Algebra I

Näited omaväärtustega seotud ülesannetest.

Ülesanne 1. Leida transponeerimisteisenduse ($X \mapsto X^t$) omaväärtused ja omavektorid.

Lahendus: Olgu X transponeerimisteisenduse omavektor omaväärtusega λ, st $X^t = \lambda X$ (ja $X \neq \Theta$). Siis leiduvad i ja j selliselt, et $x_{ij} \neq 0$. Sellisel juhul aga $x_{ji} = \lambda x_{ij}$ ja $x_{ij} = \lambda x_{ji} = \lambda^2 x_{ij}$. Seega $\lambda = \pm 1$ ja $X^t = X$ või $X^t = -X$.

Vastus: Transponeerimisteisenduse omaväärtused on 1 ja -1, omavektoriteks on vastavalt sümmeetrilised ja kaldsümmeetrilised maatriksid.

Ülesanne 5. Leida vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse φ omavektorid ja omaväärtused, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Lahendus: Leiame polünoomi $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$ juured:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)+4 = \lambda^2+3\lambda-\lambda-3+4 = \lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2,$$

seega on üks kahekordne juur -1. Omaväärtuseks on seega -1. Vastavate omavektorite leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (1-(-1))x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & (3-(-1))x_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

mille lahendiks on $x = k \cdot (1,1)$, $k \in K$, $K \in \{\mathbb{Q}\ (\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Vastus: Omaväärtus on -1 (kahekordne), vastavad omavektorid on $ke_1 + ke_2$, $k \in K \setminus \{0\}$, kus e_1, e_2 on see baas, mille suhtes teisenduse maatriks antud on.

Ülesanne 6. Leida vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{Z}_p$ lineaarteisenduse φ omavektorid ja omaväärtused, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p = 2, 3$.

Lahendus: Leiame polünoomi $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ juured:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2).$$

Juhul $p = 2$ on $2 = 0$, seega on üks kahekordne juur 0. Juhul $p = 3$ on omaväärtusteks 0 ja 2. Vastavate omavektorite leidmiseks lahendame võrrandisüsteemid

$$\begin{cases} (1-0)x_1 & + & 1x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (1-0)x_2 & = & 0 \end{cases},$$

ja

$$\begin{cases} (1-2)x_1 & + & 1x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (1-2)x_2 & = & 0 \end{cases}.$$

Lahenditeks on $x = k \cdot (1, -1)$ ja $x = k(1, 1)$, $k \in \mathbb{Z}_p$, $p = 2, 3$.

Vastus: Juhul $p = 2$ on kahekordne omaväärtus 0, mille omavektor on $e_1 - e_2$. Juhul $p = 3$ on omaväärtused on 0 ja 2, vastavad omavektorid on $e_1 - e_2$, $2e_1 - 2e_2$ ja $e_1 + e_2$, $2e_1 + 2e_2$, kus jälle e_1, e_2 on see baas, mille suhtes teisenduse maatriks antud on.

Ülesanne 8. Teha kindlaks, millise vektorruumi V (üle $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse maatriksid saab viia diagonaalkujule uuele baasile üleminek teel. Leida selline baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; x) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; y) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Lahendus: Leiame igale maatriksile vastava karakteristliku polünoomi. Nendeks on a) $\lambda(\lambda - 5)$; x) $\lambda^2 + 1$; y) $\lambda^2 - 2$. Juhul a) on sellel polünoomil juured 0 ja 5 kõigis vaadeldavates korpustes, juhul x) on juured $\pm\sqrt{2}$ vaid korpustes $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$, juhul y) on juured $\pm i$ vaid korpuses $\mathbb{C}$.

Kui teisendusel on maksimaalne arv omaväärtusi (st karakteristliku polünoomi juuri), siis võib proovida leida selle teisenduse maatriksi, mis on diagonaalkujul, mille peadiagonaalil on järjest omaväärtused (mitmekordsed omaväärtused mitu korda) ja mujal nullid; mis võetakse baasi suhtes, kuhu kuulub vastavalt igale omaväärtusele vastava üks või rohkem lineaarselt sõltumatuid omavektoreid. Erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on automaatselt lineaarselt sõltumatud, seega tuleb vaid valida iga kordse omaväärtuse juures lineaarselt sõltumatud omavektorid (põhimõtteliselt eelnevates ülesannetes olnud homogeensete LVS-de lahendite fundamentaalsüsteem).

Kui teisendusel ei ole maksimaalset arvu omaväärtusi, siis sellist diagonaalkuju ei eksisteeri (kui see oleks olemas, oleks selle omaväärtuseid maksimaalne arv, see oleks sarnane teisenduse esialgse maatriksiga ja järelikult peaks juba algselt eksisteerima maksimaalne arv omaväärtusi).

Isegi juhul, kui on olemas maksimaalne arv omaväärtusi, ei pruugi alati igal kordsel omaväärtusel olla sama palju lineaarselt sõltumatuid omavektoreid, kui on omaväärtuse kordsus. Ka sel juhul ei ole maatriks diagonaliseeritav. See tuleb üldiselt alles lahendamise käigus välja.

Käesoleval juhul ei ole meil kordseid omaväärtusi, seega on vaja leida vaid üks omavektor iga omaväärtuse jaoks. Nendeks on: a) omaväärtus 0: omavektor $e_1 + e_2$, omaväärtus 5: omavektor $e_1 + 4e_2$; x) omaväärtus i: omavektor $e_1 + ie_2$, omaväärtus -i: omavektor $e_1 - ie_2$; y) omaväärtus $\sqrt{2}$: omavektor $e_1 + \sqrt{2}e_2$, omaväärtus $-\sqrt{2}$: omavektor $e_1 - \sqrt{2}e_2$.

Vastus: a) Lineaarteisendusel on maatriks $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ baasi $\{e_1 + e_2, e_1 + 4e_2\}$ suhtes; b) lineaarteisendusel on maatriks $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ baasi $\{e_1 + ie_2, e_1 - ie_2\}$ suhtes, kui korpuseks on $\mathbb{Q}$ või $\mathbb{R}$, siis sellist maatriksit ei leidu; c) lineaarteisendusel on maatriks $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ baasi $\{e_1 + \sqrt{2}e_2, e_1 - \sqrt{2}e_2\}$ suhtes, kui korpuseks on $\mathbb{Q}$, siis sellist maatriksit ei leidu; sealjuures $\{e_1, e_2\}$ on baas, mille suhtes lineaarteisenduse maatriks algselt antud on.

Ülesanne 12. Tõestada, et lineaarteisenduse nullist erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid kuuluvad selle lineaarteisenduse kujutisse.

Lahendus: Nullist erineva omaväärtuse λ korral omavektori x jaoks kehtib $\varphi(x) = \lambda(x)$, seega $x = \frac{1}{\lambda}\varphi(x)$. Kuna $\mathrm{Im}\varphi$ on alamruum, siis $x = \frac{1}{\lambda}\varphi(x) \in \mathrm{Im}\varphi$.

Ülesanne 13. Tõestada, et lineaarteisendusel $\varphi - k \cdot 1_V$, kus $k \in K$, on samad omavektorid, kui vektorruumi V (üle K) lineaarteisendusel φ. Leida seose nende lineaarteisenduste omaväärtuste vahel.

Lahendus: Olgu x lineaarteisenduse φ omavektor. Siis $\varphi(x) = \lambda x$ ja

$$[\varphi - k \cdot 1_V](x) = \varphi(x) - kx = \lambda x - kx = (\lambda - k)x.$$

Vastupidi, olgu x lineaarteisenduse $\varphi - k \cdot 1_V$ omavektor. Sellisel juhul $[\varphi - k \cdot 1_V](x) = \lambda x$ ja

$$\varphi(x) = \varphi(x) - kx + kx = [\varphi - k \cdot 1_V](x) + kx = (\lambda + k)x.$$

Siit on selge, et omavektorid on täpselt samad ja lineaarteisenduse $\varphi - k \cdot 1_V$ omaväärtused on φ omaväärtustest k võrra väiksemad.