

# Analüütiline geomeetria

III loeng. Vektorite skalaarkorrutis.

Sügissemester 2016

Olgu antud kaks vektorit  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$ . Tuletame meelde kahe vektori vahelise nurga mõistet. Rakendame vektoreid  $\vec{a}, \vec{b}$  ühest ja samast punktist  $O$  ja olgu  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  rakendatud (seotud) vektorid. Vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  vaheline nurk tekib, kui pöörame vektorit  $\overrightarrow{OA}$  ümber punkti  $O$  lühemat teed pidi seotud vektorini  $\overrightarrow{OB}$ . Vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  vahelist nurka tähistame  $\phi$ . Järelikult  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Kui  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , siis öeldakse, et vektorid on teineteisega risti või nad on ortogonaalsed ja tähistatakse  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Edaspidi nullvektorit peame ortogonaalseks mistahes vektoriga.

Olgu antud kaks vektorit  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$ . Tuletame meelde kahe vektori vahelise nurga mõistet. Rakendame vektoreid  $\vec{a}, \vec{b}$  ühest ja samast punktist  $O$  ja olgu  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  rakendatud (seotud) vektorid. Vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  vaheline nurk tekib, kui pöörame vektorit  $\overrightarrow{OA}$  ümber punkti  $O$  lühemat teed **pidi** seotud vektorini  $\overrightarrow{OB}$ . Vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  vahelist nurka tähistame  $\phi$ . Järelikult  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Kui  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , siis öeldakse, et **vektorid on teineteisega risti** või nad on ortogonaalsed ja tähistatakse  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Edaspidi nullvektorit peame ortogonaalseks mistahes vektoriga.

## Definitsioon

Kahe vektori  $\vec{a}, \vec{b}$  skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu  $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$  ja skalaarkorrutist tähistatakse  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ . Seega

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi.$$

Skalaarkorrutise omadused:

Skalaarkorrutise omadused:

- 1 vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ ,

Skalaarkorrutise omadused:

- 1 vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ ,
- 2  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$ , kusjuures  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ,

## Skalaarkorrutise omadused:

- 1 vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ ,
- 2  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$ , kusjuures  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ,
- 3 vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui nad on teineteisega risti  $\vec{a} \perp \vec{b}$  (vt [tõestus](#)).

Skalaarkorrutise omadused:

- 1 vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ ,
- 2  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$ , kusjuures  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ,
- 3 vektorite  $\vec{a}, \vec{b}$  skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui nad on teineteisega risti  $\vec{a} \perp \vec{b}$  (vt [tõestus](#)).
- 4 Vektorite skalaarkorrutamine on [lineaarne](#), st

$$\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle,$$

kus  $\alpha, \beta$  on suvalised arvud ja  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  on suvalised vektorid, (vt [tõestus](#))

- 5 kui  $[O; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}]$  on ristreeper, siis kehtib

$$\begin{aligned}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1, \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Teisest omadusest järeldub, et vektori pikkuse võime arvutada kasutades valemit  $|\vec{a}| = +\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ .

Tähelepanu:  $\vec{a} \perp \vec{b}$  või  $\vec{a} = \vec{0} \implies \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

1) kui  $\vec{a} = \vec{0}$ , siis definitsiooni kohaselt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ,

2) kui  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , siis

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 = 0$$

Piisavus:  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \implies \vec{a} = \vec{0}$  või  $\vec{a} \perp \vec{b}$

Kirjutame  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi = 0$ .

Kaks võimalust

1)  $|\vec{a}| = 0$ , seega  $\vec{a} = \vec{0}$ ,

2)  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$ , siis  $\cos \phi = 0 \implies \phi = \frac{\pi}{2}$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust ([Kroneckeri sümbol](#))

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt  
 $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}.$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (**Kroneckeri sümbol**)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt  $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ . Tuletame meelde, et ristbaasi (ortonormeeritud)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  korral kehtib valem (Loeng II)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (**Kroneckeri sümbol**)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse valemid võime kirjutada kompaktselt järgmiselt  $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ . Tuletame meelde, et ristbaasi (ortonormeeritud)  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  korral kehtib valem (Loeng II)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

On ilmne, et  $|\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_i) = \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle, i = 1, 2, 3$ . Seega

$$\vec{r} = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i.$$

Järelikult ortonormeeritud baasi korral vektori  $\vec{r}$  koordinaadid avalduvad järgmiselt:

$$x = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle, y = \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle, z = \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle.$$

Eeldame, et  $\vec{c} \neq \vec{0}$ . Võtame kaks vektorit  $\vec{d}, \vec{f}$  nii, et  $\vec{d} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{f} \perp \vec{c}$ ,  $|\vec{d}| \neq 0$ ,  $|\vec{f}| \neq 0$ . Vektorid  $\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$  on mittekomplanaarsed, järelikult ruualise vektorid kolmel

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{|\vec{d}|} \text{pr}_{\vec{d}} \vec{a} \cdot \vec{d} + \frac{1}{|\vec{f}|} \text{pr}_{\vec{f}} \vec{a} \cdot \vec{f}.$$

Ristprojektsiooni kolmel rehtib

$$\frac{1}{|\vec{c}|} \text{pr}_{\vec{c}} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} |\vec{a}| \cos \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Järelikult vektori  $\vec{a}$  esimene koordinaat on

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori  $\alpha \cdot \vec{a}$  esimene koordinaat on

$$\alpha \cdot \alpha_1 = \frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Analoogiliselt vektori  $\beta \cdot \vec{b}$  esimene koordinaat on

$$\beta \cdot \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Analoogiliselt vektori  $\beta \cdot \vec{b}$  esimese koordinaat on

$$\frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektor  $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$  esimese koordinaat on summa

$$\frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2} + \frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektor  $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$  esimese koordinaadi võime arvutada

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Seega

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2} = \frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2} + \frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Olgu ruumis antud ristreeper  $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  ja kaks vektorit  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , kus  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$  on vektorite **ristkoordinaadid**.

### Teoreem

*Vektorite  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st*

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Olgu ruumis antud ristreeper  $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  ja kaks vektorit  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , kus  $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$  on vektorite **ristkoordinaadid**.

### Teoreem

*Vektorite  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st*

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

**Tõestus.** Kehtib

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow \vec{r}_1 = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3.$$

Seega kasutades skalaarkorrutise linearsust leiame

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle &= \langle x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, \vec{r}_2 \rangle \\ &= x_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle + y_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle + z_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle. \end{aligned}$$

Eespool tõestatud valemist järeldub

$$x_2 = \langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle, y_2 = \langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle, z_2 = \langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle.$$

Tõestatud teoreemist järeldeb, et ristkoordinaatides vektori  $\vec{r} = (x, y, z)$  pikkus on võrdne

$$|\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ vektori pikkus.}$$

Kui  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , siis kahe vektori vahelise nurga koosinuse arvutame kasutades valemit

$$\cos \angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Kui  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$  on ruumi punktid, siis kauguse punktide vahel arvutame järgmiselt

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Juhin tähelepanu, et antud valem kehtib ainult ristkoordinaatides.

# Eksami küsimused

- 1 Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused. Baasivektorite skalaarkorrutised. Kroneckeri sümbol. Vektori ristkoordinaatide arvutamise valem skalaarkorrutise abil.
- 2 Teoreem (vektorite skalaarkorrutise valem ristkoordinaatides). Vektori pikkuse valem, kahe vektori vahelise nurga koosinuse valem, kahe punkti vahelise kauguse valem.

# Eksami ülesanded

- 1 On antud kolm ühikvektorit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , mis rahuldavad tingimust  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ . Leida

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle .$$

- 2 Olgu  $a, b$  reaalarvud. Kui  $a b = 0$ , siis sellest kohe järelneb, et vähemalt üks arv arvudest  $a, b$  on null. Kas samasugune omadus kehtib vektorite skalaarkorrutise korral? Teiste sõnadega, kui  $\vec{a}, \vec{b}$  on vektorid ja  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ , kas sellest järelneb, et vähemalt üks vektoritest on nullvektor?
- 3 Kehtib  $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ , kus  $\vec{c} \neq \vec{0}$ . Kas sellest võrdusest järelneb, et  $\vec{a} = \vec{b}$ ? Vastus peab olema põhjendatud.
- 4 On antud kaks vektorit  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  (ristreeper). Lihtsustada summa

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} x_i y_j .$$













