

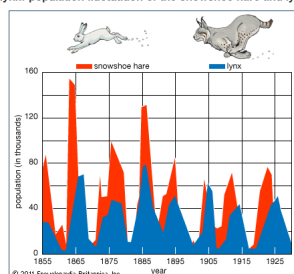
1 Kahe liigi kooslus, kiskja ja saaklooma mudel

Liikide arvukust ajaühikus t iseloomustab algtingimustega diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} J'(t) = A \cdot J(t) - B \cdot J(t) \cdot H(t) \\ H'(t) = -C \cdot H(t) + D \cdot J(t) \cdot H(t) \\ J(0) = J_0 \\ H(0) = H_0 \end{array} \right\}, \quad A, B, C, D > 0, \quad (1.1)$$

kus konstandid A, B, C, D on leitavad näiteks mõõtmiste ja analüüsi teel. Antud süsteemi nimetatakse ka **Lotka-Volterra kiskja ja saaklooma mudeliks** (vt. nt. [1] - [3]).

lynx: population fluctuation of the snowshoe hare and lynx

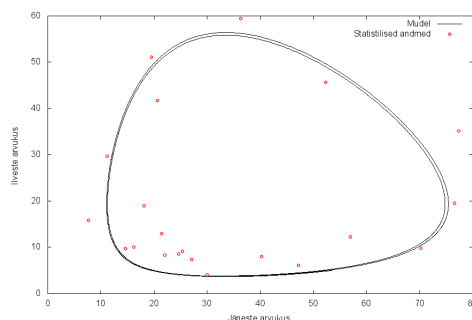
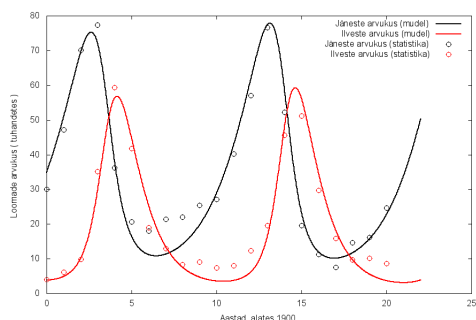


Cyclical fluctuations in the population density of the snowshoe hare and its effect on the population of its predator, the lynx. The graph is based on data derived from the records of the Hudson's Bay Company.

Year	Hares (x1000)	Lynx(x1000)	Year	Hares (x1000)	Lynx (x1000)
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1919	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1920	24.7	8.6
1910	27.1	7.4			

Klassikaliselt võib süsteemi (1.1) kirjeldada järgmiselt:

- $J(t)$ on jäneste arv ajahetkel t , tuletis $J'(t)$ on jäneste arvu muutumise kiirus;
- $H(t)$ on huntide arv ajahetkel t , tuletis $H'(t)$ on huntide arvu muutumise kiirus;
- $AJ(t)$ näitab jäneste arvu kasvamise kiirust huntide puudumisel, näiteks 13% aastas ($0.13J(t)$). Siin ei arvestata toidulauaga seonduvaid probleeme;
- $-CH(t)$ näitab huntide arvu kahanemise kiirust jäneste puudumisel (ei ole, keda süüa);
- $J(t)H(t)$ on proportsionaalne jäneste ja huntide kohtumise tõenäosusega ning konstandid B ja D iseloomustavad selliste kohtumiste mõju vastava liigi arvukusele.



Märkus 1.1

Me kasutame ühte klassikalist näidet Kanada valgejäneste ja ilveste arvukuse kohta 20. sajandi alguses, mille kohta on olemas ka reaalelus mõõdetud suurused. Materjal [3] soovib antud näite jaoks võtta järgmised konstandid:

$$A = 0.48, \quad B = 0.025, \quad C = 0.93, \quad D = 0.028.$$

1.1 Euler'i meetod võrrandite süsteemi jaoks

Vaatleme I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x, y) \\ y'(t) = f_2(t, x, y) \end{cases},$$

algtingimustega

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

1. Viimase saab vektorkujul kirjutada järgmiselt:

$$Y'(t) = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0.$$

Siinjuures Y ja F on kaherealised vektorfunktsioonid.

2. Vektorfunktsiooni saab kirja panna näiteks järgmiselt (Y on siin kaherealine vektor):

```
def F(Y, t):  
    y1 = ...  
    y2 = ...  
    return np.array([y1, y2]) #väljundiks on kahe realine vektor
```

3. Valime osalõigu $[a, b]$, milles ülesannet lahendame.

4. Valime osalõikude arvu $N \in \mathbb{N}$, moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

paberil	arvutis
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$	$\mathbf{t} = \text{np.linspace}(\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{N+1})$

5. Otsime lähilahendit $Y_0, \dots, Y_N$ vastavalt sõlmedes $t_0, \dots, t_N$. Oluline on, et seekord kujutab lahend Y endast $2 \times (N + 1)$ -mõõtmelist maatriksit

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \mathbf{y}_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{pmatrix},$$

kus I reas on funktsiooni $x = x(t)$ lähisväärtused ja II reas on funktsiooni $y = y(t)$ lähisväärtused. Sel juhul Y_i on matriksi i -nda veeru elemendid.

6. Arvutis loome esiteks nullidega täidetud matriksi

```
Y = np.zeros( (2 , N+1) )
```

Seejärel anname I veeru elementidele nende algväärtused,

paberil	arvutis
$Y_{1,1} = x_0$ ja $Y_{2,1} = y_0$	$\mathbf{Y}[:, 0] = [\mathbf{x0}, \mathbf{y0}]$

7. Leiame ülejäänud lähislahendid $Y_2, \dots, Y_N$ Euler'i meetodiga

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{t}_i, \mathbf{Y}_i), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Me täidame matriksit Y veergude kaupa vasakult paremale. Arvestame, et me omistame kogu veeru väärtused korraga.

$$\mathbf{Y}[:, i+1] = \mathbf{Y}[:, i] + \mathbf{h} * \mathbf{F}(\mathbf{Y}[:, i], \mathbf{t}[i])$$

Praktikumi ülesanded

1. Leidke lõigul $[0, 20]$ (aastad 1900-1920) jäneste ja ilveste arvukus $N = 32, 128, 512$ korral.
2. Kandke ühele graafikule jäneste ja ilveste arvukus. Koostage vähemalt üks graafik (ilveste või jäneste kohta), kus näeb tulemusi erinevate N väärtuste jaoks.
3. Koostage jäneste ja ilveste faasidiagramm (x -teljel on jäneste arv, y -teljel ilveste arv).

Viited

- [1] T. H. Fay, J. C. Greeff. Lion, wildebeest and zebra: A predator-prey model. Elsevier, Ecological Modeling 196, 237-244, 2006.
- [2] J. Jensen. Predation and its Consequences: Insights into the Modeling of Interference. Dissertation, Stony Brook University, 2007.
- [3] L. C. Pulley. Analyzing Predator-Prey Models Using Systems of Ordinary Linear Differential Equations. Southern Illinois University Carbondale. Honors Thesis. Paper 344, 2011.