

6 Tacoma Narrows'i rippild

1940. aasta 7. novembril sattus Ameerikas Washingtoni osariigis asuv Tacoma Narrows'i rippild tugeva tuule kätte, mis põhjustas silla peal ja all õhukeeriseid ning sillal tekkisid igapäevasest suuremad horisontaal- ja vertikaalsuunalised võnkumised. Silla konstruktsioon ei pidanud vastu ja ta varises u. 45 minuti jooksul kokku. Silla projekteeris tuntud USA insener Leon S. Moisseiff ja see avati liikluseks vaid viis kuud varem, 1. juulil 1940. aastal.

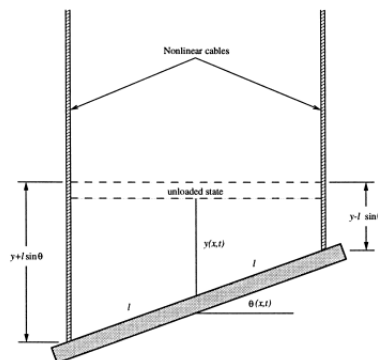
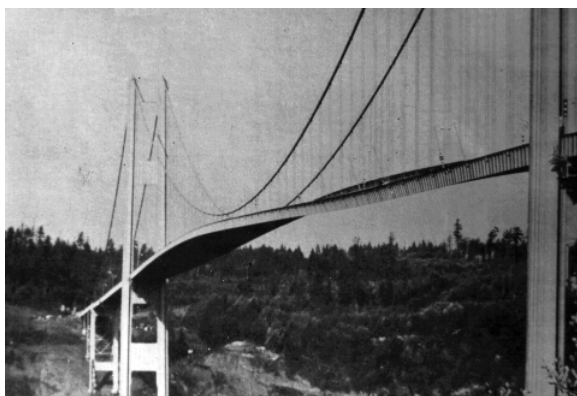


FIG. 2.1. A simple model of the center span and its horizontal cross section.

Vasaku foto allikas: Wikipedia

Põhjuseks on toodud insenerilahendust, mis ei arvestanud tuule piisava läbilaskmisega silla külgedel ning lisaks kasutati silla konstruktsioonis ümarate nurkade asemel liiga järske üleminekuid. Märgime, et silla kokkuvarisemine ei olnud tingitud resonantsist. Selliste õnnetuste vältimiseks on kõige odavam lahendus kasutada arvutimudeleid, kus saab üsna lihtsalt uurida teatud suuruste mõju süsteemi lahendile.

6.1 Silla ristlõike modelleerimine II järku võrrandite süsteemi abil

Silla võnkumist on püüdnud modelleerida paljud teadlased (vt. nt. [1, 2, 3]). Me vaatleme konkreetselt McKenna ja Tuama mudelit õpikust [4]:

$$\begin{aligned} y''(t) &= -d \cdot y'(t) - \frac{K}{m \cdot A} \cdot \left(e^{A \cdot (y(t) - l \cdot \sin(\theta(t)))} + e^{A \cdot (y(t) + l \cdot \sin(\theta(t)))} - 2 \right) + 0.2 \cdot W \cdot \sin(\omega \cdot t), \\ \theta''(t) &= -d \cdot \theta'(t) + \frac{3 \cdot \cos(\theta(t))}{l} \frac{K}{m \cdot A} \cdot \left(e^{A \cdot (y(t) - l \cdot \sin(\theta(t)))} - e^{A \cdot (y(t) + l \cdot \sin(\theta(t)))} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

- Vaatleme sõiduteed laiusega $2l$, mis ripub kahe trossi küljes. Mudelis kasutame ainult silla läbilõiget mingis punktis, arvestamata silla pikkust.

- $y = y(t)$ on silla keskpunkti kõrgus (meetrites) tasakaalu asendi suhtes ajahetkel t sekundit.
- $\theta(t)$ on silla kaldenurk (radiaanides) horisontaalasendi suhtes.
- W km/h on tuule kiirus, $\omega = 2\pi\frac{38}{60}$ on võnkesagedus (vaatleja loendas hetk enne silla kokkuvarisemist 38 vertikaalsuunalist võnkumist minutis). Liidetav $0.2 \cdot W \cdot \sin(\omega \cdot t)$ modelleerib lihtsustatult tuule käitumist.
- Silla teised parameetrid:
 - pool laiust $l = 6$ m,
 - võnkumise sumbumistegur $d = 0.01$ (valides erinevaid insenerilahendusi ja ehitusmaterjale, saab seda muuta),
 - Hooke'i mittelineaarsuse parameeter $A = 0.2$,
 - vedru jäikuse parameeter $K = 1000$ N/m,
 - ühe jala pikkuse tee mass $m = 2500$ kg.

6.2 Adams'i-Bashforth'i ilmutatud meetodid võrrandite süsteemi jaoks

1. Pärast muutujavahetusi $y' = z$ ja $\theta' = \xi$ on meil sisuliselt I järku diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = f_1(t, y, z, \theta, \xi) \\ \theta'(t) = \xi(t) \\ \xi'(t) = f_2(t, y, z, \theta, \xi) \end{cases},$$

mille saab vektorkujul kirjutada lihtsamalt:

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad Y(t_0) = Y_0.$$

Siinjuures Y ja f on 4-realsed vektorfunktsioonid.

2. Vektorfunktsiooni saab kirja panna näiteks järgmiselt:

```
def f(Y, t):
    y1 = ...
    .....
    y4 =
    return np.array([y1, y2, y3, y4]) #väljundiks on neljarealine vektor
```

3. Valime osalõigu $[a, b]$, milles ülesannet lahendame.
4. Valime osalõikude arvu $N \in \mathbb{N}$, moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

paberil	arvutis
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$	$\mathbf{t} = \text{np.linspace}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{N}+1)$

5. Otsime lähislahendit $Y_0, \dots, Y_N$ vastavalt sõlmedes $t_0, \dots, t_N$. Oluline on, et seekord kujutab lahend Y endast $4 \times (N+1)$ -mõõtmelist maatriksit

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{y_0} & y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \mathbf{z_0} & z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_N \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \end{pmatrix}.$$

funktsiooni $y = y(t)$ lähisväärtused
tuletiste $y'(t)$ lähisväärtused
funktsiooni $\theta = \theta(t)$ lähisväärtused
tuletiste $\theta'(t)$ lähisväärtused

Sel juhul Y_i on maatriksi i -nda veeru elemendid.

Arvutis loome esiteks nullidega täidetud maatriksi

```
Y = np.zeros( ( 4 , N+1 ) )
```

Seejärel anname I veeru elementidele nende algväärtused,

arvutis
$\mathbf{Y}[:, 0] = \text{np.array}([\mathbf{y0}, \mathbf{y0t}, \mathbf{theta0}, \mathbf{theta0t}])$

6. Selleks, et saaksime mitmesammulist meetodit kasutada, peame leidma puudu oleva algtabeli Y_1 ja Y_2 elemendid. Need võime leida näiteks trapetsmeetodiga (on 2. järku, sammul tekkiv viga on $O(h^3)$ ja sellest tegelikult piisab), kuid ka igasugune kõrgemat järku Runge-Kutta meetod sobib.

7. Me kogume kokku vabaliikme $f(t, Y)$ väärtused sõlmedes. Selleks moodustame maatriksi

```
F = np.zeros( 4 , N+1 )
F[ : , 0 ] = f( t[ 0 ] , Y[ : , 0 ] ) // algtingimusest
F[ : , 1 ] = f( t[ 1 ] , Y[ : , 1 ] ) // trapetsmeetodiga
F[ : , 2 ] = f( t[ 2 ] , Y[ : , 2 ] ) // trapetsmeetodiga
```

8. Leiame ülejäänud lähislahendid $Y_3, \dots, Y_N$ Adams'i-Bashforth'i meetodiga

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{12} \cdot (23 \cdot f_i - 16 \cdot f_{i-1} + 5 \cdot f_{i-2}), \quad i = 2, \dots, N-1$$

Me täidame maatriksit Y veergude kaupa vasakult paremale. Arvestame, et me omistame kogu veeru väärtused korraga. Siinjuures arvutame igal sammul ka uue F väärtuse.

```
Y[ : , i+1 ] = Y[ : , i ] + h/12*( 23*F[ : , i ] - ...
                               16*F[ : , i-1 ] + 5*F[ : , i-2 ] )
F[ : , i+1 ] = f( t[i+1] , Y[ : , i+1 ] )
```

6.3 Praktikumi ülesanded

1. Kirjutada funktsioon Adams'i-Bashforth'i meetodi jaoks.
2. Olgu meil algtingimused

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0,$$

nurga $\theta(0)$ määrame järgnevas tekstis.

Jälgime ülesannet esimese 20 minuti jooksul ($[a, b] = [0, 1200]$), arvutustes kasutatav samm pikkus võib olla näiteks $h = 0.1$. Milline on olukord, kui tuule kiirus on 50 km/h ja algasendi kaldenurk $\theta(0) = 0.001$ radiaani? Teha eraldi graafikud kõrgusest ja kaldenurgast. Tuul põhjustab sillal vertikaalsuunalise võnkumise (y muutumine), aga kas nn. horisontaalsuunalised võnkumised (θ muutumine) vaibuvad või mitte?

3. Milline on olukord, kui tuule kiirus on 68 km/h (puhus silla kokku varisemise päeval) ja algasendi kaldenurk $\theta(0) = 0.001$ radiaani?
4. Sild on stabiilne, kui horisontaalsuunalised võnkumised hääbuvad. Tacoma Narrows'i silla projekteerimisel arvestati küll vertikaalsuunaliste võnkumistega (sealjuures päris suurtega), kuid horisontaalsuunaliste võnkumiste selline võimendumine tuli suureks üllatuseks. Kas annab olukorda parandada sumbumisteguri suurendamisel ($d = 0.02$ ja $d = 0.04$, saavutatav mingite paremate insenerilahenduste ja materjalide kasutamise abil)?

Viited

- [1] B. A. Fillenwarth. Improving the Mathematical Model of the Tacoma Narrows Bridge. Rose-Hulman Undergraduate Math Journal, 8, no. 2, 2007.
- [2] P.J. McKenna, C. O'Tuama. Large torsional oscillations in suspension bridges revisited yet again: Vertical forcing creates torsional response. Amer. Math. Monthly, 108, pp. 738-745., 2001.
- [3] K. S. Moore. Large torsional oscillations in a suspension bridge: multiple periodic solutions to a nonlinear wave equation. SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 33, no. 6, pp. 1411-1429, 2002.
- [4] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.