) \in D(x)$. Et $f(x)$ on $D(x)$ vähim element, siis $f(x) \leqslant f(y)$.

Sellega on näidatud, et f säilitab järjestust. □

2.3 Sulundioperaatorid ja täielikud võred

Selles paragrahvis näeme, kuidas sulundioperaatorite abil tekivad loomulikul viisil täielikud võred.

Definitsioon 2.9 Olgu X mingi hulk. Alamhulka $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nimetatakse **sulundisüsteemiks**[6] hulgal X, kui

1. $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{L}$ iga $\emptyset \neq \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$ korral ja
2. $X \in \mathcal{L}$.

Näide 2.10 Kui L on võre, siis $\mathsf{Sub}(L)$ ja $\mathsf{Id}(L)$ on sulundisüsteemid hulgal L ja $\mathsf{Con}(L)$ on sulundisüsteem hulgal $L \times L$.

Lause 2.11 *Iga sulundisüsteem $\mathcal{L}$ hulgal X on sisalduvusseose suhtes täielik võre, milles*

$$\bigwedge\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i, \ \textit{kui } i \neq \emptyset \textit{ ja}$$

$$\bigvee\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \left\{ B \in \mathcal{L} \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B \right\}.$$

Tõestus. Olgu $\emptyset \neq \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{L}$. Tähistame

$$P := \bigcap \left\{ B \in \mathcal{L} \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B \right\}.$$

Kuna $\mathcal{L}$ on kinnine ühisosade võtmise suhtes, siis $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{L}$ ja $P \in \mathcal{L}$. On selge, et $\bigcap_{i\in I} A_i$ on hulga $\{A_i \mid i \in I\}$ alumine raja. Veendume, et P on selle hulga ülemine raja. Selleks kontrollime definitsiooni tingimusi.

1) Kui $B \in \mathcal{L}$ on selline, et $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$, siis iga $j \in I$ korral $A_j \subseteq B$, seega ka $A_j \subseteq P$. See tähendab, et P on hulga $\{A_i \mid i \in I\}$ ülemine tõke.

2) Oletame, et $Q \in \mathcal{L}$ on hulga $\{A_i \mid i \in I\}$ ülemine tõke. Siis $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq Q$, kust hulga P definitsiooni tõttu $P \subseteq Q$. □

Definitsioon 2.12 Olgu X hulk. Kujutust $c : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ nimetatakse **sulundioperaatoriks**[7], kui mistahes $A, B \subseteq X$ korral

1. $A \subseteq c(A)$;
2. kui $A \subseteq B$, siis $c(A) \subseteq c(B)$;
3. $c(c(A)) = c(A)$.

Alamhulka $A \subseteq X$ nimetatakse **kinniseks**[8] (c suhtes), kui $c(A) = A$. Kõigi kinniste hulkade hulka tähistame

$$\mathcal{L}_c = \{A \subseteq X \mid c(A) = A\}.$$

[6] sulundisüsteem=*closure system*
[7] sulundioperaator=*closure operator*
[8] kinnine alamhulk=*closed subset*

Paneme tähele, et kuna $X \subseteq c(X) \subseteq X$, siis $c(X) = X$ ja X on kinnine, s.t. $X \in \mathcal{L}_c$. Samuti on selge, et iga $B \subseteq X$ korral $c(B) \in \mathcal{L}_c$.

Näide 2.13 Olgu V vektorruum üle korpuse K. Siis kujutus

$$\mathrm{span} : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V), \quad A \mapsto \mathrm{span}(A)$$

on sulundioperaator. Selle operaatori suhtes kinnised V alamhulgad on parajasti vektorruumi V alamruumid.

Sulundisüsteemide ja sulundioperaatorite vahel on üksühene vastavus.

Teoreem 2.14 *1. Kui c on sulundioperaator hulgal X, siis $\mathcal{L}_c$ on sulundisüsteem hulgal X.*

2. Kui $\mathcal{L}$ on sulundisüsteem hulgal X, siis võrdusega

$$c_{\mathcal{L}}(A) := \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\} \tag{2.3}$$

defineeritud kujutus on sulundioperaator hulgal X.

3. $\mathcal{L}_c$ ja $c_{\mathcal{L}}$ on teineteise pöördoperatsioonid:

$$c_{\mathcal{L}_c} = c \quad \textit{ja} \quad \mathcal{L}_{c_{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$$

iga sulundioperaatori c ja sulundisüsteemi $\mathcal{L}$ korral hulgal X.

4. Hulk $\mathcal{L}_c$ on täielik võre, kus ülemised rajad on leitavad reegliga

$$\bigvee\{A_i \mid i \in I\} = c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \tag{2.4}$$

ning mittetühjade alamhulkade alumised rajad on leitavad reegliga

$$\bigwedge\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

5. Sulundioperaator c hulgal X ahendub kõiki ülemisi rajasid säilitavaks kujutuseks

$$c\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{L}_c\,.$$

TÕESTUS. 1. Olgu c sulundioperaator hulgal X. Kuna $X \subseteq c(X) \subseteq X$, siis $c(X) = X$ ja $X \in \mathcal{L}_c$. Olgu $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{L}_c$ mittetühi alamhulk. Tähistame $A := \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq X$. Siis iga $j \in I$ korral $c(A) \subseteq c(A_j) = A_j$, millest järeldub, et $c(A) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i = A$. Sulundioperaatori defintsiooni tõttu $A \subseteq c(A)$ ning kokkuvõttes $A = c(A) \in \mathcal{L}_c$. Definitsiooni 2.9 põhjal on $\mathcal{L}_c$ sulundisüsteem. Tänu lausele 1.8 on $\mathcal{L}_c$ täielik võre.

2. Kontrollime sulundioperaatori definitsiooni tingimusi.

1) On selge, et $A \subseteq c_{\mathcal{L}}(A)$.

2) Kui $A, A' \subseteq X$ ja $A \subseteq A'$, siis $\{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\} \supseteq \{B \in \mathcal{L} \mid A' \subseteq B\}$, millest järeldub, et

$$c_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\} \subseteq \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid A' \subseteq B\} = c_{\mathcal{L}}(A').$$

3) Olgu $A \subseteq X$. Tingimustest 1) ja 2) järeldub, et $c_{\mathcal{L}}(A) \subseteq c_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}(A))$. Näitame, et ka $c_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}(A)) \subseteq c_{\mathcal{L}}(A)$. Tähistame

$$Y := \{B \in \mathcal{L} \mid c_{\mathcal{L}}(A) \subseteq B\},$$
$$Z := \{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\}.$$

Meil oleks vaja näidata, et

$$c_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}(A)) = \bigcap Y \subseteq \bigcap Z = c_{\mathcal{L}}(A).$$

Selleks piisab, kui näitame, et $Z \subseteq Y$. Olgu $B_0 \in Z$, s.t. $B_0 \in \mathcal{L}$ ja $A \subseteq B_0$. Siis $c_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap Z \subseteq B_0$, mis tähendab, et $B_0 \in Y$. Seega tõesti $Z \subseteq Y$, nii nagu vaja.

3. Olgu c sulundioperaator hulgal X ja olgu $A \subseteq X$. Kuna $c(A) \in \mathcal{L}_c$ ja $A \subseteq c(A)$, siis $c(A)$ on hulgas $Z := \{B \in \mathcal{L}_c \mid A \subseteq B\}$ ja seega

$$c_{\mathcal{L}_c}(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L}_c \mid A \subseteq B\} \subseteq c(A)\,.$$

Samas

$$c_{\mathcal{L}_c}(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L}_c \mid A \subseteq B\} \supseteq c(A)\,,$$

sest iga hulga Z elemendi B korral $A \subseteq B$, mistõttu

$$c(A) \subseteq c(B) = B\,.$$

Seega $c_{\mathcal{L}_c}(A) = c(A)$ iga $A \subseteq X$ korral ehk kujutustena $c_{\mathcal{L}_c} = c$.

Olgu $\mathcal{L}$ mingi sulundisüsteem hulgal X. Tõestame, et $\mathcal{L}_{c_{\mathcal{L}}} = \mathcal{L}$. Peame näitama, et

$$(\forall A \subseteq X)(A \in \mathcal{L} \iff c_{\mathcal{L}}(A) = A)\,.$$

Kui $A \in \mathcal{L}$, siis

$$c_{\mathcal{L}}(A) = \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\} \subseteq A \subseteq c_{\mathcal{L}}(A)\,,$$

millest $c_{\mathcal{L}}(A) = A$.

Kui A on selline, et $c_{\mathcal{L}}(A) = A$, siis $A = \bigcap\{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\}$, mis on sulundisüsteemi $\mathcal{L}$ elementide mittetühja hulga ühisosa, seega $A \in \mathcal{L}$.

4. Lause 1.8 põhjal on $\mathcal{L}_c$ täielik võre, kus alumised rajad on ühisosad. Kasutades samas lauses antud reeglit ülemiste rajade jaoks, saame

$$\begin{aligned}
\bigvee\{A_i \mid i \in I\} &= \bigcap\left\{B \in \mathcal{L}_c \mid \bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B\right\} \\
&= c_{\mathcal{L}_c}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) && \text{(võrdus (2.3))} \\
&= c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) && \text{(eelmises punktis tõestatud)}\,.
\end{aligned}$$

5. Vaatleme kujutust $c : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{L}_c, A \mapsto c(A)$. Kontrollime ülemiste rajade säilitamist. Võres $\mathcal{P}(X)$ on ülemisteks rajadeks ühendid ja võres $\mathcal{L}_c$ on ülemised rajad antud võrdusega (2.4). Peame näitama, et

$$\bigvee\{c(B_i) \mid i \in I\} = c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right)$$

suvaliste alamhulkade $A_i \subseteq X$ korral. Eelmine punkt rakendatud juhule $A_i = c(B_i)$ annab meile, et

$$\bigvee\{c(B_i) \mid i \in I\} = c\left(\bigcup\{c(B_i) \mid i \in I\}\right)\,.$$

Ilmselt kehtib

$$c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right) \subseteq c\left(\bigcup\{c(B_i) \mid i \in I\}\right).$$

Vastupidise sisalduvuse jaoks paneme tähele, et iga $i \in I$ korral $\bigcup\{B_i \mid i \in I\} \supseteq c(B_i)$. Seega

$$c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right) \supseteq c(B_i)$$

iga $i \in I$ korral, mistõttu peab kehtima ka

$$c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right) \supseteq \bigcup\{c(B_i) \mid i \in I\}.$$

Rakendades selle sisalduvuse mõlemale poole sulundioperaatorit c, saame arvutada

$$c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right) = c\left(c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right)\right) \supseteq c\left(\bigcup\{c(B_i) \mid i \in I\}\right),$$

seega

$$c\left(\bigcup\{B_i \mid i \in I\}\right) = c\left(\bigcup\{c(B_i) \mid i \in I\}\right) = \bigvee\{c(B_i) \mid i \in I\},$$

mida oligi tarvis näidata. □

Märkus 2.15 Nagu nägime eelmises teoreemis, c säilitab ülemisi rajasid. Osutub, et alumisi rajasid ta ei pruugi säilitada.

Olgu $X := \mathbb{R}$ ja vaatleme sellel hulgal sulundioperaatorit c, mis viib hulga A tema topoloogiliseks sulundiks, s.t. vähimaks kinniseks hulgaks, mis hulka A sisaldab. Siis

$$c\left(\bigcap_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R} \setminus \{x\}\right) = c(\emptyset) = \emptyset,$$

aga

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} c(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = \bigcap_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

2.4 Algebralised võred

Definitsioon 2.16 Sulundioperaatorit c hulgal X nimetatakse **algebraliseks**[9], kui iga $A \subseteq X$ korral

$$c(A) = \bigcup\{c(B) \mid B \subseteq A, B \text{ on lõplik}\}.$$

Näide 2.17 Olgu V vektorruum ja vaatame sulundiioperaatorit $\mathrm{span} : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V)$. Kui $A \subseteq V$, siis

$$\mathrm{span}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}, a_1,\ldots,a_n\in A} \mathrm{span}(\{a_1, \ldots, a_n\})$$

(hulga A lineaarne kate koosneb tema lõplikesse alamhulkadesse kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonidest). Seega span on algebraline sulundipoeraator.

Definitsioon 2.18 Täieliku võre L elementi a nimetatakse **kompaktseks**[10], kui sellest, et $a \leqslant \vee X$ mingi $X \subseteq L$ korral, järeldub, et leidub lõplik alamhulk $X_1 \subseteq X$ nii, et $a \leqslant \vee X_1$.

[9] algebraline sulundioperaator = algebraic closure operator
[10] kompaktne = *compact*

Definitsioon 2.19 Täielikku võret nimetatakse **algebraliseks**[11], kui iga tema element on kompaktsete elementide ülemine raja.

Teoreem 2.20 *Olgu c algebraline sulundioperaator hulgal X. Siis $\mathcal{L}_c$ on algebraline võre, mille kompaktsete elementide hulgaks on*

$$\{c(F) \mid F \subseteq X \text{ on lõplik alamhulk}\}.$$

TÕESTUS. Esmalt paneme tähele, et iga element A võres $\mathcal{L}_c$ on esitatav elementide $c(F)$, kus $F \subseteq X$ on lõplik, ülemise rajana. Kui $A \in \mathcal{L}_c$, siis $c(A) = A$. Seega saame arvutada

$$\begin{aligned} A &= c(A) \\ &= c(c(A)) && \text{(sulundioperaatori def. punkt 3.)} \\ &= c\left(\bigcup\{c(B) \mid B \subseteq A \text{ ja } B \text{ on lõplik}\}\right) && (c \text{ on algebraline}) \\ &= \bigvee\{c(B) \mid B \subseteq A \text{ ja } B \text{ on lõplik}\} && \text{(võrdus (2.4)).} \qquad (*) \end{aligned}$$

Seega on A tõepoolest ülemine raja elementidest $c(F)$, kus F on lõplik. Järgmisena näitame, et elemendid kujul $c(F)$ on parajasti võre $\mathcal{L}_c$ kompaktsed elemendid.

Esimesena näitame, et võre $\mathcal{L}_c$ iga kompaktne element on kujul $c(F)$ mingi lõpliku hulga $F \subseteq X$ jaoks. Selleks kasutame esitust $(*)$ juhul, kui $A \in \mathcal{L}_c$ on kompaktne. See esitab võre $\mathcal{L}_c$ elemendi A mingi hulga võre $\mathcal{L}_c$ elementide ülemise rajana. Elemendi $A \in \mathcal{L}_c$ kompaktsus tähendab, et peab leiduma lõplik arv lõplikke alamhulki $B_i \subseteq A$, $i = 1, \ldots, n$, mille korral

$$A \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} c(B_i)\,.$$

Tegelikult on see sisalduvus võrdus, kuna

$$A \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} c(B_i) \subseteq \bigvee\{c(B) \mid B \subseteq A \text{ ja } B \text{ on lõplik}\} = A\,.$$

Seega saame teoreemi 2.14 punkti 5. kasutades, et

$$A = \bigvee_{i=1}^{n} c(B_i) = c\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right),$$

mis annabki meile kompaktse elemendi A jaoks soovitud esituse, kuna $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ on lõplik hulk.

Teiseks kontrollime, et $c(F)$ on iga lõpliku hulga $F \subseteq X$ korral kompaktne element täielikus võres $\mathcal{L}_c$. Oletame, et $c(F) \subseteq \bigvee Y$ mingi $Y \subseteq \mathcal{L}_c$ korral. Siis iga $x \in F$ korral

$$\begin{aligned} x &\in F \\ &\subseteq c(F) && \text{(sulundioperaatori def. punkt 1.)} \\ &\subseteq \bigvee Y \\ &= c\left(\bigcup Y\right) && \text{(võrdus (2.4))} \\ &= \bigcup\left\{c(B) \mid B \subseteq \bigcup Y \text{ ja } B \text{ on lõplik}\right\} && (c \text{ on algebraline}), \end{aligned}$$

[11] algebraline võre = *algebraic lattice*

millest hulkade ühendi definitsooni abil saame, et x peab kuuluma mingi lõpliku $B \subseteq \bigcup Y$ korral hulka $c(B)$. Fikseerime iga $x \in F$ korral ühe lõpliku $B_x \subseteq \bigcup Y$, nii et $x \in c(B_x)$. Kuna B_x on lõplik, siis peab leiduma lõplik alamhulk $Y_x \subseteq Y$, nii et $B_x \subseteq \bigcup Y_x$. Seega saame

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{x\in F} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x\in F} c(B_x) && \text{(kuna } x \in c(B_x)\text{)} \\ &\subseteq \bigcup_{x\in F} c\Big(\bigcup Y_x\Big) && \text{(kuna } B_x \subseteq \textstyle\bigcup Y_x\text{)} \\ &= \bigcup_{x\in F} \bigvee_{A\in Y_x} A\,. && \text{(võrdus (2.4))} \end{aligned}$$

Rakendades selle sisalduvuse mõlemale poolele sulundioperaatorit c, saame

$$\begin{aligned} c(F) &\subseteq c\left(\bigcup_{x\in F} \bigvee_{A\in Y_x} A\right) && \text{(sulundioperaatori def. punkt 2.)} \\ &= \bigvee_{x\in F} \bigvee_{A\in Y_x} A && \text{(võrdus (2.4))} \\ &= \bigvee_{x\in F, A\in Y_x} A \\ &= \bigvee_{A\in\bigcup_{x\in F} Y_x} A\,. \end{aligned}$$

Kuna F on lõplik ja iga Y_x on lõplik, siis $\bigcup_{x\in F} Y_x$ on hulga Y lõplik alamhulk. Et $c(F) \subseteq \bigvee \big(\bigcup_{x\in F} Y_x\big)$, siis oleme näidanud, et $c(F)$ on kompaktne. □

Definitsioon 2.21 **Ülemine poolvõre**[12] on järjestatud hulk, mille igal kahe-elemendilisel alamhulgal leidub ülemine raja.

Definitsioon 2.22 Öeldakse, et ülemised poolvõred L ja M on **isomorfsed**[13], kui leiduvad järjestust säilitavad kujutused $f : L \longrightarrow M$ ja $g : M \longrightarrow L$ nii, et $gf = 1_L$ ja $fg = 1_M$.

Definitsioon 2.23 Olgu S ülemine poolvõre. Alamhulka $I \subseteq S$ nimetatakse poolvõre S **alampoolvõreks**[14], kui

$$(\forall a, b \in I)\ a \vee b \in I.$$

Definitsioon 2.24 Olgu S ülemine poolvõre. Mittetühja hulka $I \subseteq S$ nimetatakse poolvõre S **ideaaliks**[15], kui

$$(\forall a, b \in S)(a \vee b \in I \iff a, b \in I).$$

Lemma 2.25 *Hulk $I \subseteq S$ on ülemise poolvõre S ideaal parajasti siis, kui ta on allapoole kinnine alampoolvõre.*

---

[12] ülemine poolvõre = *upper semilattice*
[13] isomorfsed poolvõred = *isomorphic semilattices*
[14] alampoolvõre = *subsemilattice*
[15] ideaal = *ideal*

TÕESTUS. On lihtne kontrollida, et tingimus $a \vee b \in I \Rightarrow a, b \in I$ on samaväärne allapoole kinnisusega ning ilmselt on tingimus $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$ samaväärne väitega, et I on alampoolvõre. □

Järgmise teoreemi tõestust võib võrrelda teoreemi 1.41 tõestusega, kuna need on üldjoontes sarnased.

Teoreem 2.26 *Mittetühi võre L on algebraline parajasti siis, kui ta on isomorfne mingi nulliga ülemise poolvõre ideaalide võrega.*

TÕESTUS. PIISAVUS. Esmalt näitame, et iga nulliga ülemise poolvõre S ideaalide võre on algebraline. Null tähendab siin kontekstis vähimat elementi.

Et $I \subseteq S$ on ideaal parajasti siis, kui see on allapoole kinnine alampoolvõre, siis see tähendab, et ideaali mõiste on sama, mis võrede korral, kuna nullelemendi olemasolu ning alumiste rajade suhtes kinnisus ei mängi ideaalide allapoole kinnisuse tõttu mingit rolli. Seega saame analoogiliselt lausega 1.40 näidata, et nulliga poolvõre ideaalid moodustavad täieliku võre.

Näitame, et nulliga ülemise poolvõre S ideaalide võre on algebraline. Tähistame

$$\downarrow a = \{s \in S \mid s \leqslant a\}.$$

Ilmselt on tegu ülemise poolvõre S ideaaliga.

Iga ideaali $I \subseteq S$ ja elemendi $a \in I$ korral kehtib $\downarrow a \subseteq I$. Seega

$$\bigvee_{a \in I} \downarrow a \subseteq I.$$

See sisalduvus on ilmselt võrdus, kuna $b \in I$ korral

$$b \in \downarrow b \subseteq \bigvee_{a \in I} \downarrow a.$$

Seega iga ideaalide võre element I on ideaalide $\downarrow a$, $a \in I$ ülemine raja, mistõttu võre $\mathsf{Id}S$ algebralisuseks piisab ideaalide $\downarrow a$ kompaktsusest.

Näitame, et ideaalid $\downarrow a \subseteq S$ on kompaktsed. Olgu $J \subseteq \mathsf{Id}S$ selline ideaalide hulk, et

$$\downarrow a \subseteq \bigvee J$$

Paneme tähele, et $\bigvee J$ peab sisaldama kõik elemendid $x \leqslant a_1 \vee \ldots \vee a_n$, kus $a_i \in I_i$ mingite $I_i \in J$ korral. Samas on selge, et kõik sellised elemendid moodustavad ideaali poolvõres S. Seega

$$\bigvee J = \downarrow \{a_1 \vee \ldots \vee a_n \mid a_i \in I_i, I_i \in J\}$$

ning kuna $a \in \downarrow a \in \bigvee J$, peab olema

$$a \leqslant a_1 \vee \ldots \vee a_n$$

mingite $a_i \in I_i \in J$, $i = 1, \ldots, n$ korral. See tähendab aga, et

$$a \in \bigvee_{i=1}^{n} I_i,$$

nii et $\downarrow a \subseteq \bigvee_{i=1}^{n} I_i$, mis tähendab, et $\downarrow a$ on tõepoolest kompaktne. Oleme näidanud, et $\mathsf{Id}S$ on algebraline võre.

TARVILIKKUS. Näitame, et iga algebraline võre on isomorfne mingi nulliga ülemise poolvõre ideaalide võrega. Olgu antud mingi algebraline võre L ning olgu S selle võre kompaktsete elementide hulk. Näitame, et S on nulliga ülemine poolvõre, mis pärib oma järjestuse ja ülemised rajad võrelt L. Kuna võre L on täielik, leidub selles vähim element 0, mis on ilmselt kompaktne. See saab olema nullelement poolvõres S.

Näitame, et hulk S on võres L ülemise raja võtmise suhtes kinnine. Olgu $a, b \in S$, ehk teisisõnu, olgu a ja b kompaktsed. Näitame, et siis on ka $a \vee b$ kompaktne võres L.

Olgu $a \vee b \leq \bigvee X$ mingi $X \subseteq L$ korral. Siis ilmselt ka $a, b \leq \bigvee X$. Kuna a ja b on kompaktsed, siis leiduvad lõplikud alamhulgad $X_a, X_b \subseteq X$, nii et $a \leq \bigvee X_a$ ja $b \leq \bigvee X_b$. Seega kehtib ka

$$a \vee b \leq (\bigvee X_a) \vee (\bigvee X_b) = \bigvee (X_a \cup X_b)\,.$$

Kuna $X_a \cup X_b \subseteq X$ on lõplik, siis on $a \vee b$ tõepoolest kompaktne. Seega on S nulliga ülemine poolvõre.

Defineerime kujutuse

$$f\colon L \longrightarrow \mathsf{Id}S\,, \quad a \mapsto \{s \in S \mid s \leq a\}\,.$$

(Seda võib võrrelda kujutusega f teoreemi 1.41 tõestuses.) Ilmselt on f korrektselt defineeritud järjestust säilitav kujutus.

Defineerime järjestust säilitava kujutuse

$$g\colon \mathsf{Id}S \longrightarrow L\,, \quad I \mapsto \bigvee I$$

ning näitame, et f ja g on teineteise pöördkujutused.

Olgu $I \in \mathsf{Id}S$. Siis

$$f(g(I)) = \left\{s \in S \mid s \leq \bigvee I\right\}\,.$$

Ilmselt $I \subseteq f(g(I))$, kuna iga $a \in I$ korral $a \leq \bigvee I$. Teistpidise sisalduvuse näitamiseks eeldame, et $s \in S$ ning $s \leq \bigvee I$. Kuna s on hulga S definitsiooni järgi kompaktne, siis leidub lõplik hulk elemente $a_i \in I \subseteq S$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $s \leqslant a_1 \vee \ldots \vee a_n$. Kuna I on lõplike ülemiste rajade suhtes kinnine ning samuti allapoole kinnine, siis tähendab see, et $s \in I$. Seega $f(g(I)) \subseteq I$ ning oleme näidanud, et $fg = 1_{\mathsf{Id}S}$.

Näitame, et samuti kehtib $gf = 1_L$. Olgu $a \in L$. Siis

$$g(f(a)) = \bigvee \{s \in S \mid s \leq a\}\,.$$

Kuna a on hulga $\{s \in S \mid s \leqslant a\}$ ülemine tõke, siis ilmselt $a \geq \bigvee \{s \in S \mid s \leq a\}$. Samas, kuna L on algebraline, siis a on mingi hulga kompaktsete elementide $a_i \in S$, $i \in J$ ülemine raja. Kuna ilmselt $a_i \leq a$ iga $i \in J$ korral, siis

$$a = \bigvee_{i \in J} a_i \leq \bigvee \{s \in S \mid s \leq a\} \leq a\,.$$

Antisümmeetria tõttu saame võrduse $a = \bigvee \{s \in S \mid s \leq a\}$ ning seega $g(f(a)) = a$. Niisiis L ja $\mathsf{Id}S$ on tõepoolest isomorfsed täielikud võred. $\square$

2.5 Dedekindi-MacNeille'i täield

Selles paragrahvis näitame, kuidas saab järjestatud hulga sisestada täielikku võresse.

Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $A \subseteq P$. Tähistame

$$A^u = \{x \in P \mid (\forall a \in A)\ a \leqslant x\},$$
$$A^l = \{x \in P \mid (\forall a \in A)\ x \leqslant a\}.$$

Seega A^u on hulga A ülemiste tõkete hulk ja A^l on hulga A alumiste tõkete hulk.

Lemma 2.27 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $A \subseteq P$. Siis*

$$A^{ul} = \{x \in P \mid (\forall b \in P)(A \subseteq {\downarrow} b \Longrightarrow x \leqslant b)\}.$$

TÕESTUS. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}\{x \in P \mid (\forall b \in P)(A \subseteq {\downarrow} b \Longrightarrow x \leqslant b)\} &= \{x \in P \mid (\forall b \in P)(b \in A^u \Longrightarrow x \leqslant b)\} \\ &= \{x \in P \mid x \in A^{ul}\} \\ &= A^{ul}.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.28 *Kui A ja B on järjestatud hulga $(P, \leqslant)$ alamhulgad, siis*

1. *$A \subseteq A^{ul}$ ja $A \subseteq A^{lu}$;*
2. *kui $A \subseteq B$, siis $B^u \subseteq A^u$ ja $B^l \subseteq A^l$;*
3. *$A^{ulu} = A^u$ ja $A^{lul} = A^l$.*
4. *A^u on ülespoole kinnine ja A^l on allapoole kinnine.*

TÕESTUS. 1. Olgu $a \in A$. Siis iga $b \in P$ korral

$$A \subseteq {\downarrow} b \Longrightarrow a \leqslant b.$$

Lemma 2.27 põhjal $a \in A^{ul}$. Seega $A \subseteq A^{ul}$. Analoogiliselt saab tõestada, et $A \subseteq A^{lu}$.

2. Olgu $A \subseteq B$ ja $x \in B^u$. Siis iga $b \in B$ korral $b \leqslant x$. Muuhulgas ka iga $a \in A$ korral $a \leqslant x$. Seega $x \in A^u$ ning oleme tõestanud, et $B^u \subseteq A^u$. Analoogiliselt saab tõestada, et $B^l \subseteq A^l$.

3. Väidetest 1 ja 2 järeldub, et $A^{lul} \subseteq A^l$. Veendume, et ka $A^l \subseteq A^{lul}$. Selleks rakendame lemmat 2.27 hulgale $A^l \subseteq P$. Võtame $x \in A^l$. Olgu $b \in P$ selline, et $A^l \subseteq {\downarrow} b$. Kuna $x \in A^l$, siis $x \in {\downarrow} b$ ja $x \leqslant b$. Seega

$$(\forall b \in P)(A^l \subseteq {\downarrow} b \Longrightarrow x \leqslant b),$$

mistõttu $x \in (A^l)^{ul} = A^{lul}$.

4. See on ilmne. □

Teoreem 2.29 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk. Siis hulk*

$$\mathsf{DM}(P) := \{A \subseteq P \mid A^{ul} = A\}$$

on sisalduvusseose suhtes täielik võre.

TÕESTUS. Lemmast 2.28 järeldub, et kujutus $c : \mathcal{P}(P) \longrightarrow \mathcal{P}(P)$, mis on defineeritud võrdusega

$$c(A) := A^{ul},$$

on sulundioperaator hulgal P. Hulk $\mathsf{DM}(P)$ on selle sulundioperaatori suhtes kinniste alamhulkade hulk. Teoreemi 2.14 põhjal on $\mathsf{DM}(P)$ täielik võre, kus ülemisi ja alumisi rajasid arvutatakse järgmiselt:

$$\bigwedge\{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i,$$
$$\bigvee\{A_i \mid i \in I\} = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{ul}.$$

□

Anname veel ühe kirjelduse kinnistele hulkadele A^{ul}.

Lemma 2.30 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $A, B \subseteq P$. Siis*

1. $B^l = \bigcap_{x\in B} \downarrow x$;
2. $A^{ul} = \bigcap_{x\in A^u} \downarrow x$.

TÕESTUS. 1. Tõepoolest, kui $y \in P$, siis

$$y \in B^l \iff (\forall b \in B)\ y \leqslant b \iff (\forall b \in B)\ y \in \downarrow b \iff y \in \bigcap_{x\in B} \downarrow x.$$

2. Võtame $B = A^u$ ja kasutame väidet 1. □

Lemma 2.31 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk.*

1. *Kui $A \subseteq P$ ja $\bigvee A$ leidub hulgas P, siis $A^{ul} = \downarrow(\bigvee A)$.*
2. *Iga $x \in P$ korral $\downarrow x \in \mathsf{DM}(P)$.*

TÕESTUS. 1. Olgu $x \in A^{ul}$. Kuna $A \subseteq \downarrow(\bigvee A)$, siis lemma 2.27 tõttu $x \leqslant \bigvee A$ ehk $x \in \downarrow(\bigvee A)$. Sellega on näidatud, et $A^{ul} \subseteq \downarrow(\bigvee A)$.

Oletame nüüd, et $x \in \downarrow(\bigvee A)$, s.t. $x \leqslant \bigvee A$. Kui $b \in P$ ja $A \subseteq \downarrow b$, siis b on hulga A ülemine tõke. Järelikult $x \leqslant \bigvee A \leqslant b$, kust $x \leqslant b$. Seega $x \in A^{ul}$ ja $\downarrow(\bigvee A) \subseteq A^{ul}$.

2. On selge, et x on hulga $\downarrow x$ ülemine raja. Seega lemma esimese väite põhjal $(\downarrow x)^{ul} = \downarrow x$ ja $\downarrow x \in \mathsf{DM}(P)$. □

Põhiteoreemi sõnastamiseks on meil veel vaja mõningaid definitsioone.

Definitsioon 2.32 Olgu L ja M täielikud võred. Kujutust $f : L \longrightarrow M$ nimetatakse **täielike võrede homomorfismiks**[16], kui f säilitab kõiki ülemisi ja alumisi rajasid.

Definitsioon 2.33 Täielikke võresid L ja M nimetatakse **isomorfseteks**, kui leiduvad täielike võrede homomorfismid $f : L \longrightarrow M$ ja $g : M \longrightarrow L$ nii, et $gf = 1_L$ ja $fg = 1_M$.

[16] täielike võrede homomorfism = *homomorphism of complete lattices*

Lihtne on veenduda, et kehtib järgmine tulemus.

Lemma 2.34 *Olgu L ja M täielikud võred. Siis L ja M on isomorfsed täielike võredena parajasti siis, kui nad on isomorfsed järjestatud hulkadena.*

Definitsioon 2.35 Kujutust $f : A \longrightarrow B$ järjestatud hulkade A ja B vahel nimetatakse **sisestuseks**[17], kui

$$(\forall a, a' \in A)(a \leqslant a' \iff f(a) \leqslant f(a')).$$

Lihtne on näha, et kui $f : A \longrightarrow B$ on sisestus, siis järjestatud hulgad A ja $f(A)$ on isomorfsed, s.t. B sisaldab järjestatud hulgaga A isomorfse alamhulga.

Definitsioon 2.36 Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk. Täielikku võret L nimetatakse P **täieldiks**[18], kui leidub sisestus $f : P \longrightarrow L$.

Definitsioon 2.37 Öeldakse, et järjestatud hulga $(P, \leqslant)$ alamhulk A on **sup-tihe**[19] **(inf-tihe**[20]**)**, kui hulga P iga element on mingite hulka A kuuluvate elementide ülemine raja (alumine raja).

Näide 2.38 Vaatleme vektorruumi V alamruumide võret $(\mathsf{Sub}(V), \subseteq)$. Selles võres on hulk

$$A = \{\text{span}(a) \mid a \in V\}$$

sup-tihe, sest V iga alamruum on esitatav ühemõõtmeliste alamruumide ülemise rajana (summana).

Nüüd saame sõnastada selle paragrahvi põhiteoreemi.

Teoreem 2.39 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk ja vaatleme kujutust*

$$f : P \longrightarrow \mathsf{DM}(P), \quad x \mapsto \downarrow x.$$

Siis

1. *võre $\mathsf{DM}(P)$ koos kujutusega f on hulga P täield;*
2. *kujutus f säilitab kõiki hulgas P leiduvaid alumisi ja ülemisi rajasid;*
3. *hulk $f(P)$ on sup-tihe ja inf-tihe võres $\mathsf{DM}(P)$;*
4. *kui P on täielik võre, siis $P \cong \mathsf{DM}(P)$.*

TÕESTUS. 1. Teoreemi 2.29 tõttu on $\mathsf{DM}(P)$ täielik võre. On lihtne veenduda, et kujutus f on sisestus.

2. Näitame, et f säilitab hulgas P leiduvaid ülemisi rajasid. Olgu $A \subseteq P$ ja oletame, et järjestatud hulgas P leidub $\bigvee A$. Vaja on näidata, et $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$, s.t. et

$$\downarrow(\bigvee A) = \bigvee\{\downarrow a \mid a \in A\} \tag{2.5}$$

[17]sisestus=*order-embedding*
[18]täield=*completion*
[19]sup-tihe = *join-dense*
[20]inf-tihe = *meet-dense*

võres $\mathsf{DM}(P)$. Selleks kasutame ülemise raja definitsiooni.

1) Kuna $\downarrow a \subseteq \downarrow(\bigvee A)$ iga $a \in A$ korral, siis $\downarrow(\bigvee A)$ on hulga $\{\downarrow a \mid a \in A\}$ ülemine tõke.

2) Oletame, et $B \in \mathsf{DM}(P)$ on ka hulga $\{\downarrow a \mid a \in A\}$ ülemine tõke. Kuna $a \in \downarrow a \subseteq B$ iga $a \in A$ korral, siis $A \subseteq B$. Seega lemma 2.31 ja lemma 2.28(2) tõttu

$$\downarrow(\bigvee A) = A^{ul} \subseteq B^{ul} = B,$$

s.t. $\downarrow(\bigvee A) \subseteq B$. Sellega on näidatud, et kehtib võrdus (2.5).

Kontrollime nüüd alumiste rajade säilitamist. Oletame, et järjestatud hulgas P leidub $\bigwedge A$, kus $A \subseteq P$. Vaja on näidata, et

$$\downarrow(\bigwedge A) = \bigwedge\{\downarrow a \mid a \in A\}.$$

Teoreemist 2.29 teame, et võres $\mathsf{DM}(P)$ arvutatakse alumisi rajasid reegliga

$$\bigwedge\{\downarrow a \mid a \in A\} = \bigcap_{a \in A} \downarrow a,$$

seega tuleb kontrollida hulkade võrdust

$$\downarrow(\bigwedge A) = \bigcap_{a \in A} \downarrow a.$$

Olgu $x \in \downarrow(\bigwedge A)$, s.t. $x \leqslant \bigwedge A$. Siis iga $a \in A$ korral $x \leqslant \bigwedge A \leqslant a$, seega $x \in \downarrow a$. Järelikult $x \in \bigcap_{a \in A} \downarrow a$ ja $\downarrow(\bigwedge A) \subseteq \bigcap_{a \in A} \downarrow a$.

Vastupidise sisalduvuse näitamiseks oletame, et $x \in \bigcap_{a \in A} \downarrow a$. Siis iga $a \in A$ korral $x \leqslant a$. Kuna x on hulga A alumine tõke, siis $x \leqslant \bigwedge A$ ja seega $x \in \downarrow(\bigwedge A)$. Sellega on tõestatud ka sisalduvus $\bigcap_{a \in A} \downarrow a \subseteq \downarrow(\bigwedge A)$.

3. Näitame, et hulk $f(P)$ on sup-tihe võres $\mathsf{DM}(P)$. Olgu $A \in \mathsf{DM}(P)$, s.t. $A \subseteq P$ ja $A^{ul} = A$. Näitame, et

$$A = \bigvee_{a \in A} \downarrow a = \bigvee_{a \in A} f(a) \quad \text{ehk} \quad A = \left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\right)^{ul}.$$

(vt. teoreemi 2.29). Iga $b \in A$ korral $b \in \bigcup_{a \in A} \downarrow a \subseteq \left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\right)^{ul}$, seega $A \subseteq \left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\right)^{ul}$.

Näitame ka vastupidist sisalduvust. Oletame, et $x \in \left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\right)^{ul}$. Siis

$$(\forall b \in P)\left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a \subseteq \downarrow b \implies x \leqslant b\right).$$

Paneme tähele, et

$$\bigcup_{a \in A} \downarrow a \subseteq \downarrow b \iff (\forall a \in A)\ \downarrow a \subseteq \downarrow b \iff (\forall a \in A)\ a \leqslant b \iff A \subseteq \downarrow b.$$

Järelikult

$$(\forall b \in P)(A \subseteq \downarrow b \implies x \leqslant b),$$

mis tähendab, et $x \in A^{ul} = A$. Sellega on tõestatud, et $\left(\bigcup_{a \in A} \downarrow a\right)^{ul} \subseteq A$.

Veendume veel, et $f(P)$ on inf-tihe võres $\mathsf{DM}(P)$. Tõepoolest, mistahes $A \in \mathsf{DM}(P)$ korral

$$A = A^{ul} = \bigcap_{x \in A^u} \downarrow x = \bigwedge_{x \in A^u} \downarrow x = \bigwedge_{x \in A^u} f(x)$$

tänu lemmale 2.30.

4. Olgu P täielik võre. Isomorfismi näitamiseks tuleb tõestada, et kujutus f on sürjektiivne. Tõepoolest, kui $A \in \mathsf{DM}(P)$, siis tänu lemmale 2.31 kehtib

$$A = A^{ul} = \downarrow(\bigvee A) = f(\bigvee A).$$

□

Definitsioon 2.40 Teoreemis 2.39 konstrueeritud täieldit $\mathsf{DM}(P)$ kutsutakse järjestatud hulga $(P, \leqslant)$ **Dedekindi-MacNeille'i täieldiks**[21].

Osutub, et $\mathsf{DM}(P)$ on järjestatud hulga P täieldite hulgas vähim selles mõttes, et P iga täield sisaldab võrega $\mathsf{DM}(P)$ isomorfse alamvõre.

Teoreem 2.41 *Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk, vaatleme kujutust $f : P \longrightarrow \mathsf{DM}(P), x \mapsto \downarrow x$ ning olgu L koos sisestusega $g : P \longrightarrow L$ järjestatud hulga P täield. Siis leidub sisestus $h : \mathsf{DM}(P) \longrightarrow L$ nii, et $hf = g$.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathsf{DM}(P) \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & L
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Defineerime kujutuse $h : \mathsf{DM}(P) \longrightarrow L$ võrdusega

$$h(A) := \bigvee g(A)^{ul}$$

(see ülemine raja leidub tänu L täielikkusele). Kuna

$$A \subseteq B \Longrightarrow g(A) \subseteq g(B) \Longrightarrow g(A)^{ul} \subseteq g(B)^{ul} \Longrightarrow \bigvee g(A)^{ul} \leqslant \bigvee g(B)^{ul},$$

siis h säilitab järjestust. Näitame, et h ka peegeldab järjestust. Selleks oletame, et $A, B \in \mathsf{DM}(P)$ ja $h(A) \leqslant h(B)$ võres L. Oletame vastuväiteliselt, et $A \nsubseteq B$. Siis leidub $a \in A \setminus B$. Muuhulgas leidub $y \in B^u$ nii, et $a \nleqslant y$. (Kui see nii ei oleks, siis tänu lemmale 2.30 $a \in \bigcap_{x \in B^u} \downarrow x = B^{ul} = B$, mis annaks vastuolu.) Kuna y on B ülemine tõke ja g säilitab järjestust, siis $g(y)$ on $g(B)$ ülemine tõke ehk $g(u) \in g(B)^u$. Järelikult

$$g(a) \leqslant \bigvee g(A)^{ul} = h(A) \leqslant h(B) = \bigvee g(B)^{ul} = \bigvee \left(\bigcap_{x \in g(B)^u} \downarrow x \right) \leqslant \bigvee \downarrow g(y) = g(y).$$

Kuna g on sisestus, siis $a \leqslant y$, mis on vastuolu. Seega $A \subseteq B$ ja h peegeldab järjestust.

Et iga $a \in P$ korral

$$h(f(a)) = h(\downarrow a) = \bigvee g(\downarrow a)^{ul} = \bigvee (\downarrow g(a))^{ul} = \bigvee (\downarrow g(a)) = g(a),$$

[21] Dedekindi-MacNeille'i täield = *Dedekind-MacNeille completion*

siis $hf = g$. □

Dedekind-MacNeille täieldi ühe erijuhuna saab ratsionaalarvude abil konstrueerida reaalarvud. Täpsemalt öeldes $\mathsf{DM}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Teatavasti on reaalarve võimalik saada mitmel erineval moel. Dedekindi meetod seisneb niinimetatud Dedekindi lõigete kasutamises. Näitame, et tegelikult saab neid lõikeid kasutada ka üldisemal juhul kui ratsionaalarvude lineaarselt järjestatd hulk.

Definitsioon 2.42 Olgu $(P, \leqslant)$ järjestatud hulk ja $A, B \subseteq P$. Järjestatud paari (A, B) nimetatakse **Dedekindi lõikeks**[22], kui
$$A^u = B \text{ ja } B^l = A.$$

Olgu $\mathsf{D}(P)$ kõigi Dedekindi lõigete hulk järjestatud hulgas P. Vaatleme sellel hulgal seost
$$(A, B) \leqslant (A', B') \Longleftrightarrow A \subseteq A'.$$

Lihtne on veenduda, et see on järjestusseos hulgal $\mathsf{D}(P)$. Saab näidata, et $\mathsf{D}(P)$ on täielik võre, kus
$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge_{i\in I}(A_i, B_i) &= \left(\bigcap_{i\in I} A_i, \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^u\right), \\ \textstyle\bigvee_{i\in I}(A_i, B_i) &= \left(\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^l, \bigcap_{i\in I} B_i\right). \end{aligned}$$

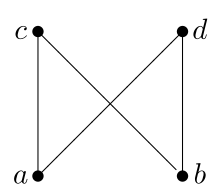
Lause 2.43 *Kui $(P, \leqslant)$ on järjestatud hulk, siis täielikud võred $\mathsf{DM}(P)$ ja $\mathsf{D}(P)$ on isomorfsed.*

TÕESTUS. Kui $A \in \mathsf{DM}(P)$, siis $A^{ul} = A$ ja seega $(A, A^u) \in \mathsf{D}(P)$. Kui $(A, B) \in \mathsf{D}(P)$, siis $A^{ul} = B^l = A$, seega $A \in \mathsf{DM}(P)$. Defineerime kujutused $f : \mathsf{DM}(P) \longrightarrow \mathsf{D}(P)$ ja $g : \mathsf{D}(P) \longrightarrow \mathsf{DM}(P)$ järgmiselt:
$$\begin{aligned} f(A) &:= (A, A^u), \\ g(A, B) &:= A. \end{aligned}$$

On selge, et f ja g säilitavad järjestust ning et $gf = 1_{\mathsf{DM}(P)}$ ja $fg = 1_{\mathsf{D}(P)}$. Järelikult $\mathsf{DM}(P) \cong \mathsf{D}(P)$. □

Ülesanne 2.44 Leida 3-elemendilise diskreetselt järjestatud hulga Dedekindi-MacNeille'i täield.

Ülesanne 2.45 Leida järgmise diagrammi abil defineeritud järjestatud hulga $P = \{a, b, c, d\}$ Dedekindi-MacNeille'i täield:



.

[22] Dedekindi lõige=*Dedekind cut*

Peatükk 3

Modulaarsed võred

Selles peatükis uurime modulaarsete võrede klassi.

Lause 3.1 *Mistahes võre L ja elementide $a, b, c \in L$ korral*

1.
$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

2.
$$a \leqslant c \Longrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c.$$

TÕESTUS. 1. Tähistame $u := (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Kuna $a \leqslant u$ ja $b \wedge c \leqslant u$, siis u on elementide a ja $b \wedge c$ ülemine tõke. Järelikult

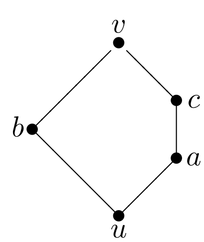
$$a \vee (b \wedge c) \leqslant u = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

2. See järeldub esimesest väitest, sest $a \vee c = c$, kui $a \leqslant c$. □

Definitsioon 3.2 Võret L nimetatakse **modulaarseks**[1], kui mistahes $a, b, c \in L$ korral

$$a \leq c \Longrightarrow (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

Näide 3.3 1. Vektorruumi V kõigi alamruumide võre $(\mathcal{V}, +, \cap)$ on modulaarne.
2. Viie-elemendiline võre



ei ole modulaarne. Tõepoolest, selles võres $a \leq c$, $(a \vee b) \wedge c = v \wedge c = c$ ja $a \vee (b \wedge c) = a \vee u = a$, seega $(a \vee b) \wedge c \neq a \vee (b \wedge c)$. Seda võret tähistatakse sümboliga N_5 ja mõnikord kutsutakse **pentagoniks**[2]. See võre mängib tähtsat rolli modulaarsete võrede kirjelduses, mille anname järgmises teoreemis.

[1] modulaarne võre = *modular lattice*
[2] pentagon = *pentagon*

Teoreem 3.4 *Võre L jaoks on järgmised väited samaväärsed.*

1. *L on modulaarne.*

2. *Mistahes $a, b, c \in L$ korral*

$$((a \wedge b) \vee c) \wedge a = (a \wedge b) \vee (c \wedge a).$$

3. *Mistahes $a, b, c \in L$ korral, kui $a \geq b$, $a \vee c = b \vee c$ ja $a \wedge c = b \wedge c$, siis $a = b$.*

4. *L ei sisalda võrega N_5 isomorfset alamvõret.*

TÕESTUS. 1. $\Rightarrow$ 2. Olgu $a, b, c \in L$. Siis $a \wedge b \leq a$ ja modulaarsuse tõttu $((a \wedge b) \vee c) \wedge a = (a \wedge b) \vee (c \wedge a)$.

2. $\Rightarrow$ 1. Olgu $a, b, c \in L$ ja $a \leq c$. Siis $a = a \wedge c$ ja

$$(a \vee b) \wedge c = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).$$

1. $\Rightarrow$ 3. Olgu $a, b, c \in L$, $a \geq b$, $a \vee c = b \vee c$ ja $a \wedge c = b \wedge c$. Siis kasutades eeldusi ja neelduvust saame, et

$$a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (b \vee c) \wedge a = b \vee (c \wedge a) = b \vee (b \wedge c) = b.$$

3. $\Rightarrow$ 1. Olgu $a, b, c \in L$ ja $a \leq c$. Siis a on alumine tõke elementidele $a \vee b$ ja c ning seega $a \leqslant (a \vee b) \wedge c$. Järelikult

$$a \vee b \leqslant ((a \vee b) \wedge c) \vee b \leqslant ((a \vee b) \wedge c) \vee (a \vee b) = a \vee b,$$

ning samuti

$$\begin{aligned} b \wedge c &= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \wedge c) \leq (a \vee (b \wedge c)) \wedge b \leq (c \vee (b \wedge c)) \wedge b = ((b \wedge c) \vee c) \wedge b \\ &= c \wedge b = b \wedge c. \end{aligned}$$

Tänu järjestusseose antisümmeetriale saame võrdused

$$\begin{aligned} ((a \vee b) \wedge c) \vee b &= a \vee b, \\ (a \vee (b \wedge c)) \wedge b &= b \wedge c. \end{aligned}$$

Lisaks sellele

$$\begin{aligned} (a \vee (b \wedge c)) \vee b &= a \vee ((b \wedge c) \vee b) = a \vee b, \\ ((a \vee b) \wedge c) \wedge b &= (a \vee b) \wedge (c \wedge b) = ((a \vee b) \wedge b) \wedge c = b \wedge c. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} ((a \vee b) \wedge c) \vee b &= (a \vee (b \wedge c)) \vee b, \\ (a \vee (b \wedge c)) \wedge b &= ((a \vee b) \wedge c) \wedge b. \end{aligned}$$

Tänu lausele 3.1(2) kehtib võrratus

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c.$$

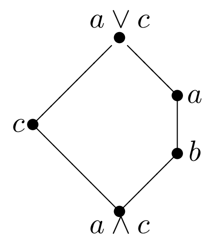
Kasutades nüüd tingimust 3 saame järeldada, et $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$.

1. $\Rightarrow$ 4. Kui võre L sisaldaks võrega N_5 isomorfset alamvõret, siis ta ei saaks olla modulaarne.

4. $\Rightarrow$ 3. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad elemendid $a, b, c \in L$ nii, et

$$a \geqslant b, \ a \vee c = b \vee c \ \text{ ja } \ a \wedge c = b \wedge c,$$

kuid $a \neq b$. Sellisel juhul $a > b$. Vaatleme elemente $a, b, c, a \vee c, a \wedge c \in L$. Kui nad oleksid paarikaupa erinevad, siis L sisaldaks võrega N_5 isomorfset alamvõret



,

mis annaks meile vajaliku vastuolu. Tõestuse lõpetamiseks näitame, et tõesti need viis elementi on paarikaupa erinevad.

1) Eelduse põhjal $a \neq b$.

2) Oletame, et $a = c$. Siis $c = c \wedge c = a \wedge c = b \wedge c$, kust $c \leq b$ ehk $a \leq b$, mis on vastuolus võrratusega $a > b$.

3) Oletame, et $a = a \vee c$. Siis

$$c \leq a \quad \Rightarrow \quad c = a \wedge c = b \wedge c \quad \Rightarrow \quad c \leq b \quad \Rightarrow \quad b = b \vee c = a \vee c = a,$$

mis on vastuolus võrratusega $a > b$.

4) Oletame, et $a = a \wedge c$. Siis võrratustest $b < a$ ja $a \leq c$ järeldub, et $b \leq c$. Seega $b = b \wedge c = a \wedge c = a$, vastuolu võrratusega $a > b$.

5) Oletame, et $b = c$. Siis $a \vee c = c \vee c = c$, kust $a \leq c$ ehk $a \leqslant b$, vastuolu.

6) Oletame, et $b = a \vee c$. Siis $a \leqslant a \vee c = b$, vastuolu.

7) Oletame, et $b = a \wedge c$. Siis $b = a \wedge c = b \wedge c$, kust $b \leqslant c$. Järelikult

$$a \vee c = b \vee c = (a \wedge c) \vee c = c,$$

millest $a \leqslant c$. Siis aga $a = a \wedge c$, mis on vaadeldud juhus 4).

8) Oletame, et $c = a \wedge c$. Siis $c = a \wedge c = b \wedge c \leqslant b$, kust $b = b \vee c = a \vee c$. See olukord on vaadeldud juhtumis 6).

9) Oletame, et $c = a \vee c$. Siis $a \leqslant c$ ja $a = a \wedge c$. See on vaadeldud juhtumis 4).

10) Oletame, et $a \wedge c = a \vee c$. Siis ka $a = b$, mis pole võimalik.

$\square$

Meenutame, et kui L on võre ja $c, d \in L$, siis lõik

$$[c, d] = \{x \in L \mid c \leqslant x \leqslant d\}$$

on võre L alamvõre, seega on ta ise ka võre. Järgmine teoreem ütleb, et modulaarses võres on teatud lõigud isomorfsed.

Teoreem 3.5 (Modulaarsete võrede isomorfismiteoreem) *Kui L on modulaarne võre, siis mistahes $a, b \in L$ korral on kujutus*

$$f : [a \wedge b, a] \longrightarrow [b, a \vee b], \quad x \mapsto x \vee b$$

võrede isomorfism.

TÕESTUS. Kui $a \wedge b \leqslant x \leqslant a$, siis

$$b = (a \wedge b) \vee b \leqslant x \vee b \leqslant a \vee b,$$

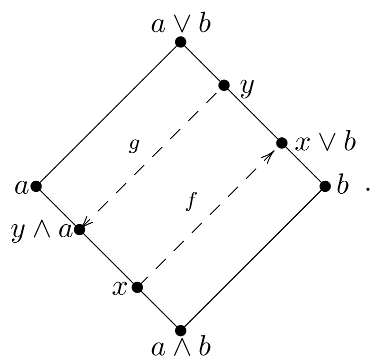
s.t. $x \vee b \in [b, a \vee b]$ ja võime vaadelda kujutust f. Kui $y \in [b, a \vee b]$, siis $b \leqslant y \leqslant a \vee b$ ja

$$a \wedge b \leqslant y \wedge a \leqslant a \wedge (a \vee b) = a,$$

seega saab defineerida ka kujutuse

$$g : [b, a \vee b] \longrightarrow [a \wedge b, a], \quad y \mapsto y \wedge a.$$

Kujutuste f ja g definitsioone illustreerib järgmine joonis:



Ilmselt nii f kui ka g säilitab järjestust. Kuna iga $x \in [a \wedge b, a]$ korral $a \wedge b \leqslant x \leqslant a$ ja modulaarsuse tõttu

$$g(f(x)) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (b \wedge a) = x,$$

siis $gf = 1_{[a \wedge b, a]}$. Samuti iga $y \in [b, a \vee b]$ korral $b \leqslant y \leqslant a \vee b$ ning seega

$$f(g(y)) = (y \wedge a) \vee b = b \vee (a \wedge y) = (b \vee a) \wedge y = y,$$

mis tähendab, et $fg = 1_{[b, a \vee b]}$. Järelikult f ja g on isomorfismid. □

Järeldus 3.6 *Olgu L modulaarne võre ja $a, b \in L$. Siis iga $x, x' \in [a \wedge b, a]$ korral*

$$(x \wedge x') \vee b = (x \vee b) \wedge (x' \vee b).$$

TÕESTUS. Kuna teoreemis 3.5 defineeritud kujutus f on võrede isomorfism, siis f säilitab alumisi rajasid. Seega

$$(x \wedge x') \vee b = f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x') = (x \vee b) \wedge (x' \vee b).$$

□

Meenutame, et võres L element b katab elementi a (sümbolites $a \prec b$), kui lõik $[a, b]$ koosneb täpselt kahest elemendist a ja b. Kirjutatakse

$$a \preceq b \iff a = b \text{ või } a \prec b.$$

Lause 3.7 *Modulaarses võres kehtib ülemine katmistingimus*[3]

$$(\forall a, b, c \in L)(a \preceq b \Longrightarrow a \vee c \preceq b \vee c)$$

ja sellega duaalne alumine katmistingimus[4].

TÕESTUS. Olgu $a \preceq b$. Kui $a = b$, siis ilmselt $a \vee c \preceq b \vee c$. Eeldame, et $a < b$. Siis $a \vee c \leqslant b \vee c$. On 2 võimalust.

1) $a \vee c = b \vee c$. Siis $a \vee c \preceq b \vee c$.

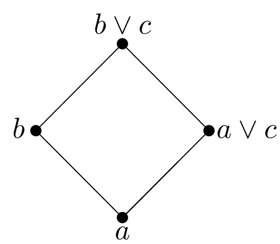
2) $a \vee c \neq b \vee c$. Näitame, et siis $b \nleqslant a \vee c$. Kui oletaksime, et $b \leqslant a \vee c$, siis $b \vee c \leqslant a \vee c \vee c = a \vee c \leqslant b \vee c$, kust $b \vee c = a \vee c$, vastuolu. Kuna $a < b$, siis $b \vee a = b$ ja seega

$$b \vee (a \vee c) = (b \vee a) \vee c = b \vee c.$$

Veendume, et

$$b \wedge (a \vee c) = a.$$

Tähistame $x := b \wedge (a \vee c)$. Kuna a on b ja $a \vee c$ alumine tõke, siis alumise raja definitsiooni tõttu $a \leqslant x$. Samas ka $x \leqslant b$. Katmise tõttu on kaks võimalust: $a = x$ või $x = b$. Kuna $b \nleqslant a \vee c$, siis ei ole võimalik, et $x = b$. Seega $a = x$ ehk $a = b \wedge (a \vee c)$.



Teoreemi 3.5 tõttu võime öelda, et kaheelemendiline lõik $[a, b]$ on isomorfne lõiguga $[a \vee c, b \vee c]$. Seega ka lõik $[a \vee c, b \vee c]$ on kaheelemendiline, mis tähendab, et $a \vee c \prec b \vee c$. □

Näide 3.8 Lõplikumõõtmelise vektorruumi V alamruumide võres $\mathsf{Sub}(V)$ tähendab katmine seda, et alamruumide mõõtmed erinevad 1 võrra. Seega lause 3.7 järelduseks on järgmine fakt:

Kui A ja B on vektorruumi V alamruumid, $A \subseteq B$ ja $\dim(B) = \dim(A) + 1$, *siis mistahes alamruumi C korral*

$$\dim(B + C) = \dim(A + C) + 1.$$

Definitsioon 3.9 Ahela $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ **pikkuseks**[5] nimetatakse arvu n.

Definitsioon 3.10 Lõpliku võre L **pikkuseks** $\operatorname{len}(L)$ nimetatakse tema maksimaalse ahela pikkust. Seega $\operatorname{len}(L) = n$, kui võres L leidub ahel pikkusega n ja kõigi teiste ahelate pikkused on $\leqslant n$.

Näide 3.11 1. Võre N_5 pikkus on 3.

2. Kui V on n-mõõtmeline vektorruum baasiga $e_1, \ldots, e_n$, siis alamruumide võre $\mathsf{Sub}(V)$ pikkus on n. Tõepoolest, selles võres leidub ahel

$$\{0\} \subset \operatorname{span}(e_1) \subset \operatorname{span}(e_1, e_2) \subset \ldots \subset \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n) = V$$

ja saab veenduda, et ühegi teise ahela pikkus ei saa olla suurem kui n.

[3]ülemine katmistingimus = *Upper Covering Condition*
[4]alumine katmistingimus = *Lower Covering Condition*
[5]pikkus = *length*

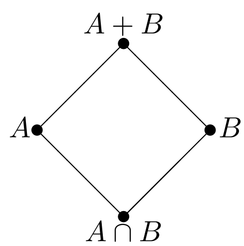
Nüüd saab teha ühe huvitava järelduse isomorfismiteoreemist.

Lause 3.12 *Kui V on lõplikumõõtmeline vektorruum ja A, B on selle alamruumid, siis*

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

TÕESTUS. Tänu isomorfismiteoreemile on meil lõikude isomorfism

$$[A \cap B, A] \cong [B, A+B].$$



Saab veenduda, et

$$\begin{aligned} \operatorname{len}([A \cap B, A]) &= \dim(A) - \dim(A \cap B), \\ \operatorname{len}([B, A+B]) &= \dim(A+B) - \dim(B). \end{aligned}$$

Kuna isomorfsete võrede pikkused on võrdsed, siis

$$\dim(A) - \dim(A \cap B) = \dim(A+B) - \dim(B)$$

ehk

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B).$$

□

Meie järgnev eesmärk on tõestada Kurosh-Ore teoreem modulaarse võre elementide esitamisest teatud elementide ülemise rajana. Selleks vaatleme sup-taandumatuid elemente võres ja võre elementide esitamist nende ülemiste rajadena. Sellel on sarnasusi sellega, kuidas naturaalarvu saab esitada algarvude astmete korrutisena võik kuidas vektorruumi saab esitada baasivektorite lineaarse kattena.

Definitsioon 3.13 Võre L elementi a nimetatakse **sup-taandumatuks**[6], kui

1. a ei ole võre L vähim element ja
2. $$(\forall b, c \in L)(a = b \vee c \Longrightarrow (a = b \text{ või } a = c)).$$

Kui leiduvad sellised $b, c \in L$, et $a \neq b$, $a \neq c$ ja $a = b \vee c$, siis öeldakse, et a on **sup-taanduv**[7].

Definitsioon 3.14 Võre L elementi a nimetatakse **inf-taandumatuks**[8], kui

1. a ei ole võre L suurim element ja

[6] sup-taandumatu = *join irreducible*
[7] sup-taanduv = *join reducible*
[8] inf-taandumatu = *meet irreducible*

2.
$$(\forall b, c \in L)(a = b \wedge c \Longrightarrow (a = b \text{ või } a = c)).$$

Kui leiduvad sellised $b, c \in L$, et $a \neq b$, $a \neq c$ ja $a = b \wedge c$, siis öeldakse, et a on **inf-taanduv**[9].

Märgime, et kui element $a \in L$ on sup-taanduv, s.t. kui

$$(\exists b, c \in L)(a = b \vee c \text{ ja } a \neq b \text{ ja } a \neq c),$$

siis $b \neq c$, sest vastasel korral oleks $a = b \vee b = b$. Samuti ei ole võimalik, et $b = 0$, sest kui $b = 0$, siis $a = 0 \vee c = c$. Samamoodi $c \neq 0$. Seega võre kõik aatomid (s.t. nulli katvad elemendid) on sup-taandumatud.

Näide 3.15 1. Vaatleme võret $(\mathbb{N}, |)$, kus $\vee =$ VÜK ja $\wedge =$ SÜT. Tingimus

$$(\forall b, c \in \mathbb{N})(a = \text{VÜK}(b, c) \Longrightarrow (a = b \text{ või } a = c)).$$

on rahuldatud iga algarvu astme p^k korral, seega algarvude astmed on selles võres sup-taandumatud.

2. Võres $\mathsf{Sub}(V)$, kus V on vektorruum, on sup-taandumatuteks elementideks 1-mõõtmelised alamruumid.

3. Ahelas (lineaarselt järjestatud hulgas) on iga 0-st erinev element sup-taandumatu ning iga 1-st erinev element inf-taandumatu.

Lemma 3.16 *Lõplikus võres saab iga nullist erineva elemendi esitada sup-taandumatute elementide ülemise rajana.*

TÕESTUS. Tõestame väite induktsiooniga võre L pikkuse järgi.
Alus. Kui $\text{len}(L) = 1$, siis L on kaheelemendiline ahel $\{0, 1\}$. Siis element 1 on sup-taandumatu ning ta on üheelemendilise hulga $\{1\}$ ülemine raja.
Samm. Eeldame, et $n > 1$ ja väide kehtib võrede korral, mille pikkus on $< n$. Olgu $\text{len}(L) = n$ ja $a \in L$. On kaks võimalust

1) a on sup-taandumatu. Siis ta on hulga $\{a\}$ ülemine raja.

2) a on sup-taanduv. Siis leiduvad elemendid $b, c \in L$ nii, et $a = b \vee c$, $b \neq a$ ja $c \neq a$. Siis võred $\downarrow b$ ja $\downarrow c$ on pikkusega $< n$ (vastasel korral leiduks võres L ahel, mille pikkus oleks suurem kui n). Rakendades induktsiooni eeldust võredele $\downarrow b$ ja $\downarrow c$ saame leida esitused

$$b = x_1 \vee \ldots \vee x_k \quad \text{ja} \quad c = y_1 \vee \ldots \vee y_l,$$

kus $x_1, \ldots, x_k$ on sup-taandumatud võres $\downarrow b$ ja $y_1, \ldots, y_l$ on sup-taandumatud võres $\downarrow c$. Need elemendid on siis sup-taandumatud ka võres L ja

$$a = b \vee c = x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee y_1 \vee \ldots \vee y_l.$$

□

[9]inf-taanduv = *meet reducible*

Definitsioon 3.17 Olgu a võre L element. Tema esitust kujul

$$a = x_1 \vee \ldots \vee x_n$$

nimetatakse **mitteminimaalseks**[10], kui leidub selline $i \in \{1, \ldots, n\}$, et

$$a = x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n.$$

Vastasel korral öeldakse, et see esitus on **minimaalne**[11].

Teoreem 3.18 *(Kurosh[12]– Ore[13]) Olgu L modulaarne võre ja $a \in L$. Kui $a = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ ja $a = y_1 \vee \ldots \vee y_m$ on elemendi a kaks minimaalset esitust sup-taandumatute elementide ülemise rajana, siis*

1. *iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral leidub $j \in \{1, \ldots, m\}$ nii, et*

$$a = x_1 \vee \ldots \vee x_{i-1} \vee y_j \vee x_{i+1} \vee \ldots \vee x_n,$$

2. *$n = m$.*

TÕESTUS. 1. Kuna ülemise raja võtmine on kommutatiivne, siis üldisust kitsendamata võime väite tõestada $i = 1$ jaoks. Olgu

$$\overline{x_1} := x_2 \vee \ldots \vee x_n.$$

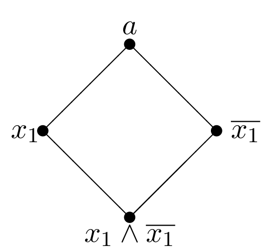
Kuna $\overline{x_1} \leqslant a$ ja $a = y_1 \vee \ldots \vee y_m$, siis

$$a = \overline{x_1} \vee a = \overline{x_1} \vee y_1 \vee \ldots \vee y_m = (\overline{x_1} \vee y_1) \vee (\overline{x_1} \vee y_2) \vee \ldots \vee (\overline{x_1} \vee y_m),$$

kus $\overline{x_1} \vee y_1, \ldots, \overline{x_1} \vee y_m \in [\overline{x_1}, a]$. Isomorfismiteoreemi (teoreem 3.5) põhjal

$$[\overline{x_1}, a] \cong [x_1 \wedge \overline{x_1}, x_1],$$

kusjuures see isomorfsim viib elemendi a elemendiks x_1.



Aga x_1 on sup-taandumatu võres L, seega ka lõigus $[x_1 \wedge \overline{x_1}, x_1]$. Isomorfismi tõttu on a sup-taandumatu lõigus $[\overline{x_1}, a]$. See tähendab, et esituses

$$a = (\overline{x_1} \vee y_1) \vee (\overline{x_1} \vee y_2) \vee \ldots \vee (\overline{x_1} \vee y_m)$$

ei saa kõik elemendid $\overline{x_1} \vee y_j$ elemendist a erineda. Järelikult leidub selline j, et $\overline{x_1} \vee y_j = a$, millega on esimene väide tõestatud.

[10]mitteminimaalne esitus = *redundant representation*
[11]minimaalne esitus = *irredundant representation*
[12]Aleksandr Kurosh (1908–1971), vene matemaatik
[13]Øystein Ore (1899–1968), norra matemaatik

2. Olgu nüüd $a = z_1 \vee \ldots \vee z_k$ elemendi a esitus sup-taandumatute elementide ülemise rajana, kusjuures k on vähim selline naturaalarv. Siis $k \leqslant n$ ja $k \leqslant m$. Rakendame esimest väidet lahutusele $a = z_1 \vee \ldots \vee z_k$, elemendile z_1 ja lahutusele $a = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Siis leidub $j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $a = x_{j_1} \vee z_2 \vee \ldots \vee z_k$. See lahutus on minimaalne, sest vastasel korral k ei oleks vähim. Korrates seda argumenti jõuame olukorrani $a = x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_k}$. Kuna aga $a = x_1 \vee \ldots \vee x_n$ on minimaalne esitus, siis ei ole võimalik, et $k < n$. Järelikult $k = n$. Analoogiliselt saame võrduse $k = m$ ning seega $m = n$. $\square$

Järeldus 3.19 *Lõplikumõõtmelise vektorruumi mistahes kahes baasis on sama palju vektoreid.*

TÕESTUS. Olgu V lõplikumõõtmeline vektorruum ning $x_1, \ldots, x_n$ ja $y_1, \ldots, y_m$ selle kaks baasi. Siis ühemõõtmelised alamruumid $\mathrm{span}(x_1), \ldots, \mathrm{span}(x_n), \mathrm{span}(y_1), \ldots, \mathrm{span}(y_m)$ on sup-taandumatud elemendid alamruumide võres $\mathsf{Sub}(V)$. Selle võre element V (V on iseenda alamruum) on esitatav kujul

$$V = \mathrm{span}(x_1 + \ldots + x_n) = \mathrm{span}(x_1) + \ldots + \mathrm{span}(x_n) = \mathrm{span}(x_1) \vee \ldots \vee \mathrm{span}(x_n)$$

ning samuti kujul

$$V = \mathrm{span}(y_1) \vee \ldots \vee \mathrm{span}(y_m).$$

Need esitused on minimaalsed, sest kui näiteks

$$\mathrm{span}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{span}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

siis vektor x_i avalduks süsteemi $x_1, \ldots, x_n$ ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, mis tähendaks, et süsteem $x_1, \ldots, x_n$ on lineaarselt sõltuv ja ei ole baas. Kasutades teoreemi 3.18 saame järeldada, et $n = m$. $\square$

Peatükk 4

Distributiivsed võred

4.1 Distributiivsete võrede kirjeldus

Distributiivsed võred moodustavad ühe olulisema ja paremini uuritud võrede klassi. See klass sisaldub kõigi modulaarsete võrede klassis.

Definitsioon 4.1 Võret L nimetatakse **distributiivseks**[1], kui mistahes $a, b, c \in L$ korral

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Lemma 4.2 *Iga distributiivne võre on modulaarne.*

TÕESTUS. Olgu L distributiivne võre ja $a \leq c$, $a, b, c \in L$. Siis

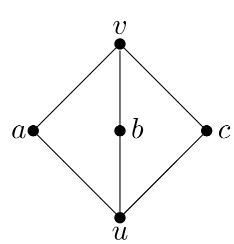
$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).$$

□

Näide 4.3 1. Hulga M alamhulkade võre $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup)$ on distributiivne.

2. Iga ahel on distributiivne võre.

3. Võre



ei ole distributiivne, sest

$$(a \vee b) \wedge c = v \wedge c = c \neq u = u \vee u = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Seda võret tähistatakse lühidalt sümboliga M_3 ja mõnikord nimetatkase **teemandiks**[2].

[1] distributiivne võre = *distributive lattice*

[2] teemant = *diamond*

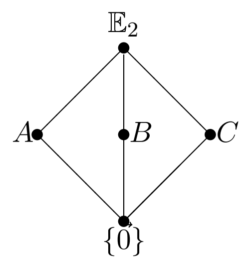
4. Vektorruumi V alamruumide võre $(\mathcal{A}(V), \cap, +)$ ei ole üldjuhul distributiivne. Vaatleme näiteks tasandi vabavektorite vektorruumis $\mathbb{E}_2$ kolme mittekollineaarset vektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ja nende poolt tekitatud alamruume A, B, C. Siis

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{\vec{0}\}$$

ja

$$A + B = A + C = B + C = \mathbb{E}_2.$$

Seega $\mathbb{E}_2$ alamruumide võre sisaldab võrega M_3 isomorfset alamvõret



ja ei saa olla distributiivne.

Ülesanne 4.4 Näidata, et võre $(\mathbb{N}, |)$ on distributiivne.

Lemma 4.5 *Mistahes võre L suvaliste elementide a, b, c korral*

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

TÕESTUS. Tähistame

$$u := (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a),$$
$$v := (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

Kuna

$$a \wedge b \leqslant a \vee b, \quad a \wedge b \leqslant b \leqslant b \vee c, \quad a \wedge b \leqslant a \leqslant c \vee a,$$

siis alumise raja definitsiooni tõttu $a \wedge b \leqslant v$. Analoogiliselt saab näidata, et ka $b \wedge c \leqslant v$ ja $c \wedge a \leqslant v$. Kuna v on elementide $a \wedge b$, $b \wedge c$ ja $c \wedge a$ ülemine tõke, siis $u \leqslant v$. □

Distributiivsete võrede kirjeldus on mingis mõttes sarnane modulaarsete võrede kirjeldusega.

Teoreem 4.6 *Võre L jaoks on järgmised väited samaväärsed.*

1. *L on distributiivne.*

2. *Mistahes $a, b, c \in L$ korral*

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

3. *Mistahes $a, b, c \in L$ korral*

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).$$

4. *Kui $a, b, c \in L$, $a \vee c = b \vee c$ ja $a \wedge c = b \wedge c$, siis $a = b$.*

TÕESTUS. 1. $\Rightarrow$ 2. Olgu $a, b, c \in L$. Siis

$$\begin{aligned}
(a \vee c) \wedge (b \vee c) &= ((a \vee c) \wedge b) \vee ((a \vee c) \wedge c) && \text{(distributiivsus)}\\
&= ((a \vee c) \wedge b) \vee c && \text{(neelduvus)}\\
&= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee c && \text{(distributiivsus)}\\
&= (a \wedge b) \vee c. && \text{(neelduvus)}
\end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ 3. Olgu $a, b \in L$ ja kehtigu tingimus 2. Tähistame

$$u := (b \wedge c) \vee (c \wedge a).$$

Siis

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) &= (a \wedge b) \vee u\\
&= (a \vee u) \wedge (b \vee u) && \text{(eeldus)}\\
&= (a \vee (c \wedge a) \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&= (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (c \wedge a)) && \text{(neelduvus)}\\
&= ((b \wedge c) \vee a) \wedge ((c \wedge a) \vee b) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&= (b \vee a) \wedge (c \vee a) \wedge (c \vee b) \wedge (a \vee b) && \text{(eeldus)}\\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee a) \wedge (c \vee a) \wedge (c \vee b) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) && \text{(idempotentsus)}
\end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 1. Olgu $a, b, c \in L$ ja $a \leqslant c$. Siis $a \wedge b \leqslant c \wedge b$, seega $b \wedge c = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$ ja

$$\begin{aligned}
(a \wedge c) \vee (b \wedge c) &= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)\\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) && \text{(eeldus)}\\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge c && (a \leqslant c)\\
&= (a \vee b) \wedge c. && \text{(neelduvus)}
\end{aligned}$$

Niisiis oleme tõestanud, et

$$(\forall a, b, c \in L)(a \leqslant c \Longrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c). \tag{4.1}$$

Olgu nüüd $a, b, c \in L$ suvalised ja tähistame

$$\begin{aligned}
u &:= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a),\\
v &:= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a).
\end{aligned}$$

Eelduse 3 tõttu $u = v$, millest järeldub võrdus $u \wedge c = v \wedge c$. Kuna $b \wedge c \leqslant c$ ja $c \wedge a \leqslant c$, siis ka

$$(b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leqslant c. \tag{4.2}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
u \wedge c &= ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge c \\
&= (a \wedge b \wedge c) \vee (((b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge c) && \text{(omadus 4.1)} \\
&= (c \wedge a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) && \text{(võrratus 4.2)} \\
&= (b \wedge c \wedge a) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= (b \wedge c) \vee (a \wedge c) && \text{(neelduvus)} \\
&= (a \wedge c) \vee (b \vee c), && \text{(kommutatiivsus)} \\
v \wedge c &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \wedge c \\
&= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge c && \text{(neelduvus)} \\
&= (a \vee b) \wedge c && \text{(neelduvus)}
\end{aligned}$$

Järelikult $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

3. $\Rightarrow$ 4. Teame juba, et tingimus 3 on samaväärne distributiivsusega, millest järeldub modulaarsus. Oletame, et $a \wedge c = b \wedge c$ ja $a \vee c = b \vee c$. Kuna kehtib tingimus 3, siis

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c).$$

Siis

$$\begin{aligned}
a \vee [(a \vee b) \wedge (b \vee c)] &= a \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\
&= a \vee (b \wedge c) \\
&= a \vee (a \wedge c) \\
&= a.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
a &\geqslant (a \vee b) \wedge (b \vee c) \\
&= (\underline{b} \vee a) \wedge (\underline{b \vee c}) \\
&= b \vee (a \wedge (b \vee c)) && (b \leqslant b \vee c, \text{ modulaarsus}) \\
&= b \vee (a \wedge (a \vee b)) && \text{(eeldus)} \\
&= b \vee a && \text{(neelduvus)} \\
&\geqslant a,
\end{aligned}$$

kust $a = a \vee b$ ehk $b \leqslant a$. Analoogiliselt saab tõestada, et $a \leqslant b$ ning seega $a = b$.

4. $\Rightarrow$ 3. Teoreemi 3.4 põhjal järeldub tingimusest 4 võre L modulaarsus. Olgu nüüd $a, b, c \in L$ ja tähistame

$$\begin{aligned}
u &:= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a), \\
v &:= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a), \\
p &:= (a \wedge c) \vee (b \wedge (a \vee c)), \\
q &:= (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c)), \\
r &:= (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b)).
\end{aligned}$$

Märgime, et

$$b \wedge (a \vee c) \leqslant b \leqslant a \vee b. \tag{4.3}$$

Seega

$$\begin{aligned}
p \vee r &= (a \wedge c) \vee (b \wedge (a \vee c)) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b)) \\
&= [(\underline{b \wedge (a \vee c)}) \vee (c \wedge (\underline{a \vee b}))] \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b) && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= [((b \wedge (a \vee c)) \vee c) \wedge (a \vee b)] \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b) && \text{((4.3), modulaarsus)} \\
&= [(\underline{c} \vee (b \wedge (\underline{a \vee c}))) \wedge (a \vee b)] \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b) && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= [(c \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b)] \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b) && (c \leqslant a \vee c, \text{ modulaarsus}) \\
&= v \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge b) \\
&= v. && (a \wedge c \leqslant v \text{ ja } a \wedge b \leqslant v)
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et $q \vee r = v$.

Paneme tähele, et

$$a \wedge b \leqslant b \wedge (a \vee c) \leqslant (a \wedge c) \vee (b \wedge (a \vee c)) = p.$$

Nüüd saame arvutada

$$\begin{aligned}
p \wedge r &= r \wedge p \\
&= ((\underline{a \wedge b}) \vee (c \wedge (a \vee b))) \wedge \underline{p} \\
&= (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b) \wedge p] && (a \wedge b \leqslant p, \text{ modulaarsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge p \wedge c] && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge ((\underline{a \wedge c}) \vee (b \wedge (a \vee c))) \wedge \underline{c}] \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge ((a \wedge c) \vee (b \wedge (a \vee c) \wedge c))] && (a \wedge c \leqslant c, \text{ modulaarsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \vee b) \wedge ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))] && \text{(neelduvus)} \\
&= (a \wedge b) \vee [((\underline{a \wedge c}) \vee (b \wedge c)) \wedge (\underline{a \vee b})] && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c \wedge (a \vee b))] && (a \wedge c \leqslant a \vee b, \text{ modulaarsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee (c \wedge b \wedge (a \vee b))] && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= (a \wedge b) \vee [(a \wedge c) \vee (c \wedge b)] && \text{(neelduvus)} \\
&= u.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et $q \wedge r = u$.

Kuna $p \vee r = q \vee r$ ja $p \wedge r = q \wedge r$, siis eelduse põhjal $p = q$. Analoogiliselt saame näidata, et $p = r$. Seega

$$u = p \wedge r = p = p \vee r = v.$$

□

Teoreem 4.7 *Võre on distributiivne parajasti siis, kui ta ei sisalda võredega N_5 ja M_3 isomorfseid alamvõresid.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Kui võre sisaldaks võrega N_5 või võrega M_3 isomorfse alamvõre, siis ta ei oleks distributiivne.

PIISAVUS. Oletame, et L ei ole distributiivne. Kui L ei ole ka modulaarne, siis teoreemi 3.4 põhjal sisaldab ta võrega N_5 isomorfse alamvõre. Oletame, et L on modulaarne, kuid mittedistributiivne. Näitame, et sel juhul sisaldab ta võrega M_3 isomorfse alamvõre.

Kuna L ei ole distributiivne, siis leiduvad sellised $a, b, c \in L$, et

$$a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{4.4}$$

Tähistame

$$\begin{aligned}
u &:= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a), \\
v &:= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a), \\
a' &:= (a \wedge v) \vee u, \\
b' &:= (b \wedge v) \vee u, \\
c' &:= (c \wedge v) \vee u.
\end{aligned}$$

Lemmast 4.5 teame, et $u \leqslant v$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
a' &= (a \vee u) \wedge v, \\
b' &= (b \vee u) \wedge v, \\
c' &= (c \vee u) \wedge v.
\end{aligned}$$

Tõepoolest, kuna $u \leqslant v$, siis modulaarsuse tõttu

$$(a \vee u) \wedge v = (u \vee a) \wedge v = u \vee (a \wedge v) = (a \wedge v) \vee u = a'$$

ning ülejäänud kahe võrduse tõestus on analoogiline. Nendest võrdustest järeldub, et

$$u \leqslant a' \leqslant v, \quad u \leqslant b' \leqslant v, \quad u \leqslant c' \leqslant v.$$

Lisaks sellele

$$a \wedge v = a \wedge (b \vee c), \tag{4.5}$$

sest

$$\begin{aligned}
a \wedge v &= a \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) \\
&= a \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) && \text{(neelduvus)} \\
&= a \wedge (c \vee a) \wedge (b \vee c) && \text{(kommutatiivsus)} \\
&= a \wedge (b \vee c) && \text{(neelduvus)}
\end{aligned}$$

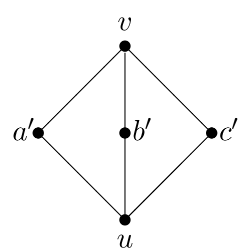
ning analoogiliselt

$$b \vee u = b \vee (c \wedge a). \tag{4.6}$$

Nüüd

$$
\begin{aligned}
a' \wedge b' &= ((a \wedge v) \vee u) \wedge b' \\
&= (\underline{u} \vee (a \wedge b)) \wedge \underline{b'} \\
&= u \vee (a \wedge v \wedge b') && (u \leqslant b', \text{ modulaarsus}) \\
&= u \vee (a \wedge v \wedge (b \vee u) \wedge v) \\
&= u \vee (a \wedge v \wedge (b \vee u)) && (\text{idempotentsus}) \\
&= u \vee [a \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee (c \wedge a))] && (\text{võrdused (4.5), (4.6)}) \\
&= u \vee [a \ \wedge (\underline{b} \vee (c \wedge a)) \wedge (\underline{b \vee c})] && (\text{kommutatiivsus}) \\
&= u \vee [a \wedge (b \vee (c \wedge a \wedge (b \vee c)))] && (b \leqslant b \vee c, \text{ modulaarsus}) \\
&= u \vee [a \wedge (b \vee (c \wedge a))] && (c \wedge a \leqslant c \leqslant b \vee c) \\
&= u \vee [((\underline{c \wedge a}) \vee b) \wedge \underline{a}] && (\text{kommutatiivsus}) \\
&= u \vee [(c \wedge a) \vee (b \wedge a)] && (c \wedge a \leqslant a, \text{ modulaarsus}) \\
&= u. && (\text{idempotentsus})
\end{aligned}
$$

Analoogiliselt saab tõestada võrdused $b' \wedge c' = u$ ja $c' \wedge a' = u$ ning duaalselt $a' \vee b' = b' \vee c' = c' \vee a' = v$.



Tõestuse lõpetamiseks tuleb veel näidata, et alamvõre $\{a', b', c', u, v\}$ elemendid on paarikaupa erinevad. Vaatleme võimalikke juhte.

1) $u = v$. Siis

$$
\begin{aligned}
a \wedge (b \vee c) &= a \wedge v && (\text{võrdus (4.5)}) \\
&= a \wedge u && (u = v) \\
&= u \wedge a && (\text{kommutatiivsus}) \\
&= [(\underline{a \wedge b}) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)] \wedge \underline{a} \\
&= (a \wedge b) \vee [((b \wedge c) \vee (c \wedge a)) \wedge a] && (a \wedge b \leqslant a, \text{ modulaarsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee [((\underline{c \wedge a}) \vee (b \wedge c)) \wedge \underline{a}] && (\text{kommutatiivsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee [(c \wedge a) \vee (b \wedge c \wedge a)] && (c \wedge a \leqslant a, \text{ modulaarsus}) \\
&= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), && (c \wedge a \geqslant b \wedge c \wedge a)
\end{aligned}
$$

mis on vastuolus tingimusega (4.4).

2) $a' = b'$ (või $a' = c'$ või $b' = c'$). Siis $v = a' \vee b' = a' \vee a' = a'$ ja $u = a' \wedge b' = a' \wedge a' = a'$. Seega $u = v$, mis viib vastuoluni, nagu nägime juhul 1). Juhtumid $a' = c'$ ja $b' = c'$ on analoogilised.

3) $a' = u$. Siis $v = a' \vee b' = u \vee b' = b'$ ja $v = a' \vee c' = u \vee c' = c'$, millest $b' = c'$. Seda tüüpi juht on juba vaadeldud punktis 2). Kõigil ülejäänud juhtudel saame vastuolu analoogiliselt. □

Järeldus 4.8 *Distributiivse võre iga alamvõre on distributiivne.*

Muuhulgas kui X on hulk, siis võre $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ kõik alamvõred on ka distributiivsed. Hiljem (vt. teoreemi 4.19) tuleb välja, et isomorfismi täpsuseni teistsuguseid distributiivseid võresid polegi.

4.2 Ideaalid

Selles paragrahvis uurime distributiivsete võrede ideaale. Meenutame (vt. definitsiooni 1.34), et võre L ideaalid on allapoole kinnised alamvõred. Kõigi ideaalide hulk $\mathsf{Id}(L)$ on täielik võre sisalduvusseose suhtes (vt. lauset 1.40), kus alumisteks rajadeks on ühisosad. Anname selles võres ülemiste rajade kirjelduse.

Lause 4.9 *Olgu L võre ja I, J selle võre mittetühjad ideaalid. Siis võres $\mathsf{Id}(L)$*

$$I \vee J = \downarrow\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}.$$

TÕESTUS. Tähistame

$$K := \downarrow\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}.$$

On selge, et K on allapoole kinnine ning seega ka kinnine alumiste rajade suhtes. Kui $x, x' \in K$, siis leiduvad $i, i' \in I$ ja $j, j' \in J$ nii, et $x \leqslant i \vee j$ ja $x' \leqslant i' \vee j'$. Siis

$$x \vee x' \leqslant i \vee j \vee i' \vee j' = (i \vee i') \vee (j \vee j'),$$

kusjuures $i \vee i' \in I$ ja $j \vee j' \in J$. Seega $x \vee x' \in K$ ja K on kinnine ülemiste rajade suhtes. Sellega on näidatud, et $K \in \mathsf{Id}(L)$.

Olgu $j_0 \in J$ mingi fikseeritud element. Siis iga $i \in I$ korral $i \leqslant i \vee j_0$ ja seega $i \in K$. See tähendab, et $I \subseteq K$. Analoogiliselt $J \subseteq K$. Seega K on I ja J ülemine tõke.

Olgu $K' \in \mathsf{Id}(L)$ selline, et $I \subseteq K'$ ja $J \subseteq K'$. Kuna K' on alamvõre, siis iga $i \in I$ ja iga $j \in J$ korral $i \vee j \in K'$. Kui $x \leqslant i \vee j$, siis $x \in K'$, sest K' on allapoole kinnine. Seega $K \subseteq K'$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et K on I ja J ülemine raja võres $\mathsf{Id}(L)$. □

Nüüd saame anda distributiivsete võrede kirjelduse ideaalide abil.

Teoreem 4.10 *Mittetühi võre L on distributiivne parajasti siis, kui iga kahe mittetühja ideaali $I, J \subseteq L$ korral*

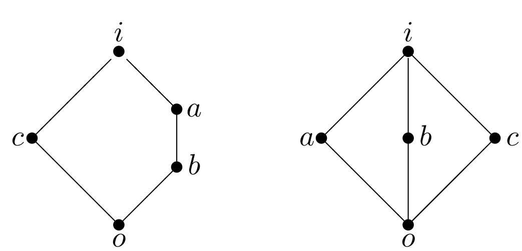
$$I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}.$$

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu L distributiivne võre ning I, J mittetühjad ideaalid. Lause 4.9 tõttu $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\} \subseteq I \vee J$. Näitame vastupidist sisalduvust. Olgu $x \in I \vee J$. Siis leiduvad $i' \in I$ ja $j' \in J$ nii, et $x \leqslant i' \vee j'$. Distributiivsuse tõttu

$$x = x \wedge (i' \vee j') = (x \wedge i') \vee (x \wedge j').$$

Kuna $x \wedge i' \leqslant i' \in I$ ja $x \wedge j' \leqslant j' \in J$, siis $x \wedge i' \in I$ ja $x \wedge j' \in J$. Seega $x \in \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$.

PIISAVUS. Oletame, et L ei ole distributiivne. Siis teoreemi 4.6 põhjal sisaldab L alamvõret, mis on isomorfne ühega järgmisest kahest võrest:



Olgu $I :=\downarrow b$ ja $J :=\downarrow c$. Kuna mõlemal juhul $a \leqslant i = b \vee c$, siis $a \in I \vee J$. Oletame vastuväiteliselt, et $I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$. Sel juhul $a = b' \vee c'$, kus $b' \leqslant b$ ja $c' \leqslant c$. Siis $c' \leqslant a$. Et c' on c ja a alumine tõke, siis $c' \leqslant a \wedge c = o$. Järelikult

$$a = b' \vee c' \leqslant b' \vee o \leqslant b.$$

Kummaski alamvõres ei ole $a \leqslant b$, seega oleme saanud vastuolu. See vastuolu näitab, et $I \vee J \neq \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$. □

Märkus 4.11 Tänu lausele 4.9 on tingimus $I \vee J = \{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ samaväärne tingimusega, et hulk $\{i \vee j \mid i \in I, j \in J\}$ on allapoole kinnine.

Hakkame nüüd uurima teatud eriomadustega ideaale.

Definitsioon 4.12 Võre L ideaali I nimetatakse **algideaaliks**[3], kui

$$(\forall x, y \in L)(x \wedge y \in I \implies x \in I \text{ või } y \in I).$$

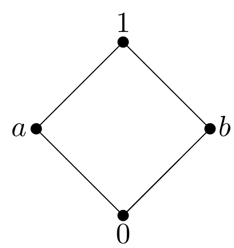
Võre L filtrit F nimetatakse **algfiltriks**[4], kui

$$(\forall x, y \in L)(x \vee y \in F \implies x \in F \text{ või } y \in F).$$

Võre L kõigi algideaalide hulka tähistame sümboliga PrId.

Näide 4.13 1. Võre L ise on enda algideaal.

2. Võres



on $J = \{0\}$ ideaal, mis ei ole algideaal ($a \wedge b \in J$, aga $a, b \notin J$). Hulk $I = \{0, a\}$ aga on algideaal.

3. Ahelas on kõik ideaalid algideaalid.

Lause 4.14 *Võre algideaali täiend on algfilter.*

Tõestus. Olgu P võre L algideaal ja tähistame $F := L \setminus P$. Näitame, et F on filter.

1) Olgu $a \in F$, $b \in L$ ja $a \leqslant b$. Kui oletada, et $b \in P$, siis ka $a \in P$, sest P on allapoole kinnine. Siis aga $a \in F \cap P = \emptyset$, mis pole võimalik. Seega $b \in F$ ja oleme näidanud, et F on ülespoole kinnine.

2) Olgu $a, b \in F$. Kuna $a, b \notin P$ ja P on algideaal, siis $a \wedge b \notin P$. Seega $a \wedge b \in F$ ja F on kinnine alumiste rajade suhtes.

Kui $a, b \in P$, siis ka $a \vee b \in P$, seega F on algfilter. □

Teoreem 4.15 (Distributiivse võre algideaali omadus) *Olgu L distributiivne võre, I selle ideaal ja F filter, kusjuures $I \cap F = \emptyset$. Siis leidub selline võre L algideaal P, et $I \subseteq P$ ja $P \cap F = \emptyset$.*

[3]algideaal = *prime ideal*

[4]algfilter = *prime filter*

TÕESTUS. Vaatleme hulka

$$\mathcal{X} = \{J \subseteq L \mid J \text{ on ideaal, } I \subseteq J,\ I \cap F = \emptyset\}$$

järjestatud hulgana sisalduvusseose suhtes. Näitame, et hulk $\mathcal{X}$ rahuldab Zorni lemma (lemma 2.7) eeldusi.

Kuna $I \in \mathcal{X}$, siis $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Olgu $C = \{J_k \mid k \in K\}$ mingi ahel hulgas $\mathcal{X}$ ning tähistame

$$M := \bigcup_{k \in K} J_k.$$

Näitame, et $M \in \mathcal{X}$.

1) Kuna $I \subseteq J_k$ iga $k \in K$ korral, siis $I \subseteq M$.

2) Kuna iga $k \in K$ korral $J_k \cap F = \emptyset$, siis ka

$$M \cap F = \left(\bigcup_{k \in K} J_k\right) \cap F = \bigcup_{k \in K} (J_k \cap F) = \bigcup_{k \in K} \emptyset = \emptyset.$$

3) Veendume, et M on ideaal võres L. On selge, et M on allapoole kinnine, sest ta on allapoole kinniste hulkade ühend. Näitame, et M on kinnine ülemiste rajade võtmise suhtes. Olgu $a, b \in M$. Siis leiduvad $k, l \in K$ nii, et $a \in J_k$ ja $b \in J_l$. Kuna C on ahel, siis kas $J_k \subseteq J_l$ või $J_l \subseteq J_k$. Vaatleme juhtu $J_k \subseteq J_l$ (teine juhtum on analoogiline). Siis $a, b \in J_l$ ja kuna J_l on ideaal, siis $a \vee b \in J_l \subseteq M$.

Seega $M \in \mathcal{X}$ ning on selge, et M on ahela C ülemine tõke järjestatud hulgas $(\mathcal{X}, \subseteq)$. Zorni lemma kohaselt leidub hulgas $\mathcal{X}$ maksimaalne element P. See P on võre L ideaal, $I \subseteq P$ ja $P \cap F = \emptyset$.

Jääb veel tõestada, et P on algideaal. Oletame vastuväiteliselt, et $a, b \notin P$, aga $a \wedge b \in P$. Siis $P \vee \downarrow a$ on võre L ideaal ja $I \subseteq P \vee \downarrow a$. Veendume, et $P \subset P \vee \downarrow a$. Olgu $p \in P$ suvaline element ja oletame, et $p \vee a \in P$. Kuna $a \leqslant p \vee a$ ja P on allapoole kinnine, siis $a \in P$, mis annab vastuolu. Seega $p \vee a \in P$ ehk $p \vee a \in (P \vee \downarrow a) \setminus P$.

Kuna P on hulga $\mathcal{X}$ maksimaalne element, siis $P \vee \downarrow a \notin \mathcal{X}$ ehk $(P \vee \downarrow a) \cap F \neq \emptyset$. Analoogiliselt $(P \vee \downarrow b) \cap F \neq \emptyset$. Järelikult leiduvad $p, q \in P$, $a' \leqslant a$ ja $b' \leqslant b$ nii, et $p \vee a' \in F$ ja $q \vee b' \in F$. Et $p \vee a' \leqslant p \vee a$, $q \vee b' \leqslant q \vee b$ ja F on filter, siis ka $p \vee a, q \vee b \in F$. Kuna F on alamvõre, siis $x = (p \vee a) \wedge (q \vee b) \in F$. Samas distributiivsuse tõttu

$$x = (p \wedge q) \vee (p \wedge b) \vee (a \wedge q) \vee (a \wedge b).$$

Kuna $(p \wedge q), (p \wedge b), (a \wedge q) \in P$ (sest P on allapoole kinnine) ja $a \wedge b \in P$ (eeldus), siis ka $x \in P$, sest P on kinnine ülemiste rajade suhtes. Järelikult $x \in P \cap F = \emptyset$, vastuolu. □

Järeldus 4.16 *Olgu L distributiivne võre ja olgu I selle võre ideaal. Siis iga elemendi $a \in L \setminus I$ korral leidub selline algideaal P, et $I \subseteq P$ ja $a \notin P$.*

TÕESTUS. Kasutame teoreemi 4.15 filtri $F = \uparrow a$ korral. □

Järeldus 4.17 *Olgu L distributiivne võre ja $a, b \in L$, $a \neq b$. Siis leidub selline võre L algideaal P, et $a \in P$ ja $b \notin P$ või vastupidi.*

Tõestus. On kaks võimalust.

1) $a < b$. Siis $\downarrow a \cap \uparrow b = \emptyset$, kus $\downarrow a$ on ideaal ja $\uparrow b$ on filter. Teoreemi 4.15 põhjal leidub algideaal P nii, et $\downarrow a \subseteq P$ ja $\uparrow b \cap P = \emptyset$. Siis on selge, et $a \in P$ ja $b \notin P$.

2) $a \not< b$. Siis $\downarrow b \cap \uparrow a = \emptyset$. Tõepoolest, kui $x \in \downarrow b \cap \uparrow a$, siis $a \leqslant x \leqslant b$, mis annaks vastuolu $a \leqslant b$. Teoreemi 4.15 põhjal leidub algideaal P nii, et $\downarrow b \subseteq P$ ja $P \cap \uparrow a = \emptyset$. Seega $b \in P$ ja $a \notin P$. □

Järeldus 4.18 *Olgu L distributiivne võre ja I selle ideaal. Siis*

$$I = \bigcap \{P \mid I \subseteq P,\ P \text{ on võre } L \text{ algideaal}\}.$$

Tõestus. Tähistame

$$I_1 := \bigcap \{P \mid I \subseteq P, P \text{ on võre } L \text{ algideaal}\}.$$

Hulk $\{P \mid I \subseteq P, P \text{ on võre } L \text{ algideaal}\}$ ei ole tühi, sest sisaldab algideaali L. On selge, et $I \subseteq I_1$. Oletame, et $I \neq I_1$. Siis leidub $a \in I_1 \setminus I \subseteq L \setminus I$. Järelduse 4.16 põhjal leidub võre L algideaal P nii, et $I \subseteq P$ ja $a \notin P$. Siis ühisosa definitsiooni tõttu $I_1 \subseteq P$ ning järelikult $a \notin I_1$, vastuolu. □

4.3 Stone'i teoreem

Selles paragrahvis anname distributiivsete võrede kirjelduse alamhulkade võrede abil. Järgneva teoreemi tõestasid Stone[5] ja Birkhoff[6] 1930-ndatel aastatel.

Teoreem 4.19 (Stone'i teoreem) *Võre on distributiivne parajasti siis, kui ta on isomorfne mingi hulga kõigi alamhulkade võre alamvõrega.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu L distributiivne võre ja olgu X võre L kõigi algideaalide hulk. Defineerime kujutuse $r : L \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ võrdusega

$$r(a) := \{P \in X \mid a \notin P\}.$$

Võre L iga algideaali P korral

$$(\forall a, b \in L)(a, b \notin P \Longleftrightarrow a \wedge b \notin P).$$

Järelikult mistahes $a, b \in L$ korral

$$\begin{aligned} r(a) \cap r(b) &= \{P \in X \mid a \notin P\} \cap \{P \in X \mid b \notin P\} \\ &= \{P \in X \mid a, b \notin P\} \\ &= \{P \in X \mid a \wedge b \notin P\} \\ &= r(a \wedge b). \end{aligned}$$

On lihtne näha, et kui P on ideaal, siis

$$(\forall a, b \in L)(a \in P \text{ ja } b \in P \Longleftrightarrow a \vee b \in P).$$

[5]Marshall Harvey Stone (1903–1989) — ameerika matemaatik
[6]Garrett Birkhoff (1911–1996) — ameerika matemaatik

Seega

$$(\forall a, b \in L)(a \notin P \text{ või } b \notin P \Longleftrightarrow a \vee b \notin P)$$

ja

$$\begin{aligned} r(a) \cup r(b) &= \{P \in X \mid a \notin P\} \cup \{P \in X \mid b \notin P\} \\ &= \{P \in X \mid a \notin P \text{ või } b \notin P\} \\ &= \{P \in X \mid a \vee b \notin P\} \\ &= r(a \vee b). \end{aligned}$$

Sellega on tõestatud, et r on võrede homomorfism.

Näitame, et r on sisestus. Olgu $a \leqslant b$, $a, b \in L$. Kui $P \in X$ ja $a \notin P$, siis ka $b \notin P$, sest P on allapoole kinnine. Seega

$$r(a) = \{P \in X \mid a \notin P\} \subseteq \{P \in X \mid b \notin P\} = r(b),$$

millega on tõestatud järjestuse säilitamine.

Oletame nüüd, et $r(a) \subseteq r(b)$, kus $a, b \in L$. Siis

$$(\forall P \in X)(a \notin P \Longrightarrow b \notin P) \;\text{ ehk }\; (\forall P \in X)(b \in P \Longrightarrow a \in P). \tag{4.7}$$

On kaks võimalust.

1) $a \leqslant b$. Siis on kõik korras.

2) $a \nleqslant b$. Nii nagu järelduse 4.17 tõestuse osas 2) näeme, et leidub $P \in X$ nii, et $b \in P$ ja $a \notin P$. See on aga vastuolus tingimusega (4.7). Seega olukord $a \nleqslant b$ esineda ei saa.

Sellega on näidatud, et r on sisestus. Järelikult on võre L isomorfne võre $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ alamvõrega $r(L) = \{r(a) \mid a \in L\}$.

PIISAVUS. On hästi teada, et hulga X kõigi alamhulkade võre $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ on distributiivne. Järelduse 4.8 põhjal on ka kõik selle võre alamvõred distributiivsed. □

4.4 Lõplikud distributiivsed võred

Selles paragrahvis anname lõplike distributiivsete võrede kirjelduse sup-taandumatute elementide abil. Sümboliga $\mathcal{J}(L)$ tähistame võre L sup-taandumatute elementide hulka.

Järjestatud hulga P kõigi allapoole kinniste alamhulkade hulka tähistame sümboliga $\mathcal{D}(P)$. See hulk on võre, milles alumiseks rajaks on ühisosa ja ülemiseks rajaks ühend, seega $\mathcal{D}(P)$ on võre $(\mathcal{P}(P), \cap, \cup)$ alamvõre. Muuhulgas $\mathcal{D}(P)$ on distributiivne võre.

Teoreem 4.20 (Birkhoff) *Iga lõplik distributiivne võre L on isomorfne võrega $\mathcal{D}(\mathcal{J}(L))$.*

TÕESTUS. Defineerime kujutuse $\sigma : L \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{J}(L))$ võrdusega

$$\sigma(a) := {\downarrow} a \cap \mathcal{J}(L) = \{x \in \mathcal{J}(L) \mid x \leqslant a\}.$$

On selge, et lõplikus võres L leidub vähim element 0 ja suurim element 1. Kuna 0 ei ole suptaandumatu, siis $\sigma(0) = \{0\} \cap \mathcal{J}(L) = \emptyset$.

Et L on lõplik, siis lemma 3.16 põhjal on iga tema nullist erinev element a esitatav suptaandumatute elementide ülemise rajana. Sellest tuleb välja, et $\sigma(a) = \emptyset$ parajasti siis, kui $a = 0$. Samuti kehtib $a \neq 0$ korral võrdus

$$a = \bigvee \sigma(a).$$

Kujutus σ säilitab alumisi rajasid, sest

$$\sigma(a) \cap \sigma(b) = \downarrow a \cap \mathcal{J}(L) \cap \downarrow b \cap \mathcal{J}(L) = \downarrow a \cap \downarrow b \cap \mathcal{J}(L) = \downarrow(a \wedge b) \cap \mathcal{J}(L) = \sigma(a \wedge b).$$

Veendume, et mistahes elementide $a, b \in L$ korral ka $\sigma(a) \cup \sigma(b) = \sigma(a \vee b)$. Kuna võre $\mathcal{D}(\mathcal{J}(L))$ on distributiivne ja $\downarrow a \cup \downarrow b \subseteq \downarrow(a \vee b)$, siis

$$\sigma(a) \cup \sigma(b) = (\downarrow a \cap \mathcal{J}(L)) \cup (\downarrow b \cap \mathcal{J}(L)) = (\downarrow a \cup \downarrow b) \cap \mathcal{J}(L) \subseteq \downarrow(a \vee b) \cap \mathcal{J}(L) = \sigma(a \vee b).$$

Olgu nüüd $x \in \sigma(a \vee b)$. Siis $x \leqslant a \vee b$ ja distributiivsuse tõttu

$$x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b).$$

Kuna x on sup-taandumatu, siis kas $x = x \wedge a$ või $x = x \wedge b$, kust $x \leqslant a$ või $x \leqslant b$. Järelikult $x \in \sigma(a)$ või $x \in \sigma(b)$ ning seega $x \in \sigma(a) \cup \sigma(b)$.

Näitame, et σ on sürjektiivne. Nagu eespool nägime, $\emptyset = \sigma(0)$. Olgu $\emptyset \neq A \in \mathcal{D}(\mathcal{J}(L))$, kusjuures $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Võtame $a := a_1 \vee \dots \vee a_n$ ja näitame, et

$$\sigma(a) = A.$$

Ilmselt $A \subseteq \sigma(a)$. Olgu $x \in \sigma(a)$. Siis $x \leqslant a$ ning distributiivsuse tõttu

$$x = x \wedge a = x \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (x \wedge a_1) \vee \dots \vee (x \wedge a_n).$$

Kuna x on sup-taandumatu, siis leidub $i \in \{1, \dots, n\}$ nii, et $x = x \wedge a_i \leqslant a_i$. Et A on allapoole kinnine, siis $x \in A$, millega on tõestatud ka sisalduvus $\sigma(a) \subseteq A$.

Lõpuks veendume, et σ on sisestus. Kui $a \leqslant b$ võres L, siis

$$\sigma(a) = \downarrow a \cap \mathcal{J}(L) \subseteq \downarrow b \cap \mathcal{J}(L) = \sigma(b),$$

seega σ säilitab järjestust. Oletame, et $\sigma(a) \subseteq \sigma(b)$. Vaatleme erinevaid võimalusi.

1) $a, b \neq 0$. Siis

$$a = \bigvee \sigma(a) \leqslant \bigvee \sigma(b) = b.$$

2) $a = 0$, $b \neq 0$. Siis $\sigma(a) = \emptyset \subseteq \sigma(b)$.

3) $a \neq 0$, $b = 0$. Sellist olukorda esineda ei saa, sest $\sigma(a) \neq \emptyset$, kuid $\sigma(b) = \emptyset$.

4) $a = 0$, $b = 0$. Siis $a = b$. □

Märkus 4.21 Hulka $\sigma(a) = \downarrow a \cap \mathcal{J}(L)$ nimetatakse mõnikord elemendi a **spektriks**[7].

Teeme nüüd mõned järeldused teoreemist 4.20.

Lause 4.22 *Olgu L lõplik distributiivne võre. Siis iga nullist erineva elemendi $a \in L$ jaoks leiduvad üheselt määratud sup-taandumatud elemendid $u_1, \dots, u_n$ nii, et*

$$a = u_1 \vee \dots \vee u_n$$

on minimaalne esitus.

[7] spekter = *spectrum*

TÕESTUS. Olgu $\{u_1, \ldots, u_n\}$ järjestatud hulga $\sigma(a)$ maksimaalsete elementide hulk. Siis hulga $\sigma(a)$ iga elemendi x jaoks leidub $i \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $x \leqslant u_i$. Seega

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= ({\downarrow} u_1 \cup \ldots \cup {\downarrow} u_n) \cap \mathcal{J}(L)\\ &= ({\downarrow} u_1 \cap \mathcal{J}(L)) \cup \ldots \cup ({\downarrow} u_n \cap \mathcal{J}(L))\\ &= \sigma(u_1) \cup \ldots \cup \sigma(u_n)\\ &= \sigma(u_1 \vee \ldots \vee u_n),\end{aligned}$$

sest σ on võrede homomorfism. Kuna kujutus σ on injektiivne, siis $a = u_1 \vee \ldots \vee u_n$.

Veendume, et saadud esitus on minimaalne. Oletame näiteks, et $a = u_2 \vee \ldots \vee u_n$. Siis $u_1 \leqslant u_2 \vee \ldots \vee u_n$. Kuna σ on võrede homomorfism, siis $\sigma(u_1) \subseteq \sigma(u_2) \cup \ldots \cup \sigma(u_n)$. Et $u_1 \in \sigma(u_1)$, siis leidub $i \in \{2, \ldots, n\}$ nii, et $u_1 \in \sigma(u_i) = {\downarrow} u_i \cap \mathcal{J}(L)$. Järelikult $u_1 \leqslant u_i$ ja kuna elemendid $u_1, u_2, \ldots, u_n$ on paarikaupa erinevad, siis $u_1 < u_i$. Viimane on vastuolus u_1 maksimaalsusega.

Lõpuks näitame, et esitus $a = u_1 \vee \ldots \vee u_n$ on ühene (loomulikult elementide järjekorra täpsuseni). Selleks oletame, et meil on veel teine minimaalne esitus

$$a = v_1 \vee \ldots \vee v_m,$$

kus $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{J}(L)$. Teoreemi 3.18 põhjal peab $n = m$. Võrdusest $u_1 \vee \ldots \vee u_n = v_1 \vee \ldots \vee v_n$ järeldub, et

$${\downarrow}\{u_1, \ldots, u_n\} \cap \mathcal{J}(L) = \sigma(u_1 \vee \ldots \vee u_n) = \sigma(v_1 \vee \ldots \vee v_n) = {\downarrow}\{v_1, \ldots, v_n\} \cap \mathcal{J}(L).$$

Seega iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ jaoks leidub $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ nii, et $u_i \leqslant v_{j_i}$. Tänu elementide u_i maksimaalsusele peavad kehtima võrdused $u_i = v_{j_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

Lause 4.23 *Lõpliku distributiivse võre L iga maksimaalne ahel on pikkusega $|\mathcal{J}(L)|$.*

TÕESTUS. Olgu $C = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ maksimaalne ahel pikkusega n lõplikus distributiivses võres L, kusjuures $a_0 = 0$, $a_n = 1$ ja

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Iga $x \in \mathcal{J}(L)$ korral olgu $m(x)$ vähim element ahelas C, mille korral $x \leqslant m(x)$. Defineerime kujutuse $\varphi : \mathcal{J}(L) \longrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ võrdusega

$$\varphi(x) := m(x).$$

Näitame, et φ on bijektiivne.

Injektiivsuse näitamiseks oletame, et $x, y \in \mathcal{J}(L)$ ja $m(x) = m(y)$. Kuna $x, y \neq 0$, siis $m(x) = m(y) > 0$. Seega ahelas C leidub element a_i ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) nii, et $a_i \prec m(x) = a_{i+1}$. Et $a_i \leqslant m(x)$ ja $x \leqslant m(x)$, siis $a_i \vee x \leqslant m(x)$. Oletame, et $a_i \vee x < m(x)$. Siis $x \neq m(x)$, sest muidu $a_i \vee x < x \leqslant a_i \vee x$, mis pole võimalik. Kui oletada, et $a_i = a_i \vee x$, siis $a_i \leqslant x$. Võrdus $a_i = x$ pole võimalik $m(x)$ definitsiooni tõttu, seega $a_i < x < a_{i+1}$, mis on vastuolus eeldusega, et $a_i \prec a_{i+1}$. Seega $a_i \neq a_i \vee x$ ehk $a_i < a_i \vee x$. Siis aga

$$a_0 < a_1 < \ldots a_i < a_i \vee x < a_{i+1} < \ldots < a_n,$$

mis tähendaks, et C ei ole maksimaalne ahel. Seega $a_i \vee x = m(x)$ ja analoogiliselt $a_i \vee y = m(y)$. Järelikult

$$a_i \vee x = m(x) = m(y) = a_i \vee y,$$

kust neelduvuse ja distributiivsuse tõttu

$$x = x \wedge (a_i \vee x) = x \wedge (a_i \wedge y) = (x \wedge a_i) \vee (x \wedge y).$$

Kuna x on sup-taandumatu, siis $x = x \wedge a_i$ või $x = x \wedge y$, s.t. $x \leqslant a_i$ või $x \leqslant y$. Võrratusest $x \leqslant a_i$ järeldub, et $m(x) \leqslant a_i < m(x)$, vastuolu. Seega peab kehtima võrratus $x \leqslant y$. Analoogiliselt saab näidata, et $y \leqslant x$ ja seega kehtib võrdus $x = y$.

Kujutuse φ sürjektiivsuse näitamiseks vaatleme elementi $a_i \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Kuna $a_{i-1} < a_i$, siis tänu teoreemile 4.20

$$\sigma(a_{i-1}) \subset \sigma(a_i).$$

Võttes $x \in \sigma(a_i) \setminus \sigma(a_{i-1})$ kehtib võrdus $a_i = m(x)$ ehk $\varphi(x) = a_i$. $\square$

Peatükk 5

Kongruentsid

5.1 Lihtsamad omadused

Selles paragrahvis uurime võrede kongruentside lihtsamaid omadusi. Meenutame, et ekvivalentsiseost ρ võrel L nimetatakse võre L kongruentsiks, kui mistahes elementide $a, b, c, d \in L$ korral

$$(a, b), (c, d) \in \rho \Longrightarrow (a \wedge c, b \wedge d), (a \vee c, b \vee d) \in \rho.$$

Anname kaks alternatiivset kongruentside kirjeldust.

Lemma 5.1 *Ekvivalentsiseos $\rho \subseteq L \times L$ on võre L kongruents parajasti siis, kui*

$$(\forall a, b, c \in L)((a, b) \in \rho \Longrightarrow (a \wedge c, b \wedge c), (a \vee c, b \vee c) \in \rho).$$

TÕESTUS. TARVILIKKUS. See on ilmne.
PIISAVUS. Olgu $(a, b), (c, d) \in \rho$. Eeldust kasutades saame, et

$$(a \wedge c, b \wedge c) \in \rho, \quad (b \wedge c, b \wedge d) \in \rho,$$

kust transitiivsuse tõttu $(a \wedge c, b \wedge d) \in \rho$. Analoogiliselt $(a \vee c, b \vee d) \in \rho$. □

Lause 5.2 *Refleksiivne ja sümmeetriline binaarne seos ρ võrel L on võre L kongruents parajasti siis, kui iga $x, y, z, t \in L$ korral kehtivad järgmised tingimused:*

(1) $(x, y) \in \rho$ parajasti siis, kui $(x \wedge y, x \vee y) \in \rho$;

(2) kui $x \leqslant y \leqslant z$, $(x, y) \in \rho$ ja $(y, z) \in \rho$, siis ka $(x, z) \in \rho$;

(3) kui $x \leqslant y$ ja $(x, y) \in \rho$, siis ka $(x \wedge t, y \wedge t), (x \vee t, y \vee t) \in \rho$.

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu ρ võre L kongruents. Siis ρ rahuldab tingimust (1) tänu lausele 1.28. Tingimus (2) järeldub seose ρ transitiivsusest. Tingimus (3) kehtib lemma 5.1 tõttu.
PIISAVUS. Eeldame, et refleksiivne ja sümmeetriline seos ρ rahuldab tingimusi (1)–(3). Tõestame, et

$$(\forall a, b, c, d \in L)(a \leqslant d \text{ ja } b, c \in [a, d] \text{ ja } (a, d) \in \rho \implies (b, c) \in \rho). \tag{5.1}$$

Kui $a \leqslant d$, $b, c \in [a, d]$ ja $(a, d) \in \rho$, siis $b \wedge c \in [a, d]$ ja tänu tingimusele (3)

$$b \wedge c = (a \vee (b \wedge c)) \; \rho \; (d \vee (b \wedge c)) = d.$$

Kuna $b \wedge c \leqslant b \vee c \leqslant d$ ja $(b \wedge c, d) \in \rho$, siis tänu tingimusele (3)

$$b \wedge c = ((b \wedge c) \wedge (b \vee c))\ \rho\ (d \wedge (b \vee c)) = b \vee c.$$

Tingimusest (1) järeldub, et $(b, c) \in \rho$.

Tõestame nüüd, et seos ρ on transitiivne. Olgu $(x, y), (y, z) \in \rho$. Tingimusest (1) järeldub, et $(x \wedge y, x \vee y) \in \rho$ ja $(y \wedge z, y \vee z) \in \rho$. Kasutades tingimust (3) saame, et

$$y \vee z = ((x \wedge y) \vee (y \vee z))\ \rho\ ((x \vee y) \vee (y \vee z)) = x \vee y \vee z$$

ning analoogiliselt $(x \wedge y \wedge z, y \wedge z) \in \rho$. Järelikult

$$(x \wedge y \wedge z)\ \rho\ (y \wedge z)\ \rho\ (y \vee z)\ \rho\ (x \vee y \vee z)$$

ning

$$x \wedge y \wedge z \leqslant y \wedge z \leqslant y \vee z \leqslant x \vee y \vee z.$$

Kasutades kaks korda tingimust (2) saame, et $(x \wedge y \wedge z, x \vee y \vee z) \in \rho$. Võttes väites (5.1)

$$a = x \wedge y \wedge z, \quad b = x, \quad c = z, \quad d = x \vee y \vee z$$

saame järeldada, et $(x, z) \in \rho$.

Näitame lõpuks, et kui $(x, y) \in \rho$, siis ka $(x \wedge t, y \wedge t) \in \rho$. Kui $(x, y) \in \rho$, siis tingimuse (1) põhjal $(x \wedge y, x \vee y) \in \rho$. Tingimusest (3) järeldub, et $(x \wedge y \wedge t, (x \vee y) \wedge t) \in \rho$. Kuna

$$x \wedge t, y \wedge t \in [x \wedge y \wedge t, (x \vee y) \wedge t],$$

siis väite (5.1) põhjal $(x \wedge t, y \wedge t) \in \rho$. Analoogiliselt saab näidata, et $(x \vee t, y \vee t) \in \rho$. Lemma 5.1 tõttu on ρ kongruents. □

5.2 Võre kongruentside võre

Selles paragrahvis uurime võrede kongruentside võresid.

Me teame, et kui L on võre, siis $\mathsf{Con}L$ on täielik võre, milles alumised rajad on ühisosad (vt. lauset 1.30). Samas ülemiste rajade kirjeldus selles võres on mõnevõrra keerulisem.

Lause 5.3 *Kui L on võre ja $\rho, \sigma \in \mathsf{Con}(L)$, siis $\rho \vee \sigma$ võres $\mathsf{Con}(L)$ on defineeritud järgmiselt: $(x, y) \in \rho \vee \sigma$ parajasti siis, kui leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$ nii, et*

$$\begin{array}{c} x \wedge y = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1} \leqslant z_n = x \vee y \ \ \textit{ja} \\ (\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})((z_i, z_{i+1}) \in \rho \ \ \textit{või} \ \ (z_i, z_{i+1}) \in \sigma). \end{array} \tag{5.2}$$

Tõestus. Defineerime seose θ hulgal L järgmiselt: $(x, y) \in \theta$ parajasti siis, kui leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$ nii, et kehtib tingimus (5.2). Veendume, et θ on kongruents. Selleks kasutame lauset 5.2. On selge, et θ on refleksiivne ja sümmeetriline ning rahuldab tingimust (1). Näitame, et kehtivad ka (2) ja (3).

(2) Olgu $x \leqslant y \leqslant z$, kus $(x, y) \in \theta$ ja $(y, z) \in \theta$. Siis $x \wedge y = x$, $x \vee y = y = y \wedge z$, $y \vee z = z$ ja leiduvad $n, m \in \mathbb{N}$, $w_1, \ldots, w_{n-1}, w_{n+1}, \ldots, w_{m-1} \in L$ nii, et

$$\begin{array}{c} w_0 = x \leqslant w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_{n-1} \leqslant y = w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant w_{m-1} \leqslant z = w_m \ \text{ ja} \\ (\forall i \in \{0, \ldots, m-1\})((w_i, w_{i+1}) \in \rho \ \text{ või } \ (w_i, w_{i+1}) \in \sigma). \end{array}$$

Järelikult $(x, z) \in \theta$.

(3) Olgu $x \leqslant y$ ja $(x, y) \in \theta$. Siis leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_{n-1} \in L$ nii, et

$$x = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1} \leqslant z_n = y \text{ ja}$$
$$(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})((z_i, z_{i+1}) \in \rho \text{ või } (z_i, z_{i+1}) \in \sigma).$$

Mistahes $t \in L$ korral siis

$$x \wedge t = z_0 \wedge t \leqslant z_1 \wedge t \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1} \wedge t \leqslant z_n \wedge t = y \wedge t \text{ ja}$$
$$(\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})((z_i \wedge t, z_{i+1} \wedge t) \in \rho \text{ või } (z_i \wedge t, z_{i+1} \wedge t) \in \sigma).$$

Järelikult $(x \wedge t, y \wedge t) \in \theta$. Analoogiliselt saab tõestada, et $(x \vee t, y \vee t) \in \theta$.

Lause 5.2 põhajl on θ kongruents. Näitame, et ta on ρ ja σ ülemine raja.

Kui $(x, y) \in \rho$, siis lause 1.28 põhjal ka $(x \wedge y, x \vee y) \in \rho$. Seega $(x, y) \in \theta$ ja $\rho \subseteq \theta$. Analoogiliselt $\sigma \subseteq \theta$.

Olgu $\tau \in \mathsf{Con}L$ selline, et $\rho \subseteq \tau$ ja $\sigma \subseteq \tau$. Olgu $(x, y) \in \theta$. Siis leiduvad elemendid, mis rahuldavad tingimust (5.2). Iga $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral $(z_i, z_{i+1}) \in \tau$ ja kongruentsi τ transitiivsuse tõttu $(x \wedge y, x \vee y) \in \tau$. Lause 1.28 põhjal ka $(x, y) \in \tau$. Seega $\theta \subseteq \tau$ ning oleme näidanud, et $\theta = \rho \vee \sigma$. □

Teoreem 5.4 *Iga võre kongruentside võre on distributiivne.*

TÕESTUS. Olgu $\theta, \rho, \sigma \in \mathsf{Con}L$. Siis

$$(\theta \wedge \rho) \vee (\theta \wedge \sigma) \subseteq \theta \wedge (\rho \vee \sigma).$$

Näitame, et

$$\theta \wedge (\rho \vee \sigma) \subseteq (\theta \wedge \rho) \vee (\theta \wedge \sigma).$$

Olgu $(x, y) \in \theta \wedge (\rho \vee \sigma) = \theta \cap (\rho \vee \sigma)$. Siis $(x, y) \in \theta$ ja $(x, y) \in \rho \vee \sigma$. Tänu lausele 5.3 leiduvad elemendid, mis rahuldavad tingimust (5.2). Kuna $(x, y) \in \theta$, siis ka $(x \wedge y, x \vee y) \in \theta$. Et lause 1.25 on võre kongruentsiklassid kumerad alamvõred, siis

$$x \wedge y = z_0 \; \theta \; z_1 \; \theta \ldots \theta \; z_{n-1} \; z_n = x \vee y.$$

Seega iga $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ korral

$$(z_i, z_{i+1}) \in \theta \wedge \rho \text{ või } (z_i, z_{i+1}) \in \theta \wedge \sigma$$

ning järelikult

$$(x, y) \in (\theta \wedge \rho) \vee (\theta \wedge \sigma).$$

□

5.3 Kongruentside laiendamine

Selles paragrahvis tahame tõestada, et distributiivsete võrede alamvõrede kongruentse saab laiendada terve võre kongruentsideks.

Definitsioon 5.5 Öeldakse, et võrel L on **kongruentside laiendamise omadus**[1], kui iga alamvõre $K \subseteq L$ ja iga kongruentsi $\rho \in \mathsf{Con}(K)$ korral leidub kongruents $\theta \in \mathsf{Con}(L)$ nii, et

$$(\forall x, y \in K)((x, y) \in \rho \Longleftrightarrow (x, y) \in \theta).$$

Viimase tingimuse võib lühidalt kirja panna kujul

$$\theta \cap (K \times K) = \rho.$$

Lemma 5.6 *Olgu $f : M \longrightarrow L$ võrede homomorfism. Siis võre L iga algideaali P korral on $f^{-1}(P)$ võre M algideaal.*

TÕESTUS. Näitame, et hulk
$$f^{-1}(P) = \{a \in M \mid f(a) \in P\}$$
on võre M ideaal.

1) Olgu $a, b \in f^{-1}(P)$. Siis $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \in P$, sest $f(a), f(b) \in P$ ja P on kinnine ülemiste rajade suhtes. Järelikult $a \vee b \in f^{-1}(P)$.

2) Olgu $a \in f^{-1}(P)$ ja $x \leqslant a$. Siis $f(x) \leqslant f(a) \in P$ ja seega $f(x) \in P$, sest P on allapoole kinnine. Järelikult $x \in f^{-1}(P)$.

Veendume veel, et $f^{-1}(P)$ on algideaal. Olgu $x, y \in M \setminus f^{-1}(P)$. Oletame vastuväiteliselt, et $x \wedge y \in f^{-1}(P)$. Siis $f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y) \in P$. Samas $f(x), f(y) \notin P$, mis on vastuolus sellega, et P on algideaal võres L. Seega $x \wedge y \notin f^{-1}(P)$ ja $f^{-1}(P)$ on algideaal võres M. □

Teoreem 5.7 *Distributiivsetel võredel on kongruentisde laiendamise omadus.*

TÕESTUS. Vaatleme distributiivse võre L alamvõret K, selle kongruentsi ρ ja loomulikku projektsiooni
$$\pi : K \longrightarrow K/\rho, \quad x \mapsto [x]_\rho.$$
Kui P on faktorvõre K/ρ algideaal, siis lemma 5.6 põhjal on $\pi^{-1}(P)$ võre K algideaal. Tänu lemmale 4.14 on $K \setminus \pi^{-1}(P)$ võre K filter. Siis aga hulk $I = \downarrow\pi^{-1}(P)$ on võre L ideaal ja hulk $F = \uparrow (K \setminus \pi^{-1}(P))$ on võre L filter. Tõepoolest, I on allapoole kinnine ja kui $a \leqslant x$, $b \leqslant y$, kus $\pi(x) \in P$ ja $\pi(y) \in P$, siis

$$\pi(a \vee b) \leqslant \pi(x \vee y) = \pi(x) \vee \pi(y) \in P,$$

seega $a \vee b \in \downarrow\pi^{-1}(P) = I$ ja I on kinnine ülemiste rajade suhtes. Analoogiliselt saab kontrollida, et F on L filter.

Oletame, et $x \in I \cap F$. Siis leiduvad $a, b \in K$ nii, et $b \leqslant x \leqslant a$, $\pi(a) \in P$ ja $\pi(b) \notin P$. Kuna P on allapoole kinnine, siis võrratusest $\pi(b) \leqslant \pi(a)$ saame, et $\pi(b) \in P$, mis on vastuolu. Seega $I \cap F = \emptyset$.

Teoreemi 4.15 põhjal leidub võre L algideaal $\overline{P}$ nii, et

$$\pi^{-1}(P) \subseteq \overline{P} \quad \text{ja} \quad (K \setminus \pi^{-1}(P)) \cap \overline{P} = \emptyset. \tag{5.3}$$

[1]kongruentside laiendamise omadus = *congruence extension property*

Nii saame võre K/ρ iga algideaali P jaoks konstrueerida võre L algideaali $\overline{P}$.

Defineerime hulgal L binaarse seose θ järgmiselt:

$$(a,b) \in \theta \Longleftrightarrow (\forall P \in \mathsf{PrId}(K/\rho))(a,b \in \overline{P} \text{ või } a,b \notin \overline{P}).$$

Lihtne on näha, et θ on ekvivalentsiseos. Veendume, et ta on võre L kongruents. Selleks kasutame lemmat 5.1. Olgu $(a,b) \in \theta$, $c \in L$ ning $P \in \mathsf{PrId}(K/\rho)$.

1) Kui $a,b \in \overline{P}$, siis tänu lemmale 1.36 ka $a \wedge c, b \wedge c \in \overline{P}$. Kui $a,b \notin \overline{P}$ ja $c \in \overline{P}$, siis samal põhjusel $a \wedge c, b \wedge c \in \overline{P}$. Kui $a,b \notin \overline{P}$ ja $c \notin \overline{P}$, siis $a \wedge c, b \wedge c \notin \overline{P}$, sest $\overline{P}$ on algideaal. Seega $(a \wedge c, b \wedge c) \in \theta$.

2) Kasutades seda, et $L \setminus \overline{P}$ on algfilter (vt. lauset 4.14) saame näidata, et $(a \vee c, b \vee c) \in \theta$. Niisiis $\theta \in \mathsf{Con}(L)$. Veendume, et

$$\theta \cap (K \times K) = \rho.$$

Olgu $(x,y) \in \rho$, $x,y \in K$. Siis $[x]_\rho = [y]_\rho$. Kui $P \in \mathsf{PrId}(K/\rho)$ ja $[x]_\rho = [y]_\rho \in P$, siis $x,y \in \pi^{-1}(P) \subseteq \overline{P}$. Kui aga $[x]_\rho = [y]_\rho \notin P$, siis $x,y \in K \setminus \pi^{-1}(P)$ ja seega $x,y \notin \overline{P}$ tänu tingimusele (5.3). See näitab, et $(x,y) \in \theta$ ja $\rho \subseteq \theta \cap (K \times K)$.

Vastupidise sisalduvuse näitamiseks olgu $(x,y) \in \theta \cap (K \times K)$. Siis iga $P \in \mathsf{PrId}(K/\rho)$ korral

$$x,y \in \overline{P} \quad \text{või} \quad x,y \notin \overline{P}. \tag{5.4}$$

Oletame, et $[x]_\rho \neq [y]_\rho$ võres K/ρ. Siis järelduse 4.17 põhjal leidub võre K/ρ algideaal P nii, et kehtib üks kahest juhust.

1. $[x]_\rho \in P$ ja $[y]_\rho \notin P$. Siis $x \in \pi^{-1}(P) \subseteq \overline{P}$ ja $y \in K \setminus \pi^{-1}(P)$, kust $y \notin \overline{P}$. See on vastuolus tingimusega (5.4).
2. $[x]_\rho \notin P$ ja $[y]_\rho \in P$. Sellisel juhul saame analoogiliselt vastuolu.

Seega $[x]_\rho = [y]_\rho$ ehk $(x,y) \in \rho$. □

5.4 Distributiivse võre kongruentsid

Selles paragrahvis toome ära veel mõned faktid distributiivse võre kongruentside kohta.

Olgu L võre ja $H \subseteq L \times L$. Siis leidub vähim hulka H sisaldav võre L kongruents, selleks on

$$\theta(H) := \bigcap \{\rho \in \mathsf{Con}(L) \mid H \subseteq \rho\}.$$

Öeldakse, et $\theta(H)$ on **hulga H poolt tekitatud kongruents**[2].

Kongruentse $\theta(a,b) := \theta(\{(a,b)\})$, kus $a,b \in L$, nimetatakse võre L **peakongruentsideks**[3].

Lemma 5.8 *Kui L on võre ja $a,b \in L$, siis $\theta(a,b) = \theta(a \wedge b, a \vee b)$.*

TÕESTUS. Olgu $\rho = \theta(a,b)$. Kuna ρ on kongruents, siis $(a \wedge b, a \vee b) \in \rho$. Seega $\theta(a \wedge b, a \vee b) \subseteq \rho$.

Näitame ka vastupidist sisalduvust. Paneme tähele, et

$$(a, a \vee b) = ((a \wedge b) \vee a, (a \vee b) \vee a) \in \theta(a \wedge b, a \vee b)$$

ning analoogiliselt $(b, a \vee b) \in \theta(a \wedge b, a \vee b)$. Sümmeetria ja transitiivsuse tõttu $(a,b) \in \theta(a \wedge b, a \vee b)$, kust $\rho \subseteq \theta(a \wedge b, a \vee b)$. □

[2]hulga H poolt tekitatud kongruents = *congruence generated by H*

[3]peakongruents = *principal congruence*

Järeldus 5.9 *Võre L kõigil peakongruentsidel on kuju $\theta(u,v)$, kus $u,v \in L$, $u \leqslant v$.*

Distributiivse võre korral saab peakongruentsidele anda lihtsa kirjelduse.

Teoreem 5.10 *Olgu L distributiivne võre, $a,b \in L$ ja $a \leqslant b$. Siis iga $x,y \in L$ korral*

$$(x,y) \in \theta(a,b) \iff x \wedge a = y \wedge a \ \text{ ja } \ x \vee b = y \vee b.$$

Tõestus. Defineerime hulgal L seose ρ järgmiselt:

$$(x,y) \in \rho \iff x \wedge a = y \wedge a \ \text{ ja } \ x \vee b = y \vee b.$$

Lihtne on näha, et ρ on ekvivalentsiseos. Tõestame, et ρ on kongruents. Kui $(x,y) \in \rho$ ja $z \in L$, siis

$$(x \vee z) \wedge a = (x \wedge a) \vee (z \wedge a) = (y \wedge a) \vee (z \wedge a) = (y \vee z) \wedge a$$

ja

$$(x \vee z) \vee b = z \vee (x \vee b) = z \vee (y \vee b) = (y \vee z) \vee b.$$

Järelikult $(x \vee z, y \vee z) \in \rho$. Analoogiliselt saab näidata, et $(x \wedge z, y \wedge z) \in \rho$. Seega ρ on kongruents.

Kuna $a \wedge a = a = b \wedge a$ ja $a \vee b = b = b \vee b$, siis $(a,b) \in \rho$. Seega ρ on kongruents, mis sisaldab paari (a,b), ning järelikult $\theta(a,b) \subseteq \rho$.

Näitame, et ka $\rho \subseteq \theta(a,b)$. Olgu $(x,y) \in \rho$. Siis $x \wedge a = y \wedge a$ ja $x \vee b = y \vee b$. Kuna $(a,b) \in \theta(a,b)$ ja $\theta(a,b)$ on kongruents, siis ka

$$(x \vee a)\ \theta(a,b)\ (x \vee b) \quad \text{ja} \quad (x \wedge b)\ \theta(a,b)\ (x \wedge a).$$

Nüüd

$$\begin{aligned} x &= x \vee (x \wedge a) = x \vee (y \wedge a) = ((x \vee y) \wedge (x \vee a))\ \theta(a,b)\ ((x \vee y) \wedge (x \vee b)) \\ &= (x \vee y) \wedge (y \wedge b) = (y \vee (x \wedge b))\ \theta(a,b)\ (y \vee (x \wedge a)) = y \vee (y \wedge a) = y, \end{aligned}$$

kust transitiivsuse tõttu $(x,y) \in \theta(a,b)$. Seega $\rho \subseteq \theta(a,b)$. □

Lemma 5.11 *Kui L on võre ja $H \subseteq L \times L$, siis*

$$\theta(H) = \bigvee \{\theta(u,v) \mid (u,v) \in H\}.$$

Tõestus. 1) Kui $(u,v) \in H$, siis $\theta(u,v) \subseteq \theta(H)$.

2) Oletame, et $\sigma \in \mathsf{Con}(L)$ on hulga $\{\theta(u,v) \mid (u,v) \in H\}$ ülemine tõke. Siis iga $(u,v) \in H$ korral

$$(u,v) \in \theta(u,v) \subseteq \sigma.$$

Seega $H \subseteq \sigma$, millest järeldub, et $\theta(H) \subseteq \sigma$. □

Lemma 5.12 *Olgu L võre ja*

$$\rho = \bigvee \{\rho_k \mid k \in K\}$$

võres $\mathsf{Con}L$. *Siis $(x, y) \in \rho$ parajasti siis, kui leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_{n-1} \in L$ ja $k_1, \dots, k_n \in K$ nii, et*

$$x = x_0 \; \rho_{k_1} \; x_1 \; \rho_{k_2} \; x_2 \; \dots \; \rho_{k_{n-1}} \; x_{n-1} \; \rho_{k_n} x_n = y.$$

Seega kui $(x, y) \in \rho$, siis leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $k_1, \dots, k_n \in K$ nii, et $(x, y) \in \bigvee\{\rho_{k_1}, \dots, \rho_{k_n}\}$.

TÕESTUS. Selle tõestuse jätame lugejale iseseisvaks läbimõtlemiseks. □

Teoreem 5.13 *Distributiivse võre iga mittetühi ideaal on kongruentsiklass.*

TÕESTUS. Olgu L distributiivne võre ja I selle mittetühi ideaal. Olgu $\rho_I = \theta(I \times I)$ vähim kongruents, mis sisaldab hulka $I \times I \subseteq L \times L$. Näitame, et

$$(x, y) \in \rho_I \iff (\exists i \in I)(x \vee y = (x \wedge y) \vee i).$$

Tarvilikkus. Lemma 5.11 põhjal

$$\rho_I = \bigvee \{\theta(u, v) \mid u, v \in I\}.$$

Kuna mistahes $u, v, u_1, v_1 \in L$ korral

$$\begin{aligned} u \wedge (u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1) &= v \wedge (u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1), \\ u \vee (u \vee v \vee u_1 \vee v_1) &= v \vee (u \vee v \vee u_1 \vee v_1), \end{aligned}$$

siis teoreemi 5.10 tõttu $(u, v) \in \theta(u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1, u \vee v \vee u_1 \vee v_1)$ ning seega peab kehtima $\theta(u, v) \subseteq \theta(u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1, u \vee v \vee u_1 \vee v_1)$. Analoogiliselt $\theta(u_1, v_1) \subseteq \theta(u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1, u \vee v \vee u_1 \vee v_1)$ ja seega

$$\theta(u, v) \vee \theta(u_1, v_1) \subseteq \theta(u \wedge v \wedge u_1 \wedge v_1, u \vee v \vee u_1 \vee v_1)\,.$$

Järelikult lemma 5.12 põhjal

$$\rho_I = \bigcup_{u, v \in I} \theta(u, v).$$

Olgu $(x, y) \in \rho_I$. Siis leiduvad $a, b \in I$ nii, et $(x, y) \in \theta(a, b)$. Tähistades $u := a \wedge b$ ja $v := a \vee b$ on meil $u, v \in I$, $u \leqslant v$ ja tänu lausele 5.8 kehtib võrdus $\theta(a, b) = \theta(u, v)$. Seega $(x, y) \in \theta(u, v)$. Teoreemi 5.10 põhjal $x \vee v = y \vee v$. Kuna $x \leqslant y \vee v$ ja $y \leqslant y \vee v$, siis $x \vee y \leqslant y \vee v$. Järelikult

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \vee (v \wedge (x \vee y)) &= (x \vee v) \wedge (x \vee x \vee y) \wedge (y \vee v) \wedge (y \vee x \vee y) \\ &= (y \vee v) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee v) \wedge (x \vee y) \\ &= (x \vee y) \wedge (v \vee y) \\ &= x \vee y, \end{aligned}$$

kusjuures $v \wedge (x \vee y) \in I$.

Piisavus. Olgu $x \vee y = (x \wedge y) \vee i = (x \vee i) \wedge (y \vee i)$, kus $i \in I$. Kuna

$$(x \vee i) \wedge (y \vee i) = (x \wedge y) \vee i = (x \wedge y) \vee i \vee i = (x \vee y) \vee i = (x \vee i) \vee (x \vee i),$$

siis $x \vee i = y \vee i$. Lisaks sellele

$$x \wedge (x \wedge y \wedge i) = y \wedge (x \wedge y \wedge i),$$

ning seega teoreemist 5.10 järeldub, et $(x, y) \in \theta(x \wedge y \wedge i, i) \subseteq \rho_I$. Järelikult $(x, y) \in \rho_I$.

Võtame mingi $i_0 \in I$ ja näitame, et

$$I = [i_0]_{\rho_I}.$$

Kui $i \in I$, siis $(i, i_0) \in I \times I \subseteq \rho_I$. Seega $I \subseteq [i_0]_{\rho_I}$. Vastupidi, olgu $x \in [i_0]_{\rho_I}$. Siis leidub $j \in I$ nii, et $x \vee i_0 = (x \wedge i_0) \vee j$. Järelikult

$$x = x \wedge (x \vee i_0) = x \wedge ((x \wedge i_0) \vee j) \in I,$$

sest $(x \wedge i_0) \vee j \in I$ ja $x \leqslant (x \wedge i_0) \vee j$. Seega ka $[i_0]_{\rho_I} \subseteq I$. $\square$

Peatükk 6

Boole'i võred

Definitsioon 6.1 Võret L nimetatakse **tõkestatuks**[1], kui temas leidub suurim element 1 ja vähim element 0.

Definitsioon 6.2 Tõkestatud võre L elementi b nimetatakse elemendi a **täiendiks**[2], kui

$$a \wedge b = 0 \quad \text{ja} \quad a \vee b = 1.$$

Definitsioon 6.3 Öeldakse, et tõkestatud võre L on **täienditega**[3], kui selle igal elemendil leidub täiend.

Lemma 6.4 *Tõkestatud distributiivses võres on igal elemendil ülimalt üks täiend.*

TÕESTUS. Olgu L tõkestatud distributiivne võre. Oletame, et b_1 ja b_2 on elemendi a täiendid. Siis

$$b_1 = b_1 \wedge 1 = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = 0 \vee (b_1 \wedge b_2) = b_1 \wedge b_2,$$

kust $b_1 \leqslant b_2$. Analoogiliselt saab näidata, et $b_2 \leqslant b_1$ ja seega $b_1 = b_2$. □

Tõkestatud distributiivses võre elemendi a üheselt määratud täiendit tähistame sümboliga a'. Seega $a \wedge a' = 0$ ja $a \vee a' = 1$.

Definitsioon 6.5 **Boole'i võre**[4] on täienditega distributiivne võre.

Näide 6.6 Kui X on hulk, siis $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ on Boole'i võre. Selles võres hulga $A \subseteq X$ täiend on $A' = X \setminus A$.

Lause 6.7 *Olgu L Boole'i võre. Siis*

1. $0' = 1$ *ja* $1' = 0$;
2. $a'' = a$ *iga* $a \in L$ *korral;*
3. *kehtivad* **de Morgani reeglid**[5]**:** *iga* $a, b \in L$ *korral*

$$(a \vee b)' = a' \wedge b' \quad \text{ja} \quad (a \wedge b)' = a' \vee b';$$

[1] tõkestatud võre = *bounded lattice*
[2] täiend = *complement*
[3] täienditega võre = *complemented lattice*
[4] Boole'i võre = *Boolean lattice*
[5] de Morgani reeglid = *de Morgan laws*

4. *iga $a, b \in L$ korral*
$$a \wedge b = (a' \vee b')' \quad ja \quad a \vee b = (a' \wedge b')';$$

5. *iga $a, b \in L$ korral*
$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \wedge b' = 0.$$

TÕESTUS. 1. Kuna $0 \wedge 1 = 0$ ja $0 \vee 1 = 1$, siis $0' = 1$. Analoogiliselt $1' = 0$.

2. Kui a' on a täiend, siis a' täiend on a, s.t. $a'' = a$.

3. Olgu $a, b \in L$. Siis

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b') \vee (b \wedge a' \wedge b') = (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0,$$
$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b') = (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1 \vee 1 = 1,$$

seega $(a \vee b)' = a' \wedge b'$. Teise võrduse kontroll on analoogiline.

4. See järeldub väidetest 2 ja 3.

5. TARVILIKKUS. Olgu $a \leqslant b$. Siis $a \wedge b = a$ ja seega

$$a \wedge b' = a \wedge b \wedge b' = a \wedge 0 = 0.$$

PIISAVUS. Olgu $a \wedge b' = 0$. Siis

$$a \wedge b = (a \wedge b) \vee 0 = (a \wedge b) \vee (a \wedge b') = a \wedge (b \vee b') = a \wedge 1 = a$$

ja seega $a \leqslant b$. □

Järgnev teoreem annab ühe Boole'i võrede kirjelduse.

Teoreem 6.8 *Tõkestatud võre L on Boole'i võre parajasti siis kui L igal elemendil leidub täpselt üks täiend ja võres L kehtivad de Morgani seadused.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. See on näidatud lemmas 6.4 ja lauses 6.7.
PIISAVUS. Peame näitama, et võre L on distributiivne. Selleks tahame kasutada teoreemi 4.6 tingimust 4.

Kõigepealt näitame, et

$$(\forall x, y \in L)(x \leqslant y \implies x = (x \vee y') \wedge y \text{ ja } y = x \vee (x' \wedge y)). \tag{6.1}$$

Tõepoolest, kui $x \leqslant y$, siis $x \vee (x' \wedge y) \leqslant y$,

$$1 \geqslant (x \vee (x' \wedge y))' \vee y \geqslant (x \vee (x' \wedge y))' \vee (x \vee (x' \wedge y)) = 1,$$

$$(x \vee (x' \wedge y))' \wedge y = x' \wedge (x' \wedge y)' \wedge y = (x' \wedge y) \wedge (x' \wedge y)' = 0,$$

mis tähendab, et $(x \vee (x' \wedge y))' = y'$ ja seega tänu lause 6.7 teisele osale

$$x \vee (x' \wedge y) = y.$$

Kuna $x = x \wedge y$, siis $x' = (x \wedge y)' = x' \vee y'$. Järelikult $y' \leqslant x'$ ning vastavalt eespooltõestatule $x' = y' \vee (y \wedge x')$, millest tänu de Morgani seadustele

$$x = (y' \vee (y \wedge x'))' = y \wedge (y \wedge x')' = y \wedge (y' \vee x) = (x \vee y') \wedge y.$$

Sellega on omadus (6.1) tõestatud.

Oletame nüüd, et $a, b, c \in L$ ja

$$a \wedge c = u = b \wedge c,$$

$$a \vee c = v = b \vee c.$$

Siis $a = a \vee u$ ning tänu omadusele (6.1) kehtib võrdus $c = u \vee (u' \wedge c)$, mistõttu

$$\begin{aligned} a \vee (v' \vee (u' \wedge c)) &= (a \vee u) \vee (v' \vee (u' \wedge c)) \\ &= a \vee v' \vee (u \vee (u' \wedge c)) \\ &= a \vee v' \vee c \\ &= a \vee c \vee v' \\ &= v \vee v' \\ &= 1 \end{aligned}$$

ning analoogiliselt

$$b \vee (v' \vee (u' \wedge c)) = 1.$$

Kuna $c \wedge u' \leqslant c \leqslant v$, siis tingimuse (6.1) põhjal

$$c \wedge u' = ((c \wedge u') \vee v') \wedge v$$

ning seega

$$\begin{aligned} a \wedge (v' \vee (u' \wedge c)) &= a \wedge v \wedge (v' \vee (u' \wedge c)) \\ &= a \wedge c \wedge u' \\ &= u \wedge u' \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analoogiliselt

$$b \wedge (v' \vee (u' \wedge c)) = 0.$$

Kuna nii a kui b on elemendi $v' \vee (u' \wedge c)$ täiendid, siis peavad a ja b eelduse kohaselt võrdsed olema. Teoreemi 4.6 tingimuse 4 põhjal on võre L distributiivne. □

Uurime nüüd Boole'i võrede kongruentse. Meil läheb vaja järgmist abitulemust.

Lemma 6.9 *Kui L on võre, $a, b \in L$ ja $\rho \in \mathsf{Con}L$, siis*

$$(a \wedge b, a) \in \rho \Longleftrightarrow (b, a \vee b) \in \rho.$$

TÕESTUS. Kui $(a \wedge b, a) \in \rho$, siis neelduvuse tõttu ka

$$(b, a \vee b) = ((a \wedge b) \vee b, a \vee b) \in \rho.$$

Vastupidise implikatsiooni tõestus on analoogiline. □

Teoreem 6.10 *Boole'i võre kongruentsid on üksüheses vastavuses selle võre ideaalidega.*

TÕESTUS. Olgu L Boole'i võre. Defineerime kujutuse $f : \mathsf{Con}(L) \longrightarrow \mathsf{Id}(L)$ võrdusega

$$f(\rho) := [0]_\rho.$$

Tänu lausele 1.25 on $[0]_\rho$ võre L kumer alamvõre. Kui $a \in [0]_\rho$, $b \in L$ ja $b \leqslant a$, siis kumeruse tõttu järeldub võrratustest $0 \leqslant b \leqslant a$, et $b \in [0]_\rho$. Seega $[0]_\rho$ on allapoole kinnine ja $[0]_\rho \in \mathsf{Id}(L)$.

Teoreem 5.13 ütleb, et kui $I \in \mathsf{Id}(L)$, siis I on hulga $I \times I$ poolt tekitatud kongruentsi ρ_I klass. Et $0 \in I$, siis

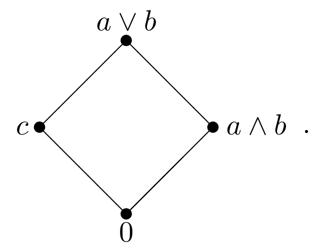
$$f(\rho_I) = [0]_{\rho_I} = I$$

ja seega kujutus f on sürjektiivne.

Näitame, et f on injektiivne. Selleks oletame, et $f(\rho) = f(\sigma)$, $\rho, \sigma \in \mathsf{Con}(L)$, ehk $[0]_\rho = [0]_\sigma$. Elementide $a, b \in L$ korral vaatleme elementi $c = (a \wedge b)' \wedge (a \vee b)$. Siis

$$\begin{aligned}
c \wedge (a \wedge b) &= (a \wedge b) \wedge (a \wedge b)' \wedge (a \vee b) = 0 \wedge (a \vee b) = 0, \\
c \vee (a \wedge b) &= ((a \wedge b)' \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b) = ((a \wedge b)' \vee (a \wedge b)) \wedge ((a \vee b) \vee (a \wedge b)) \\
&= 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b.
\end{aligned}$$

Seega on võres L alamvõre



Nüüd

$$\begin{aligned}
(a, b) \in \rho &\iff (a \wedge b, a \vee b) \in \rho && \text{(lemma 1.28)} \\
&\iff (0, c) \in \rho && \text{(lemma 6.9)} \\
&\iff c \in [0]_\rho.
\end{aligned}$$

Analoogiliselt $(a, b) \in \sigma$ parajasti siis, kui $c \in [0]_\sigma$. Kuna $[0]_\rho = [0]_\sigma$, siis $\rho = \sigma$. $\square$

Peatükk 7

Poolmodulaarsed võred

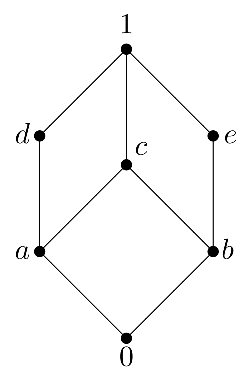
Definitsioon 7.1 Võret L nimetatakse **poolmodulaarseks**[1], kui ta rahuldab ülemist katmistingimust, s.t.

$$(\forall a, b, c \in L)(a \prec b \Longrightarrow a \vee c \preceq b \vee c).$$

Näide 7.2 1. Iga modulaarne võre on poolmodulaarne tänu lausele 3.7.

2. Iga lõpmatu võre, kus ei leidu ühtegi katvat paari ($a \prec b$), on poolmodulaarne.

3. Võre



on poolmodulaarne võre, mis ei ole modulaarne, sest ta sisaldab alamvõret $\{0, a, d, e, 1\}$, mis on isomorfne võrega N_5.

Definitsioon 7.3 Öeldakse, et võre on **lõpliku pikkusega**[2], kui kõik tema maksimaalsed ahelad on lõplikud.

Lemma 7.4 *Mittetühi lõpliku pikkusega võre on tõkestatud.*

TÕESTUS. Olgu L mittetühi lõpliku pikkusega võre ja olgu $a_0 \in L$ suvaline element. Kui oletada, et võres L ei leidu suurimat elementi, siis leidub $a_1 > a_0$, leidub $a_2 > a_1$ jne. Seega tekib lõpmatu ahel

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

mis on vastuolus eeldusega. Seega L sisaldab suurimat elementi ja analoogiliselt saab tõestada, et L sisaldab vähimat elementi. $\square$

[1]poolmodulaarne võre = *semimodular lattice*

[2]lõpliku pikkusega võre = *lattice of finite length*

Näide 7.5 Tõkestatud võre ei pea olema lõpliku pikkusega. Näiteks võre $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ on tõkestatud, kuid mitte lõpliku pikkusega.

Teoreem 7.6 *Lõpliku pikkusega poolmodulaarses võres on mistahes kaks maksimaalset ahelat mistahes kahe elemendi vahel sama pikkusega.*

TÕESTUS. Olgu L lõpliku pikkusega poolmodulaarne võre ja $x, y \in L$. Me tõestame, et kui

$$x = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = y, \tag{7.1}$$

$$x = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n-1} < b_n = y \tag{7.2}$$

on maksimaalsed ahelad, siis $m = n$. Me teeme seda induktsiooniga $\min(m, n)$ järgi.
Alus. Kui $\min(m, n) = 1$, siis $x < y$ on maksimaalne ahel, s.t. ei saa leiduda ühtegi elementi c nii, et $x < c < y$. Seega $m = n = 1$.
Samm. Olgu nüüd $k = \min(m, n) > 1$ (s.t. ahelates (7.1) ja (7.2) on vähemalt kolm elementi) ning eeldame, et väide kehtib elementide ja ahelate puhul, millest lühema pikkus on väiksem kui k. Oletame, et $k = m$ ehk $m \leqslant n$ (kui $k = n$, siis on tõestus analoogiline). Vaatleme kahte juhtu.

1) $a_1 = b_1$. Siis elementide a_1 ja y vahel on maksimaalsed ahelad

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_m = y,$$

$$a_1 < b_2 < \ldots < b_n = y$$

pikkustega vastavalt $m - 1$ ja $n - 1$. Induktsiooni eelduse põhjal $m - 1 = n - 1$, kust $m = n$.

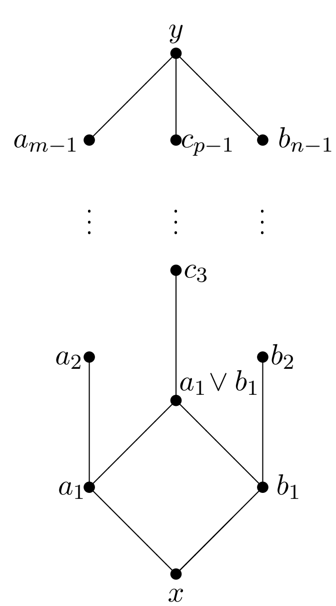
2) $a_1 \neq b_1$. Vaatleme elementi $a_1 \vee b_1$. Ilmselt $a_1 \vee b_1 \neq b_1$, sest vastasel korral $a_1 \leqslant b_1$, kust saaksime ahela

$$x < a_1 < b_1 < \ldots < b_{n-1} < b_n = y,$$

mis on vastuolus ahela (7.2) maksimaalsusega. Seega $b_1 < a_1 \vee b_1$ ja analoogiliselt $a_1 < a_1 \vee b_1$. On selge, et $a_1 \vee b_1 \leqslant y$. Vaatleme nüüd mingit maksimaalset ahelat

$$a_1 \vee c_1 < c_3 < c_4 < \ldots < c_{p-1} < c_p = y.$$

Selline ahel leidub tänu L lõplikule pikkusele.



Kuna L on poolmodulaarne ja $x \prec a_1$, $x \prec b_1$ (tänu ahelate (7.1) ja (7.2) maksimaalsusele), siis

$$b_1 = x \vee b_1 \preceq a_1 \vee b_1 \quad \text{ja} \quad a_1 = x \vee a_1 \preceq b_1 \vee a_1.$$

Et $b_1 \neq a_1 \vee b_1$ ja $a_1 \neq b_1 \vee a_1$, siis

$$b_1 \prec a_1 \vee b_1 \quad \text{ja} \quad a_1 \prec b_1 \vee a_1.$$

Siis a_1 ja y vahel on kaks maksimaalset ahelat

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = y,$$

$$a_1 < a_1 \vee c_1 < c_3 < c_4 < \ldots < c_{p-1} < c_p = y,$$

kusjuures $\min(m-1, p-1) = \min(m,p) - 1 < m = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $m = p$. Kasutades veelkord induktsiooni eeldust elementide b_1 ja y vahel olevate ahelate jaoks saame, et $m = p = n$. $\square$

Lõpliku pikkusega võres L defineerime **kõrgusfunktsiooni**[3] $h : L \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ järgmiselt:

$$h(a) = \text{ pikima maksimaalse ahela pikkus 0 ja } a \text{ vahel} = \operatorname{len}([0,a]).$$

Muuhulgas $h(0) = 0$.

Lause 7.7 *Olgu L lõpliku pikkusega võre, $a, b \in L$ ja $a \leqslant b$.*

1. *Kui $h(b) = h(a) + 1$, siis $a \prec b$.*

2. *Kui L on poolmodulaarne ja $a \prec b$, siis $h(b) = h(a) + 1$.*

TÕESTUS. 1. Olgu $h(a) = m$ ja kehtigu võrdus $h(b) = m + 1$. Siis $a \neq b$ ja leidub maksimaalne ahel

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a.$$

Kui oletada vastuväiteliselt, et $a \not\prec b$, siis leidub $c \in L$ nii, et $a < c < b$. Seega leidub ahel

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a < c < b,$$

mis tähendab, et $h(b) \geqslant m + 2$, vastuolu. Järelikult $a \prec b$.

2. Eeldame, et L on poolmodulaarne ja $a \prec b$. Kui

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a$$

on maksimaalne ahel 0 ja a vahel, siis

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a < b$$

on maksimaalne ahel 0 ja b vahel. Poolmodulaarses võres on kõik maksimaalsed ahelad 0 ja b vahel sama pikkusega (vt. teoreemi 7.6), järelikult $h(b) = m + 1 = h(a) + 1$. $\square$

Järeldus 7.8 *Olgu L lõpliku pikkusega poolmodulaarne võre, $a, b \in L$ ja $a \leqslant b$. Siis*

$$\operatorname{len}([a,b]) = h(b) - h(a).$$

[3]kõrgusfunktsioon = *height function*

TÕESTUS. Olgu
$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = a$$
ja
$$a \prec a_{m+1} \prec a_{m+2} \prec \ldots \prec a_{m+n} = b$$
maksimaalsed ahelad. Siis $\mathrm{len}([a,b]) = n$ ja lause 7.7 põhjal
$$h(b) = h(a_{m+n-1}) + 1 = h(a_{m+n-2}) + 2 = \ldots = h(a) + n = h(a) + \mathrm{len}([a,b]).$$
□

Osutub, et selle kõrgusfunktsiooni abil saab kirjeldada poolmodulaarseid võresid.

Teoreem 7.9 *Olgu L lõpliku pikkusega võre. Siis järgmised väited on samaväärsed.*

(1) L on poolmodulaarne.

(2) Mistahes $a, b, c \in L$ korral, kui $a \wedge b \prec a$ ja $a \wedge b \prec b$, siis $a \prec a \vee b$ ja $b \prec a \vee b$.

(3) Kui $a, b, c \in L$, $a \leqslant b$ ja C on maksimaalne ahel lõigus $[a, b]$, siis $\{x \vee c \mid x \in C\}$ on maksimaalne ahel lõigus $[a \vee c, b \vee c]$.

(4) Mistahes $a, b \in L$ korral
$$h(a \wedge b) + h(a \vee b) \leqslant h(a) + h(b).$$

TÕESTUS. (1) ⇒ (3). Olgu C maksimaalne ahel lõigus $[a, b]$. Tänu poolmodulaarsusele, kui $x \prec y$ ahelas C, siis $x \vee c \preceq y \vee c$ ja seega $\{x \vee c \mid x \in C\}$ on maksimaalne ahel.

(3) ⇒ (1). Eeldame, et (3) kehtib ja $a, b, c \in L$. Kui $a \prec b$, siis $\{a, b\}$ on maksimaalne ahel lõigus $[a, b]$. Eelduse põhjal $\{a \vee c, b \vee c\}$ on maksimaalne ahel lõigus $[a \vee c, b \vee c]$. Seega $a \vee c \prec b \vee c$ või $a \vee c = b \vee c$.

(3) ⇒ (4). Eeldame, et kehtib (3). Siis, nagu nägime, L on poolmodulaarne. Olgu $a, b \in L$ ja olgu C maksimaalne ahel lõigus $[a \wedge b, b]$. Järelduse 7.8 põhjal on $\mathrm{len}(C) = h(b) - h(a \wedge b)$. Tingimusest (3) saame, et $D = \{a \vee x \mid x \in C\}$ on maksimaalne ahel lõigus $[(a \wedge b) \vee a, b \vee a] = [a, a \vee b]$. Ilmselt
$$\mathrm{len}(D) \leqslant \mathrm{len}(C) = h(b) - h(a \wedge b).$$
Järeldusest 7.8 saame, et $\mathrm{len}(D) = h(a \vee b) - h(a)$. Seega $h(a \vee b) - h(a) \leqslant h(b) - h(a \wedge b)$ ehk
$$h(a \wedge b) + h(a \vee b) \leqslant h(a) + h(b).$$

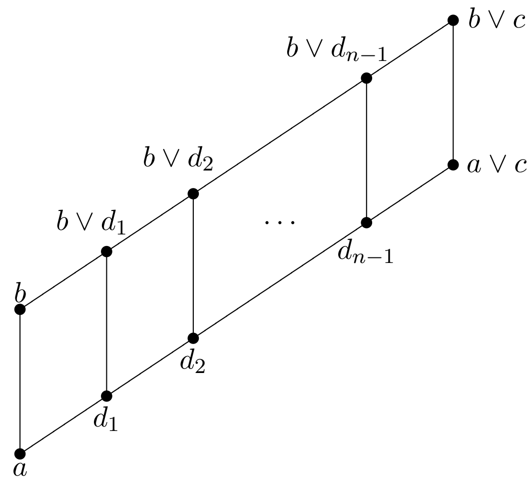
(2) ⇒ (1). Olgu $a, b, c \in L$ ja $a \prec b$. Peame näitama, et $a \vee c \preceq b \vee c$. Vaatleme erinevaid juhtumeid.

1) $c \leqslant a$. Siis $a \vee c = a \prec b = b \vee c$.

2) $b \leqslant a \vee c$. Kuna $c \leqslant a \vee c$, siis $b \vee c \leqslant a \vee c$. Samas võrratusest $a < b$ järeldub, et $a \vee c \leqslant b \vee c$. Seega $a \vee c = b \vee c$.

3) $c \nleqslant a$ ja $b \nleqslant a \vee c$. Olgu
$$a = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{n-1} < d_n = a \vee c$$

maksimaalne ahel lõigus $[a, a \vee c]$.



Kuna $b \not\leqslant a \vee c$, siis $b \neq d_1$. Samas $a \prec b$, $a \prec d_1$ ja $b \wedge d_1 = a$. Tingimuse (2) põhjal $b \prec b \vee d_1$ ja $d_1 \prec b \vee d_1$. Nüüd $b \vee d_1 \neq d_2$, sest $b \not\leqslant a \vee c$ ning $d_1 \prec b \vee d_1$, $d_1 \prec d_2$, $(b \vee d_1) \wedge d_2 = d_1$. Tingimuse (2) tõttu $b \vee d_1 \prec b \vee d_2$ ja $d_2 \prec b \vee d_2$. Analoogiliselt jätkates jõuame selleni, et $d_n \prec b \vee d_n$, kust

$$a \vee c = d_n \prec b \vee d_n = b \vee a \vee c = b \vee c.$$

(4) $\Rightarrow$ (2). Eeldame, et kehtib tingimus (4). Näitame, induktsiooniga $h(x)$ järgi, et tingimus (2) kehtib võre L igas alamvõres $\downarrow x$, kus $x \in L$. Siis võttes $x = 1$ näeme, et (2) kehtib võres $\downarrow 1 = L$.
Alus. Kui $h(x) = 0$, siis $x = 0$ ja ilmselt alamvõre $\downarrow 0 = \{0\}$ rahuldab tingimust (2).
Samm. Olgu $h(x) > 0$ ning eeldame, et tingimus (2) kehtib igas alamvõres $\downarrow y$, kus $y < x$. Olgu $a, b \in \downarrow x$, $a \wedge b \prec a$, $a \wedge b \prec b$ ja $a \neq b$.

Kui oletada, et $a = x$, siis $b \leqslant x = a$ ja $b = a \wedge b \prec b$, mis on vastuolu. Seega $a < x$ ja analoogiliselt $b < x$. Induktsiooni eelduse põhjal rahuldab võre $\downarrow a$ tingimust (2). Nagu eespool näidatud, järeldub sellest, et võre $\downarrow a$ on poolmodulaarne. Kuna selles võres $a \wedge b \prec a$, siis lause 7.7 põhjal $h(a) - h(a \wedge b) = 1$. Tingimusest (4) järeldub, et

$$h(a \vee b) \leqslant h(a) + h(b) - h(a \wedge b) = h(b) + 1.$$

Kui oletada, et $a = a \vee b$, siis $b \leqslant a$, mis annab sarnaselt eelnevaga vastuolu. Seega $a < a \vee b$ ja analoogiliselt $b < a \vee b$. Sellest järeldub, et $h(b) < h(a \vee b)$ ehk $h(b) + 1 \leqslant h(a \vee b)$. Kokkuvõttes $h(b) + 1 = h(a \vee b)$, mis tänu lausele 7.7 tähendab, et $b \prec a \vee b$. Analoogiliselt $a \prec a \vee b$. □

Definitsioon 7.10 Tõkestatud võre L lõplikku aatomite hulka I nimetatakse **sõltumatuks**[4], kui

$$(\forall J, K \subseteq I)(J \cap K = \emptyset \Longrightarrow (\bigvee J) \wedge (\bigvee K) = 0).$$

Teoreem 7.11 *Olgu $I = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mingi aatomite hulk lõpliku pikkusega poolmodulaarses võres. Siis on järgmised väited samaväärsed.*

1. *I on sõltumatu.*

[4]sõltumatu aatomite hulk = *independent set of atoms*

2. $(a_1 \vee \ldots \vee a_i) \wedge a_{i+1} = 0$ *iga* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *korral.*

3. $h(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$.

TÕESTUS. 1. $\Rightarrow$ 2. See on ilmne.

2. $\Rightarrow$ 3. Kuna $0 \prec a_2$, siis $a_1 = a_1 \vee 0 \preceq a_1 \vee a_2$. Kuna $a_1 = a_1 \vee a_2$ pole võimalik, siis $a_1 \prec a_1 \vee a_2$.

Kuna $0 \prec a_3$, siis $a_1 \vee a_2 \preceq a_1 \vee a_2 \vee a_3$. Kui oletada, et $a_1 \vee a_2 = a_1 \vee a_2 \vee a_3$, siis $a_3 \leqslant a_1 \vee a_2$, millest järeldub, et $(a_1 \vee a_2) \wedge a_3 = a_3 \neq 0$. Viimane on vastuolus eeldusega. Järelikult $a_1 \vee a_2 \prec a_1 \vee a_2 \vee a_3$. Nii jätkates saame ahela

$$0 \prec a_1 \prec a_1 \vee a_2 \prec a_1 \vee a_2 \vee a_3 \prec \ldots \prec a_1 \vee \ldots \vee a_n.$$

Kuna see on maksimaalne ahel 0 ja $a_1 \vee \ldots \vee a_n$ vahel, siis $h(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$.

3. $\Rightarrow$ 1. Olgu $J, K \subseteq I$ sellised, et $J \cap K = \emptyset$. Veendume, et

$$h(\bigvee J) = |J|.$$

Oletame üldisust kitsendamata, et $J = \{a_1, \ldots, a_k\}$, kus $k \leqslant n$. Poolmodulaarsuse tõttu

$$0 \prec a_1 \preceq a_1 \vee a_2 \preceq a_1 \vee a_2 \vee a_3 \preceq \ldots \preceq a_1 \vee \ldots \vee a_n.$$

Kui mingil kohal selles ahelas oleks võrdus, siis ei kehtiks võrdus $h(a_1 \vee \ldots \vee a_n) = n$. Seega

$$0 \prec a_1 \prec a_1 \vee a_2 \prec a_1 \vee a_2 \vee a_3 \prec \ldots \prec a_1 \vee \ldots \vee a_k \prec \ldots \prec a_1 \vee \ldots \vee a_n.$$

Seega

$$h(\bigvee J) = h(a_1 \vee \ldots \vee a_k) = k = |J|.$$

Analoogiliselt $h(\bigvee K) = |K|$ ja $h(\bigvee(J \cup K)) = |J \cup K|$. Tänu teoreemile 7.9

$$\begin{aligned}
|J| + |K| &= h(\bigvee J) + h(\bigvee K) \\
&\geqslant h\left((\bigvee J) \wedge (\bigvee K)\right) + h\left((\bigvee J) \vee (\bigvee K)\right) \\
&= h\left((\bigvee J) \wedge (\bigvee K)\right) + h\left(\bigvee (J \cup K)\right) \\
&= h\left((\bigvee J) \wedge (\bigvee K)\right) + |J \cup K| \\
&= h\left((\bigvee J) \wedge (\bigvee K)\right) + |J| + |K|\,.
\end{aligned}$$

Järelikult $h\left((\bigvee J) \wedge (\bigvee K)\right) = 0$ ja seega $(\bigvee J) \wedge (\bigvee K) = 0$. □

Näide 7.12 Viimasest teoreemist järeldub näiteks fakt, et lõplikumõõtmelise vektorruumi vektorid $a_1, \ldots, a_n$ on lineaarselt sõltumatud parajasti siis, kui $\dim(\mathrm{span}(a_1, \ldots, a_n)) = n$.

Peatükk 8

Geomeetrilised võred

Nii nagu algebralised võred tekivad loomulikul viisil seoses algebraliste struktuuridega nii tekivad geomeetrilised võred seoses geomeetriatega.

Definitsioon 8.1 Võret L nimetatakse **geomeetriliseks**[1], kui

GL1. L on poolmodulaarne,

GL2. L on algebraline,

GL3. L kompaktsed elemendid on parajasti L aatomite lõplikud ülemised rajad.

Definitsioon 8.2 Öeldakse, et võre L on **atomistlik**[2], kui selle võre iga nullist erinev element on mingi aatomite hulga ülemine raja.

Lause 8.3 *Võre on geomeetriline parajasti siis, kui L on*

(1) poolmodulaarne,

(2) täielik,

(3) atomistlik,

(4) võre, mille aatomid on kompaktsed.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu võre L geomeetriline. Algebralisusest järeldub täielikkus.

Iga aatom a on hulga $\{a\}$ ülemine raja. Tänu tingimusele GL3 on aatom a kompaktne.

Jääb veel näidata, et L on atomistlik. Kui $x \in L$, siis tänu algebralisusele leiduvad kompaktsed elemendid a_i, $i \in I$ nii, et

$$x = \bigvee_{i \in I} a_i.$$

Tingimuse GL3 tõttu on iga a_i mingite aatomite ülemine raja. Seega on ka x aatomite ülemine raja.

Piisavus. Eeldame, et kehtivad tingimused (1)–(4) ja näitame, et L on geomeetriline võre.

GL1. See kehtib triviaalselt.

GL2. Teame, et L on täielik. Tänu tingimustele (3) ja (4) saab iga L elemendi esitada kompaktsete elementide ülemise rajana. Seega L on algebraline võre.

[1] geomeetriline võre = *geometric lattice*

[2] atomistlik võre = *atomistic lattice*

GL3. Oletame, et $x \in L$ on kompaktne element. Kuna L on atomistlik, siis leiduvad aatomid $a_i, i \in I$ nii, et $x = \bigvee_{i \in I} a_i$. Kompaktsuse tõttu leidub lõplik alamhulk $I_1 \subseteq I$ nii, et $x \leqslant \bigvee_{i \in I_1} a_i$. Kuna

$$\bigvee_{i \in I} a_i = x \leqslant \bigvee_{i \in I_1} a_i \leqslant \bigvee_{i \in I} a_i,$$

siis $x = \bigvee_{i \in I_1} a_i$ ehk x on aatomite lõplik ülemine raja.

Vastupidi, oletame, et x on aatomite lõplik ülemine raja:

$$x = a_1 \vee \ldots \vee a_n,$$

kus $a_1, \ldots, a_n$ on aatomid. Näitame, et x on kompaktne. Selleks oletame, et $x \leqslant \bigvee X$, kus $X \subseteq L$ on mingi hulk. Siis ka $a_i \leqslant \bigvee X$ iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Et aatomid on kompaktsed, siis iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ jaoks leidub lõplik alamahulk $X_i \subseteq X$ nii, et $a_i \leqslant \bigvee X_i$. Siis aga

$$x \leqslant (\bigvee X_1) \vee \ldots \vee (\bigvee X_n) = \bigvee (X_1 \cup \ldots \cup X_n),$$

kus hulk $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ on lõplik. Seega x on kompakte. □

Definitsioon 8.4 Hulka A koos sulundioperaatoriga $^- : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A), X \mapsto \overline{X}$ nimetatakse **geomeetriaks**[3], kui on täidetud järgmised tingimused.

G1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ja iga $a \in A$ korral $\overline{\{a\}} = \{a\}$.

G2. Kui $x \in \overline{X \cup \{y\}}$, aga $x \notin \overline{X}$, siis $y \in \overline{X \cup \{x\}}$.

G3. Kui $x \in \overline{X}$, siis leidub lõplik alamhulk $X_1 \subseteq X$ nii, et $x \in \overline{X_1}$.

Näide 8.5 Näiteks 7 punkti ja 7 sirgega Fano tasand[4] rahuldab neid geomeetria aksioome.

Lemma 8.6 *Kui $^-$ on sulundioperaator hulgal A ja $X, Y \subseteq A$, siis $\overline{\overline{X} \cup \overline{Y}} = \overline{X \cup Y}$.*

TÕESTUS. Kuna $X \cup Y \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$, siis $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{\overline{X} \cup \overline{Y}}$.

Vastupidi, kuna $\overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y}$ ja $\overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$, siis $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$ ja seega

$$\overline{\overline{X} \cup \overline{Y}} \subseteq \overline{\overline{X \cup Y}} = \overline{X \cup Y}.$$

□

Kui hulgal A on antud geomeetria, siis võib vaadelda sulundioperaatori $^-$ suhtes kinniste alamhulkade võret

$$L = \{X \subseteq A \mid \overline{X} = X\},$$

kus alumisteks rajadeks on ühisosad, ülemised rajad on antud valemiga

$$X \vee Y = \overline{X \cup Y}$$

ning järjestusseoseks on sisalduvusseos. Tänu aksioomile G1 sisaldab võre L vähimat elementi $\emptyset$ ning alamhulgad $\{a\}$, $a \in A$ on võre L aatomiteks.

Kinniseid alamhulki geomeetrias kutsutakse **alamruumideks**[5]. Öeldakse, et alamruum $\overline{X}$ on tekitatud hulga X poolt.

[3] geomeetria = *geometry*

[4] Fano tasand = *Fano plane*

[5] alamruum = *subspace*

Teoreem 8.7 *Iga geomeetria kinniste alamhulkade võre on geomeetriline.*

TÕESTUS. Olgu $(A, ^-)$ geomeetria ja vaatleme võret $L = \{X \subseteq A \mid \overline{X} = X\}$. Selle võre geomeetrilisuse kontrollimiseks kasutame lauset 8.3.

(1) Näitame, et võre L on poolmodulaarne. Tõestame kõigepealt, et mistahes $X, Y \in L$ korral

$$X \prec Y \iff (\exists y \in A \setminus X)(Y = \overline{X \cup \{y\}})\,. \tag{8.1}$$

Eeldame, et $X \prec Y$. Siis $X \subset Y$ ja seega leidub $y \in Y \setminus X$. Siis aga $X \subset X \cup \{y\} \subseteq Y$, kust

$$X \subset \overline{X \cup \{y\}} \subseteq \overline{Y} = Y.$$

Kuna $\overline{X \cup \{y\}} \in L$ ja $X \prec Y$ võres L, siis $\overline{X \cup \{y\}} = Y$.

Vastupidi, eeldame, et $Y = \overline{X \cup \{y\}}$, kus $y \notin X$. Oletame, et $X \subset Z \subseteq Y$, kus $Z \in L$. Siis leidub mingi $z \in Z \setminus X$. Kuna $z \notin X = \overline{X}$, kuid $z \in \overline{X \cup \{y\}} = Y$, siis aksioomi G3 põhjal $y \in \overline{X \cup \{z\}} \subseteq \overline{Z} = Z$. Siis aga $X \cup \{y\} \subseteq Z$ ja

$$Y = \overline{X \cup \{y\}} \subseteq \overline{Z} = Z \subseteq Y.$$

Järelikult $Y = Z$ ja $X \prec Y$. Sellega on tõestatud omadus (8.1).

Veendume, et L rahuldab ülemist katmistingimust. Olgu $X, Y, U \in L$ ja $X \prec Y$, kusjuures $Y = \overline{X \cup \{y\}}$, $y \notin X$. Siis

$$\begin{aligned} X \vee U &= \overline{X \cup U}, \\ Y \vee U &= \overline{X \cup U \cup \{y\}}. \end{aligned}$$

On kaks võimalust.
1) $y \in \overline{X \cup U}$. Siis $X \vee U = Y \vee U$.
2) $y \notin \overline{X \cup U}$. Lemma 8.6 tõttu

$$\overline{(X \vee U) \cup \{y\}} = \overline{\overline{X \cup U} \cup \overline{\{y\}}} = \overline{X \cup U \cup \{y\}} = Y \vee U.$$

Tänu tingimusele (8.1) peab kehtima $X \vee U \prec Y \vee U$.
Sellega on tõestatud võre L poolmodulaarsus.

(2) Tänu teoreemile 2.14 on võre L täielik.

(3) Kui $X \in L$, siis

$$X = \overline{X} = \overline{\bigcup_{x \in X} \{x\}} = \bigvee_{x \in X} \{x\}.$$

Seega iga L element on aatomite ülemine raja ja võre L on atomistlik.

(4) Näitame, et elemendid $\{a\}$, $a \in A$ on kompaktsed võres L. Oletame, et

$$\{a\} \subseteq \bigvee_{i \in I} X_i = \overline{\bigcup_{i \in I} X_i},$$

kus $X_i \in L$ iga $i \in I$ korral. Siis tingimuse G3 tõttu leidub lõplik alamhulk $I_1 \subseteq I$ nii, et $\bigcup_{i \in I_1} X_i \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$ ja $a \in \overline{\bigcup_{i \in I_1} X_i}$ ehk

$$\{a\} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I_1} X_i} = \bigvee_{i \in I_1} X_i,$$

kus $X_i \in L$ iga $i \in I_1$ korral. Seega $\{a\}$ on kompaktne. $\square$

Teoreem 8.8 *Iga geomeetriline võre on isomorfne mingi geomeetria kinniste alahulkade võrega.*

TÕESTUS. Olgu L geomeetriline võre ja olgu A selle võre kõigi aatomite hulk. Kui $X \subseteq A$, siis tähistame

$$\overline{X} = \{a \in A \mid a \leqslant \bigvee X\} \subseteq A.$$

Veendume, et nii tekib sulundioperaator hulgal A. On selge, et $X \subseteq \overline{X}$ ja et kui $X \subseteq Y$, siis $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. Näitame, et

$$(\forall X \subseteq A)(\bigvee X = \bigvee \overline{X}). \tag{8.2}$$

Võrratus $\bigvee X \leqslant \bigvee \overline{X}$ on ilmne. Kui $a \in \overline{X}$, siis $a \leqslant \bigvee X$, see tähendab, et $\bigvee X$ on hulga $\overline{X}$ ülemine tõke. Seega $\bigvee \overline{X} \leqslant \bigvee X$.

Tingimusest (8.2) saame, et

$$\overline{\overline{X}} = \{a \in A \mid a \leqslant \bigvee \overline{X}\} = \{a \in A \mid a \leqslant \bigvee X\} = \overline{X}.$$

Seega $^-$ on sulundioperaator hulgal A. Näitame, et meil tekib geomeetria.

G1. On selge, et

$$\overline{\emptyset} = \{a \in A \mid a \leqslant \bigvee \emptyset\} = \{a \in A \mid a \leqslant 0\} = \emptyset$$

ja

$$\overline{\{a\}} = \{b \in A \mid b \leqslant \bigvee \{a\}\} = \{b \in A \mid b \leqslant a\} = \{a\}$$

iga $a \in A$ korral.

G2. Olgu $x, y \in A$, $X \subseteq A$, $x \in \overline{X \cup \{y\}}$ ja $x \notin \overline{X}$. Siis $x \nleqslant \bigvee X$ ja $x \leqslant \bigvee (X \cup \{y\}) = (\bigvee X) \vee y$. Kasutades seda, et $0 \prec y$, ja poolmodulaarsust saame, et

$$\bigvee X = (\bigvee X) \vee 0 \prec (\bigvee X) \vee y. \tag{8.3}$$

Kuna $(\bigvee X) \vee y$ on ülemine tõke elementidele x ja $\bigvee X$, siis $(\bigvee X) \vee x \leqslant (\bigvee X) \vee y$. Et $x \nleqslant \bigvee X$, siis $\bigvee X \neq (\bigvee X) \vee x$. Järelikult $\bigvee X < (\bigvee X) \vee x \leqslant (\bigvee X) \vee y$. Katmise tõttu (vt. 8.3) peab kehtima võrdus

$$(\bigvee X) \vee x = (\bigvee X) \vee y.$$

Seega $y \leqslant (\bigvee X) \vee y = (\bigvee X) \vee x = \bigvee (X \cup \{x\})$, kust $y \in \overline{X \cup \{x\}}$.

G3. Kuna L on algebraline võre, siis kõik tema aatomid on kompaktsed tänu lausele 8.3. Kui nüüd $a \in \overline{X}$, siis $a \in A$ ja $a \leqslant \bigvee X$, kust kompaktsuse tõttu saame, et $a \leqslant \bigvee X_1$ mingi lõpliku alamhulga $X_1 \subseteq X$ korral. Seega $a \in \overline{X_1}$.

Niisiis $(A, ^-)$ on geomeetria. Vaatleme selle geomeetria kinniste alamhulkade võret

$$L' = \{X \subseteq A \mid \overline{X} = X\}.$$

Defineerime kujutuse $f : L' \longrightarrow L$ võrduega

$$f(X) = \bigvee X.$$

Siis $f(\emptyset) = 0$. Kui $x \in L \setminus \{0\}$, siis leidub alamhulk $B \subseteq A$ nii, et $x = \bigvee B$. Kasutades tingimust (8.2) saame, et $f(\overline{B}) = \bigvee \overline{B} = \bigvee B = x$, mis tähendab, et f on sürjektiivne.

On selge, et f säilitab järjestust. Olgu $X, Y \in L'$ ja $\bigvee X \leqslant \bigvee Y$. Siis iga $x \in X$ korral $x \leqslant \bigvee X \leqslant \bigvee Y$, millet $x \in \overline{Y} = Y$. Seega $X \subseteq Y$. Kuna f on bijektiivne sisestus, siis on ta võrede isomorfism. □

Kasutatud kirjandus

1. G. Grätzer, Lattice Theory: Foundation, Birkhäuser, 2011.
2. B. A. Davey, H. A. Priestly, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 2002.
3. V. Kuchmei, Võreteooria, loengukonspekt, sügis 2003.
4. M. Kilp, Algebra II, Tartu, 1998.