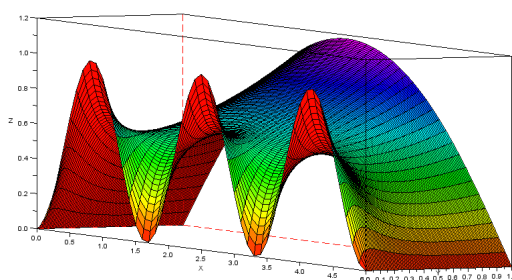
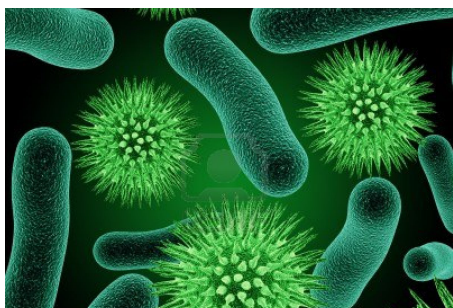


11 1D soojusjuhtivuse võrrand kui populatsiooni mudel

Lihtsamal juhul - näiteks bakterite ja rakkude levimisel, aga ka teatud kalade ja loomade (rohtla-haukurid, *prairie dogs*) korral - levib populatsioon kui soojus, millel on kombeks liikuda külmemalt kehalt soojemale ja omakorda soojemalt kehalt külmemale. Analoogiliselt, populatsiooni arvukus kahaneb võimaluse korral liigtihedatelt aladelt vähemtihedatele aladele ning omakorda on populatsioonil võimalik sobivatel tingimustel vabalt kasvada alal, kus arvukus on madalam. Siinjuures on tähtis roll hõredalt asustatud aladel, sest nii nagu soojus, võib populatsioon halvimal juhul täielikult laiali hajuda ja üldse hääbuda.



11.1 Lineaarne 1-mõõtmeline soojusjuhtivuse populatsiooni mudel

Populatsiooni käitumist kuskil keskkonnas saab lihtsamal juhul modelleerida soojusjuhtivuse võrrandiga (vt. [2])

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + C \cdot u(x, t) \quad (11.1)$$

ehk

$$u_t(x, t) = D \cdot u_{xx}(x, t) + C \cdot u(x, t), \quad x \in [0, b], \quad t \in [0, T], \quad (11.2)$$

kus meie vaadeldud probleemis alghetkel $t = 0$ peab lahend $u(x, t)$ rahuldama algtingimust

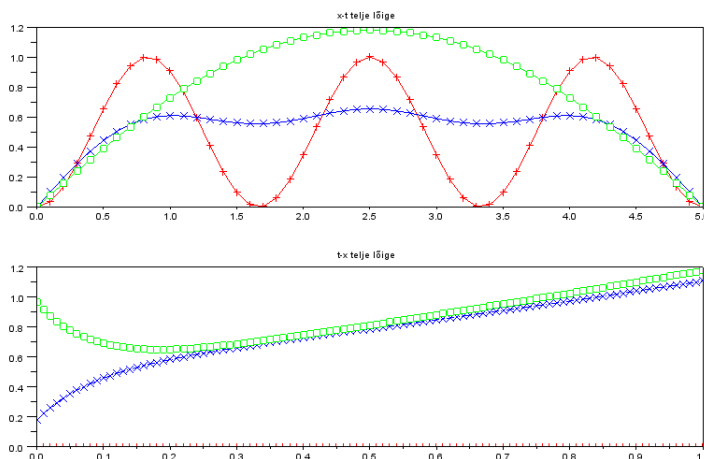
$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad x \in [0, b].$$

Lisaks on antud homogeensed rajatingimused

$$u(0, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

- Funktsioon $u = u(x, t)$ näitab populatsiooni tihedust punktis x ajahetkel t .
- Populatsioon elab kuskil maa-alal, keskkonnas, mille võime lugeda ribaks $[0, b]$ (vastavad elanikkonna arvud on siis riba igas punktis mingid statistilised keskmised).

- Homogeensed Dirichlet' rajatingimused näitavad siin, et populatsioon saab elada vaid piiratud alal $[0, b]$ ning väljaspool seda ta hukkub. Antud juhul ei ole võimalik elada ka rajapunktides $x = 0$ ja $x = b$.
- Liige $D \cdot u_{xx}$ kirjeldab populatsiooni hajumist mööda x -telge, D on difusiooni (hajumise) parameeter.
- Reaktsiooni liige $C \cdot u$ on seotud populatsiooni kasvuga ajas (kiirusega C). Kui difusiooni osa on null, siis tekib klassikaline populatsiooni kasvu mudel $v' = C \cdot v$.
- Populatsiooni käitumine sõltub antud mudeli kohaselt hajumise parameetri D ja ajalise kasvu/kahanemise parameetri C omavahelisest „võitlusest“ ning lisaks sõltub tulemus vaba ruumi suurusest (riba laiusest b) $[0, b]$.



Tegemist on ühe lihtsaima reaktsiooni-difusiooni võrrandiga. Analoomiliste mudelitega saab uurida soojuste levimist, poorses keskkonnas vedeliku ja gaasi filtreerimist (näiteks maa-alustes liivakihtides nafta ja gaasi filtreerumise protsessis), mõningaid tõenäosusküsimusi nagu näiteks juhuslik ekslemine (*random walk*, *Brownian motion*) jne.

11.2 Diferentsmeetod soojusjuhtivuse võrrandi lahendamiseks

1. Valime lõigul $[0, b]$ osalõikude arvu n , sammude pikkuse $\Delta x = \frac{b}{n}$ ja moodustame sõlmed

$$x_i = b \cdot \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

2. Valime ajalõigul $[0, T]$ osalõikude arvu m , sammude pikkuse $\Delta t = \frac{T}{m}$ ja moodustame sõlmed

$$t_j = T \cdot \frac{j}{m}, \quad j = 0, \dots, m.$$

3. Otsime lahendi $u(x, t)$ lähisväärtusi u_{ij} sõlmedes $x_0, \dots, x_n$ ja $t_0, \dots, t_m$. Selleks moodustame $(n+1) \times (m+1)$ -mõõtmelise matriksi

$$u = \left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{u}_{00} & \mathbf{u}_{01} & \mathbf{u}_{02} & \cdots & \mathbf{u}_{0,m} \\ \hline \mathbf{u}_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1,0} & u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,m} \\ \hline \mathbf{u}_{n,0} & \mathbf{u}_{n,1} & \mathbf{u}_{n,2} & \cdots & \mathbf{u}_{n,m} \end{array} \right).$$

Esimese veeru elemendid saame algtingimusest $u_{i,0} = \Phi(x_i)$, $i = 0, \dots, n$. Esimese ja viimase rea elemendid saame rajatingimustest.

4. Lahendame ülesande diferentsmeetodil 2-kihilise ilmutatud skeemiga

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{D}{(\Delta x)^2} \cdot (u_{i-1,j} - 2 \cdot u_{i,j} + u_{i+1,j}) + C \cdot u_{i,j}.$$

5. Tähistades $\sigma = D \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, saame skeemi välja kirjutada kujul

$$u_{i,j+1} = \sigma \cdot u_{i-1,j} + (1 - 2 \cdot \sigma + C \cdot \Delta t) \cdot u_{i,j} + \sigma \cdot u_{i+1,j}$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Matrikskujul näeb see välja järgmine:

$$U_{j+1} = A \cdot U_j + \sigma \cdot \tilde{U}_j, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

või siis teisiti

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ \vdots \\ u_{n-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & \alpha & \sigma & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{n-1,j} \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_{n,j} \end{pmatrix},$$

kus $\alpha = 1 - 2 \cdot \sigma + C \cdot \Delta t$.

6. Toome siinkohal mõned ideed Pythoni kasutamiseks.

```
u = np.zeros( (n+1 , m+1) ) # Lahendi väärtused sõlmedes
A = zeros( (n-1 , n-1) ) # See tuleb veel õigesti täita
# ...
abiv = u[ 1:n , j ] # matriksi u j. veerg ilma rajata
# ...
u[ 1:n , j+1 ] = abiv # matriksi u (j+1). veerg
```

11.3 Praktikumi ülesanne

1. Lahendage ülesanne diferentsmeetodil, kasutades 2-kihilist ilmutatud diferents skeemi. Algingimuseks võtame

$$u(x, 0) = \frac{b}{2} - \left| x - \frac{b}{2} \right| + x \cdot \sin^2 \left(\frac{3 \cdot \pi}{b} \cdot x \right).$$

2. Ajateljel võib kasutada näiteks väärtust $T = 1$. Võtame algul $b = 1$, $D = 1$ ja $C = 9$.
3. NB! Osaloikude arvude n ja m valikul võib olla oluline roll. Tegelikult sõltub tulemus

$$\sigma = D \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

väärtusest. Umbes milline peaks olema σ , et arvutusvead ei hakkaks domineerima?

4. Koostage graafikud lahendi u kohta, lisaks ristlõiked $[x, u]$ ja $[t, u]$ tasandist vastavalt mingite t ja x väärtuste jaoks.
5. Kuna populatsioon muutub ajas, siis oleks kasulik koostada animatsioon, kus lahend muutub ajas. Selleks tuleb lasta muuta tavalist 2D graafikut, kus x -teljel on ruumikoordinaadid ja y -teljel lahendi veeru väärtused. Animatsiooni tegemiseks on võimalik kasutada matplotlib'i vahendit Animation (vt näiteks https://matplotlib.org/api/animation_api.html#).

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
.....
a , b = 0 , 1
figuur = plt.figure()
ax1 = figuur.add_subplot(111)
ax2 = ax1.twinx()

#Loome tühjad jooned, mida me hakkame hiljem täitma,
#joon line2 näitab algtingimust.
line1 , = ax1.plot([], [], 'r-', label="")
line2 , = ax2.plot([], [], 'b-', label="")

ylim1,ylim2=0,np.max(u[:,0])+0.2 #Määrame x ja y telgede piirid.
ax1.set_xlim([a,b])
ax2.set_xlim([a,b])
ax1.set_ylim([ylim1,ylim2])
ax2.set_ylim([ylim1,ylim2])
```

```

def liikuvgraafik(i):
    .....
    #Siin peaks olema kirjeldatud ,
    #kuidas jooned line1 ja line2 muutuvad.

#Paneme animatsiooni kokku.
ani = animation.FuncAnimation(figuur , liikuvgraafik , interval=200)
plt.show()

```

Kui tahta lahendit u korraga näha, siis 3D graafiku kohta võib kasutada järgmisi käskke:

```

figuur = plt.figure()
ax = figuur.add_subplot(111, projection='3d')
y1, x1 = np.meshgrid(t[0:m:50], x)
ax.plot_surface(y1, x1, u[:,0:m:50], linewidth=0,
                antialiased=False, rstride=2, cstride=2, cmap='rainbow')
ax.view_init(20, -150)
plt.show()

```

6. Kuidas käitub populatsioon $C = 11$ korral? Kas see kahaneb või kasvab?
7. Võttes difusiooni parameetri D ja reaktsiooni parameetri C võrdseks ühega, leida väikseim riba laius b , kus pikas perspektiivis populatsioon jääb ellu (s.t. ei sure välja). Soovitav on b väärtusi suurendada.

Viited

- [1] B. Grammaticos, M. Badoual, M. Aubert. An (almost) solvable model for bacterial pattern formation. Physica D 234, 90-97, 2007.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.