

13 Burgers'i võrrand

Vaatleme mittelineaarset difusioonivõrrandit

$$u_t(x, t) + u \cdot u_x(x, t) = Du_{xx}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

kus alghetkel $t = 0$ lahend $u(x, t)$ rahuldab algtingimust

$$u(x, 0) = \frac{2D\beta\pi \sin(\pi x)}{\alpha + \beta \cos(\pi x)}, \quad x \in [0, 1]. \quad (2)$$

ning lisaks on antud rajatingimused

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Võrrandit (13.1) nimetatakse Johannes (Jan) Martinus Burgers'i (1895-1981) järgi Burgers'i võrrandiks. Tegemist on lihtsustatud vedeliku voolamise võrrandiga, kus difusiooniparameeter $D > 0$ kirjeldab vedeliku viskoossust. Liikme $u \cdot u_x$ tõttu on tegemist mittelineaarse võrrandiga.

13.1 Praktikum ülesanded

1. Leidke difusiooniülesande (13.1)-(13.3) lähislahend, parameetrid võtke järgmised:

$$\alpha = 5, \quad \beta = 4, \quad D = 0.05.$$

2. Ülesande (13.1)-(13.3) täpne lahend on

$$u(x, t) = \frac{2D\beta\pi e^{-D\pi^2 t} \sin(\pi x)}{\alpha + \beta e^{-D\pi^2 t} \cos(\pi x)}$$

3. Täitke järgmine tabel (siin $u(0.5, 1)$ on täpne väärtus ja $\tilde{u}(0.5, 1)$ on leitud lähislahendi abil).

Δx	Δt	$u(0.5, 1)$	$\tilde{u}(0.5, 1)$	viga
0.01	0.04			
0.01	0.02			
0.01	0.01			