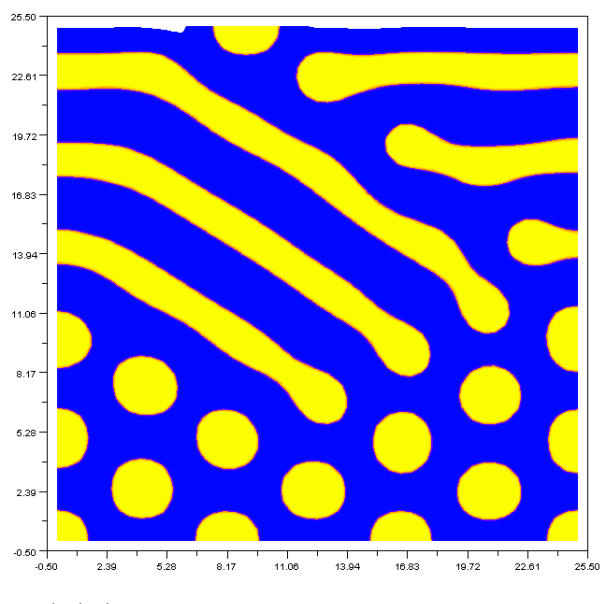


LTMS.00.004

Diferentsiaalvõrrandite
numbriline lahendamine



2018 kevad

LOENGUKONSPEKT

Marek Kolk, Raul Kangro

Sisukord

1	Algtingimustega ülesanded	1
1.1	Mõned põhimõisted	2
1.2	Cauchy ülesande seade	3
1.3	Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesus	5
1.4	I järku harilikud lineaarsed võrrandid *	9
1.5	Euler'i meetod	11
1.6	I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemid	14
1.7	Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid	15
2	Runge-Kutta ühesammulised meetodid	17
2.1	Algtingimusest põhjustatud viga	18
2.2	Sammul tekkiv viga	20
2.3	Meetodi tegelik viga	21
2.4	Trapetsmeetod	25
2.5	Keskpunktimeetod	29
2.6	Ilmutatud Runge-Kutta meetodid	30

Peatükk 2

Runge-Kutta ühesammulised meetodid

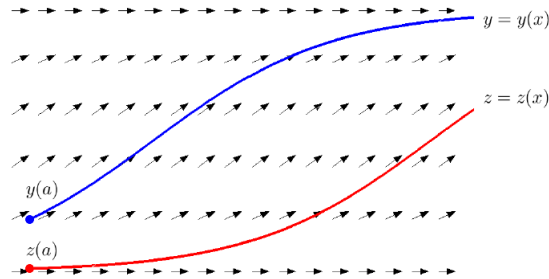
2.1	Algtingimusest põhjustatud viga	18
2.2	Sammul tekkiv viga	20
2.3	Meetodi tegelik viga	21
2.4	Trapetsmeetod	25
2.5	Keskpunktimeetod	29
2.6	Ilmutatud Runge-Kutta meetodid	30

Märksõnad

1. Sammul tekkiv viga ja meetodi tegelik viga.
2. Euler'i meetodi sammul tekkiva vea tuletamine.
3. Cauchy ülesande k -järku meetod.
4. Teoreem 2.1 ja teoreem 2.2.
5. Trapetsmeetod (skeem + geomeetriline kujutamine).
6. Runge-Kutta 4. järku 4-astme meetodi valem.
7. Mõne lihtsama Runge-Kutta meetodi sammul tekkiva vea tuletamine.

2.1 Algtingimusest põhjustatud viga

Vaatleme järgnevalt juhtu, kus antud algtingimuse asemel kasutatakse mingit teist algtingimust. Sellisel juhul tekib meil enamasti kaks erinevat lahendit.



Viimane võib vabalt juhtuda, kui algtingimuseks on irratsionaalarv, nagu näiteks e ja π .

Teoreem 2.1

[18]. Olgu $f(x, y)$ ühtlaselt Lipschitz-pidev muutuja y järgi riskülikus $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ Lipschitz'i konstandiga L . Kui $Y(x)$ ja $Z(x)$ on kaks erinevat lahendit riskülikus S võrrandile

$$y' = f(x, y), \quad (2.1)$$

siis kehtib hinnang

$$|Y(x) - Z(x)| \leq e^{L(x-a)} |Y(a) - Z(a)|, \quad x \in [a, b]. \quad (2.2)$$

Fikseeritud argumenti x korral räägitakse ka **konditsiooniarvust**

$$e^{L(x-a)},$$

mis iseloomustab algtingimusest põhjustatud suurimat võimalikku viga.

Tõestus. Teoreemist 1 järeldub, et kui $Y(a) \geq Z(a)$, siis $Y(x) \geq Z(x) \forall x \in [a, b]$ (sest muidu leiduks riskülikus punkt (x_1, y_1) nii, et $Y(x_1) = Y(x_1) = y_1$ ja $Y(x) < Z(x)$ mingis vahemikus $x \in (x_1, x_1 + \varepsilon)$, kus $\varepsilon > 0$, mis on vastuolus teoreemi tulemusega). Samamoodi järeldub, et kui $Y(a) \leq Z(a)$, siis $Y(x) \leq Z(x) \forall x \in [a, b]$.

Vaatleme juhtu, kus $Y(a) \geq Z(a)$. Defineerime $u(x) = Y(x) - Z(x)$, siis eelneva põhjal $u(x) \geq 0 \forall x$. Sellisel juhul $u'(x) = Y'(x) - Z'(x) = f(x, Y(x)) - f(x, Z(x))$. Funktsiooni f Lipschitz-pidevusest saame, et

$$u'(x) \leq |u'(x)| = |f(x, Y(x)) - f(x, Z(x))| \leq L|Y(x) - Z(x)| = Lu(x).$$

Seega

$$u'(x) - Lu(x) \leq 0.$$

Korrutades võrratusi mõlemad pooli suurusega $e^{-L(x-a)}$, saame eelneva võrratuse kirjutada kujul

$$\left(e^{-L(x-a)} u(x) \right)' = 0.$$

Viimast võrratuse mõlemad pooli integreerides üle lõigu $[a, x_1]$ saame

$$e^{-L(x_1-a)} u(x_1) - u(a) \leq 0 \text{ ehk } u(x) \leq e^{L(x-a)} u(a),$$

mis tõestabki vaadeldud juhul teoreemi väite. Teise juhu $Y(a) \leq Z(a)$ analüüs on analoogiline. $\square$

Märkus 2.1

Teoreem 2.1 ütleb meile, et kui me muudame Cauchy ülesandes $y' = f(x, y)$ algtingimuse $y(a) = y_a$ teise suuruse $z(a) = z_a$ vastu, siis algtingimusest põhjustatud viga on halvimal juhul hinnatav suurusega, mis sisaldab lineaarset liiget $|y(a) - z(a)|$ ja eksponentsiaalse kasvuga suurust $e^{L(x-a)}$. Kui algtingimuse viga $|y(a) - z(a)|$ ennast võib pida da “tühiseks”, siis suurus $e^{L(x-a)}$ kasvab x kaugenedes alguspunktist a juba väga kiiresti. Näiteks $L = 1$ korral kasvab $e^{1(x-a)} = e^x$ järgmiselt:

e	e^2	e^4	e^8	e^{16}	e^{32}	e^{64}
2.73	7.39	54.60	2980	8.9×10^6	7.9×10^{13}	6.3×10^{27}

Näiteks, muutes algtingimuse $y(0) = \pi$ suuruseks $z(0) = 3.141592653589793$, teeme standardse topelttäpsusega kümnendarvu esituses arvutites vea $|y(0) - z(0)| \approx 2.4 \times 10^{-16}$. Lipschitz'i konstandi $L = 32$ ja lõigu $[0, 2]$ korral võib algtingimusest põhjustatud viga punktis $x = 2$ halvimal juhul olla võimendunud suuruseni

$$e^{32(2-0)}|y(0) - z(0)| \approx (6.3 \times 10^{27})(2.4 \times 10^{-16}) \approx 1.51 \times 10^{12}.$$

Märgime, et algtingimusest põhjustatud viga on põhiliselt seotud konkreetse Cauchy ülesandega ja mitte niivõrd kasutatava lähismeetodiga. Praktikas peab arvestama, et täpseid arvutusi ei ole enamasti võimalik läbi viia ja seega algtingimusest põhjustatud viga on tihti nullist erinev ning võib teatavatel juhtudel oluliselt rikkuda läbi viidavaid arvutusi.

Näide 2.1 Vaatleme varem toodud algtingimusega ülesannet

$$y' = ky, \quad y(0) = y_0, \quad x \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{R},$$

mille täpne lahend on $y(x) = y_0 e^{kx}$. Lihtne on näha, et

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |ky_1 - ky_2| \leq |k| |y_1 - y_2|$$

ja järelikult on Lipschitz'i konstant $L = |k|$ ning f on Lipschitz-pidev piirkonnas $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$. Teoreem 2.1 annab meile punktis $x = 1$ algtingimusest põhjustatud vea hinnanguks

$$|y(1) - z(1)| \leq e^{|k|} |y_0 - z_0|.$$

Paneme tähele, et täpsete lahendite $y(x) = y_0 e^{kx}$ ja $z(x) = z_0 e^{kx}$ korral saame

$$|y(1) - z(1)| = e^k |y_0 - z_0|.$$

Näeme, et $k > 0$ korral annab teoreem 2.1 meile täpse veahinnangu, ei saa midagi parandada ega tule ka midagi kehvemast. Samas kui $k < 0$ korral saame algtingimusest põhjustatud veaks oluliselt väiksema suuruse

$$|y(1) - z(1)| = e^k |y_0 - z_0| \leq e^0 |y_0 - z_0| = |y_0 - z_0|, \quad k < 0.$$

Viimane ütleb meile, et teoreem 2.1 hindab antud juhul algtingimusest põhjustatud viga tublisti “üle”.

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Veenduge, et kui $a \neq 0$, siis Cauchy ülesande

$$y' = ay + b, \quad y(0) = y_0,$$

kaks erinevat lahendit $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ rahuldavad võrratust (2.2) vastavate algtingimustega $y(0) = y_0$ ja $z(0) = z_0$.

Võrrandi täpseks lahendiks on

$$y(x) = \frac{b}{a}(e^{ax} - 1) + y_0 e^{ax}.$$

2.2 Sammul tekkiv viga

Olgu algtingimustega ülesande

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a, \quad x \in [a, b], \quad (2.3)$$

lähislahendi väärtused y_i sõlmedes x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) leitud mingi ühe ja sama numbrilise meetodiga (näiteks Euler'i meetodiga), kusjuures eeldame, et arvutamine toimub „täpselt“ (ilma ümardamisvigadeta).

Definitsioon 2.1

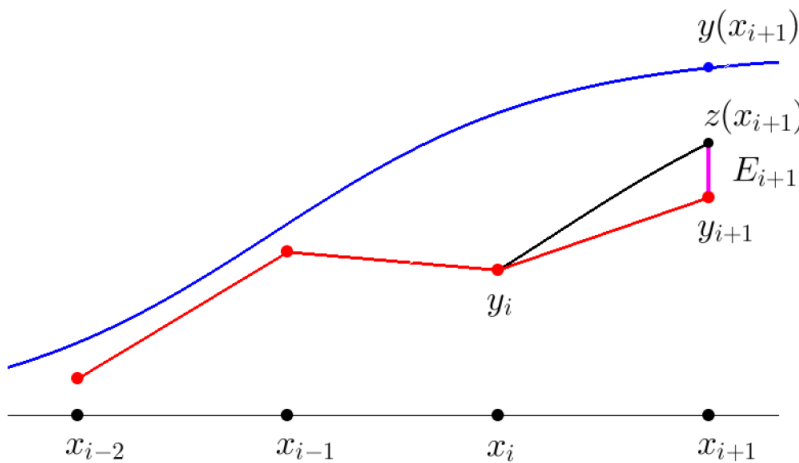
Lähismeetodi (i -ndal) **sammul tekkivaks veaks** nimetame suurust

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - z(x_{i+1})|, \quad (2.4)$$

kus y_{i+1} on selle sama lähismeetodiga leitud ülesande (2.3) lähislahend ja z on alamülesande

$$z' = f(x, z), \quad z(x_i) = y_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (2.5)$$

täpne lahend.



Näide 2.2 Leidke Euler'i meetodi sammul tekkiv viga.

Lahendus. Lihtsuse mõttes eeldame, et ülesande (2.5) täpne lahend z on lõigus $[x_i, x_{i+1}]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv. Arendame lahendi z Taylor'i ritta punktis x_i ,

$$z(x) = z(x_i) + z'(x_i)(x - x_i) + \frac{z''(\xi)}{2!}(x - x_i)^2, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}). \quad (2.6)$$

Teisiti. Sammul tekkiv viga on viga, mis tekib lähislahendi ühekordsel kasutamisel, eeldades, et punktis x_i on algtingimuseks $z(x_i) = y_i$. Sisuliselt lahendame sama võrrandi, kuid teistsuguse algtingimusega.

Levinud on ka definitsioon, kus nõutakse, et kõik eelnevad lähisväärtused $y_0, \dots, y_i$ oleksid võrdsed täpse lahendi väärtustega $y(x_0), \dots, y(x_i)$. Sellisel juhul on alamvõrrandiks (2.5) võrrand

$$y' = f(x, y), \quad y(x_i) = y_i.$$

Sammul tekkiv viga on oluline näiteks selle pärast, et seda on võimalik arvutuste käigus (ligikaudu) leida. Viimane on oluline info meie lähislahendi kvaliteedi hindamisel.

Siit

$$z(x_{i+1}) = z(x_i) + z'(x_i)h + \frac{z''(\xi)}{2}h^2.$$

Kuna $z(x_i) = y_i$ ja $z'(x_i) = f(x_i, z(x_i)) = f(x_i, y_i)$, siis

$$z(x_{i+1}) = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} z''(\xi). \quad (2.7)$$

Arvestades, et Euler'i meetodi korral $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$, siis

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - z(x_{i+1})| = \frac{h^2}{2} |z''(\xi)|, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}). \quad (2.8)$$

Kuna z on osalõigis $[x_i, x_{i+1}]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis

$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |z''(x)| < M_{i+1}$ mingi lõpliku arvu $M_{i+1} > 0$ korral.

Saime, et Euler'i meetodi sammul tekkiva vea kohta kehtib hinnang

$$E_i \leq \frac{M_i}{2} h^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

◇ ◇ ◇

2.3 Meetodi tegelik viga

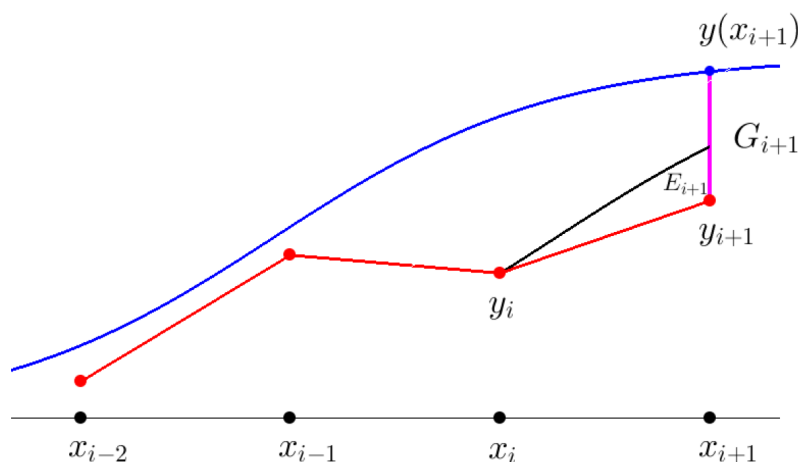
Sammul tekkiv viga ei näita meetodiga saadud lähislahendi tegeliku erinevust täpsest lahendist, kuna y_i ja sellele eelnevad väärtused $(y_0), y_1, \dots, y_{i-1}$ on samuti ligikaudsed ning eelnevalt tehtud sammul tekkinud vead E_i võivad omavahel liituda ja võimenduda.

Definitsioon 2.2

Lähismeetodi **tegelikuks veaks** punktis x_{i+1} nimetatakse viga

$$G_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})|, \quad (2.10)$$

kus y_i on selle sama lähismeetodiga leitud ülesande (2.3) lähislahend ja y täpne lahend.



Järgnev teoreem iseloomustab ühesammuliste lähismeetodite tegeliku vea käitumist Cauchy ülesande (2.3) jaoks.

Teoreem 2.2

[18]. Olgu $f(x, y)$ Lipschitz-pidev muutuja y järgi Lipschitz'i konstandiga L . Olgu täpsele väärtusele $y(x_i)$ leitud vastav lähislahend y_i ühesammulise meetodiga, mille sammul tekkiv viga on hinnatav võrratusega

$$E_i \leq C h^{k+1}, \quad (2.11)$$

kus $k \geq 0$ ja konstant $C > 0$ ei sõltu indeksist i . Siis iga $a \leq x_i \leq b$ korral on meetodi tegelik viga hinnatav võrratusega

$$\mathbf{G}_i = |\mathbf{y}_i - \mathbf{y}(\mathbf{x}_i)| \leq \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{L}} (e^{\mathbf{L}(\mathbf{x}_i - \mathbf{a})} - \mathbf{1}) \mathbf{h}^k. \quad (2.12)$$

Tõestus. Algtingimuse $y(x_0) = y_0$ korral tegelik viga on $G_0 = |y_0 - y(x_0)| = 0$. Pärast esimest sammu on sammul tekkiv viga E_1 ja tegelik viga G_1 võrdsed, $E_1 = G_1 = |y_1 - y(x_1)|$.

Teisel sammul koostame alamülesande

$$z' = f(x, z), \quad z(x_1) = y_1, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Sel juhul sammul tekkiv viga on $E_2 = |y_2 - z(x_2)|$. Järgnevalt kasutame vahe $|z(x_2) - y(x_2)|$ hindamiseks teoreemi 2.1 (meil on sama diferentsiaalvõrrand $y' = f(x, y)$ kahe erineva algtingimusega $y(x_1)$ ja y_1),

$$\begin{aligned} G_2 &= |y_2 - y(x_2)| = |y_2 - z(x_2) + z(x_2) - y(x_2)| \\ &\leq |y_2 - z(x_2)| + |z(x_2) - y(x_2)| \leq E_2 + e^{Lh} G_1 = E_2 + e^{Lh} E_1. \end{aligned}$$

Analoogiliselt saame kolmandal sammul, et

$$G_3 = |y_3 - y(x_3)| \leq E_3 + e^{Lh} G_2 \leq E_3 + e^{Lh} E_2 + e^{2Lh} E_1.$$

Seega

$$G_i = |y_i - y(x_i)| \leq E_i + e^{Lh} E_{i-1} + e^{2Lh} E_{i-2} + \dots + e^{(i-1)Lh} E_1.$$

Kasutades eeldust $E_i \leq C h^{k+1}$, saame

$$G_i \leq C h^{k+1} (1 + e^{Lh} + e^{2Lh} + \dots + e^{(i-1)Lh}).$$

Geomeetrilise rea summa valemist $S_{i-1} = \frac{q^i - 1}{q - 1}$ tuleneb, et

$$G_i \leq C h^{k+1} \frac{e^{iLh} - 1}{e^{Lh} - 1} \leq C h^{k+1} \frac{e^{L(x_i - a)} - 1}{Lh} = \frac{C}{L} (e^{L(x_i - a)} - 1) h^k.$$

□

Definitsioon 2.3

Kui Cauchy ülesande mingi lähismeetodi korral kehtib mingi positiivse h_0 puhul iga $h \leq h_0$ korral võrratus

$$G_i = |y_i - y(x_i)| \leq \Theta h^k, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

kus $\Theta > 0$ ei sõltu suurusest h , siis öeldakse, et see lähismeetod on **k -järku meetod** ($k \geq 0$). Mõnikord me kasutame võrratuse (2.13) asemel kirjutusviisi $G_i = \mathcal{O}(h^k)$ või ütleme, et meetodi viga on järku $\mathcal{O}(h^k)$.

NB! Peale $\mathcal{O}$ -tähistuse on veel olemas o -tähistus, ning need tähendavad erinevaid asju.

Märkus 2.2

Teoreem 2.2 ütleb meile, et meetodi tegelik viga G_i on " h^{-1} korda halvem" kui sammul tekkiv viga E_i . Teisiti, kui sammul tekkiv viga $E_i \leq Ch^{k+1}$, siis tegelik viga $G_i \leq \tilde{C}h^k$.

Märkus 2.3

Teoreem 2.2 lubab tegeliku viga G_i teha kuitahes väikeseks, võttes sammupikkuse h kuitahes väikeseks. Teisalt, tegelik viga punktis b sõltub juba väga tugevalt konstandist $e^{L(b-a)}$, mis kasvab eksponentsiaalse kiirusega.

Teoreetiliselt saame ka suurte b väärtuste korral tegeliku viga teha kuitahes väikeseks, kuid praktiliselt tähendab see väga väikeste sammupikkuste h kasutamist ja see võib osutuda kas siis ebapraktiliseks või lausa võimatuks (arvutites on selle kohta omad piirangud).

Märkus 2.4

Euler'i meetodi korral saime, et sammul tekkiv viga $E_i \leq \frac{M_i}{2}h^2$. Kui vaadeldava ülesande korral on garanteeritud, et suurused M_i on mingi i -st sõltumatu konstandiga tõkestatud, on Euler'i meetod teoreemi 2.2 põhjal esimest järku meetod.

Järeldus 2.1

Olgu $f(x, y)$ pidevalt diferentseeruv muutujate x ja y järgi ristkülikus $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$, mis sisaldab võrrandi $y' = f(x, y)$ huvipakkuvat lahendit $y(x)$, $x \in [a, b]$, kusjuures

$$\alpha < \min_{x \in [a, b]} y(x) \leq \max_{x \in [a, b]} y(x) < \beta.$$

Defineerime

$$L = \max_{(x, y) \in S} |f_y(x, y)|, \quad M = \max_{(x, y) \in S} |f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y)|.$$

Olgu täpsele väärtusele $y(x_i)$ leitud vastav lähilahend y_i Euleri meeto-

Näide 2.3 Hinnata Euler'i meetodi tegelikku viga, kui

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Hindame tegelikku viga ilma ülesande täpset lahendit kasutamata. Kuna iga $x \in [0, 1]$ korral kehtib $y' \leq y + 1$, siis saab näidata, et $y(x) \leq 2e^x - 1$. Seega jävad nii ülesande lahend kui ka Euleri meetodiga leitud lähilahendi väärtused ristkülikusse $S = [0, 1] \times [0, 5]$. Lihtne on näha, et Lipschitz'i konstandiks sobib vaadeldavas piirkonnas $L = 1$. Järelduses 2 esinevat suurust M saame hinnata järgmiselt:

$$M = \max_{(x,y) \in S} |y + 3x^2 + x(xy + x^3)| \leq 5 + 3 + (5 + 1) = 14.$$

Järelduse 2.1 põhjal saame, et

$$G_i = |y_i - y(x_i)| \leq \frac{M}{2L} (e^{L(x_i-a)} - 1) h \leq \frac{7.9}{2} (e^{x_i} - 1) h \leq 14h.$$

Toome lisaks arvulised tulemused.

n	$h = \frac{1}{n}$	$G_n = y_n - y(1) $	G_n/h
16	6.25×10^{-2}	1.11×10^{-1}	1.78
32	3.13×10^{-2}	5.72×10^{-2}	1.83
64	1.57×10^{-2}	2.90×10^{-2}	1.86
128	7.81×10^{-3}	1.46×10^{-2}	1.87
256	3.91×10^{-3}	7.34×10^{-3}	1.88
512	1.95×10^{-3}	3.68×10^{-3}	1.88
1024	9.77×10^{-4}	1.84×10^{-3}	1.88
2048	4.88×10^{-4}	9.21×10^{-4}	1.89
4096	2.44×10^{-4}	4.61×10^{-4}	1.89
8192	1.22×10^{-4}	2.30×10^{-4}	1.89

Näeme tabelist, et täpse lahendi $y(1)$ ja lähilahendi y_n erinevus on ligikaudu kahekordne sammupikkus h , ($1.89h$), mis on väiksem kui järeldusest 2 saadud arvust 14. See on täiesti loomulik erinevus ja ei tekita praktikas probleeme, sest me saame tegelikku viga arvutuste põhjal hinnata (seda vaatleme järgmises loengus).

◇ ◇ ◇

Märkus 2.5

Üldiselt võib öelda, et lähilahendi y_i viga koosneb kolmest osast (lähemalt võib lugeda õpikust [19], näiteks Runge-Kutta meetodite veahinnangu kohta):

1. algtingimuse ebatäpsusest $C_i|y_0 - \tilde{y}_0|$ (vt. teoreem 2.1),
2. tegelikust veast (nn. meetodi veast) $\Theta_i h^k$ (vt. teoreem 2.2),
3. ümardamisvigadest δ_i .

Kui arvutusprotsessis ümardatakse arvutatavaid suurusid, siis sammu h vähenemisel üldiselt kahaneb ka meetodi tegelik viga Θh^k , kuid tavaliselt suurenevad arvutusvead δ . Kui arvutusvead lähevad suuremaks kui sammul tehtav viga ch^{k+1} , siis sammu h vähendamine reeglina enam ei suurenda, vaid tavaliselt isegi vähendab tulemuste täpsust.

Ülesanne. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = (1-x)^\alpha, \quad y(0) = \frac{-1}{1+\alpha}.$$

Selle võrrandi täpne lahend

$$y(x) = -\frac{1}{1+\alpha}(1-x)^{1+\alpha}$$

on küll pidev ja diferentseeruv $\alpha = 0.01$ korral, kuid tema teine tuletis y'' ei ole enam tõkestatud lõigus $[0, 1]$. Veenduda arvutil lahendades (lõigus $[0, 1]$), et veahinnang

$$E_n := \max_{i=0, \dots, n} |y_i - y(x_i)| \leq c \cdot h$$

ei pruugi enam kehtida. Et viga oleks hinnatav kui $c \cdot h$, peaks osalõikude kahekordistamisel viga vähenema umbes kaks korda (s.t. $\delta_n := \frac{E_n}{E_{2n}} \approx 2$). Proovige sama asja näiteks $\alpha \geq 1$ korral.

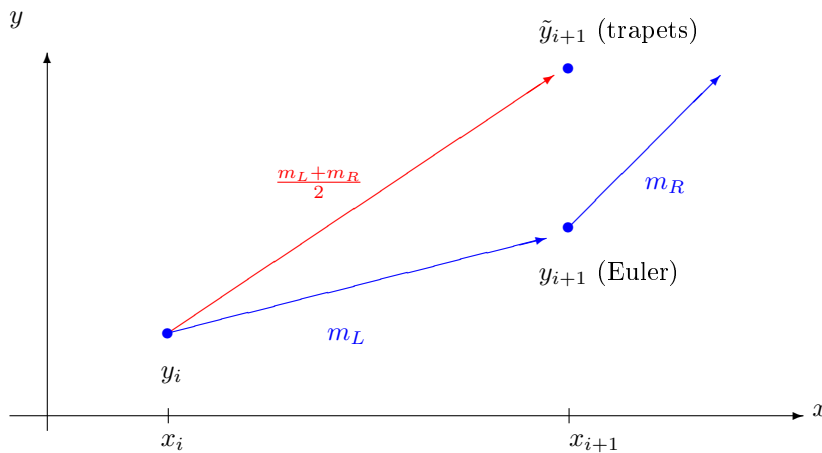
Programmeerimisel lisandub siia juurde nn. "inimlik faktor", mille vastu ei aita ussi-ega püssirohi ... 😊.

2.4 Trapetsmeetod

Väikesed “parandused” Euler’i meetodis lubavad tuletada trapetsmeetodi (vt. [11, 18, 19]), mis on teist järku meetod.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i)) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Trapetsmeetod kannab ka täius-
tatud Euler’i meetodi või siis
Heun’i meetodi nime. Karl He-
un (1859-1929) oli saksa mate-
maatik.



Vaadates diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ kui vektorvälja, liigub Euler’i meetod mööda vektoreid, mille tõus sõlmes x_i on $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$. Tähistame selle $m_L = f(x_i, y_i)$. Analoogiliselt annaks Euler’i meetod järgmises sõlmes x_{i+1} tõusu $m_R = f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Et arvutada väärtust y_{i+1} , kasutame samuti Euler’i meetodiga leitud lähendit (prognoositavat tulemust või siis ka ennustust) $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$. Siit saame, et $m_R = f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))$.

Trapetsmeetod kasutab vektori tõusuks kahe Euler’i meetodiga leitud väärtuse aritmeetilist keskmist $\frac{m_L + m_R}{2}$. Märgime, et trapetsmeetodi nimi on tulnud ühemuutuja funktsiooni $y'(x) = f(x)$ integreerimisest

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y(x_{i+1}) - y(x_i),$$

kus vasakule poole on rakendatud trapetsvalemit

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Pannes need kaks tulemust kokku, saame

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Järgnevalt leiame trapetsmeetodi sammul tekkiva vea

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})|.$$

Lihtsuse mõttes eeldame, et ülesande $y' = f(x, y)$ täpne lahend $y \in C^3[a, b]$. Lisaks eeldame, et lähisväärtus y_i on leitud täpselt. Arendame lahendi y Taylor'i ritta punktis x_i ($x \in [x_i, x_{i+1}]$),

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}(x - x_i)^3, \xi \in (x_i, x_{i+1}). \quad (2.16)$$

Siit

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{6}h^3. \quad (2.17)$$

Diferentseerimise võrrandi $y' = f(x, y)$ mõlemat poolt muutuja x järgi,

$$y''(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + y'(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_x(x, y) + f(x, y) f_y(x, y). \quad (2.18)$$

Võrrand (2.17) teiseneb kujule

$$y(x_{i+1}) = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) \right] + \frac{h^3}{6} y'''(\xi). \quad (2.19)$$

Märkus 2.6

Kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ Taylor'i rida punktis (x_0, y_0) on välja kirjutatav võrdusega (eeldusel, et f_{xy} ja f_{yx} on pidevad punktis (x_0, y_0))

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Kasutame viimase võrrandi jaoks lihtsamat kuju

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} \cdot \left[\right. \\ & f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \\ & \left. \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Trapetsmeetodi jaoks peame liikme $f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))$ arendama Taylor'i ritta punktis (x_i, y_i) . Esiteks

$$f(x, y) = f(x_i, y_i) + f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i) + O(h^2), \quad (2.22)$$

ja teiseks

$$f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i) + h f_x(x_i, y_i) + h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + O(h^2). \quad (2.23)$$

Seega saab trapetsmeetodi (2.15) kirja panna kujul

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))] \\
 &= y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + h f_x(x_i, y_i) + h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + O(h^2)] \\
 &= y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)] + O(h^3).
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Lahutades omavahel võrdused (2.19) ja (2.24), saame sammul tekkivaks veaks

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| = |O(h^3)|. \tag{2.25}$$

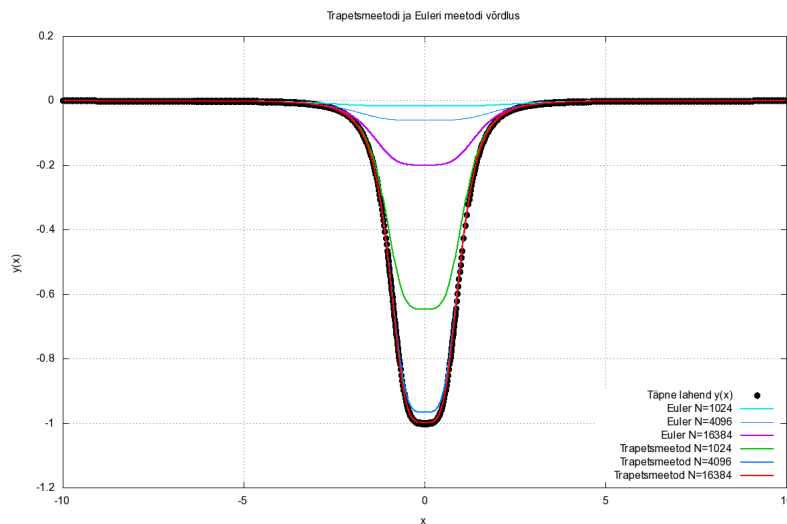
Märkus 2.7

Teoreem 2.2 ütleb meile, et trapetsmeetod on teist järku meetod (tegelik viga $G_i \leq C h^2$).

Näide 2.4 Lahendame algtingimusega ülesande

$$y' = 4x^3 y^2, \quad y(-10) = -\frac{1}{10001}, \quad x \in [-10, 10],$$

Euler'i meetodiga ja trapetsmeetodiga. Selle ülesande täpne lahend $y(x) = -\frac{1}{x^4 + 1}$ on lihtsalt leitav muutujate eraldamise võttega. Tegemist on spetsiaalselt valitud näitega, kus lahend ise on heade omadustega, kuid on nullist oluliselt erinev vaid väikesel osalõigul. Olgu $h = \frac{20}{N}$, kus N on osalõikude arv.



Märgime, et mitte kõik ülesanded ei anna Euler'i ja trapetsmeetodi tulemuste vahel selliseid drastilisi võrdlusi.

Näeme, et Euler'i meetod jääb “nõrgaks” isegi $N = 2^{14} = 16384$ ehk $h \approx 0.00122$ korral (rääkimata suuremate sammude pikkustest). Samal ajal annab trapetsmeetod $N = 2^{10} = 1024$ jaoks juba oluliselt parema tulemuse, kui Euler'i meetod $N = 16384$ korral. Lisaks annab trapetsmeetod $N = 16384$ kasutamisel vähemalt visuaalselt täpsele lahendile lähedase tulemuse.

◇ ◇ ◇

Märkus 2.8

Tekib küsimus, kumb on efektiivsem kasutada:

a) kas teist järku meetodit sammuga h , mille korral tuleb igal sammul teha kaks $f(x, y)$ väärtuse arvutamist, kuid see-eest on sammul tekkiv viga järku Ch^2 .

b) või siis esimest järku meetodit sammu pikkusega $h/2$, mille korral on arvutuste maht sama (igal sammul arvutatakse ainult üks $f(x, y)$ väärtus, kui osalõike on kaks korda rohkem), aga sammul tekkiv viga on järku $C\frac{h}{2}$.

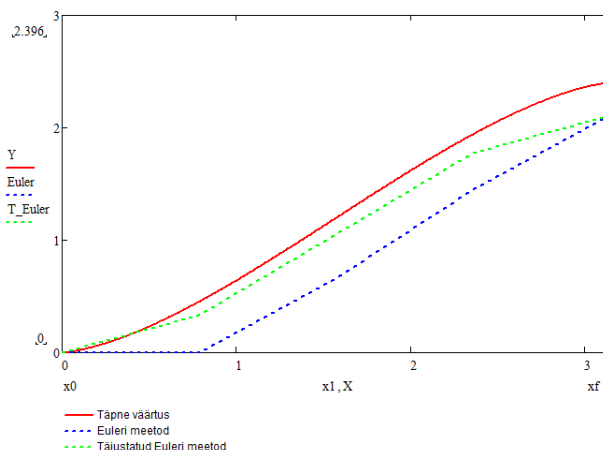
Suurema h korral ei pruugi see valik olla nii ilmne, kuid väiksema h korral langeb eelis selgelt teist järku meetodi kasuks.

Näide 2.5 Alati ei pruugi kõrgemat järku meetodi kasutamine olulist eelist anda, sest mõnes punktis võivad madalamat järku meetodi vead välja taanduda või siis võib võrrand olla selline, et kõrgemat järku meetodi veahinnangud ei kehti (lahed pole piisavalt diferentseeruv). Vaatame Cauchy ülesannet

$$y' = \sqrt{\sin x}, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

Selle ülesande korral juhtub efekt, kus trapetsmeetod ei anna meile paremat tulemust punktis $x = \pi$ (kuigi vahepealsetes punktides annab). Põhjuseks on asjaolu, et võrrandi $y' = f(x)$ lahendamisel lõigul a, b on trapetsmeetodi ja Euleri meetodi väärtuste erinevus punktis $x = b$ võrdne suurusega $\left(\frac{f(b)-f(a)}{2}\right)h$, mis praegusel juhul on võrdne nulliga.

N	Euler'i meetod y_n	$ y_n - y(\pi) $	trapetsmeetod y_n	$ y_n - y(\pi) $
4	2.10628	0.290	2.10628	0.290
8	2.29391	0.102	2.29391	0.102
16	2.36010	0.036	2.36010	0.036
32	2.38349	0.013	2.38349	0.013



Toodud joonisel Euler'i meetodi ja trapetsmeetodi käitumise kohta antud ülesande lahendamisel 4 osalõigu korral näeme, et trapetsmeetod kaotab oma eelise viimasel osalõigul).

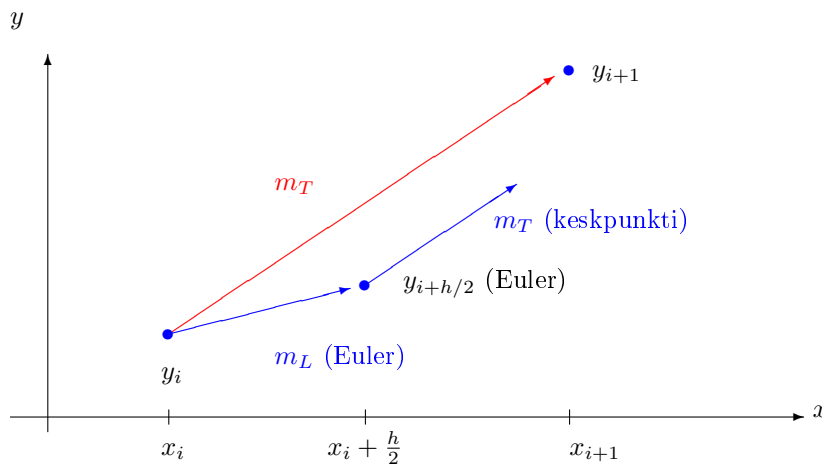
2.5 Keskpunktimeetod

Vaatleme veel ühte nime omavat meetodit - keskpunktimeetodit.

Kui meil on antud samm pikkus h ja vastavad sõlmed x_i , siis keskpunktimeetod on antud valemiga

$$y_{i+1} = y_i + h f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Meetod näeb väga sarnane välja Euler'i meetodiga. Erinevus seisneb selles, et punktist y_i liigutakse mööda vektorit, mille tõus on arvutatud mitte järgmises sõlmes, vaid lõigu $[x_i, x_{i+1}]$ keskpunktis $x_i + \frac{h}{2}$. Vastava lähisväärtuse jaoks kasutatakse Euler'i meetodi „prognooosi“ $y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$.



Leiame keskpunktimeetodi sammul tekkiva vea. Olgu võrrandi $y' = f(x, y)$ lahend lõigus $[a, b]$ vähemalt kolm korda pidevalt diferentseeruv ja olgu y_i leitud täpselt. Analooiliselt trapetsmeetodi juures tehtuga, saame y Taylor'i ritta arendamisel võrduse

$$y(x_{i+1}) = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) \right] + \frac{y'''(\xi)}{6} h^3. \quad (2.27)$$

Meeldetuletuseks, viimane saadakse järgmise skeemiga. Arendame lahendi y Taylor'i ritta sõlmes x_i ,

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}(x - x_i)^3, \quad \xi \in (x_i, x_{i+1}). \quad (2.28)$$

Siit

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{6}h^3. \quad (2.29)$$

Diferentseerime võrrandi $y' = f(x, y)$ mõlemat poolt muutuja x järgi,

$$y''(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_x(x, y) + f(x, y) f_y(x, y). \quad (2.30)$$

Asendades viimase võrdusega y teise tuletise, saamegi valemi (2.27).

Järgnevalt arendame keskpunktimeetodis (2.26) funktsiooni $f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$ Tayloriga ritta punktis (x_i, y_i) ,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \\ &= y_i + h \left(f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f_x(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + O(h^2) \right) \\ &= y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)] + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Lahutades omavahel võrdused (2.27) ja (2.31), saame, et keskpunktimeetodi sammul tekkiv viga võrdub

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| = |O(h^3)|. \quad (2.32)$$

Märkus 2.9

Teoreemi 2.2 järgi tegelik viga $G_i = O(h^2)$ ja järelikult keskpunktimeetod on teist järku meetod.

2.6 Ilmutatud Runge-Kutta meetodid

Cauchy ülesande lahendamisel on väga suurt populaarsust võitnud Runge-Kutta tüüpi meetodid. Osutub, et nii trapetsmeetod kui keskpunktimeetod kuuluvad teist järku ilmutatud (st rakendatavad ilma võrrandisüsteeme lahendamata) Runge-Kutta kaheastmeliste meetodite perre.

Teist järku ilmutatud Runge-Kutta kaheastmelised meetodid.

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) K_{i,1} + \frac{1}{2\alpha} K_{i,2} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.33)$$

kus $\alpha \neq 0$ ning tõusud $K_{i,1}$ ja $K_{i,2}$ arvutatakse järgmiselt:

$$K_{i,1} = f(x_i, y_i), \quad K_{i,2} = f(x_i + \alpha h, y_i + \alpha h K_{i,1}). \quad (2.34)$$

Näeme, et $\alpha = 1$ korral saame trapetsmeetodi ja $\alpha = \frac{1}{2}$ korral keskpunktimeetodi.

Ülesanne. Näidake, et meetod (2.33) on teist järku meetod suvalise $\alpha \neq 0$ korral.

Fikseerides vabalt konstandi $\alpha \neq 0$ näeme, et lisaks Euler'i meetodis arvutatud tõusule $K_{i,1}$ valitakse mingi lisapunkt $x_* = x_i + \alpha h$, arvutatakse vektori tõus punktis $K_{i,2} = f(x_*, y_*)$ ning kogu meetodi jaoks võetakse nende tõusude kaalutud keskmine (kaaludeks on konstandid $1 - \frac{1}{2\alpha}$ ja $\frac{1}{2\alpha}$). Märgime, et väärtuse y_* jaoks kasutatakse Euler'i meetodi prognoosi $y_i + \alpha h K_{i,1}$.

Siinjuures kaheastmeline meetod tähendab seda, et igal sammul arvutatakse kaks korda $f(x, y)$ väärtusi. „Astmete“ rohkus võib saada oluliseks küsimuseks võrrandisüsteemide korral, kus vabaliikme $f(x, y)$ arvutamine nõuab eraldi palju arvutusaega (näiteks, kui peab arvutama numbriliselt integraale või lahendama alamülesandeid).

Esitame ka ühe **3-järku 3-astmelise meetodi**,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [K_{i,1} + 4K_{i,2} + K_{i,3}], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2.35)$$

kus

$$\begin{aligned} K_{i,1} &= f(x_i, y_i), \\ K_{i,2} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,1}\right), \\ K_{i,3} &= f(x_i + h, y_i - h[K_{i,1} - 2K_{i,2}]). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Carl David Tolme Runge
(1856-1927)



www.sciencephoto.com

ja

Martin Wilhelm Kutta
(1867-1944)



foto: Wikipedia
olid saksa matemaatikud. Idee pärineb Rungelt (1895) ja meetodeid on täiustanud Kutta ja teiseid matemaatikud.

Üks populaarsemaid Runge-Kutta meetodeid on järgmine

4. järku 4-astmeline meetod:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} [K_{i,1} + 2K_{i,2} + 2K_{i,3} + K_{i,4}], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (2.37)$$

kus

$$\begin{aligned} K_{i,1} &= f(x_i, y_i), \\ K_{i,2} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,1}\right), \\ K_{i,3} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,2}\right), \\ K_{i,4} &= f(x_i + h, y_i + hK_{i,3}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Neljandat järku meetodis arvutatakse tõusu $f(x, y)$ väärtus peale mõlema otspunkti veel lõigu $[x_i, x_{i+1}]$ keskel, kasutades selleks keskpunktimeetodi abi. Suurem kaal pannakse lõigu keskel saadud tulemustele.

Märkus 2.10

Kirjanduses on tihti levinud Runge-Kutta meetodi kasutamine ilma järku nimetamata. Sel juhul mõeldakse just nimelt 4. järku meetodit (2.37).

Märkus 2.11

Kui me räägime meetodi koonduvuskiirusest, siis näiteks 4. järku meetodi korral tähendab see, et tegelik viga $G_i = |y_i - y(x_i)|$ koondub nulli kui $h \rightarrow 0$ ning selliselt, et iga sammu h kahekordsel vähendamisel kahaneb viga vähemalt $2^4 = 16$ korda (piisavalt väikese sammu pikkuse h korral).

Märkus 2.12

Märgime, et Euler'i meetod on Runge-Kutta 1. järku meetod.

Ülesanne. Vaatleme ülesannet

$$y' = \lambda y,$$

mille täpseks lahendiks on $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$. Esitage lähislahendi y_1 väärtus Runge-Kutta 4. järku meetodiga liikme y_0 kaudu. Võttes y_0 võrdseks ühega, näidake, et sammul tekkinud viga

$$G_1 = y_1 - y(x_1)$$

on järku $\mathcal{O}(h^5)$.

Näide 2.6 Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Võrdleme seni tutvustatud meetoditega tegelikku viga punktis $x = 1$ ehk

$$G_n = |y_n - y(1)|.$$

Tumedalt on trükitud vastavate vigade suhted.

n	$h = \frac{1}{n}$	Euleri G_n	Trapetsi G_n	Keskpunkti G_n	4-järku R-K G_n
16	6.25×10^{-2}	1.1×10^{-1} 1.94	4.1×10^{-4} 3.75	2.5×10^{-3} 3.91	2.2×10^{-7} 16.16
32	3.13×10^{-2}	5.7×10^{-2} 1.97	1.1×10^{-4} 3.87	6.3×10^{-4} 3.95	1.4×10^{-8} 16.09
64	1.57×10^{-2}	2.9×10^{-2} 1.98	2.8×10^{-5} 3.94	1.6×10^{-4} 3.98	8.5×10^{-10} 16.05
128	7.81×10^{-3}	1.5×10^{-2} 1.99	7.1×10^{-6} 3.97	4.0×10^{-5} 3.99	5.3×10^{-11} 16.03
256	3.91×10^{-3}	7.3×10^{-3} 2.00	1.8×10^{-6} 3.98	1.0×10^{-5} 3.99	3.3×10^{-12} 16.00
512	1.95×10^{-3}	3.7×10^{-3} 2.00	4.5×10^{-7} 3.99	2.5×10^{-6} 4.00	2.1×10^{-13} 11.64
1024	9.77×10^{-4}	1.8×10^{-3}	1.1×10^{-7}	6.3×10^{-7}	1.8×10^{-14}

Tabelist on näha, et Runge-Kutta 4. järku meetodi korral on viga oluliselt väiksem (tõttöelda muutub see juba nii väikseks, et masinatäpsuse saavutamine rikub viimase rea „teoreetilise“ tulemuse).

Samuti näeme, et Euler'i meetodi korral väheneb viga sammu pikkuse poolitamisega umbes 2 korda, keskpunkti- ja trapetsmeetodiga 4 korda ja Runge-Kutta 4. järku meetodiga 16 korda.

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Oletame, et funktsiooni f parem pool ei sõltu suurusest y , s.t. $f(t, y) = t(t)$. Näidake, et siis Runge-Kutta 4. järku meetodis $K_2 = K_3$ ning Runge-Kutta 4. järku meetod kujutab endast Simpsoni meetodit integraali $\int_{t_i}^{t_i+h} f(s) ds$ leidmiseks.

Märkus 2.13

Runge-Kutta meetodeid võib tuletada ka kõrgema järgu jaoks, kuid siis tuleb igal sammul teha ka rohkem funktsiooni f arvutamisi. On teada, et minimaalselt tuleb iga järgu m korral teha järgmine arv funktsiooni f väärtuste arvutamist (vt. [8]):

järk m	$f(x, y)$ arvutusi
1	1
2	2
3	3
4	4
5	6
6	7
7	9
8	11

Tabelist on näha, et 4. järku meetod on viimane „efektiivne“ meetod, alates 5. järku meetodist tuleb igal sammul teha rohkem arvutusi, kui on meetodi järk m . Kõrget järku meetodite korral lisandub stabiilsuse probleem, millest räägime lähemalt mitmesammuliste meetodite juures.

Kirjandus

- [1] K. Atkinson, W. Han, D. Stewart. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons 2009.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons 2001.
- [3] H. Ya-Feng, L. Fu-Cheng, F. Wei-Li, D. Li-Fang. Controlling the transition between Turing and anti-spiral patterns by using time-delayed-feedback. Chin. Phys. B Vol. 21, No. 3, 034701, 2012.
- [4] Brandon Keim. Alan Turing's Patterns in Nature, 2011.
- [5] A. Nakamasu, G. Takahashi, A. Kanbe, S. Kondo. Interactions between zebrafish pigment cells responsible for the generation of Turing patterns. Proc. Natl Acad. Sci. USA 106, 8429-8434, 2009.
- [6] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.
- [7] C. Piret. The orthogonal gradients method: A radial basis functions method for solving partial differential equations on arbitrary surfaces. Journal of Computational Physics, Volume 231, Issue 14, 20 May 2012, Pages 4662-4675.
- [8] J. H. E. Cartwright, O. Piro. The Dynamics of Runge-Kutta Methods. University of London, Int. J. Bifurcation and Chaos, 2, 427-449, 1992.
- [9] K. Pärna. Martingaalid (loengukonspekt). Tartu Ülikool, 2006.
- [10] K. Pärna. Tõenäosusteooria algkursus. Tartu Ülikool, 2013.
- [11] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [12] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2016.
- [13] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [14] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.
- [15] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing, Second Edition. Vol. 1 of Fortran Numerical Recipes. Cambridge University Press, reprinted 2001. ISBN 0-521-43064-X.

- [16] I. Saarniit. Matemaatilise füüsika võrrandid (loengukonspekt). Tartu, 2004.
- [17] A. Sanderson, R. M. Kirby, C. R. Johnson, L. Yang. Advanced Reaction-Diffusion models for Texture Synthesis. Jour. of Graphics Tools Vol. 11, No. 3: 47-71, 2006.
- [18] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [19] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [20] E. Tamme, G. Vainikko. Matemaatilise füüsika võrrandid I. Tartu Riiklik Ülikool, 1973.
- [21] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.