

Analüütiline geomeetria

II loeng. Projektsioon. Baas ja reeper. Koordinaadid

Sügissemester 2016

Sirge sihivektor, tasandi riht

Olgu l mingi sirge eukleidilises ruumis E . Fikseerime sirgel kaks erinevat punkti $A \neq B, A, B \in l$. Moodustame vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse kas sirge **sihivektoriks**. Tähtis, et $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor. Sirge suvaline nullvektorist erinev vektor on sirge sihivektor.

Sirge sihivektor, tasandi riht

Olgu l mingi sirge eukleidilises ruumis E . Fikseerime sirgel kaks erinevat punkti $A \neq B, A, B \in l$. Moodustame vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse kas sirge **sihivektoriks**. Tähtis, et $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor. Sirge suvaline nullvektorist erinev vektor on sirge sihivektor.

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 kehtib:

Sirge sihivektor, tasandi riht

Olgu l mingi sirge eukleidilises ruumis E . Fikseerime sirgel kaks erinevat punkti $A \neq B, A, B \in l$. Moodustame vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse kas sirge **sihivektoriks**. Tähtis, et $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor. Sirge suvaline nullvektorist erinev vektor on sirge sihivektor.

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 kehtib: kolm erinevat punkti A, B, C sellised, et nad kõik korraga ei asu ühisel sirgel, üheselt määravad tasandit, so leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkte A, B, C .

Sirge sihivektor, tasandi riht

Olgu l mingi sirge eukleidilises ruumis E . Fikseerime sirgel kaks erinevat punkti $A \neq B, A, B \in l$. Moodustame vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse kas sirge **sihivektoriks**. Tähtis, et $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor. Sirge suvaline nullvektorist erinev vektor on sirge sihivektor.

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 kehtib: kolm erinevat punkti A, B, C sellised, et nad kõik korraga ei asu ühisel sirgel, üheselt määravad tasandit, so leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkte A, B, C . Vaatleme kas 2-mõõtmelist ruumi E^2 (tasand) või tasandit, mis asub 3-mõõtmelises ruumis E^3 . Fikseerime tasandil kolm (erinevat) punkti A, B, C nii, et nad kõik ei asu ühisel sirgel. Moodustame kaks vektori $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$.

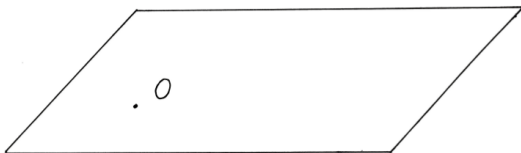
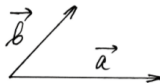
Sirge sihivektor, tasandi riht

Olgu l mingi sirge eukleidilises ruumis E . Fikseerime sirgel kaks erinevat punkti $A \neq B, A, B \in l$. Moodustame vektori $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$. Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse kas sirge **sihivektoriks**. Tähtis, et $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor. Sirge suvaline nullvektorist erinev vektor on sirge sihivektor.

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 kehtib: kolm erinevat punkti A, B, C sellised, et nad kõik korraga ei asu ühisel sirgel, üheselt määravad tasandit, so leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkte A, B, C . Vaatleme kas 2-mõõtmelist ruumi E^2 (tasand) või tasandit, mis asub 3-mõõtmelises ruumis E^3 . Fikseerime tasandil kolm (erinevat) punkti A, B, C nii, et nad kõik ei asu ühisel sirgel. Moodustame kaks vektori $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$. On ilmne, et vektorid ei ole kollineaarsed.

Definitsioon

Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mis koosneb tasandi kahest mittekollineaarsest vektorist, nimetatakse kas tasandi **rihiks** või tasandi **baasiks** (vt **joonis**). Vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ nimetatakse **baasivektoriteks**.



Punkt O ja kaks mittekollineaarseid
vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ üheselt määravad
tasandi, tähistame $[O; \vec{a}, \vec{b}]$

Ortonormeeritud baas

Definitsioon

Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mis koosneb 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi E^3 kolmest mittekompilanaarsest vektorist, nimetatakse 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi **baasiks** ja vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nimetatakse **baasivektoriteks**.

Ortonormeeritud baas

Definitsioon

Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mis koosneb 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi E^3 kolmest mittekomplanaarsest vektorist, nimetatakse 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi **baasiks** ja vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nimetatakse **baasivektoriteks**.

Erijuhul, kui baasivektorid rahuldavad kahte tingimust:

- 1 kõik baasivektorid on ühikvektorid,
- 2 baasivektorid on paarikaupa risti (otrogonalsed),

siis baasi nimetatakse kas **ortonormeeritud baasiks** või **ristbaasiks**.

Ortonormeeritud baas

Definitsioon

Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mis koosneb 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi E^3 kolmest mittekompalaarsest vektorist, nimetatakse 3-mõõtmelise eukleidilise ruumi **baasiks** ja vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nimetatakse **baasivektoriteks**.

Erijuhul, kui baasivektorid rahuldavad kahte tingimust:

- 1 kõik baasivektorid on ühikvektorid,
- 2 baasivektorid on paarikaupa risti (otrogonalsed),

siis baasi nimetatakse kas **ortonormeeritud baasiks** või **ristbaasiks**. Seega tasandi E^2 korral baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ortonormeeritud, kui

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2.$$

Analoogiliselt 3-mõõtmelises ruumis ortonormeeritud baasi baasivektorid rahuldavad

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3.$$

Reeperi mõiste

Koordinaadisüsteemi mõiste on väga tähtis analüütilises geomeetrias.

Reeperi mõiste

Koordinaadisüsteemi mõiste on väga tähtis analüütilises geomeetrias. Koordinaadisüsteemide klassi võib jaotada kaheks suureks alamklassiks:

- 1 sirgjoonelised koordinaadisüsteemid,
- 2 kõverjoonelised koordinaadisüsteemid.

Reeperi mõiste

Koordinaadisüsteemi mõiste on väga tähtis analüütilises geomeetrias. Koordinaadisüsteemide klassi võib jaotada kaheks suureks alamklassiks:

- 1 sirgjoonelised koordinaadisüsteemid,
- 2 kõverjoonelised koordinaadisüsteemid.

Kui koordinaadisüsteem kuulub sirgjoonelistele koordinaadisüsteemide klassi, siis selle koordinaatteljestik koosneb kolmest erinevast sirgest, mis läbivad punkti O (koordinaadisüsteemi alguspunkt) ja nad kõik korraga ei asu ühisel tasandil. Sirged on koordinaatteljed, st abstsiss telg (X -telg), ordinaattelg (Y -telg) ja aplikaattelg (Z -telg).

Analüütilises geomeetrias sirgjoonelise koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks kasutatakse **reeperit**.

Reeperi mõiste

Koordinaadisüsteemi mõiste on väga tähtis analüütilises geomeetrias. Koordinaadisüsteemide klassi võib jaotada kaheks suureks alamklassiks:

- 1 sirgjoonelised koordinaadisüsteemid,
- 2 kõverjoonelised koordinaadisüsteemid.

Kui koordinaadisüsteem kuulub sirgjoonelistele koordinaadisüsteemide klassi, siis selle koordinaatteljestik koosneb kolmest erinevast sirgest, mis läbivad punkti O (koordinaadisüsteemi alguspunkt) ja nad kõik korraga ei asu ühisel tasandil. Sirged on koordinaatteljed, st abstsiss telg (X -telg), ordinaattelg (Y -telg) ja aplikaattelg (Z -telg).

Analüütilises geomeetrias sirgjoonelise koordinaadisüsteemi konstrueerimiseks kasutatakse **reeperit**. Lihtsustades, võime reeperit esitada järgmiselt

ruumi fikseeritud punkt + ruumi baas (vektorsüsteem)

Reeper

Nüüd anname range definitsiooni. Tasandi E^2 korral reeperit defineerime järgmiselt:

Definitsioon

Ruumi E^2 (tasand) **reeperiks** nimetatakse paari $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}]$, kus O on tasandi fikseeritud punkt ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on tasandi baas. Punkti O nimetatakse reeperi **alguspunktiks**. Kui baas on ortonormeeritud, siis reeperit nimetatakse **ristreeperiks**.

Reeper

Nüüd anname range definitsiooni. Tasandi E^2 korral reeperit defineerime järgmiselt:

Definitsioon

Ruumi E^2 (tasand) **reeperiks** nimetatakse paari $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}]$, kus O on tasandi fikseeritud punkt ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on tasandi baas. Punkti O nimetatakse reeperi **alguspunktiks**. Kui baas on ortonormeeritud, siis reeperit nimetatakse **ristreeperiks**.

Ruumi E^3 korral reeperit defineeritakse sarnaselt:

Definitsioon

Ruumi E^3 **reeperiks** nimetatakse paari $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}]$, kus O on ruumi fikseeritud punkt ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ruumi baas. Punkti O nimetatakse reeperi **alguspunktiks**. Kui baas on ortonormeeritud, siis reeperit nimetatakse **ristreeperiks**.

Reeper tekitab ruumis koordinaatteljestikku

Kuidas reeper tekitab koordinaatteljestikku?

Reeper tekitab ruumis koordinaatteljestikku

Kuidas reeper tekitab koordinaatteljestikku?

Reeperi alguspunkt O ja baasi esimene baasivektor $\vec{e}_1$ üheselt määravad sirget l_1 , mis läbib punkti O ja $\vec{e}_1$ on tema sihivektor. See on koordinaatteljestiku esimene telg, so abstsiss telg või X -telg. Abstsiss telje positiivne suund on määratatud baasivektori $\vec{e}_1$ suunaga.

Reeper tekitab ruumis koordinaatteljestikku

Kuidas reeper tekitab koordinaatteljestikku?

Reeperi alguspunkt O ja baasi esimene baasivektor $\vec{e}_1$ üheselt määravad sirget l_1 , mis läbib punkti O ja $\vec{e}_1$ on tema sihivektor. See on koordinaatteljestiku esimene telg, so abstsiss telg või X -telg. Abstsiss telje positiivne suund on määratatud baasivektori $\vec{e}_1$ suunaga.

Analoogiliselt baasivektorid $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ määravad sirgeid l_2, l_3 , mis läbivad alguspunkti O ja baasivektorid on sirgete sihivektorid. Need on ordinaattelg (Y -telg) ja aplikaattelg (Z -telg).

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid (kas tasandi või ruumi vektorid). Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed vektorid parajasti siis, kui leiduvad reaalarvud α, β sellised, et nad ei ole korraga nullid ja kehtib võrdsus

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Tõestus. Tarvilikus:

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid (kas tasandi või ruumi vektorid). Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed vektorid parajasti sii, kui leiduvad reaalarvud α, β sellised, et nad ei ole korraga nullid ja kehtib võrdsus

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Tõestus. **Tarvilikus:** kollineaarsed $\Rightarrow$ kehtib (1). Kui vähemalt üks vektor on nullvektor (definiitsiooni kohaselt sellisel juhul vektorid on kollineaarsed), nt $\vec{b} = \vec{0}$, siis leiduvad reaalarvud α, β sellised, et kehtib (1). Tõepoolest sellisel juhul võtame $\alpha = 0$ ja β on suvaline nullist erinev arv.

Kollineaarsuse piisav ja tarvilik tingimus

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid (kas tasandi või ruumi vektorid). Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed vektorid parajasti siis, kui leiduvad reaalarvud α, β sellised, et nad ei ole korraga nullid ja kehtib võrdsus

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Tõestus. **Tarvilikus:** kollineaarsed $\Rightarrow$ kehtib (1). Kui vähemalt üks vektor on nullvektor (definiitsiooni kohaselt sellisel juhul vektorid on kollineaarsed), nt $\vec{b} = \vec{0}$, siis leiduvad reaalarvud α, β sellised, et kehtib (1). Tõepoolest sellisel juhul võtame $\alpha = 0$ ja β on suvaline nullist erinev arv.

Seega üldsust kitsendamata eeldame, et $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Võtame

- $\alpha = |\vec{b}|, \beta = |\vec{a}|$, kui vektorid on vastassuunalised, st $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$,
- $\alpha = |\vec{b}|, \beta = -|\vec{a}|$, kui vektorid on samasuunalised, st $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$.

Tarvilikus

Moodustame vektorite lineaarkombinatsiooni

$$|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}),$$

ja

$$|\vec{b}| \vec{a} - |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}).$$

Moodustame vektorite lineaarkombinatsiooni

$$|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}),$$

ja

$$|\vec{b}| \vec{a} - |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}).$$

Näitame, et $|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$) on nullvektor. Arvutame selle vektori pikkuse. Kasutame kollineaarsete vastassuunaliste vektorite pikkuse arvutamise valemit

Tarvilikus

Moodustame vektorite lineaarkombinatsiooni

$$|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}),$$

ja

$$|\vec{b}| \vec{a} - |\vec{a}| \vec{b}, \quad (\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}).$$

Näitame, et $|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$) on nullvektor. Arvutame selle vektori pikkuse. Kasutame kollineaarsete vastassuunaliste vektorite pikkuse arvutamise valemit

$$|\vec{p} + \vec{q}| = ||\vec{p}| - |\vec{q}||, \quad \vec{p} \uparrow \downarrow \vec{q}.$$

Seega

$$||\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}| = ||\vec{b}| |\vec{a}| - |\vec{a}| |\vec{b}|| = 0.$$

Seega $|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b} = \vec{0}$. Analoogiliselt näitame, kui vektorid on samasuunalised.

Piisavus

Piisavus: kehtib võrdus $(1) \Rightarrow$ kollineaarsus.

Piisavus

Piisavus: kehtib võrdus $(1) \Rightarrow$ kollineaarsus. Kuna vähemalt üks arv on nullist erinev, eeldame $\beta \neq 0$. Sellisel juhul valemi (1) kirjutame järgmiselt

$$\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{a}.$$

Vektori korrutamise arvuga definitsioonist järeldub, et $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed vektorid.

Järeldus

Kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed ja $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis vektor $\vec{b}$ avaldub vektori $\vec{a}$ kaudu, st leidub üheselt määratud reaalarv β selline, et $\vec{b} = \beta \vec{a}$.

Piisavus

Piisavus: kehtib võrdus $(1) \Rightarrow$ kollineaarsus. Kuna vähemalt üks arv on nullist erinev, eeldame $\beta \neq 0$. Sellisel juhul valemi (1) kirjutame järgmiselt

$$\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{a}.$$

Vektori korrutamise arvuga definitsioonist järeldub, et $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed vektorid.

Järeldus

Kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed ja $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis vektor $\vec{b}$ avaldub vektori $\vec{a}$ kaudu, st leidub üheselt määratud reaalarv β selline, et $\vec{b} = \beta \vec{a}$.

Järeldus

Kui vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on mittekollineaarsed, siis valem

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0},$$

kehtib siis ja ainult siis, kui $\alpha = 0, \beta = 0$.



Projekteerimine ruumis E^2 (tasand)

Olgu l_1, l_2 tasandi E^2 mitteparalleelsed sirged, nende lõikepunkti tähistame O . Sirge l_1 sihivektorit tähistame $\vec{s}_1$ ja vastavalt sirge l_2 sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Projekteerimine ruumis E^2 (tasand)

Olgu l_1, l_2 tasandi E^2 mitteparalleelsed sirged, nende lõikepunkti tähistame O . Sirge l_1 sihivektorit tähistame $\vec{s}_1$ ja vastavalt sirge l_2 sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Olgu antud tasandi mingi vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}^2$. Rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist O ja vastavat seotud vektorit tähistame $\overrightarrow{OA}$. Projekteerime punkti A sirgele l_1 paralleelselt sirgega l_2 (vt [joonis](#)) ja punkti projektsiooni tähistame A' . Moodustame vektori $\overrightarrow{OA'}$.

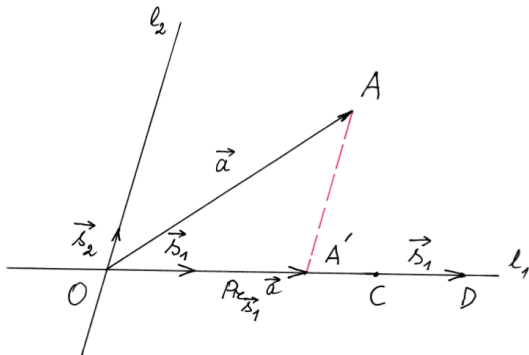
Projekteerimine ruumis E^2 (tasand)

Olgu l_1, l_2 tasandi E^2 mitteparalleelsed sirged, nende lõikepunkti tähistame O . Sirge l_1 sihivektorit tähistame $\vec{s}_1$ ja vastavalt sirge l_2 sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Olgu antud tasandi mingi vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}^2$. Rakendame vektori $\vec{a}$ punktist O ja vastavat seotud vektori tähistame $\overrightarrow{OA}$. Projekteerime punkti A sirgele l_1 paralleelselt sirgega l_2 (vt [joonis](#)) ja punkti projektsiooni tähistame A' . Moodustame vektori $\overrightarrow{OA'}$. Vektori $\overrightarrow{OA'}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ [projektsioonivektoriks](#) vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2) ja tähistatakse $\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}$.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ [projektsiooniks](#) vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2) nimetatakse projektsioonivektori $\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}$ pikkust märgiga "+", kui $\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \uparrow \vec{s}_1$ ja märgiga "-", kui $\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \downarrow \vec{s}_1$. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni vektori $\vec{s}_1$ sihile tähistatakse $\text{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}$.



$\vec{s}_1$ on sirge l_1 sihivektor $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$
 $\vec{s}_2$ on sirge l_2 sihivektor

Projektsiooni omadus

Projektsioonivektoritel on väga tähtsad omadused:

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a},$$

kus α on arv. Seega vektori projektsioon sirge sihivektorile on **lineaarkujutus**.

Projektsiooni omadus

Projektsioonivektoritel on väga tähtsad omadused:

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a},$$

kus α on arv. Seega vektori projektsioon sirge sihivektorile on **lineaarkujutus**. Analoogilised omadused kehtivad vektori projektsiooni korral

$$\text{pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$$

Projektsiooni omadus

Projektsioonivektoritel on väga tähtsad omadused:

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a},$$

kus α on arv. Seega vektori projektsioon sirge sihivektorile on **lineaarkujutus**. Analoogilised omadused kehtivad vektori projektsiooni korral

$$\text{pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$$

Projektsooni erijuht: kui sirge l_2 on risti sirgega l_1 , siis arvu $\text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ **ristprojektsiooniks** vektori $\vec{s}_1$ sihile.

Projektsiooni omadus

Projektsioonivektoritel on väga tähtsad omadused:

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \vec{a}) = \alpha \cdot \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a},$$

kus α on arv. Seega vektori projektsioon sirge sihivektorile on **lineaarkujutus**. Analoogilised omadused kehtivad vektori projektsiooni korral

$$\text{pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \vec{a}) = \alpha \cdot \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$$

Projektsooni erijuht: kui sirge l_2 on risti sirgega l_1 , siis arvu $\text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ **ristprojektsiooniks** vektori $\vec{s}_1$ sihile.

Märgime, et projektsioonivektor $\text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ ja sirge l_1 sihivektor $\vec{s}_1$ on kollineaarsed vektorid, st $\vec{s}_1 \parallel \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$. Järelikult kollineaarsuse tarvilikuse ja piisavuse tingimusest järeldub, et projektsioonivektorit saab avaldada sirge l_1 sihivektori kaudu, sest $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$.

Projektsiooni omadus

Projektsioonivektoritel on väga tähtsad omadused:

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a},$$

kus α on arv. Seega vektori projektsioon sirge sihivektorile on **lineaarkujutus**. Analoogilised omadused kehtivad vektori projektsiooni korral

$$\text{pr}_{\vec{s}_1}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{b}, \quad \text{pr}_{\vec{s}_1}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$$

Projektsooni erijuht: kui sirge l_2 on risti sirgega l_1 , siis arvu $\text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ **ristprojektsiooniks** vektori $\vec{s}_1$ sihile.

Märgime, et projektsioonivektor $\text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ ja sirge l_1 sihivektor $\vec{s}_1$ on kollineaarsed vektorid, st $\vec{s}_1 \parallel \text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$. Järelikult kollineaarsuse tarvilikuse ja piisavuse tingimusest järeldub, et projektsioonivektorit saab avaldada sirge l_1 sihivektori kaudu, sest $\vec{s}_1 \neq \vec{0}$. Näitame, et kehtib valem

$$\text{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_1|} \text{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \cdot \vec{s}_1.$$

Näitame, et pikkused on võrdsed. Tõepoolest

$$|\operatorname{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}| = |\operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}|,$$

$$\left| \frac{1}{|\vec{s}_1|} \operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \cdot \vec{s}_1 \right| = \frac{1}{|\vec{s}_1|} |\operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}| |\vec{s}_1| =$$
$$= |\operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}|$$

Näitame, et vektorid on samasuunalised.

1. Kui $\operatorname{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{s}_1$, siis $\operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} > 0$, ja vektor

$$\frac{1}{|\vec{s}_1|} \operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \cdot \vec{s}_1 \uparrow \uparrow \vec{s}_1 \text{ seega } \operatorname{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \uparrow \uparrow \frac{1}{|\vec{s}_1|} \operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \cdot \vec{s}_1$$

2. Kui $\operatorname{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{s}_1$, siis $\operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} < 0$ ja vektor

$$\frac{1}{|\vec{s}_1|} \operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \cdot \vec{s}_1 \uparrow \downarrow \vec{s}_1 \text{ seega } \operatorname{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \uparrow \uparrow \frac{1}{|\vec{s}_1|} \operatorname{pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \cdot \vec{s}_1$$

Avaldamine baasivektorite kaudu

Kasutades sihivektoriga $\vec{s}_1$ samasuunalist ühikvektorit $\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|} \cdot \vec{s}_1$ projektsioonivektori valemi kirjutame järgmiselt

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} \cdot \vec{e}_1.$$

Erijuhul ristprojektsiooni korral kehtib $\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a})$ ja

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a}) \cdot \vec{e}_1.$$

Avaldamine baasivektorite kaudu

Kasutades sihivektoriga $\vec{s}_1$ samasuunalist ühikvektorit $\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|} \cdot \vec{s}_1$ projektsioonivektori valemi kirjutame järgmiselt

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} \cdot \vec{e}_1.$$

Erijuhul ristprojektsiooni korral kehtib $\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a})$ ja

$$\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a}) \cdot \vec{e}_1.$$

Teoreem

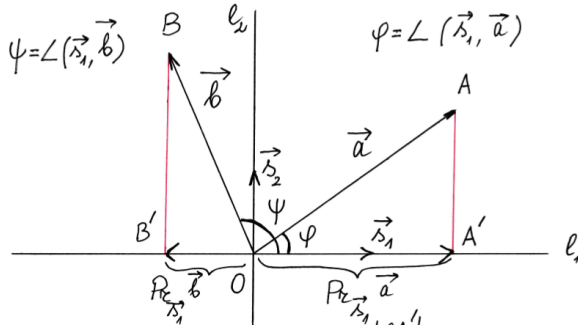
Kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on eukleidilise tasandi E^2 baas, siis tasandi suvaline vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}^2$ avaldub baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kaudu

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

kus lineaarkombinatsiooni kordajad x, y on üheselt määratud ja

$$x = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}, \quad y = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}.$$





Täismurkne kolmnurk $\triangle OAA'$, $\frac{|OA'|}{|OA|} = \cos \varphi$.

$$\vec{s}_1 \uparrow \uparrow \text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a} \Rightarrow \frac{|\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \cos \varphi$$

Analoogiliselt $\triangle OBB'$, $\frac{|OB'|}{|OB|} = \cos(\pi - \varphi)$.

$$\vec{s}_1 \uparrow \downarrow \text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{b} \Rightarrow \frac{|\text{Pr}_{\vec{s}_1} \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \cos(\pi - \varphi)$$

Vektori koordinaadid

Tõestatud teoreem on väga tähtis. Teoreem näitab, et tasandi suvalist vektorit $\vec{a}$ saab avaldada baasivektorite kaudu, st

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

kus kordajad x, y on **üheselt määratud**.

Vektori koordinaadid

Tõestatud teoreem on väga tähtis. Teoreem näitab, et tasandi suvalist vektorit $\vec{a}$ saab avaldada baasivektorite kaudu, st

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

kus kordajad x, y on **üheselt määratud**.

Definitsioon

Kordajaid x, y nimetatakse vektori $\vec{a}$ **koordinaatideks** tasandi baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Kui tasandi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on fikseeritud, siis järgnevas kasutame kirjutusviisi $\vec{a} = (x, y)$.

Vektori koordinaadid

Tõestatud teoreem on väga tähtis. Teoreem näitab, et tasandi suvalist vektorit $\vec{a}$ saab avaldada baasivektorite kaudu, st

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

kus kordajad x, y on **üheselt määratud**.

Definitsioon

Kordajaid x, y nimetatakse vektori $\vec{a}$ **koordinaatideks** tasandi baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Kui tasandi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on fikseeritud, siis järgnevas kasutame kirjutusviisi $\vec{a} = (x, y)$. Kui $\vec{a}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2)$, siis kehtivad vektorite summa ja arvuga korrutise koordinaatide arvutamise valemid

Vektori koordinaadid

Tõestatud teoreem on väga tähtis. Teoreem näitab, et tasandi suvalist vektorit $\vec{a}$ saab avaldada baasivektorite kaudu, st

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,$$

kus kordajad x, y on **üheselt määratud**.

Definitsioon

Kordajaid x, y nimetatakse vektori $\vec{a}$ **koordinaatideks** tasandi baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Kui tasandi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on fikseeritud, siis järgnevas kasutame kirjutusviisi $\vec{a} = (x, y)$. Kui $\vec{a}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2)$, siis kehtivad vektorite summa ja arvuga korrutise koordinaatide arvutamise valemid

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha \vec{a}_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1).$$

Summa ja korrutise valemid koordinaatides

Tõepoolest kehtib

$$x_1 = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_1, \quad y_1 = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_1, \quad x_2 = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_2, \quad y_2 = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_2.$$

Summa ja korrutise valemid koordinaatides

Tõepoolest kehtib

$$x_1 = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_1, \quad y_1 = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_1, \quad x_2 = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_2, \quad y_2 = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_2.$$

Seega kasutades projektsiooni lineaarsust leiame, et vektorite summa esimene koordinaat avaldub

$$\frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}_2 = x_1 + x_2,$$

ja teine

$$\frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_1 + \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}_2 = y_1 + y_2.$$

Analoogiliselt näitame korrutise arvuga koordinaatide arvutamise valemit.

Vektori koordinaatide valemid lihtsustavad, kui tasandi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koosneb ühikvektoritest, st $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Siis

$$x = \text{pr}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{a}, \quad y = \text{pr}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{a}.$$

Vektori koordinaatide valemid lihtsustavad, kui tasandi baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koosneb ühikvektoritest, st $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Siis

$$x = \text{pr}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{a}, \quad y = \text{pr}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{a}.$$

Erijuhul, kui tasandi baas on **ristbaas**, siis koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$x = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad y = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2).$$

Kui tähistame $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_1)$, $\psi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_2)$, siis

$$x = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad y = |\vec{a}| \cos \psi, \quad \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + |\vec{a}| \cos \psi \cdot \vec{e}_2.$$

Arvestades, et $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$, leiame

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + |\vec{a}| \sin \varphi \cdot \vec{e}_2.$$

või

$$\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \varphi \vec{e}_1, |\vec{a}| \sin \varphi \vec{e}_2).$$

Komplanaarsed vektorid

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorid 3-mõõtmelises ruumis. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui kehtib

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0},$$

kus reaalarvud α, β, γ ei ole korraga nullid.

Tarvilikus:

Komplanaarsed vektorid

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorid 3-mõõtmelises ruumis. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui kehtib

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0},$$

kus reaalarvud α, β, γ ei ole korraga nullid.

Tarvilikus: Erijuhul, kui kaks vektorit on kollineaarsed, siis kogu kolmik on komplanaarsed vektorid. Sellisel juhul teoreemi väide kehtib enne tõestatud teoreemi tõttu (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus).

Komplanaarsed vektorid

Teoreem

Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorid 3-mõõtmelises ruumis. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui kehtib

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0},$$

kus reaalarvud α, β, γ ei ole korraga nullid.

Tarvilikus: Erijuhul, kui kaks vektorit on kollineaarsed, siis kogu kolmik on komplanaarsed vektorid. Sellisel juhul teoreemi väide kehtib enne tõestatud teoreemi tõttu (kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus). Seega eeldame, et vektorid ei ole paarikaupa kollineaarsed. Kuna vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ei ole kollineaarsed, moodustame vastava tasandi baasi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Enne tõestatud teoreemist järeldub, et selle tasandi suvalist vektorit saab avaldada basisevektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu. Kuna vektorid on komplanaarsed, vektor $\vec{c}$ asub samal tasandil ja $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, seega

$$-x \cdot \vec{a} - y \cdot \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}. \text{ Piisavus (iseseisvalt)}$$

Ruumi baas

Teoreem

Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi baas. Ruumi suvalist vektorit $\vec{a} \in \mathbf{E}^3$ saab avaldada baasivektorite kaudu järgmiselt

$$\vec{a} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3,$$

kus lineaarkombinatsiooni kordajad x, y, z on üheselt määratud ja neid nimetatakse vektori $\vec{a}$ koordinaatideks baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Tõestus. Moodustame vektori $\vec{a}$ projektsiooni baasivektori $\vec{e}_1$ sihile paralleelselt baasivektorite $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ tasandiga, projektsioonivektorit tähistame $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$ ja projektsiooni tähistame $\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$. Analoogiliselt moodustame vektori $\vec{a}$ projektsioonivektorid baasivektorile $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ sihile ja tähistame $\text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}$, $\text{Pr}_{\vec{e}_3} \vec{a}$, ning projektsioonid $\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}$, $\text{pr}_{\vec{e}_3} \vec{a}$. Kehtib

$$\vec{a} = \text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}_2} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}_3} \vec{a},$$

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{e}_1|} \text{pr}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{|\vec{e}_2|} \text{pr}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{|\vec{e}_3|} \text{pr}_{\vec{e}_3} \cdot \vec{e}_3.$$

Edaspidi kirjutame $\vec{a} = (x, y, z)$, kus x, y, z on vektori koordinaadid. Kui $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis vektorite summa koordinaadid avalduvad

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Korrutise $\alpha \cdot \vec{a}$ koordinaadid avalduvad

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Ristbaasi korral kehtib

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \vec{e}_1 + |\vec{a}| \cos \psi \vec{e}_2 + |\vec{a}| \cos \chi \vec{e}_3,$$

kus $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \psi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \chi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_3)$. Eespool antud valemi võime kirjutada kujul

$$\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \varphi, |\vec{a}| \cos \psi, |\vec{a}| \cos \chi).$$

Orientatsiooni mõiste.

Edaspidi kirjutame $\vec{a} = (x, y, z)$, kus x, y, z on vektori koordinaadid. Kui $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis vektorite summa koordinaadid avalduvad

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Korrutise $\alpha \cdot \vec{a}$ koordinaadid avalduvad

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Ristbaasi korral kehtib

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi \vec{e}_1 + |\vec{a}| \cos \psi \vec{e}_2 + |\vec{a}| \cos \chi \vec{e}_3,$$

kus $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \psi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \chi = \angle(\vec{a}, \vec{e}_3)$. Eespool antud valemi võime kirjutada kujul

$$\vec{a} = (|\vec{a}| \cos \varphi, |\vec{a}| \cos \psi, |\vec{a}| \cos \chi).$$

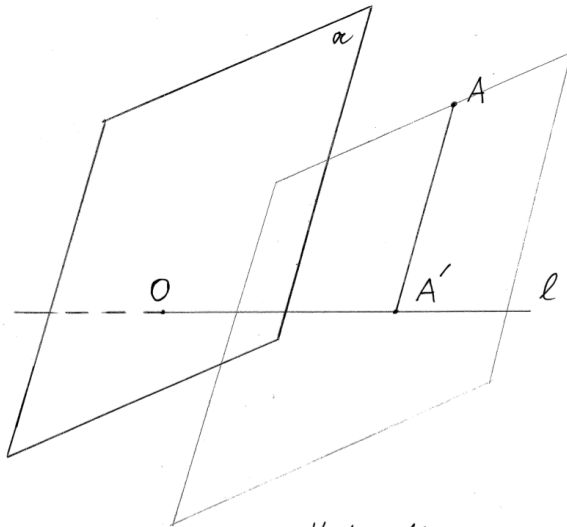
Orientatsiooni mõiste. Olgu antud tasandi E^2 reeper $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}]$.

Orientatsiooni mõiste

Rakendame vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad rakendatud vektorid. Hakkame pöörama **esimest** rakendatud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas) (vt [vt joonis](#)), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ orientatsioon on [parema käe \(vasaku käe\) orientatsioon](#) ja repeerit nimetatakse [parema käe \(vasaku käe\) reeperiks](#).

Orientatsiooni mõiste

Rakendame vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad rakendatud vektorid. Hakkame pöörama **esimest** rakendatud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas) (vt [vt joonis](#)), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ orientatsioon on [parema käe \(vasaku käe\) orientatsioon](#) ja reeperit nimetatakse [parema käe \(vasaku käe\) reeperiks](#). Olgu ruumis antud reeper $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}]$. Rakendame baasivektoreid alguspunktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ vastavad rakendatud vektorid. Kui esimese rakendatud vektori $\overline{OA}$ pööre (ümber rakenduspunkti O) lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ jälgituna rakendatud vektori $\overline{OC}$ lõpp-punktist toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas, siis öeldakse, et reeperi orientatsioon on [parema käe orientatsioon](#) ja reeperit ruumis nimetatakse [parema käe reeperiks](#) (vt [joonis](#)). Mainime, et **ruumis on kaks orientatsiooni**.



Punkt A projekteerimine l tasandiga

Olgu ruumis E antud reeper ja P ruumi E suvaline punkt. Vektorit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ nimetatakse punkti P **kohavektoriks**. Kui P on tasandi punkt, siis eespool tõestatud teoreemist järeldub, et

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \vec{r} = (x, y)$$

kus x, y on vektori $\vec{r}$ koordinaadid baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tasandi punkti P **koordinaadid** on x, y , st punkti kohavektori $\vec{r}$ koordinaadid ja kirjutatakse $P(x, y)$. Analoogiliselt ruumi punkti P korral kehtib

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3,$$

ja x, y, z nimetatakse punkti P koordinaatideks ja kirjutame $\vec{r} = (x, y, z)$ ja $P(x, y, z)$. Kui on antud ruumi kaks punkti $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$, siis vektori $\overrightarrow{PQ}$ koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Kui vektorit $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ rakendame punktist $P(x_1, y_1, z_1)$, siis seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ lõpp-punktid koordinaadid on $Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$.

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x, y, z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$.

Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt [Tõestus](#)):

$$Q\left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}\right).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x, y, z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$.

Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt [Tõestus](#)):

$$Q\left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}\right).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

- 1 punkt O (nimetatakse [pooluseks](#));

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x, y, z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$.

Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt [Tõestus](#)):

$$Q\left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}\right).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on [polaarkoordinaadisüsteem](#). Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

- 1 punkt O (nimetatakse [pooluseks](#));
- 2 punktist O lähtuv kiir l (nimetatakse [polaarteljeks](#)).

Kui P on tasandi suvaline punkt, siis selle polaarkoordinaadid on (r, ϕ) ([vt joonis](#)), kus r on lõigu OP pikkus, st $r = |OP|$, ja ϕ on nurk, mida mõõdetakse kiirest l vastu päeva. Esimest koordinaati r nimetatakse [polaarraadiuseks](#) ja teist koordinaati ϕ nimetatakse [polaarnurgaks](#).

Mainime, et polaarnurk erineb vektorite vahelisest nurgast, sest polaarnurga mõiste kasutab tasandi orientatsiooni (ϕ mõnikord nimetatakse orienteeritud nurgaks).

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi k)$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi k)$. Kui tasandil on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kusjuures alguspunkt O asub pooluses, baasvektor $\vec{e}_1$ asub kiirel l , siis ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiselt (vt joonis):

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O , sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l , st $\vec{n} \perp l$. Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud [joonisel](#).

Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O , $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$z = z.$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O , sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l , st $\vec{n} \perp l$. Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud [joonisel](#).

Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O , $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

$$z = z.$$

Sfääriliste koordinaatide konstrueerimiseks fikseerime punkti O , sellest lähtuva kiire l ja ühikvektori $\vec{n}$ (nii nagu silindriliste koordinaatide korral). Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud [joonisel](#). Seos ristkoordinaatidega on antud valemiga

$$x = r \sin \psi \cos \phi,$$

$$y = r \sin \psi \sin \phi,$$

$$z = r \cos \psi.$$

Eksami küsimused

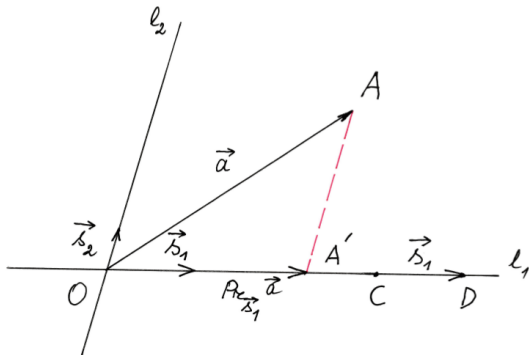
- 1 Vektori projektsioon sirgele (tasandil ja ruumis). Projektsiooni valem. Ristprojektsioon ja ristprojektsiooni valem.
- 2 Teoreem kollineaarsetest vektoritest, teoreem mittekollineaarsetest vektoritest ja teoreem mittekomplanaarsetest vektoritest.
- 3 Reeperi mõiste. Tasandi ja ruumi orientatsioon. Reeperi poolt tekitatud koordinaadisüsteemi kirjeldus. Ristreeper ja ristkoordinaadid. Tehted vektoritega koordinaatides.
- 4 Lõigu jaotamine antud suhtes.
- 5 Polaarkoordinaadid, silindrilised ja sfäärilised koordinaadid.

Eksami ülesanded

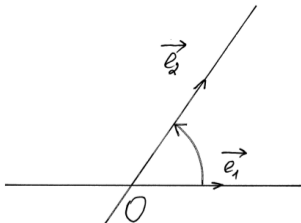
- 1 Tasandil on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Polaarkoordinaadisüsteemi $\{O', l\}$ konstrueeritakse järgmiselt: poolus $O'(-c; 0)$, kus $c > 0$, ja $\vec{e}_1$, rakendatud punktist O' , asub kiirel l . Leida kuidas ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu.
- 2 Tasandil on antud polaarkoordinaadisüsteem $\{O; l\}$. Fikseerime tasandi kaks punkti P, Q . Olgu punkti P polaarkoordinaadid on (r_1, ϕ_1) ja punkti Q polaarkoordinaadid on (r_2, ϕ_2) . Kas kehtib valem

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (r_1 + r_2, \phi_1 + \phi_2)?$$

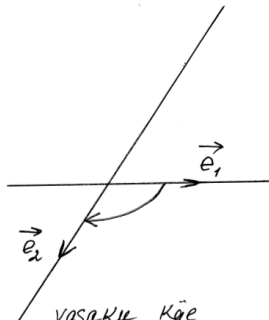
Vastus peab olema põhjendatud.



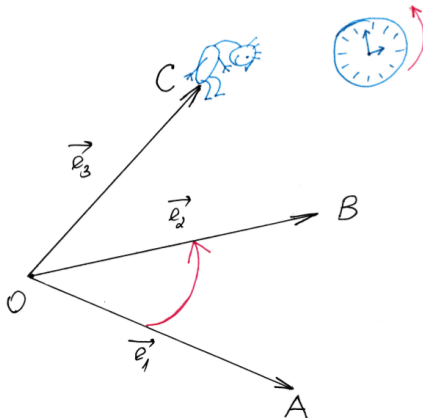
$\vec{s}_1$ on sirge l_1 sihivektor $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$
 $\vec{s}_2$ on sirge l_2 sihivektor



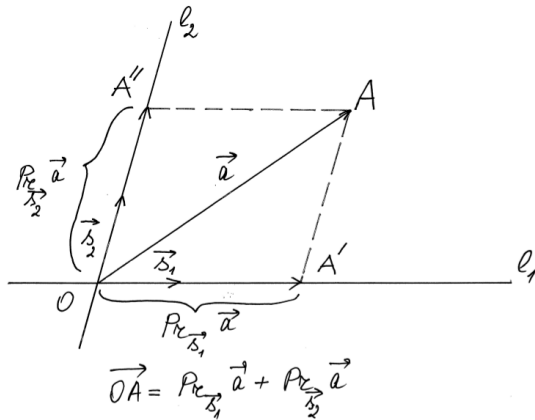
parema käe reeper
Tasandi orientatsioon on
parema käe orientatsioon.

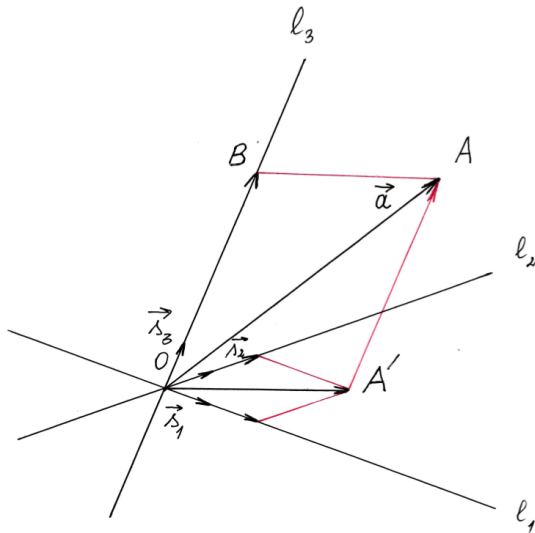


vasaku käe
reeper



Ruumi orientatsioon





$$P(x_1; y_1; z_1) \xrightarrow{\quad Q(x; y; z) \quad} R(x_2; y_2; z_2)$$

On antud lõigu PR otspunktid $P(x_1; y_1; z_1)$ ja $R(x_2; y_2; z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x; y; z)$ nii, et Q jaotab lõigu suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, st $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$.

On ilmne, et $\vec{PR} = \frac{|\vec{PR}|}{|\vec{PQ}|} \vec{PQ}$.

Kehtib $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$. Seega
 $|\vec{PR}| = |\vec{PQ} + \vec{QR}| = |\vec{PQ}| + |\vec{QR}|$.

Järelikult

$$\begin{aligned} \vec{PR} &= \frac{|\vec{PQ}| + |\vec{QR}|}{|\vec{PQ}|} \vec{PQ} = \\ &= \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \vec{PQ}, \quad \vec{PQ} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \vec{PR} \end{aligned}$$

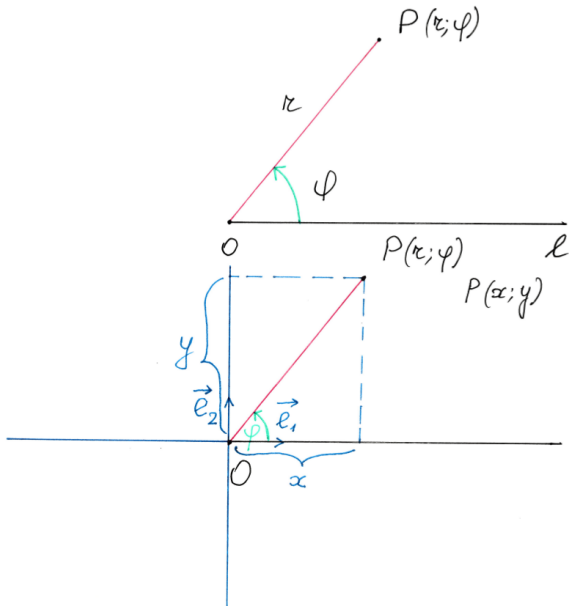
$$\overrightarrow{PR} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

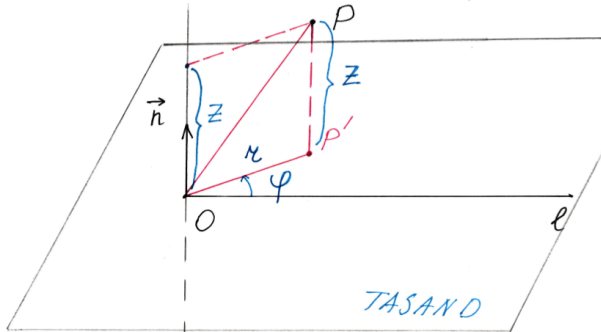
$$x = x_1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (x_2 - x_1) = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}$$

$$y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}$$

$$Q\left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}; \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}; \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}\right)$$

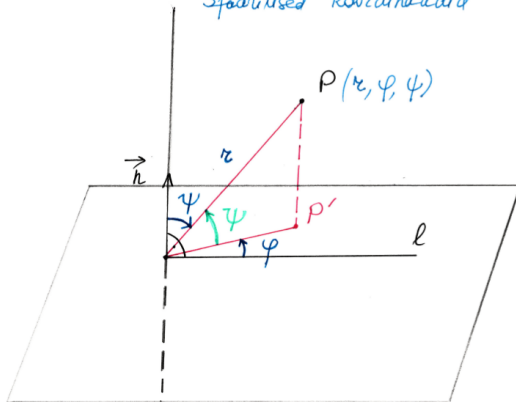


Silindrilised koordinaadid (ρ, φ, z)



Punkti silindrilised koordinaadid
on ρ, φ, z . Tasand on risti
vektoriga $\vec{n}$ ja läbib sirget
 l .

Sfäärilised koordinaadid



1. $P(r, \varphi, \psi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,
 $0 \leq \psi \leq \pi$
2. $P(r, \varphi, \psi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,
 $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$

