

8 Tala paindumine (jätk)

8.1 Praktikumi ülesanne

Olgu 2 meetri pikkune hüppelaud tehtud harilikust ebatsuugast (ingl k. *Douglas fir*, *Oregon pine*). Ebatsuuga tihedus on u. 480 kg/m^3 , Young'i moodul tuleb siis

$$E = 1.3 \cdot 10^{10} \text{ paskalit } (N/m^2).$$

Hüppelaua ristlõike inertsimoment on

$$I = \frac{w \cdot d^3}{12},$$

kus w on laua laius ja d on laua paksus meetrites. Konkreetselt, olgu laius 40 cm ja paksus 2 cm.

Meie rutiinset tööd segab nooruke 150 kg kaaluv tsirkuse gorilla,



Foto allikas: Dragoart.com

kes otsustab suurest uudishimust hüppelaua lahtises otsas all olevat vett uudistada (ütleme, et tema käpakesed hõivavad viimased 30 cm lauast). Meie jaoks tähendab see jõufunktsiooni f :

$$f(x) = -480 \cdot g \cdot w \cdot d - \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1.7 \\ \frac{150}{0.3} \cdot g & , 1.7 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

1. Kukub või ei kuku ?
2. Kuidas muutub olukord, kui hüppelaua laiust või siis hoopis laua paksust suurendatakse kaks korda? Kummal juhul paindub hüppelaud vähem?

9 Vikerkaare mudel

Vikerkaar on inimkonda alati rõõmustanud oma kirevate värvidega ning pikka aega on juureldud vikerkaare tekkimise põhjuste üle. On tähelepanuväärne, et ükski looduslik vikerkaar ei ole sama-sugune, mõnikord puuduvad näiteks punane või sinine toon, mõnikord kollane riba on palju laiem kui roheline, mõnikord vastupidi jne. Samuti ei ole eri vikerkaarte laiused ühesugused. Teoreetiliselt on seda proovinud seletada näiteks Potter, Descartes, Huygens, Newton, Young jt. Osutub, et kõik need erinevused eri vikerkaarte vahel tulenevad valguse difraktsiooni nähtusest.



Foto allikas: Wikipedia

9.1 Airy' difraktsiooni mudel

Vikerkaare matemaatilise kirjelduse andis inglise matemaatik ja astronoom George Biddell Airy (1801-1892) (vt. [1]-[4]) oma 1836. aastal ilmunud difraktsiooni alases töös. Antud teooriaga on seotud Airy' diferentsiaalvõrrand

$$\mathbf{y}'' - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (9.1)$$

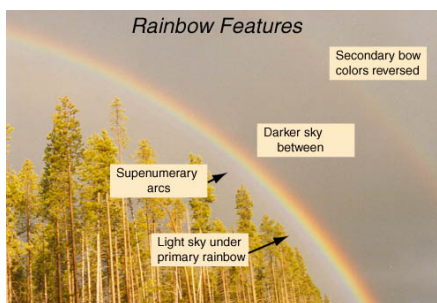
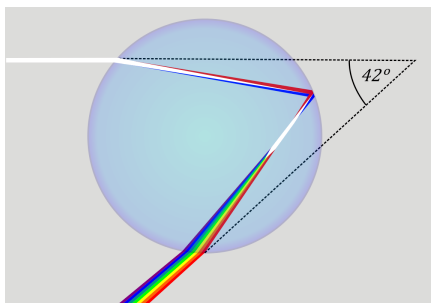
- lahendi y ruudu y^2 abil saab arvutada kindla värvuse intensiivsust (või laine amplituudi).
- Võrrandi (9.1) üheks lahendiks on Airy' funktsioon, mida nimetatakse ka vikerkaare integraaliks

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(x \cdot t + \frac{t^3}{3}\right) dt.$$

Airy arvestas oma mudelis vihmapiisa raadiust r , valguse lainepikkust λ ja Päikese, vihmapiisa ning vaatleja vahelist nurka θ . Nendest parameetritest sõltub Airy' funktsiooni argument x . Sel juhul näiteks (skaleeritud) intensiivsus avaldub valemiga

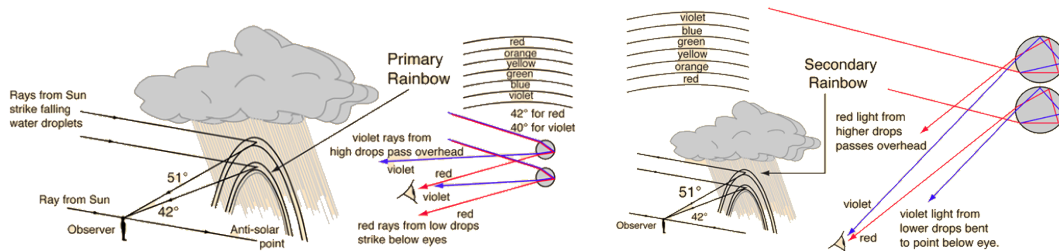
$$I(\xi(\theta)) = y^2(\xi(\theta)), \quad \xi(\theta) = \frac{4}{\lambda} \cdot \left(\frac{3 \cdot \lambda \cdot r^2}{20}\right)^{1/3} \cdot \frac{\theta - \theta_0}{180} \cdot \pi,$$

kus $\theta_0 = 42$ kraadi punase valguse jaoks (põhivikerkaares) ja violetse valguse jaoks $\theta_0 = 40$. Kui valguslaine siseneb vihmapiiska, siis osa valgust läheb sealt otse läbi, aga osa valgust murdub erinevate nurkade all ning väljub piisast mingis punktis.



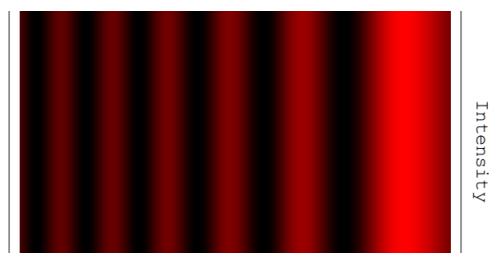
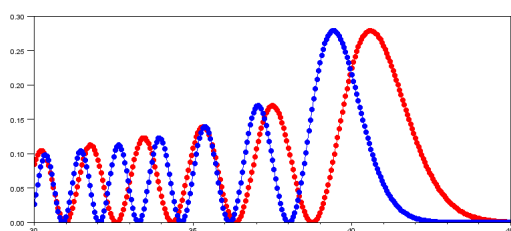
Fotode allikas: Wikipedia ja <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/>

Vaatleja silm näeb vikerkaart, kui Päikese, vihmapiisa ja vaatleja vaheline nurk on u. 42 kraadi, suurema nurga puhul - 51 kraadi - näeb ta teist (nõrgemat) vikerkaart.



Fotode allikas: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/>

Airy' funktsiooni ruudu Ai^2 kõige parempoolne „samm“ on seotud põhivikerkaare värvuse intensiivsusega. See on suurem kui järgmise, sama tooni, alamsamba intensiivsus jne. Erineva lainepikkusega valguse korral võivad samba laiused olla erinevad, mistõttu värvid võivad omavahel kohti vahetada või siis valguste liitumisel on näha ainult valge valgus.



Parempoolse foto allikas: [3]

Airy' mudel oli üks esimesi, mis teatud juhtudel kirjeldas vikerkaare tekkimist väga täpselt. Ometigi ei osutunud mudel päris lõpuni täielikuks, ennekõike just väga väikeste vihmapiiskade korral. Kaasajal kasutatakse Airy' mudeliga koos näiteks Mie' täiendusi.

9.2 Lõplike elementide meetod rajaülesande lahendamiseks

1. Valime lõigud $[a, b]$ ühtlaselt paiknevad $n + 2$ sõlme $x_1, \dots, x_{n+2}$, $h = \frac{b-a}{n+1}$.
2. Valitud sõlmede abil moodustame $n + 2$ lineaarset baassplaini (katusfunktsiooni)

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \notin [x_1, x_2] \end{cases}, \quad \phi_{n+2}(x) = \begin{cases} \frac{x_{n+2} - x}{h}, & x \in [x_{n+1}, x_{n+2}] \\ 0, & x \notin [x_{n+1}, x_{n+2}] \end{cases},$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n + 1.$$

3. Lähislahendit otsime lineaarse splaini kujul

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{n+2} c_j \cdot \phi_j(x).$$

4. Tundmatute kordajate $c_1, \dots, c_{n+2}$ leidmiseks kasutame Galjorkin'i meetodit. Pärast lähislahendi y_n asendamist meie esialgsesse võrrandisse, saame kordajate $c_1, \dots, c_{n+2}$ leidmiseks järgmise süsteemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = y(a) \\ \sum_{j=1}^{n+2} \left(\int_a^b s \cdot \phi_i(s) \cdot \phi_j(s) ds + \int_a^b \phi_i'(s) \cdot \phi_j'(s) ds \right) \cdot c_j = 0, \quad i = 2, \dots, n+1 \\ c_{n+2} = y(b) \end{array} \right\}.$$

Viimase saame pärast teisendusi kirjutada kujul $A \cdot c = F$, kus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n+1} \\ c_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y(b) \end{pmatrix},$$

kus 3-realise ribamaatriksi A nullist erinevad liikmed avalduvad valemitega

$$A(i, i-1) = \frac{h \cdot x_{i-1}}{6} + \frac{h^2}{12} - \frac{1}{h}, \quad A(i, i) = \frac{4 \cdot h \cdot x_i - h^2}{6} + \frac{2}{h}, \quad A(i, i+1) = \frac{h \cdot x_{i+1}}{6} + \frac{h^2}{12} - \frac{1}{h}.$$

5. Lahendame süsteemi $A \cdot c = F$ hõredate maatriksite käsu abil.

9.3 Praktikum ülesanne

1. Lahendada Airy' võrrand lõplike elementide meetodiga lõigul $x \in [-15, 5]$ rajatingimustega

$$y(-15) = 0.278, \quad y(5) = 0.$$

2. Koostada lähislahendi funktsioon

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{n+2} c_j \cdot \phi_j(x).$$

3. Kõik järgnevad ühikud tuleb teisendada meetriteks. Olgu vihmapiisa raadius 0.1 mm . Arvutame valguse (skaleeritud) intensiivsuse punase värvuse jaoks $\lambda = 700 \text{ nm}$, roheline värvuse jaoks $\lambda = 500 \text{ nm}$ ja violetse värvuse jaoks $\lambda = 400 \text{ nm}$,

$$I(\theta) = Ai^2(\xi(\theta)),$$

kus Airy' funktsiooni Ai rollis on meie leitud lähilahend y_n ja

$$\xi(\theta) = \frac{4}{\lambda} \cdot \left(\frac{3 \cdot \lambda \cdot r^2}{20} \right)^{1/3} \cdot \frac{\theta - \theta_0}{180} \cdot \pi.$$

Siin θ on nurk Päikese, vihmapiisa ja vaatleja vahel (kraadides). Punase valguse jaoks $\theta_0 = 42$, roheline jaoks $\theta_0 = 41$ ja violetse jaoks $\theta_0 = 40$.

4. Taha graafikud kõigi kolme tooni jaoks.

Viited

- [1] J. A. Adam. The mathematical physics of rainbows and glories. *Physics Reports* 356, 229-365, 2002.
- [2] J.D. Jackson. From Alexander of Aphrodisias to Young and Airy. *Physics Reports* 320, 27-36, 1999.
- [3] M. Mihovilovic. *Rainbow*. University of Ljubljana, 2007.
- [4] H. M. Nussenzveig. The Theory of the Rainbow. *Scientific American*, 116-127, 1977.