

Diskreetne matemaatika I
praktikumiülesannete kogu
2018. a. kevadsemester

Sisukord

1	Tingimuste ja olukordade analüüsimine	3
2	Tõesuspuu meetod	5
3	Valemite teisendamine	7
4	Normaalkujud	7
5	Predikaadid ja kvantorid	8
6	Predikaadid ja kvantorid	9
7	Väidete väljendamine	10
8	Interpretatsioonide koostamine	11
9	Väljendamine II	12
10	Tõesuspuu predikaatarvutuses	13
11	Samaväärsuste kasutamine	14
12	Tõestamine interpretatsioonide abil	15
13	Väidete tõestamine I	16
14	Väidete tõestamine II	18
15	Loogika kordamine	20
16	Kontrolltöö	21
17	Graafide sissejuhatus	22
18	Tipuastmete teoreem	24
19	Sidusus, isomorfism	25
20	Graafiteooria väidete tõestamine	26
21	Graafiteooria väidete tõestamine II	27
22	Euleri ja Hamiltoni tsüklid	28
23	Puu mõiste	30
24	Tõestusülesanded puudest	31
25	Puude omaduste kasutamine	32
26	Aluspuud	33
27	Puud ja suunatud graafid	35
28	Suunatud graafide kasutamine	37
29	Graafide kordamine	38
30	Kontrolltöö	39
31	Tugev sidusus	40
32	Suunatud ahelad ja tsüklid	42
	Lahendusvihjed	44

Ülesanded valinud Reimo Palm

1. Tingimuste ja olukordade analüüsimine

1. Kasutades De Morgani seadusi, panna kirja järgmiste lausete eitused, kus x on teatav reaalarv.

a) $-2 < x < 7$

c) $x \leq -1$ või $x > 2$

b) $x \leq 4$ ja $x \geq 1$

d) $1 > x \geq -3$

2. Tööealisteks loetakse inimesi vanuses 16–64. Mari kirjutas Pythonis tingimuslause, mis peaks kontrollima, kas kasutaja on tööealine või ei:

```
vanus = int(input("Mis su vanus on? "))
if not (vanus < 16) or (not vanus > 64)):
    print("oled tööealine")
else:
    print("ei ole tööealine")
```

See tingimuslause on aga üpris segane. Lihtsustada seda lausearvutuse samaväärsus-
tega ja teha kindlaks, kas see tingimuslause on õige.

3. Järgmised tingimuslauseid võivad esineda mingi programmi tekstis. Panna kirja nende tingimuslausete eitused.

a) $(\text{tellimusi} > 100 \text{ and } \text{laos} \leq 500) \text{ or } \text{laos} < 200$

b) $(\text{tellimusi} < 50 \text{ and } \text{laos} > 300) \text{ or } (50 \leq \text{tellimusi} < 75 \text{ and } \text{laos} > 500)$

4. Teha kindlaks, kas laused 1 ja 2 väljendavad sama mõtet.

a) **Lause 1.** $x < 2$ või pole õige, et $1 < x < 3$.

Lause 2. $x \leq 1$ või kas $x < 2$ või $x \geq 3$.

b) **Lause 1.** Robert õpib korraga matemaatika ja informaatika erialal ning Pille õpib matemaatika erialal, kuid mitte korraga matemaatika ja informaatika erialal.

Lause 2. Pole nii, et Robert ja Pille õpivad mõlemad korraga matemaatika ja informaatika eriala, kuid on nii, et Pille õpib matemaatika erialal ja Robert õpib korraga matemaatika ja informaatika erialal.

5. Uue hoone turvateenistuse lepingusse on sattunud üks esmapilgul võrdlemisi raskesti arusaadav punkt:

Alarm hakkab tööle, kui uks avatakse ja stopp-nupp pole alla vajutatud ajal, mil alarm on aktiivne, või kui ruumis on liikumine ja pole nii, et stopp-nupp on alla vajutatud või alarm pole aktiivne.

Lihtsustada seda tingimust.

6. Röövimises süüdistatuna toodi kohtu ette kolm kahtlustatavat A, B ja C. Juurdlus tegi kindlaks järgmist:

- Kui A on süütu või B on süütu, siis C on süüdi;
- Kui A on süütu, siis C on süütu.

Kas sellest järeldub, et A on süüdi?

7. Kastevalla vanim elanik Jakup Orupõld sai hiljuti saja-aastaseks ning vallalehe reporter võttis temalt intervjuu. „Mis on teie pika eluea saladus?“ tahtis reporter teada. „Ma jälgin ranget dieeti,“ vastas Jakup. „Kui ma ei joo lõunaks õlut, siis ma süüa kala. Alati, kui mul on lõunaks nii õlu kui kala, ei süüa ma jäätist. Kui ma süüa jäätist või ei joo õlut, siis ei süüa ma kala.“ Intervjueeri ja leidis, et vastus on võrdlemisi keeruline. Proovige teie seda lihtsustada ja kindlaks teha, mida Jakup Orupõld lõunaks süüab.

8. Kas järgmises tarkvaraspetsifikatsioonis antud tingimused on omavahel kooskõlalised?

Süsteemitarkvara uuendamise ajal kasutajad failisüsteemile juurde ei pääse. Kui kasutajad pääsevad failisüsteemile juurde, siis on võimalik salvestada uusi faile. Kui pole võimalik salvestada uusi faile, siis ei uuendata ka süsteemitarkvara.

9. Masina töös esineb kahte liiki häireid: vibreerimine ja sädelemine. Ühe tunni jooksul võib kumbki nimetatud häiretest esineda kogu tunni vältel või üldse mitte esineda, vahepealset võimalust ei ole.

Masina tööd saab mõjutada juhtkangi ja kaitseseadme nupu abil. Masina olek järgmisel tunnil sõltub üheselt olukorrast eelmisel tunnil: masin vibreerib (ei vibreeri), kui ta vibreeris (ei vibreerinud) eelmise tunni jooksul; seda aga tingimusel, et sädelemise puudumisel juhtkangi sisse ei lülitatud. Kui aga juhtkang lülitati sisse ja masin vibreeris, siis nüüd masin enam ei vibreeri, ja ümberpöörduvalt: kui juhtkang lülitati sisse ja masin ei vibreerinud, siis hakkab ta nüüd vibreerima. Edasi, kui eelmisel tunnil

Nüüd aga masin vibreerib ja sädeleb. Mida tuleks ette võtta kangi ja nupuga, et kõrvaldada järgmiseks töötunniks mõlemad häired? Mida tuleks kangi ja nupuga teha, et masin töötaks häireteta kogu aeg?

10. Kontrollida tõesuspuu meetodil, kas valem on kehtestatav.

- 11.** Kontrollida tõesuspuu meetodil, kas valem on samaselt tõene.

- 12.** Täita järgmine tabel.

13. Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ kohta on teada, et valem $\neg \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ ei saa olla samaselt tõene ega ka mitte samaselt väär. Kas siit saab midagi järeldada valemi $\mathcal{F}$ liigi kohta ja kui saab, siis mida?

14. Arvutis on realiseeritud lausearvutuse valemite samaselt tõesuse kontrollija, mis teeb kindlaks, kas etteantud valem on samaselt tõene või mitte. Arvutisse sisestati kaks valemit, mille üldkuju oli $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ ja $\neg \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, ning kontrollija teatas vastuseks, et kumbki neist valemeist ei ole samaselt tõene. Mida saab sellest järeldada valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ liigi kohta?

5

$$a) A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg C \models \neg A$$

$$c) A \vee B, \neg A \vee C, \neg B \models C$$

$$b) A \vee B, \neg B, C \rightarrow \neg A \models \neg C$$

$$d) A \vee B \& C, A \vee B \rightarrow D \models C \vee D$$

16. Teisendada iga arutluskäik sümbolkujule ja seejärel teha kindlaks, kas ta on korrektne. Kui arutluskäik ei ole korrektne, siis tuua kontranäide lausemuutujate konkreetsete väärtustega.

- a) Kui ma oleksin lehm, siis ma sööksin rohtu. Ma ei ole lehm, järelikult ma ei söö rohtu.
- b) Sa ei saa olla korraka rikas ja õnnelik. Järelikult oled sa kas mitterikas või mitteõnnelik. Praegu aga oled sa õnnelik. Järelikult sa ei ole rikas.
- c) Mina olen tark, kui sina oled rumal. Päike loojub idas või sina oled rumal. Aga päike ei saa korraka tõusta idast ja idas loojuda, pane tähele, et päike tõuseb idast. Järelikult mina olen tark ja sina oled rumal.
- d) Kui Smith ei kohanud tol ööl Jonesi, siis kas kurjategija oli Jones või Smith valetab. Kui Jones polnud kurjategija, siis Smith ei kohanud tol ööl Jonesi ja sissemurdmine toimus pärast keskööd. Kui sissemurdmine toimus pärast keskööd, siis kas kurjategija oli Jones või Smith valetab. Kas nendest andmetest piisab järelduseks, et kurjategija oli Jones?
- e) Kui lause A on väär, siis lause B on tõene. Kui lause C on tõene, siis lause D või E on tõene. Kui lause D on tõene, siis lause C on väär. Kui lause A on tõene, siis lause E on väär. Järelikult kui lause C on tõene, siis lause B on samuti tõene.
- f) Kui sina tantsid, siis Jaana tantsib
ja Liina tantsib ka.
Kui Liina tantsib, siis Miina tantsib
ja Tiina ning sina ka.
Ent Tiina ja Niina ei tantsi,
sest nukrus on haaranud nad.
Seega Miina või Riina tantsib
ilma sinu ja Jaanata.

17. Keskaja skolastikud vaidlesid palju küsimuse üle, kas jumal on olemas või mitte. Et lihtsad kinnitamisest stiilis „on“ või „ei ole“ vastaspoolt veenda ei suutnud, püüdsid nad oma väidet tõestada. Nii tekkis mitmeid argumenteeritud arutluskäike, mis loogiliste sammude teel jõudsid jumala olemasolu suhtes ühele või teisele järeldusele. Vaatleme ühte sellist arutluskäiku.

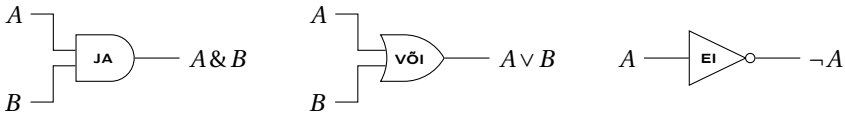
Kurjuse probleem. Oletame, et kehtivad väited

- 1) Kui on olemas kurjus, siis kas jumal ei taha seda ära hoida või ta ei saa seda ära hoida.
- 2) Kui jumal on kõikvõimas, siis ta saab kurjust ära hoida.
- 3) Kui jumal on hea, siis ta tahab kurjust ära hoida.
- 4) Kui jumal eksisteerib, siis ta on kõikvõimas ja hea.

Tõestada, et nendest väidetest järeljub, et jumalat pole olemas.

Välitemperatuuri fikseerimiseks on hoone välisseinale kinnitatud kolm andurit 1, 2 ja 3. Seejuures andur 1 annab signaali (lülitub sisse), kui temperatuur langeb alla 0°C , andur 2 annab signaali, kui temperatuur langeb alla -6°C ja andur 3 annab signaali, kui temperatuur langeb alla -12°C . Koostada valemid, mis näitavad kummagi küttekeha töötamist või mittetöötamist sõltuvalt andurite saadatud signaalidest.

25. Kahendarvude liitmine. Loogikaskeemid pannakse kokku loogikaelementidest, millest igaüks sooritab oma sisenditega elementaarseid lausearvutuse tehteid. Levinud loogikaelemendid vastavad näiteks konjunktsioonile, disjunktsioonile ja eitusele:



Poolsummaator on loogikaskeem, mille sisendiks on kahendnumbrid A ja B ning väljundiks nende numbrite summa viimane koht S ja liitmisel tekkiv ülekanne K . **Täis-summaator** on loogikaskeem, mille sisendiks on kahendnumbrid A ja B ning eelmisest järgust tekkinud ülekanne C ning väljundiks nende kolme numbri summa viimane koht S ja tekkiv ülekanne K .

- Panna ülaltoodud loogikaelementidest kokku poolsummaator.
- Panna ülaltoodud loogikaelementidest kokku täisummaator.
- Olgu antud kahendarvud $A_1 A_2 A_3$ ja $B_1 B_2 B_3$. Koostada loogikaskeem, mis sisendite $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ põhjal annab väljundiks nende kahendarvude summa kahendkohad S_1, S_2, S_3 ja liitmisel tekkiva ülekande K .

26. Lahendada keskkonnas <http://loogika.cs.ut.ee/truthtable/> ülesandekogu „Diskreetne matemaatika I – Valemi koostamine“.

5. Predikaadid ja kvantorid

- 27.**
- Olgu $P(x) = „x > 3“$. Millise tõeväärtusega on laused $P(4), P(3), P(2)$?
 - Olgu $Q(x, y) = „x = y + 3“$. Millise tõeväärtusega on laused $Q(1, 4), Q(3, 0)$?
 - Olgu $R(x, y, z) = „z + y = x“$. Millise tõeväärtusega on laused $R(1, 2, 3), R(1, 0, 0)$?
- 28.** Kõigi täisarvude hulgal on antud predikaat $Q(x) = „x + 1 > 2x“$. Leida järgmiste valemite tõeväärtused.
- $Q(1)$
 - $Q(-1)$
 - $\exists x Q(x)$
 - $\forall x Q(x)$
 - $\exists x \neg Q(x)$
 - $\forall x \neg Q(x)$
- 29.** Täita järgmine tabel.

Valem

Valem on tõene, kui

Valem on väär, kui

$\forall xQ(x)$ _____ a puhul $Q(a) = _$ _____ a puhul $Q(a) = _$

$\exists xQ(x)$ _____ a puhul $Q(a) = _$ _____ a puhul $Q(a) = _$

30. Olgu $L(x)$ = „ x on käinud Lätis“ ning indiviidide piirkond kõigi selles klassis viibivate tudengite hulk. Mida tähendavad järgmised valemid?

- | | | | |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $\exists xL(x)$ | c) $\neg\exists xL(x)$ | e) $\neg\forall xL(x)$ | g) $\neg\exists x\neg L(x)$ |
| b) $\forall xL(x)$ | d) $\exists x\neg L(x)$ | f) $\forall x\neg L(x)$ | h) $\neg\forall x\neg L(x)$ |

31. Olgu $J(x)$ = „ x on jänes“ ja $H(x)$ = „ x hüppab“, kusjuures indiviidide piirkond on kõigi loomade hulk. Panna järgmised valemid kirja sõnalisel kujul.

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\forall x(J(x) \rightarrow H(x))$ | c) $\exists x(J(x) \rightarrow H(x))$ |
| b) $\forall x(J(x) \& H(x))$ | d) $\exists x(J(x) \& H(x))$ |

32. Võtta kasutusele predikaadid ja panna lause kirja predikaatarvutuse valemiga. Püüda lause struktuuri väljendada võimalikult täpselt.

- a) Iga hobune on neljajalgne, kuid mõni neljajalgne pole hobune.
- b) Mitte kõik linnud ei oska lennata.
- c) Mitte ükski poliitik pole aus.
- d) Kõik on hea, mis hästi lõpeb.
- e) Kõik kalad, välja arvatud haid, on lahked laste vastu.
- f) Mõni on teravmeelne ainult siis, kui ta on purjus.
- g) Igaüks, kes on lärmakas, häirib kõiki teisi peale iseenda.
- h) Iga inimene on paremal järjel kui mõni teine.

33. Panna järgmised laused kirja predikaatarvutuse valemiga, kus predikaadid on määratud kõigi inimeste hulgal.

- a) Igaühel selle rühma tudengitest on mobiiltelefon.
- b) Keegi selle rühma tudengitest on käinud Austraalias.
- c) Selles rühmas leidub tudeng, kes ei oska ujuda.
- d) Kõik selle rühma tudengid oskavad lahendada ruutvõrrandit.
- e) Mõni tudeng selles rühmas ei taha saada rikkaks.

6. Predikaadid ja kvantorid

34. Kõigi loomade hulgal on antud predikaadid $K(x)$ = „ x on koer“ ja $H(x)$ = „ x haugub“. Väljendada järgmised väited predikaatarvutuse valemiga.

a) Kõik koerad hauguvad.

c) Mõni koer haugub.

b) Mitte ükski koer ei haugu.

d) Mõni koer ei haugu.

35. Kõigi inimeste hulgal on antud predikaat $A(x, y) = „x$ armastab y -t“ . Panna järgmised väited kirja predikaatarvutuse valemiga.

a) Igaüks armastab kedagi.

e) Igaüks armastab kedagi armunut.

b) Leidub keegi, keda kõik armastavad

c) Pole kedagi, keda ei armastata.

f) Kõik armunud armastavad iseenast.

d) Leidub vastuseeta armastust.

36. Eeldame, et predikaat $P(x)$ on määratud lõplikul hulgal $\{1, 2, 3\}$. Kirjutada järgmised valemid lahti konjunktsioonide, disjunktsioonide ja eituste kaudu.

a) $\exists x P(x)$

c) $\exists x P(x) \& \exists x \neg P(x)$

e) $\forall x (x \neq 2 \rightarrow P(x))$

b) $\forall x P(x)$

d) $\forall x (x < 3 \& P(x))$

37. Hulgal $\{0, 1, \dots, 999\}$ on defineeritud predikaat $P(x)$, mis iga selle hulga elemendi puhul tagastab mingi tõeväärtuse. Järgmine Pythoni programm kontrollib, kas valem $\exists x P(x)$ on tõene:

```
vastus = False
for x in range(1000):
    if P(x) == True:
        vastus = True
        break
if vastus == True:
    print("Valem on tõene")
```

Koostada programm, mis kontrollib, kas valem $\exists x P(x)$ on väär.

38. Lahendada arvutiülesanded ülesandekogust kvantorid .pyk. Juhised asuvad Moodle'is.

7. Väidete väljendamine

39. Leida järgmiste valemite tõeväärtus, kui põhihulk on reaalarvude hulk $\mathbb{R}$.

a) $\exists x (x = -x)$

g) $\exists x \forall y (x^2 > y)$

b) $\forall x (2x \geq x)$

h) $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$

c) $\forall x (x^2 \geq x)$

i) $\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$

d) $\forall x \exists y (x^2 < y)$

j) $\exists x \exists y (x + y = 4 \& x - y = 1)$

e) $\exists x \forall y (xy = y)$

k) $\forall x \exists y (x + y = 2 \& 2x - y = 1)$

f) $\forall x \exists y (x = y^2)$

40. Olgu interpretatsiooni kandja hulk $\mathbb{N}$ ja signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$, sümboleite interpretatsioon standardne. Väljendada järgmised predikaadid ja väited. (Kõik väited tuleb väljendada ainult signatuuris antud sümboleid ja loogikatehteid kasutades.)

- | | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| a) $x - y = z$ | i) x jagub y -ga |
| b) $x / y = z$ | j) x on algarv |
| c) x on paarisarv | k) jagatise x / y täisosa on z |
| d) x on paaritu arv | l) jääk x jagamisel y -ga on z |
| e) x lõpeb 3-ga | m) $SÜT(x, y) = z$ |
| f) x on täisruut | n) $VÜK(x, y) = z$ |
| g) $x \leq y$ | o) x on arvu 2 aste |
| h) $x < y$ | p) $x^y = z$ |

41. Matemaatilistes tekstides esineb sageli lauseid, kus objektilt nõutakse lisaks vajalikule omadusele veel mõne lisatingimuse täidetust. Näiteks nõutakse, et otsitav objekt oleks ainus või vähim vms. Olgu $P(x)$ naturaalarvude hulgal määratud predikaat, mis esitab teatavat arvude omadust P . Väljendada järgmised laused valemiga signatuuris $\langle 0, 1; +, \cdot; =, P(x) \rangle$.

- Leidub täpselt üks arv, millel on omadus P
- x on vähim arv, millel on omadus P
- Kõigil arvudel vahemikus x -st y -ni on omadus P
- Arve, millel on omadus P , on lõpmata palju

42. Järgnev definitsioon määratleb, mida tähendab lause „funktsiooni f piirväärtus kohal a on L “.

Iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline reaalarv $\delta > 0$, et iga reaalarvu x puhul kehtib: kui $|x - a| < \delta$, siis $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Olgu põhihulgaks reaalarvude hulk. Eeldame, et signatuur sisaldab kõiki selles definitsioonis esinevaid matemaatilisi sümboleid.

- Väljendada eeltoodud definitsioon predikaatarvutuse valemiga.
- Väljendada ja lihtsustada lause: „Funktsioonil f kohal a piirväärtust ei leidu.“

8. Interpretatsioonide koostamine

43. Leida järgmistele üldisuskvantoriga algavatele väidetele kontranäited, kui valemid on määratud kõigi täisarvude hulgal.

- a) $\forall x(2x + 1 \geq x)$
- b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$
- c) $\forall x \forall y(x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
- d) $\forall x \forall y(xy \geq x)$
- e) $\forall x \forall y(x^2 \neq y^3)$
- f) $\forall x \exists y(x < y^2 \ \& \ y^2 < x + 100)$

44. Määrata valemi liik (samaselt tõene, samaselt väär, kehtestatav).

- a) $\forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \ \& \ B(x) \rightarrow C(x))$
- b) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg \exists y(P(y) \rightarrow Q(x, y)))$
- c) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \ \& \ \forall x(Q(x) \vee R(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$

45. a) Defineerida predikaat.

b) Defineerida interpretatsioon.

46. Leida valemi $\exists x \forall y(x \leq y^2)$ tõeväärtus, kui sümboleid interpreteeritakse tavali-
ses tähenduses ja interpretatsiooni kandja on

- a) positiivsete reaalarvude hulk
- b) täisarvude hulk
- c) nullist erinevate täisarvude hulk

47. Leida valemi $\forall x \exists y(xy = 1)$ tõeväärtus, kui sümboleid interpreteeritakse tavali-
ses tähenduses ja interpretatsiooni kandja on

- a) nullist erinevate reaalarvude hulk
- b) nullist erinevate täisarvude hulk
- c) positiivsete reaalarvude hulk

48. Lahendada arvutiülesanded ülesandekogust `interpret.pyk`. Juhised asuvad Moodle'is.

9. Väljendamine II

49. Teha kindlaks järgmiste valemite ja lausete vabad muutujad.

- a) $\exists x I(x) \ \& \ A(x)$
- b) $\forall x T(x, y) \ \& \ \exists z T(x, z)$
- c) $\forall x \forall y(A(x) \ \& \ I(x) \ \& \ \neg A(y) \ \& \ I(y)) \rightarrow T(x, y)$
- d) Iga reaalarvu x puhul, mis on suurem kui y , kehtib $x(x + 1) > y$.
- e) Arvude x ja y vahel leidub arv z nii, et $|x - z| = |y - z|$.
- f) Pole olemas arve x ja y , mille puhul $x^2 + y^2 = -1$.

50. Olgu interpretatsiooni kandja $\mathbb{N}$ ja signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$. Väljendada järgmised laused predikaatarvutuse valemiga.

- a) x jagub kahe erineva paarisarvuga

- b) x jagub kõigi y -st väiksemate positiivsete arvudega
- c) Sellest, et kahe arvu summa on paarisarv, ei järeldu, et mõlemad arvud on paarisarvud
- d) Arvude x ja y viimaste numbrite summa on 5
- e) Ühegi arvu ruut ei anna 3-ga jagamisel jääki 2
- f) Arvude x ja y vahel, kus $x < y$, leidub täpselt üks täisruut
- g) x on suurim algarv, millega y jagub

51. Olgu interpretatsiooni kandja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (naturaalarvude hulga kõigi alamhulkade hulk) ja signatuur $\langle ; ; \subseteq \rangle$. Väljendada järgmised predikaadid.

- | | | |
|---------------------|----------------------------|------------------------|
| a) $X = Y$ | d) $X \cup (Y \cap Z) = W$ | g) $X \setminus Y = Z$ |
| b) $X = \mathbb{N}$ | e) $X \cap Y = \emptyset$ | h) $ X = 1$ |
| c) $X \cap Y = Z$ | f) $X' = Y$ | i) $ X = 2$ |

52. Kõigi täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$ on antud järgmised predikaadid: $N(x)$ = „ x on naturaalarv“, $A(x)$ = „ x -l on omadus A “ ja $V(x, y)$ = „ x on väiksem kui y “. Avaldada järgmine lause predikaatarvutuse valemiga:

Kui leidub naturaalarv, millel on omadus A , siis kõigi nende naturaalarvude hulgas, millel on omadus A , leidub vähim naturaalarv.

53. Sa korraldad peo ja kutsusid sinna kõik sõbrad. Väljendada järgmised laused predikaatarvutuse valemiga (põhihulgaks kõigi sõprade hulk).

- a) Kui kõik sõbrad tulevad peole, siis me peame ostma rohkem toitu.
- b) Leidub selline sõber, et kui ta tuleb peole, siis me peame ostma rohkem toitu.

Nendele lausetele vastavad valemid tulevad loogiliselt samaväärsed vastavalt predikaatarvutuse põhisamaväärsuste 4. rühma teisele samaväärsusele. Kuid on ilmne, et eesti keeles ei tähenda need laused sama asja. Selgitada, mis siin toimub. Kas lausetele vastavad valemid on ikka õiged?

10. Tõesuspuu predikaatarvutuses

54. Teha kindlaks, kas valem on samaselt tõene, samaselt väär või ei kumbki.

- a) $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
- b) $\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$
- c) $\exists x (\neg \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \& \neg P(x))$

55. Predikaatarvutuses kehtib teatavasti distributiivsuse seadus üldisuskvantori ja konjunktsiooni vahel ning olemasolukvantori ja disjunktsiooni vahel. Selles ülesandes uurime, kas predikaatarvutuses kehtib ka distributiivsuse seadus üldisuskvantori ja implikatsiooni vahel.

- a) Kirjutada välja uuritava seaduse vasak pool ja parem pool.
- b) Teha kindlaks, kas vasakust poolest järeldub parem pool.
- c) Teha kindlaks, kas paremast poolest järeldub vasak pool.
- d) Kas distributiivsus üldisuskvantori ja implikatsiooni vahel kehtib?

56. Teha kindlaks, kas kehtivad järgmised järeldumised.

- a) Kõik noorpoliitikud on aktivistid. Mõned aktivistid on igorandid. Järelikult mõned noorpoliitikud on ignorandid.
- b) Mõned tuulelohed ei suuda lennata. Mõned objektid, mis suudavad lennata, on aerodünaamilised. Järelikult mõned tuulelohed ei ole aerodünaamilised.
- c) Mõned asjad on vilkuvad ja mõned siravad. Kõik vilkuvad ja siravad asjad on helkivad. Kõik asjad, mis on siravad ja helkivad, on kütlevad. Järelikult mõned asjad on kütlevad.

57. Avada programmiga `pred.zip` ülesandekogu `prakt10.pyk` ning koostada eelmise ülesande iga sellise osaülesande kohta, kus järeldumine ei kehti, interpretatsioon, milles eeldused on tõesed, aga väide väär.

58. On teada järgmised faktid.

- 1. Kõik rohelised draakonid oskavad lennata.
- 2. Iga draakon on õnnelik, kui kõik tema lapsed oskavad lennata.
- 3. Draakon on roheline, kui ta on vähemalt ühe rohelise draakoni laps.

Tõestada, et kõik rohelised draakonid on õnnelikud.

59. *Habemeajaja paradoks.* Tuua sisse sobivad predikaatsümbolid ja panna järgmised laused kirja predikaatarvutuse valemitega.

- a) Iga habemeajaja ajab habet kõigil neil, kes ise endal habet ei aja.
- b) Ükski habemeajaja ei aja habet kellelgi, kes ise endal habet ajab.

Tõestada, et nendest lausetest järeldub lause

- c) Habemeajajaid pole olemas.

11. Samaväärsuste kasutamine

60. Leida lausete eitused ja lihtsustada neid predikaatarvutuse põhisamaväärsuste abil.

- a) Leidub arv, mis on väiksem kui ükskõik milline positiivne arv.
- b) Iga positiivse arvu jaoks leidub temast väiksem positiivne arv.
- c) Igas külas leidub elanik, kes tunneb iga ülejäänud elanikku selles külas.
- d) Leidub küla, kus vähemalt ühte elanikku ei tunne ükski selle küla elanik.

61. Kas järgmised laused väljendavad sama mõtet?

- a) 1) Inimesed pole loomad
2) Loomad pole inimesed
- b) 1) Mõned poliitikud pole inimesed.
2) Mõned inimesed pole poliitikud.
- c) 1) Ei leidu fakti, mida ei saa kontrollida.
2) Ühtegi fakti ei saa kontrollida.
3) Leidub fakt, mida saab kontrollida.
4) Kõiki fakte saab kontrollida.
5) Pole nii, et kõiki fakte saab kontrollida.
- d) 1) Iga kodanik on rikkunud mõnda seadust.
2) Ei leidu kodanikku, kes ei ole rikkunud ühtegi seadust.
3) Ei leidu kodanikku, kes ei ole rikkunud kõiki seadusi.
4) Ei leidu seadust, mida pole rikkunud ükski kodanik.
5) Ei leidu seadust, mida pole rikkunud kõik kodanikud.

62. Su sõber väidab, et temale kvantoritest $\forall$ ja $\exists$ ei piisa, vaid vaja oleks veel kvantoreid. Siis saaks näiteks väljendada fraase „mitte ühegi puhul“, „täpselt ühe puhul“ ja „kõigi, välja arvatud ühe puhul“. Näiteks lause „Mitte ühegi x puhul pole $x^2 < 0$ “. Mida peaks talle vastama?

63. Lahendada programmiga teisendus predikaatarvutuse valemite teisendamise ülesanded ülesandekogust `gmlpredteis.ylk`. Juhised asuvad Moodle'is.

12. Tõestamine interpretatsioonide abil

64. Teatavasti tekib predikaatarvutuse valemile tõeväärtus alles siis, kui on määratud interpretatsioon. Vaatleme valemit

$$\forall y \exists x (A(x) \& B(x, y)).$$

Leida selle valemi tõeväärtus järgmistes interpretatsioonides.

- a) Kandja $\mathbb{N}$ ning $A(x) = „x \text{ on algarv}“, B(x, y) = „x > y“$.
- b) Kandja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ning $A(x) = „x \text{ on üheelemendiline}“, B(x, y) = „x \subseteq y“$.
- c) Kandja $\mathbb{Z}^+$ ning $A(x) = „x \text{ on paarisarv}“, B(x, y) = „x \text{ on } y\text{-i tegur}“$.

65. Olgu interpretatsiooni kandjaks kolmeelemendiline hulk $\{a, b, c\}$. Mitmel viisil saab interpreteerida

- a) konstantsümbolit
- b) ühekohalist predikaatsümbolit
- c) kahekohalist predikaatsümbolit
- d) kahekohalist funktsionaalsümbolit?

66. Tõestada, et

- a) valemid $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ ja $\forall x (A(x) \vee B(x))$ ei ole samaväärsed;
- b) valemid $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ ja $\forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$ on samaväärsed.

67. Tõestada vahetu arutlusega, et kehtivad järgmised järeldumised.

- a) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x)), \forall x (R(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$
- b) $\exists x (P(x) \& R(x)), \neg \exists x (P(x) \& Q(x)) \models \exists x (R(x) \& \neg Q(x))$
- c) $\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \models \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$
- d) $\exists x \exists y \exists z \neg (P(x) \vee P(y) \rightarrow P(z)) \models \exists a P(a)$

68. Teha kindlaks, kas esimesest valemist järeldub teine ja kas teisest valemist järeldub esimene. Põhjendada vastuseid interpretatsioonide abil. Kas valemid on samaväärsed?

- a) $\exists x (A(x) \& \neg B(x) \& C(x))$ ja $\neg \forall x (C(x) \rightarrow \neg A(x) \vee B(x))$
- b) $\neg \exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ ja $\forall x P(x) \leftrightarrow \neg \exists x Q(x)$

69. Kirjutada järgmise tabeli igasse lahtrisse, kas kehtib distributiivsuse seadus selle kvantori ja tehte vahel.

	$\&$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
$\forall$				
$\exists$				

13. Väidete tõestamine I

70. Teha kindlaks, kas tõestus on korrektne. Kui ei, siis selgitada, mis on valesti.

- a) **Eeldus.** Igale poisile meeldib mõni tüdruk.

Väide. Leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.

Tõestus. Eeldame, et igale poisile meeldib mõni tüdruk. Olgu a vabalt valitud poiss. Eelduse põhjal meeldib a -le mõni tüdruk. Olgu see tüdruk b . Kuna poiss a oli valitud vabalt, siis võime seda arutelu korrata iga poisi puhul. Järelikult igale poisile meeldib tüdruk b . Järelikult leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.

- b) **Eeldus.** Leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.

Väide. Igale poisile meeldib mõni tüdruk.

Tõestus. Eeldame, et leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele. Olgu c selline tüdruk. Olgu d vabalt valitud poiss. Meil on vaja tõestada, et d -le meeldib mõni

tüdruk. Teame, et kõigile poistele meeldib c . Järelikult ka d -le meeldib c . Järelikult leidub tüdruk, kes d -le meeldib. Kuna d oli valitud vabalt, siis saame, et igale poisile meeldib mõni tüdruk.

- c) **Väide.** On olemas maksimaalselt üks inimene.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et on olemas rohkem kui üks inimene. Valime vabalt inimese e . Siis leidub selline inimene f , et $f \neq e$. Kuna e oli valitud vabalt, siis kehtib $\forall x (f \neq x)$. Üldisuskvantori mõiste põhjal saame siit $f \neq f$. Kuid samal ajal $f = f$. Oleme jõudnud vastuolule. Järelikult ei saa rohkem kui ühte inimest olemas olla.

- d) **Eeldus 1.** Valner imetleb ainult neid suuri näitlejaid, kes ei imetle iseennast.

Eeldus 2. Valner imetleb kõiki neid suuri näitlejaid, kes ei imetle iseennast.

Väide. Valner ei ole suur näitleja.

Tõestus. Oletame, et Valner on suur näitleja. Valner kas imetleb iseennast või ei imetle. Näitame, et mõlemad juhud viivad vastuolule, mistõttu meie oletus, et Valner on suur näitleja, peab olema väär. Kõigepealt eeldame, et Valner imetleb iseennast. Esimese eelduse ja meie oletuse, et Valner on suur näitleja, põhjal Valner ei imetle iseennast, mis on vastuolu. Teisel juhul eeldame, et Valner ei imetle iseennast. Kuid siis teisest eeldusest ja meie oletusest, et Valner on suur näitleja, järeldub, et Valner imetleb iseennast. Seega mõlemal juhul saame vastuolu.

- 71.** Tõestada vahetu arutlusega, et kehtivad järgmised järeldumised

- $\exists x (B(x) \rightarrow C(x)), \forall x B(x) \models \exists x C(x)$
- $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \models \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
- $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \models \exists x \neg B(x) \rightarrow \neg \forall x A(x)$
- $\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x) \models \exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$

- 72.** Süllogism *Festino* on arutlusskeem, mis väljendub järgmises arutluses.

Kui ükski lind pole neljajalgne ja leidub elusolend, kes on neljajalgne, siis leidub elusolend, kes pole lind.

Panna see süllogism kirja predikaatarvutuse valemitega ja tõestada, et süllogism on korrektne.

- 73.** Tõestada süllogismi *Celarent* korrektsus:

Kui ükski roomaja ei ole karvane ja kõik maod on roomajad, siis ükski madu ei ole karvane.

74. Järgmised arutluskäigud on võetud Lewis Carrolli (tuntud ka kui raamatu „Alice imedemaal“ autor) teosest „Symbolic Logic“ (1896). Panna need arutluskäigud kirja valemkujuks ja tõestada, et nad on korrektsed.

- a) Lapsed on ebaloogilised. Me ei põlasta kedagi, kes saab jagu krokodillist. Me põlastame kõiki, kes on ebaloogilised. Järelikult ükski laps ei saa jagu krokodillist.
- b) Ükski part ei oska tantsida valssi. Ükski ohvitser ei lükka tagasi kutset valsile. Kõik minu kodulinnud on pardid. Järelikult minu kodulinnud pole ohvitserid.

75. Arutluskäigu korrektsus või mittekorrektsus sõltub tihti sellest, kuidas mingit mittemõttelist lauset mõistetakse. Järgmises arutluskäigus on esimene eeldus kahe-mõtteline. Teisendada see arutluskäik valemkujule kahel viisil. Esimesel juhul eeldus-test järeldeb väide. Tõestada seda vahetu arutlusega. Teisel juhul ei järeldu. Kirjeldada olukorda, kus eeldused on tõesed, aga väide väär.

Igaüks imetleb mingit punapead.

Igaüks, kes imetleb iseennast, on ülbe.

Järelikult keegi punapea on ülbe.

76. Vaatleme järgmist arutluskäiku.

Kui antud indiviidi eellase iga eellane on alati ka antud indiviidi eellane ja ükski indiviid pole iseenda eellane, siis peab leiduma keegi, kellel pole eellasi.

Kas see arutluskäik on korrektne?

77. Tõestada, et eeldustest järeldeb väide.

Iga hulga X puhul leidub hulk Y , mille võimsus on suurem kui hulga X võimsus.

Kui hulk X kuulub hulka Y , siis hulga X võimsus ei ole suurem kui hulga Y võimsus.

Kõik hulgad sisalduvad hulgas U .

Järelikult U pole hulk.

14. Väidete tõestamine II

78. Vaatleme järelatumist kujul

eeldus, eeldus, eeldus $\models$ väide

kus eeldused ja väide on mingid predikaatarvutuse valemid. Kuidas tuleks selle järel-dumise tõestamisel käsitleda olukorda, kus

- | | |
|--|---|
| a) eeldus on kujul $\exists x(\dots)$ | e) väide on kujul $\forall x(\dots)$ |
| b) eeldus on kujul $\forall x(\dots)$ | f) väide on kujul $\exists x(\dots)$ |
| c) eeldus on kujul $(\dots) \vee (\dots)$ | g) väide on kujul $(\dots) \rightarrow (\dots)$ |
| d) eeldus on kujul $(\dots) \rightarrow (\dots)$ | h) väide on kujul $(\dots) \vee (\dots)$ |

79. Tõestada vahetu arutlusega järgmised järeldumised.

- $\exists x(P(x) \rightarrow Q), \exists x(Q \rightarrow P(x)) \models \exists x(P(x) \leftrightarrow Q)$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \neg \forall x(A(x) \rightarrow C(x)) \models \exists x(\neg C(x) \& B(x))$
- $\neg \exists xP(x), \neg \exists x(Q(x) \& R(x)), \forall x(P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \models \forall x(R(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$
- $\forall x \forall y(L(x, y) \rightarrow L(y, x)), \exists x \forall y L(x, y) \models \forall x \exists y L(x, y)$

80. Tõestada vahetu arutlusega, et järgmised valemid on samaselt tõesed.

- $\exists x \forall y(P(y) \vee (P(x) \rightarrow Q(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(R(x, y) \rightarrow \neg S(y)) \vee S(x))$
- $\forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$
- $\forall x \exists y(C(x, y) \& C(y, x) \rightarrow C(x, x))$

81. Igapäevaelus tuleb teinekord ette arutluskäike, mis pole loogiliselt korrektsed. Kui loogikaviga tehakse tahtlikult, siis nimetatakse sellist käitumist demagoogiaks. Panna järgmised arutluskäigud kirja valemkujul ja selgitada, milles seisneb nendes arutluskäikudes viga.

- Pöördväite viga.* Kõik suured projektid on keerulised. See projekt on keeruline. Järelikult see projekt on suur.
- Vastandväite viga.* Kõik ausad inimesed maksavad makse. Robert ei ole aus inimene. Järelikult Robert ei maksa makse.
- Kui kompileerimisel tekib veateade, siis programm ei ole korrektne. Kompileerimisel ei tekkinud veateadet. Järelikult programm on korrektne.
- Ükski hea auto ei ole odav. Simbaru ei ole odav. Järelikult Simbaru on hea auto.
- Tartu tänavad on heas korras — sest näete, Roosi tänav on heas korras.

82. Formuleerida arutlusskeem, mis sarnaneks eelmise ülesande punktide a) ja b) aluseks olevate skeemidega ja mis oleks loogiliselt korrektne. Tõestada predikaatarvutuse vahenditega, et see skeem on tõepoolest loogiliselt korrektne.

83. Tõestada, et esimesest lausest järeldub teine.

- Professor on rõõmus, kui kõik tema õpilased armastavad loogikat.
- Professor on rõõmus, kui tal ei ole õpilasi.

84. *Võileib Krakovi vorstiga.* Tuntud panteroloog Pauka on teinud ühe kindla kvartali kasside kohta 9 huvipakkuvat tähelepanekut. Huvipakkuvat seepoolest, et esmapilgul ei näi neil olevat mingit omavahelist seost. See on aga siiski olemas. Enamgi, nende vaatluste alusel võib teha ülesande pealkirja suhtes üsna kindla järelduse. Millise?

- 1) Spetsiaalselt loomadele ettenähtud einelauas „Roheline aas“ pakutakse alati või-leibu Krakovi vorstiga.
- 2) Ükski kass, kes ei eelista põldhiiri koduhiirtele, ei külasta loomaaeda.
- 3) Kõik kassid oskavad näuguda.
- 4) Ühtki kassi, kes pole kollast karva, ei saa kahtlustada rõõsa koore varguses.
- 5) Iga kass, kes oskab näuguda, võib käia öösiti õues.
- 6) Iga kass, kes ei varasta rõõska koort, käib einelauas „Roheline Aas“.
- 7) Kõik kassid, kes käivad öösiti õues, eelistavad koduhiiri põldhiirtele.
- 8) Ainult need kassid, kes külastavad einelauda „Roheline Aas“, armastavad või-leiba Krakovi vorstiga.
- 9) Ainult need kassid, kes käivad loomaaias, on kollast karva.

15. Loogika kordamine

85. Teha tõesuspuu abil kindlaks, kas valem on samaselt tõene, samaselt väär või ei kumbki.

- a) $A \& \neg B \leftrightarrow B \rightarrow C$
- b) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- c) $\neg(A \rightarrow C \& A) \& (A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B)$

86. Olgu hulgal $\{a, b, c\}$ määratud järgmised predikaadid:

$P(x)$	$Q(x)$	$R(x, y)$																																
<table> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr> <tr><th></th><td>t</td><td>t</td><td>v</td></tr> </table>		a	b	c		t	t	v	<table> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr> <tr><th></th><td>t</td><td>v</td><td>v</td></tr> </table>		a	b	c		t	v	v	<table> <tr><th></th><th>a</th><th>b</th><th>c</th></tr> <tr><th>a</th><td>v</td><td>t</td><td>t</td></tr> <tr><th>b</th><td>v</td><td>v</td><td>v</td></tr> <tr><th>c</th><td>v</td><td>v</td><td>t</td></tr> </table>		a	b	c	a	v	t	t	b	v	v	v	c	v	v	t
	a	b	c																															
	t	t	v																															
	a	b	c																															
	t	v	v																															
	a	b	c																															
a	v	t	t																															
b	v	v	v																															
c	v	v	t																															

miste valemite tõeväärtused.

Leida järgmiste valemite tõeväärtused.

- a) $\exists x \forall y (P(x) \leftrightarrow Q(y))$
- b) $\neg \exists x \neg \exists y (P(x) \rightarrow Q(y))$
- c) $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y \neg (P(y) \rightarrow Q(x)))$
- d) $\exists x \forall y \neg (R(x, y) \vee R(y, x))$
- e) $\forall x (\exists y R(x, y) \vee \exists z R(z, x))$
- f) $\forall x \exists y \exists z \neg (R(x, y) \rightarrow \neg R(z, x))$

87. Olgu interpretatsiooni kandjaks kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot, = \rangle$. Väljendada järgmised laused.

- a) Arvude x ja y vahel leidub 5-ga jaguv arv.
- b) Kõik arvude x ja y vahel asuvad algarvud avalduvad kujul $4n + 1$.

- c) x jagub täpselt ühe algarvuga.
 d) x on vähim paarisarv, mille ruut jagub y -ga.

88. Lihtsustada valemid predikaatarvutuse põhisamaväärsuste abil.

- a) $\neg((\exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \rightarrow \forall x\neg P(x) \& \forall x\neg Q(x))$
 b) $\forall y(\exists xA(x) \rightarrow B(y)) \& \forall y(B(y) \rightarrow \forall xA(x))$

89. Leida järgmiste valemite prefikskuju.

- a) $\forall xA(x) \leftrightarrow \exists xB(x)$
 b) $\exists xA(x) \& \exists xB(x) \rightarrow C(x)$

90. Laual on hulk geomeetrilisi kehasid. Teha iga järgmise arutluse puhul kindlaks, kas eeldustest järeldub väide. Kui jah, siis esitada tõestus. Kui ei, siis tuua kontranäide. (Igas ülesandes on erinev olukord.)

- a) **Eeldus 1.** Iga kujund on kuup või püramiid.
Eeldus 2. Vähemalt üks kujund ei ole kuup.
Väide. Vähemalt üks kujund ei ole püramiid.
 b) **Eeldus 1.** Iga kujund on kuup või püramiid.
Eeldus 2. Vähemalt üks kujund ei ole kuup.
Väide. Vähemalt üks kujund on püramiid.
 c) **Eeldus 1.** Iga kuup on suurem igast püramiidist.
Eeldus 2. Iga püramiid on suurem igast silindrist.
Väide. Iga kuup on suurem igast silindrist.
 d) **Eeldus 1.** Alati, kui üks kujund asub teisest vasakul, on esimene kujund teisest suurem.
Eeldus 2. Kõik kuubid on rohelised.
Eeldus 3. Kõik püramiidid on hallid.
Eeldus 4. Ükski roheline kujund ei ole ühestki rohelisest kujundist suurem.
Väide. Ükski kuup ei asu ühestki teisest kuubist vasakul.

91. Tõestada vahetu arutlusega järgmised järeldumised.

- a) $\forall x(K(x) \vee P(x)), \exists x\neg R(x), \forall x(K(x) \rightarrow R(x)) \models \exists xP(x)$
 b) $\forall xA(x) \leftrightarrow \exists x\neg B(x) \models \neg\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x))$

16. Kontrolltöö. Näidis 2017. aastast.

1. Kontrollida tõesuspuu abil:

- a) kas valem $(C \& B) \& (\neg A \vee B \rightarrow B \& C)$ on samaselt väär;
 b) kas valem $C \& (A \rightarrow B) \vee (C \rightarrow \neg B \& A)$ on samaselt tõene.

2. Hulgal $\{a, b, c, d\}$ on antud predikaadid $P(x)$ ja $S(x, y)$ vastavalt tabelitega

x	a	b	c	d		$x \backslash y$	a	b	c	d
	t	t	v	t	ja	a	v	t	v	v
						b	t	v	v	v
						c	v	v	v	t
						d	v	v	v	t

Leida valemite tõeväärtused ja põhjendada neid lühidalt.

- $\forall x \forall y (\neg P(x) \& \neg P(y) \rightarrow (x = y))$
 - $\exists x \exists y (\forall z (S(z, y) \leftrightarrow S(x, y)))$
3. Defineerida vajalikud predikaadid ning väljendada predikaatarvutuse valemitega järgmised laused.
- Väljendada kasside hulgal lause: „Iga hästi käituva valge kassi puhul leidub kaks erinevat musta kassi, kes ei käitu hästi.“
 - Väljendada inimeste hulgal lause: „Ei leidu kedagi, kelle sõprusringkonnas oleks mõni sõber, kellel pole ühtegi sõpra.“
4. Olgu interpretatsiooni kandja kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot, = \rangle$.
- Defineerida ja väljendada abipredikaadid „ x jagub y -ga“, „ $x > y$ “ ja „ x on paaritu arv“.
 - Väljendada nende predikaatide abil lause: „ x on 5-st suurem paaritu arv“.
 - Väljendada nende predikaatide abil lause: „kõik paaritud arvud, mis jaguvad x -ga, on y -st suuremad“.

5. Teisendada valem prefiks kujule:

$$\forall x A(x) \vee \neg (\forall x B(x) \& (\exists x C(x, y) \rightarrow \exists x D(x)))$$

6. a) Tõestada vahetu arutlusega, et kehtib järeldumine

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \models \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$

- b) Leida interpretatsioon, millest nähtuks, et ei kehti järeldumine

$$\exists x (\neg Q(x) \rightarrow \forall y P(y)) \models \exists x (\neg \forall y Q(y) \rightarrow P(x))$$

17. Graafide sissejuhatus

92. *Hunt, lammas ja kapsas.* Talumehel on vaja paadiga üle jõe viia hunt, lammas ja kapsas. Paat on nii väike, et talumees saab kaasa võtta ainult ühe neist objektidest.

Arusaadavatel põhjustel ei või jätta hunti samale kaldale üksi lambaga ega lammast üksi kapsaga. Kuidas peaks talumees tegutsema?

Ülesande lahendamiseks koostada graaf, mille tipud on võimalikud seisud: näiteks ($hk | Pl$) tähendab, et vasakul kaldal asuvad hunt ja kapsas, ning paremal kaldal paat ja lammas. Servaga on ühendatud seisud, mis on teineteisest saadavad ühe ülemineku.

93. Misjonärid ja kannibalid. Kaks misjonäri ja kaks kannibali peavad ületama paadiga jõe, kuid paat mahutab maksimaalselt kaks inimest. Ühelgi hetkel ei tohi samal kaldal asuda rohkem kannibale kui misjonäre, sest siis sööksid kannibalid misjonärid ära. Kuidas saaksid kõik misjonärid ja kannibalid üle jõe?

94. Lahendada eelmine ülesanne juhul, kui jõe peavad ületama kolm misjonäri ja kolm kannibali.

95. Festivali aitab korraldada 12 vabatahtlikku, kes kuuluvad järgmistesse toimkondadesse:

Ülesseadmistööd: Agu, Pihel, Luule, Kari

Piletimüük: Vesse, Ebe, Säuk

Toitlustamine: Raho, Vesse, Pihel, Urm

Festivalipood: Hink, Säuk, Agu

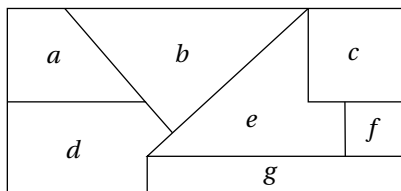
Liikluskorraldus: Urm, Iko, Hink

Koristamine: Raho, Urm, Kari, Tirt

Kõik toimkonnad peavad järgmisel nädalal korra kokku saama, kuid vabad on ainult kolm ajavahemikku. Koostada koosolekute ajakava nii, et kõik vabatahtlikud saaksid osaleda kõigi oma toimkondade koosolekutel.

Selleks esitada iga toimkond graafi tipuna ja tõmmata tippude vahele serv, kui toimkondadel on ühine liige. Värvida tipud kolme värviga nii, et ühise liikmega toimkonnad oleksid alati eri värvi, ja panna selle järgi kokku ajakava.

96. Milline on vähim arv värve, millega saab järgmisel kaardil ära värvida kõik riigid a–g nii, et ühise piiriga riigid oleksid alati eri värvi? Küsimusele vastamiseks joonistada graaf, kus igale riigile vastab üks tipp ja tipud on servaga ühendatud parajasti siis, kui riikidel on ühine piir.



97. Lahendada graafiteooria programmiga lahendaja. jar ülesanded ülesandekogust graafid.yk. Juhised asuvad Moodle'is.

18. Tipuastmete teoreem

98. Leida graafi K_n servade arv.

99. Kui graafil G on 15 serva ja graafil $\overline{G}$ on 13 serva, siis mitu tippu on graafil G ?

100. Riigis on 16 linna, sh pealinn. Kas on võimalik rajada linnade vahele kaabliühendused nii, et pealinnal oleks otseühendus kõigi ülejäänud linnadega ja igal ülejäänud linnal oleks otseühendus täpselt $2/3$ -ga kõigist teistest linnadest?

101. Riigis on 15 linna, millest osa on omavahel ühendatud kahesuunaliste maanteedega. Kõik maanteed on kahesuunalised ja väljaspool linnu üksteisega ei lõiku. Hommikul väljub igast linnast 5 lumesahka, millest igaüks puhastab oma teel lumest ühe sõidusuuna. Õhtuks jõuavad kõik lumesahad tee lõppu järgmisse linna. Kas on võimalik organiseerida lumesahkade sõidud nii, et õhtuks ei jääks ühtegi poolikult puhastatud teed (st teed, millel oleks puhastatud ainult üks sõidusuund)?

- 102.**
- a) Kas leidub 6-tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe ühepalju?
 - b) Kas leidub 8-tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe ühepalju?
 - c) Panna kirja tingimus, mida peab rahuldama graafi tippude arv n , et graafis oleks paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.
 - d) Tõestada, et iga naturaalarvu n puhul, mis rahuldab seda tingimust, leidub n -tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.
 - e) Tõestada, et ühegi naturaalarvu n puhul, mis ei rahulda seda tingimust, ei leidu n -tipulist graafi, milles oleks paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.

103. Tõestada, et majas, kus on ainult üks välisuks, leidub ruum, millel on paaritu arv uksti.

104. 100-tipulisel graafil on 360 serva ning iga tipp, välja arvatud tipp v , on astmega 7. Leida tipu v aste.

105. 75-tipulisel graafil on 256 serva. Graafi kõik tipud, välja arvatud kaks, on astmega 5. Leida ülejäänud kahe tipu astmed.

106. 18-tipulises täisgraafis värvitakse osa tippe valgeks ja ülejäänud mustaks. Leida vähim arv tippe, mis tuleb valgeks värvida, et erinevat värvi tippe ühendavaid servi oleks rohkem kui sama värvi tippe ühendavaid servi.

107. Graafis G on x tippu astmega 12 ja ülejäänud y tippu on astmega 30. Graafi G

täiendis on x tippu astmega 32 ja ülejäänud y tippu on astmega 14. Mõlemal graafil on ühepalju servi. Leida x ja y .

19. Sidusus, isomorfism

108. Tõestada, et igas vähemalt kaheliikmelises seltskonnas leidub kaks inimest, kellel on koosviibijate hulgas sama arv tuttavaid. (Eeldame, et tutvusseos on kahesuuneline.)

109. Kas on võimalik värvida 15-tipulise täisgraafi mõned servad punaseks ja ülejäänud rohelisteks nii, et igast tipust väljub punaseid servi sama palju kui rohelisi?

110. Defineerida: a) sidus graaf; b) sidus komponent.

111. Graafi tippude hulk jaguneb kaheks ühisosata alamhulgaks A ja B . On teada, et

- 1) igast hulga A tipust pääseb mööda ahelat mõnda hulga B tippu;
- 2) igast hulga B tipust pääseb mööda ahelat igasse hulga B tippu.

Tõestada, et graaf on sidus.

112. Tõestada, et iga graafi G puhul on G ise või G täiend sidus.

113. Graaf rahuldab järgmist kahte tingimust:

- 1) iga kahe servaga ühendatud tipu jaoks leidub tipp, mis on kummagi servaga ühendamata;
- 2) iga kahe servaga ühendamata tipu jaoks leidub tipp, mis on kummagi servaga ühendatud.

Tõestada, et nii graaf kui ka tema täiendgraaf on sidus.

114. Lahendada graafiteooria programmiga lahendaja .jar ülesanded ülesandekogust graafid2.yk.

115. Defineerida graafide isomorfism.

116. Graafiteoreetilise invariandi *kontranäide* on kaks graafi, mille puhul invariandi väärtused on võrdsed, aga graafid ei ole isomorfsed. Üks invariant on näiteks graafi tipuastmete järjest. Leida selle invariandi kontranäide.

- 117.** a) Leida 4-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.
 b) Leida 5-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.
 c) Tõestada, et kui G on n -tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga, siis n annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1.
 d) Tõestada, et kui n annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1, siis leidub n -tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.

20. Graafiteooria väidete tõestamine

118. Defineerida: a) graaf; b) graafi täiendgraaf.

119. Kuuetipulise täisgraafi K_6 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub kolmnurk, mis koosneb ainult sinistest või ainult punasest servadest.

120. Viietipulise täisgraafi K_5 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestada, et värvitud graafis leidub ühte värvi tsükkel.

- 121.** a) Tõestada, et kui graafis leidub sild, siis leidub graafis vähemalt kaks paaritu astmega tippu.
 b) Olgu antud sidus graaf, milles leidub sild e ning milles on täpselt kaks paaritu astmega tippu u ja v . Tõestada, et iga lihtahel tipust u tippu v läbib graafi silda e .

122. Tõestada, et igas graafis leidub iga paaritu astmega tipu jaoks ahel sellest tipust mingisse teise paaritu astmega tippu.

123. Olgu G graaf, mille iga tipu aste on paarisarv ning vähemalt üks astmetest erineb nullist. Tõestada, et graafis G leidub serv, mis ei ole sild.

124. Olgu G graaf, mille iga tipu aste on 3. Tõestada, et graafis G leidub lihttsükkel, mille pikkus on paarisarv.

125. On seltskond inimesi, kellest mõned on omavahel tuttavad ning ülejäänud ei ole. Igal õhtul korraldab üks neist peo, kutsub sinna kõik oma tuttavad ja tutvustab kõiki neid üksteisega. Pärast seda, kui kõik sellest seltskonnast on peo ära korraldanud, leidub seltskonnas ikkagi kaks inimest, kes teineteist ei tunne. Tõestada, et nad ei tunne teineteist ka pärast järgmist pidu.

126. Väike hiir kavatseb süüa kuubikujulist juustu. Selleks jagab ta mõttes juustu $3 \times 3 \times 3$ võrdseks kuubikuks, alustab nurkmisest kuubikust ning soovib lõpetada keskel. Pärast iga kuubiku söömist liigub hiir naaberkuubikusse (millel on senise kuubikuga ühine tahk). Kas hiirel õnnestub see plaan?

127. Jalgpalliturniiril osaleb 18 meeskonda. Igas voorus peab iga meeskond ühe mängu.

- a) Tõestada, et pärast teist vooru saab leida 9 meeskonda, kes pole omavahel mänginud ühtegi mängu.
- b) Tõestada, et pärast kaheksandat vooru saab leida 3 meeskonda, kes pole omavahel mänginud ühtegi mängu.

21. Graafiteooria väidete tõestamine II

128. n -mõõtmeline kuup on graaf, mille tippudeks on kõikvõimalikud kahendarvud pikkusega n ning servaga on ühendatud parajasti need tipud, millele vastavad kahendarvud erinevad täpselt ühe kahendkoha poolest.

- a) Leida n -mõõtmelise kuubi tippude arv.
- b) Leida n -mõõtmelise kuubi servade arv.
- c) Tõestada, et n -mõõtmeline kuup on sidus.
- d) Leida suurim kaugus n -mõõtmelise kuubi mingi kahe tipu vahel.
- e) Kas n -mõõtmelises kuubis leidub sildu?
- f) Kas n -mõõtmelises kuubis leidub eraldavaid tippe?

129. Klassis on 12 poissi ja 16 tüdrukut, kellest osa on omavahel sõbrad. Kas võib esineda olukord, kus iga poiss on sõber 6 poisi ja 9 tüdrukuga ning iga tüdruk on sõber 7 poisi ja 8 tüdrukuga? Kui selline olukord saab esineda, siis tuua vastav näide; kui ei, siis põhjendada.

130. Olgu G graaf, mille iga tipp kuulub mingisse lihttsükklisse (erinevad tipud võivad kuuluda erinevatesse lihttsükklitesse). Tõestada, et graafis on servi vähemalt samapalju kui tippe.

131. Tõestada, et igas graafis G kehtib

$$\sum_{v \in V(G)} d(v)^2 = \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)).$$

132. Sidusas graafis G on kaks lihttsükklit, mis ei sisalda ühiseid tippe. Esimesel tsükklil on võetud tipp a , teisel tsükklil tipud b ja c . Tõestada, et graafis G leidub ahel, kuhu kuuluvad tipp a ja lisaks täpselt üks tippudest b või c (aga mitte mõlemad).

133. Olgu G mittesidus graaf, mille igas sidusas komponendis on vähemalt kaks tippu. Tõestada, et iga kahe samasse komponenti kuuluva tipu u ja v puhul leidub graafi G täiendus tsükkel, mis läbib tippe u ja v .

134. Tõestada, et kui G on sidus graaf, siis graafi G saab teatava hulga tippude kustutamisega muuta mittesidusaks parajasti siis, kui G ei ole täisgraaf.

135. Olgu G graaf, milles iga tipu aste on vähemalt 2.

- Tõestada, et graafis G leidub tsükkel.
- Tõestada, et leidub sidus graaf H , mille tipuastmete järjend on sama mis graafil G .

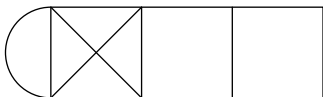
136. Tõestada, et igas vähemalt kahetipulises graafis leidub vähemalt kaks tippu, mis ei ole eraldavad.

137. Olgu G graaf ja v tema vähima astmega tipp.

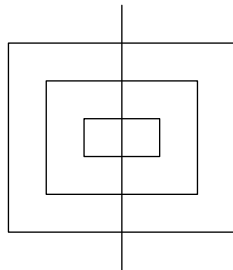
- Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $d(v)$.
- Eeldame, et G on sidus, aga mitte täisgraaf. Tõestada, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $d(v) + 1$.

22. Euleri ja Hamiltoni tsüklid

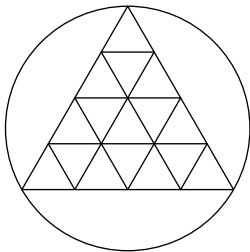
138. Teha kindlaks, kas järgmisi kujundeid saab joonistada ilma pliatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont korduvalt läbimata.



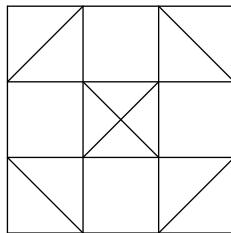
a)



b)



c)



d)

139. Millal saab linna tänavate keskjooned joonistada nii, et joonistusmasin ei läbi ühtegi tänavat kaks korda?

140. a) Tõestada, et kui sidusas graafis leidub täpselt kaks paaritu astmega tippu, siis leidub graafis Euleri ahel, mis algab ühes neist tippudest ja lõpeb teises.

b) Olgu G sidus graaf, milles leidub $m > 0$ paaritu astmega tippu. Tõestada, et graafis leidub $m/2$ ahelat nii, et graafi G iga serv asub täpselt ühel neist ahelatest.

141. Olgu n positiivne täisarv ja $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Vaatleme graafi G , mille korral $V(G) = \{A \subseteq X : |A| = 2\}$ ning $E(G) = \{\{A, B\} : A \cap B \neq \emptyset\}$. Leida kõik positiivsed täisarvud n , mille korral G on Euleri graaf.

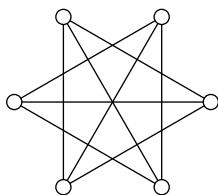
142. a) Tõestada, et iga sidusa graafi G puhul kehtib üks järgmistest tingimustest.

(1) G on Euleri graaf.

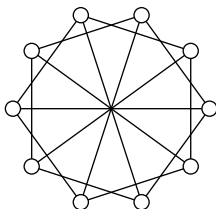
(2) G on saadav teatavast Euleri graafist ühe tipu kustutamise teel.

b) Kas leidub sidus graaf, mis rahuldab korraga mõlemat tingimust?

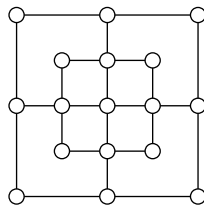
143. Kui graafis leidub Hamiltoni tsükkel, siis leida see. Vastasel korral tõestada, et graafis Hamiltoni tsükli ei ole.



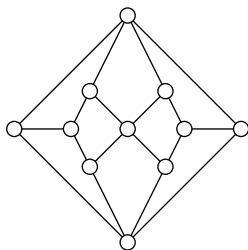
a)



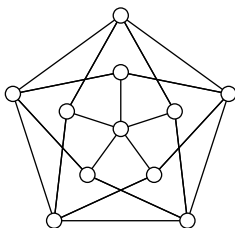
b)



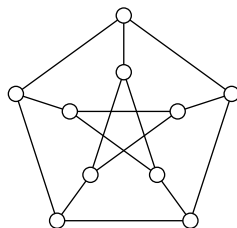
c)



d) Herscheli graaf



e) Grötzsch'i graaf



f) Peterseni graaf

144. Täielik kahealuseline graaf $K_{m,n}$ on graaf, mille tippude hulk jaguneb kaheks hulgaks: m tippu ja n tippu, kusjuures sama hulga tippude vahel servi ei ole ja erinevate hulkade tippude vahel on tõmmatud kõikvõimalikud servad.

- a) Tõestada, et $K_{n,n}$ on Hamiltoni graaf iga $n > 2$ puhul.
- b) Tõestada, et $K_{n,n+1}$ ei ole Hamiltoni graaf ühegi $n > 1$ puhul.

- 145.**
- a) Kas kehtib väide, et sidusas graafis, kus pole rippuvaid ega isoleeritud tippe, leidub alati tsükkel, mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord?
 - b) Kas kehtib väide, et sidusas graafis, kus pole rippuvaid ega isoleeritud tippe, leidub alati ahel mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord?

146. Gray kood on n -bitiste kahendarvude $0, 1, \dots, 2^n - 1$ järjestus, kus iga kaks järjestikust kahendarvu erinevad täpselt ühe biti poolest.

- a) Tõlgendada n -bitist Gray koodi n -mõõtmelise kuubi (vt eelmise praktikumi ülesanded) abil.
- b) Leida üks 3-bitine Gray kood.
- c) Tõestada, et iga positiivse täisarvu n korral leidub n -bitine Gray kood.

- 147.**
- a) 8×8 malelaua mõlemast vastandnurgast lõigatakse välja üks ruut. Tõestada, et järelejäänud malelauda ei saa katta 1×2 doominokividega.
 - b) Gomory teoreem. 8×8 malelauast lõigatakse ükskõik kust välja üks valge ruut ja üks must ruut. Tõestada, et järelejäänud malelaua saab alati katta 1×2 doominokividega.

23. Puu mõiste

148. Kas leidub järgmiste omadustega graaf? Joonistada graaf või põhjendada, miks sellist ei ole.

- a) Puu, 9 tippu, 9 serva
- b) Graaf, sidus, 9 tippu, 9 serva
- c) Graaf, tsükliteta, 9 tippu, 6 serva
- d) Puu, 6 tippu, tipuastmete summa 14
- e) Puu, 5 tippu, tipuastmete summa 8
- f) Graaf, sidus, 6 tippu, 5 serva, sisaldab tsükli
- g) Graaf, 6 tippu, 5 serva, pole puu

149. Millega võrdub n -tipulise puu kõigi tippude astmete summa?

150. Puu tippude astmed on $1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4$ ja x . Leida kõik võimalused, milline saab olla x .

151. 150-tipulises puus on 20 tippu astmega 4 ja 30 tippu astmega 3. Ülejäänud tipud on astmega 2 või 1. Mitu tippu on astmega 2 ja mitu tippu astmega 1?

152. Tõestada, et kui vähemalt kolmetipulise puu ühegi tipu aste pole 2, siis puus leidub tipp, millest väljub vähemalt kaks lehte.

153. Ahelkiri algab ühest inimesest, kes saadab kirja viiele inimesele. Iga inimene, kes kirja saab, kas saadab selle edasi viiele järgmisele inimesele, kes veel kirja saanud pole, või ei saada seda kellelegi. Oletame, et kirja jõuab enne skeemi hääbumist saata 1000 inimest ja et keegi ei saa rohkem kui ühe kirja. Mitu inimest selle kirja saab ja mitu neist ei saada kirja edasi?

154. Kirjeldada puude ja tsüklite abil kõik sidusad graafid, mille tippude ja servade arv on võrdsed.

155. Olgu puu pikima lihtahela pikkus teatav paarisarv $2d$ ja v selle lihtahela keskmine tipp. Tõestada, et kõik puu lehed asuvad tipust v kaugusel ülimalt d .

156. Olgu G mingi n -tipuline puu ning v tema suvaline sisetipp. Tõestada, et puul G leidub leht, mille kaugus (st lühima lihtahela pikkus) tipust v pole suurem kui $n/2$.

157. Olgu G puu. Tõestada, et puu G kõigi tippude astmed on paaritud parajasti siis, kui ükskõik millise serva eemaldamisel koosnevad järelejäänud graafis kõik sidusad komponendid paaritust arvust tippudest.

24. Tõestusülesanded puudest

158. a) Tõestada, et kui puule lisada üks uus serv, siis tekib seal tsükel.

b) Tõestada, et kui puust kustutada üks serv, siis muutub ta mittesidusaks.

159. Olgu G graaf, kus serva lisamisel suureneb alati graafis olevate tsüklite arv ja serva kustutamisel suureneb alati graafi sidusate komponentide arv. Tõestada, et graaf G on puu.

160. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

1) iga kahte tippu ühendab ülimalt üks ahel (st ahelate arv on kas 1 või 0);

2) tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestada, et graaf G on puu.

161. Lisame puule ühe serva ja seejärel kustutame tekkinud tsüklit mingi teise serva. Tõestada, et saadud graaf on jällegi puu.

162. 12-tipulises sidusas graafis G esinevad ainult tipud astmega 1, 2 ja 3. On teada, et vähemalt pool graafi tippudest on astmega 1 ja ülimalt kolmandik graafi tippudest on astmega 3. Tõestada, et graaf G on puu.

163. Olgu G puu, mida vaatleme teedevõrguna keskaegses riigis. Puu tippudes asuvad kindlused. Tipus k elab kuningas, ülejäänud tippudes tema vasallid. Ühel päeval otsustavad kõik vasallid külastada kuningat ning väljuvad oma kindlustest täpselt

keskpäeval. Tõestada, et kohe pärast keskpäeva asub igal serval parajasti üks vasall. Järeldada sellest, et n tipuga puul on alati $n - 1$ serva.

164. Mis on valesti järgmises „tõestuses“?

Tõestame matemaatilise induktsiooniga, et igas n -tipulises puus leidub lihtahel pikkusega $n - 1$.

Baas. Selge, et ühetipulises puus leidub lihtahel pikkusega 0.

Samm. Eeldame, et n -tipulises puus leidub lihtahel pikkusega $n - 1$. Olgu u selle lihtahela otstipp. Lisame tipu v ja serva tipust u tippu v . Tulemuseks saadud puul on $n + 1$ tippu ja selles leidub lihtahel pikkusega n . Sellega on induktsiooni samm tõestatud.

165. Olgu G puu. Vaatleme selles puus maksimaalse pikkusega lihtahelaid.

- Tõestada, et igal kahel maksimaalse pikkusega lihtahelal leidub ühine tipp.
- Tõestada, et kõigil maksimaalse pikkusega lihtahelatel leidub ühine tipp.

166. Tõestada, et kui puu ei ole *täht*, st selline graaf, kus üks tipp on ühendatud kõigi teiste tippudega ja rohkem servi ei ole, siis tema täiendgraaf on sidus.

167. Graafi tipu v *ekstsentrilisuseks* (ehk ulatuseks) nimetatakse tipust v lähtuva maksimaalse pikkusega lihtahela pikkust. Tipud, mille ekstsentrilisus on graafi tippude hulgas kõige väiksem, moodustavad graafi *tsentri*. Tõestada, et kui graaf on puu, siis tema tsepter on ühe- või kahetipuline.

25. Puude omaduste kasutamine

168. Tõestada, et kümnetipulises puus, mille kõik tipuastmed on paaritud, leidub vähemalt kuus lehte.

169. 175-tipulisel puul on 90 lehte. Tõestada, et selles puus leidub tipp, mille aste on vähemalt 4.

170. Ahelkiri algab ühest inimesest, kes saadab kirja 10 inimesele. Kirja sisus palutakse saata kiri edasi 10 tuttavale ning kirja lõpus on kuni kuuest inimesest koosnev nimekiri. Kui nimekirjas on täpselt kuus inimest, peab igaüks, kes kirja saab, saatma nimekirjas esimesel kohal olevale inimesele 1 euro, kustutama selle inimese nimekirjast ja lisama oma nime nimekirja lõppu. Oletame, et sulle saabus selline ahelkiri. Mitu eurot oleks sul seda kirja edasi saates maksimaalselt võimalik teenida?

171. *Kahendpuu* on juurega puu, mille igal sisetipul on ülimalt 2 alluvat. *Täielik kahendpuu* on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt 2 alluvat.

- Täielikul kahendpuul on k sisetippu. Leida selle kahendpuu lehtede arv.
- Tõestada, et igal täielikul kahendpuul on paaritu arv tippe.

172. Täielik kolmendpuu on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt 3 alluvat. Olgu G täielik kolmendpuu, millel on kokku 100 tippu. Leida G lehtede arv.

173. Olgu G_1 ja G_2 puud, milles ühegi kahe tipu vaheline kaugus (tippe ühendava lihtahela pikkus) ei ole suurem kui d , kus d on teatav paarisarv. Tõestada, et puu G_1 mingi tipu ja puu G_2 mingi tipu saab servaga ühendada nii, et saadavas graafis ei ole ühegi kahe tipu vaheline kaugus suurem kui $d + 1$.

174. Süsivesinikud on keemilised ühendid, mis koosnevad süsiniku ja vesiniku aatomitest. Iga süsinikuaatom moodustab teiste aatomitega kuni neli keemilist sidet ning iga vesinikuaatom ühe sideme. Alkaanid (küllastunud süsivesinikud) on sellised süsivesinikud, mille molekulis on fikseeritud arvu süsinikuaatomite puhul maksimaalne arv vesinikuaatomeid.

- Joonistada kõik pentaani C_5H_{12} isomeerid.
- Tõestada, et alkaani struktuuri kujutav graaf on alati puu.
- Tõestada, et k süsinikuaatomiga alkaani vesinikuaatomite arv on $2k + 2$.

175. Tõestada, et järgmised tingimused positiivsete täisarvude järjendi $d_1, d_2, \dots, d_n$ kohta on samaväärsed.

- Leidub n -tipuline puu, mille tippude astmed on $d_1, d_2, \dots, d_n$.
- $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

(See annab lihtsa võimaluse kontrollida, kas antud tipuastmete järjendi puhul leidub selliste tipuastmetega puu.)

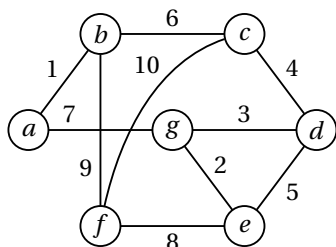
176. Ühes puu tipus istub sipelgas, kes hakkab liikuma mööda puu servi. Pärast jalutuskäigu lõpetamist selgub, et iga serva, mida sipelgas läbis, läbis ta täpselt kaks korda. Tõestada, et teekonna lõpus jõudis sipelgas tagasi samasse tippu, kust alustas.

177. Kui kustutada puust tipp v koos temast lähtuvate servadega, siis tekib hulk sidusaid komponente, millest igaüks on samuti puu. Nimetame neid tipu v *harudeks*. Tõestada, et puus leidub alati tipp, mille ükski haru ei sisalda rohkem kui pooli puu tippe.

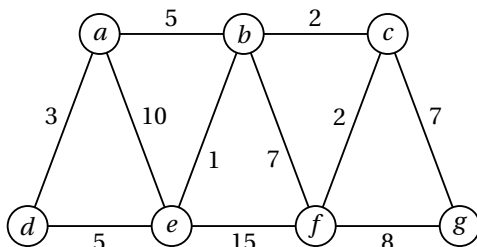
26. Aluspuud

178. Leida järgmiste graafide vähima kaaluga aluspuud

- Kruskali algoritmiga;
- Primi algoritmiga.



graaf G_1



graaf G_2

Kas mõlemad algoritmid annavad sama aluspuu?

179. Oletame, et

- Kruskali algoritmile
- Primi algoritmile

antakse ette mittesidus graaf. Mis on algoritmi töö tulemus?

180. Olgu G sidus graaf ning P_1 ja P_2 tema kaks erinevat aluspuud. Kas puudel P_1 ja P_2 peab kindlasti leiduma ühine serv? Tõestada või tuua kontranäide.

181. Olgu G sidus graaf ja P tema aluspuu. Tõestada, et iga serva e jaoks, mis ei kuulu puusse P , leidub puus P selline serv e' , et asendades puus serva e' servaga e , saame tulemuseks jällegi graafi G aluspuu.

182. Olgu G sidus kaalutud graaf.

- Tõestada, et kui e on graafi serv, mille kaal on väiksem iga ülejäänud serva kaalust, siis e kuulub igasse graafi G vähima kaaluga aluspuusse.
- Tõestada, et kui e on tipuga v intsidentne serv, mille kaal on väiksem iga ülejäänud tipuga v intsidentse serva kaalust, siis e kuulub igasse graafi G vähima kaaluga aluspuusse.

183. Tõestada, et kui sidusa graafi kõigi servade kaalud on erinevad, siis ühegi lihttsükli suurima kaaluga serv ei kuulu selle graafi vähima kaaluga aluspuusse.

184. Tõestada, et kui sidusa graafi kõigi servade kaalud on erinevad, siis graafil leidub täpselt üks vähima kaaluga aluspuu.

185. Tõestada, et kui anda järgmisele algoritmile ette sidus kaalutud graaf G , siis väljundiks on graafi G vähima kaaluga aluspuu.

Sisendiks on graaf G

$T := G$

$E :=$ graafi G servade hulk

$m :=$ graafi G servade arv

Korda kui veel $m > 0$:

Leia hulgast E suurima kaaluga serv e

Kustuta serv e hulgast E

$m := m - 1$

Kui alamgraaf, mis on saadud graafi T servade hulgast serva e kustutamisel, on sidus, siis kustuta serv e graafi T servade hulgast

Tagasta graaf T

186. Riigis on n linna, mille vahele tuleb rajada telefonivõrk. Riigis on kaks parteid: optimistid ja pessimistid. Optimistide strateegia on ehitatada uus liin alati nende kahe linna vahele, mille ühendamine on kõige odavam, tingimusel, et see ei tekita tsüklit. Pessimistide strateegia on välistada esmalt kõige kallim liin, seejärel kalliduselt järgmine jne ning ehitada kahe linna vahele liin alles siis, kui selle välistamine muudaks linnadevahelise ühenduse võimatuks. Võimul on optimistid ja pessimistid vaheldumisi etteteadmata ajavahemike tagant. Tõestada, et lõpuks valminud telefonivõrgu maksumus on võimalikest väikseim.

187. Tasandil on antud n punktist koosnev hulk V , mida vaatleme täisgraafi tippude hulgana. Defineerime selle täisgraafi servade hulgal kaalufunktsiooni, lugedes serva uv kaaluks punktide u ja v vahelise kauguse.

- Tõestada, et selle graafi vähima kaaluga aluspuus on iga tipu aste ülimalt 6.
- Tõestada, et selle graafi vähima kaaluga aluspuus ükski kaks serva ei lõiku.

27. Puud ja suunatud graafid

188. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

- ükskõik millise serva eemaldamisel suureneb sidusate komponentide arv ühe võrra;
- tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestada, et graaf G on puu.

189. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

- ükskõik millise kahe tipu vahele serva lisamisel tekib tsükel, mis sisaldab seda serva;
- tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestada, et graaf G on puu.

190. Olgu G sidus graaf ja T tema mingi tsükliteta alamgraaf. On teada, et kui graafile T lisada ükskõik milline graafi G serv e , mis graafi T ei kuulu, siis sisaldab tulemuseks saadud graaf tsüklit. Tõestada, et T on graafi G aluspuu.

191. Olgu G sidus graaf. Tõestada, et serv e kuulub igasse graafi G aluspuusse parajasti siis, kui G muutub serva e kustutamisel mittesidusaks.

192. Tõestada, et kui puus leidub k tippu ($k > 0$) astmega 4, siis on puul vähemalt $2k + 2$ lehte.

193. Klassis on 8 poissi ja 12 tüdrukut. Kas võib esineda olukord, kus korraga keh-tivad järgmised tingimused:

- pooltele poistest meeldivad igaühele täpselt pooled tüdrukutest;
- ülejäänud pooltele poistest meeldib igaühele täpselt 5 tüdrukut;
- pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt pooltele poistest;
- ülejäänud pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt 3 poisile?

Kui selline olukord saab esineda, siis tuua vastav näide; kui ei, siis põhjendada.

- 194.**
- a) Kirjeldada, kuidas saab graafe kasutada teatava võrgustiku piires saade-tud e-kirjade modelleerimiseks. Mis on tipud ja mis on servad? Kas ser-vad peaksid olema suunatud või suunamata? Kas tuleks lubada kordseid servi? Kas tuleks lubada silmuseid?
 - b) Kuidas saab selle graafi abil otsida inimesi, kes on hiljuti muutnud oma peamist meiliaadressi?
 - c) Kuidas saab selle graafi abil otsida meililistide aadresse, mille kaudu saa-detakse sama e-kirja paljudele erinevatele meiliaadressidele?

195. Programmi käskude omavahelist sõltuvust võib kujutada eelnevusgraafiga, mil-le tipud on käsud ja ühest käsust viib teise käsuni kaar, kui teist käsku pole võimalik täita enne esimest. Joonistada programmilõigu eelnevusgraaf ja teha selle abil kind-laks, millised käsud peavad olema täidetud enne viimase käsu täitmist.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) (K1) $a := 0$ | b) (K1) $x := 0$ |
| (K2) $b := 1$ | (K2) $x := x + 1$ |
| (K3) $c := a + 1$ | (K3) $y := 2$ |
| (K4) $d := b + a$ | (K4) $z := y$ |
| (K5) $e := d + 1$ | (K5) $x := x + 1$ |
| (K6) $e := c + d$ | (K6) $z := 4$ |
| | (K7) $y := x + z$ |

196. Projekti teostamiseks on vaja täita 10 tööülesannet. Ülesanded 1, 3 ja 5 ei nõua eeltöid. Enne ülesannet 2 peavad olema tehtud ülesanded 8 ja 6. Enne ülesannet 4 peavad olema tehtud ülesanded 1 ja 5. Enne ülesannet 6 peavad olema tehtud ülesan-ded 7 ja 4. Enne ülesannet 7 peab olema tehtud ülesanne 3. Enne ülesannet 8 peavad olema tehtud ülesanded 4 ja 7. Enne ülesannet 9 peavad olema tehtud ülesanded 2 ja 6. Enne ülesannet 10 peab olema tehtud ülesanne 9. Iga ülesanne võtab 1 päeva. Ülesandeid võib täita paralleelselt. Milline on vähim päevade arv, millega on võimalik projekt valmis saada?

197. Lahendada graafiteooria programmiga lahendaja. jar ülesanded ülesandekogust suunatud. yk.

28. Suunatud graafide kasutamine

198. Laual on n tikku. Käigul olles võib kumbki kahest mängijast võtta suvalise arvu tikke 1-st k -ni, $1 \leq k < n$. Käike tehakse kordamööda ning võidab see, kes võtab viimase tikku.

- Joonistada tikumängu graaf juhul $n = 8$ ja $k = 3$. Graafi tipud vastavad seisudele ja kaared käikudele ühest seisust teise.
- Leida tikumängu võitev strateegia.

199. Külas elab n vanamutti, $n \geq 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada uudise. Tõestada, et on võimalik organiseerida telefonikõned niiviisi, et pärast $2n - 4$ kõnet teab igaüks igaühe uudist.

200. Linnas elab n sõbrannat. Üksteisega suhtlevad nad mobiilisõnumite abil. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada uudise. Tõestada, et on võimalik organiseerida sõnumite saatmised nii, et pärast $2n - 2$ sõnumit teab igaüks igaühe uudist.

201. Tõestada, et vähemalt kahetipulise puu servad saab alati orienteerida nii, et ühegi tipu juures pole korraga sisenevaid ja väljuvaid servi.

202. Suunatud graafi tippudeks on kahendarvud $000, 001, \dots, 111$. Igast tipust $b_1 b_2 b_3$ viib kaar igasse tippu $b_2 b_3 b_4$.

- Leida selles graafis suunatud tsükel, mis läbib kõik tipud täpselt üks kord.
- Paigutada ringjoonele neli numbrit 0 ja neli numbrit 1 nii, et tekkiv ringjärjend sisaldab kõiki kahendarve $000, 001, \dots, 111$.
- Paigutada ringjoonele kaheksa numbrit 0 ja kaheksa numbrit 1 nii, et tekkiv ringjärjend sisaldab kõiki neljakohalisi kahendarve $0000, 0001, \dots, 1111$.

203. Suunatud graafi G tippudeks on kõik kahendarvud pikkusega n . Igast tipust $b_1 b_2 \dots b_n$ viib kaar igasse tippu $b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1}$. Tõestada, et graafis G leidub:

- suunatud tsükel, mis läbib kõik kaared täpselt üks kord;
- suunatud tsükel, mis läbib kõik tipud täpselt üks kord.

204. Linnas kehtib osal tänavatel kahesuunaline liiklus, ülejäänutel aga ühesuunaline. Igalt tänavalt on võimalik pääseda igale teisele. Remondi tõttu kehtestatakse kahe-suunalise liiklusega tänavatel ühesuunaline liiklus, ühesuunalise liiklusega tänavatel aga kahesuunaline. Osutub, et ka nüüd on võimalik pääseda igalt tänavalt igale teisele. Tõestada, et kõigil tänavatel saab kehtestada ühesuunalise liikluse nii, et igalt tänavalt on võimalik pääseda igale teisele.

205. Riigis on n linna, $n > 5$. Iga kahte linna ühendab tee. Väljaspool linna teed ei lõiku (kasutatakse viadukte). Tõestada, et teedel saab kehtestada ühesuunalise liikluse nii, et igast linnast võib pääseda igasse teise linna, sõites kas mööda neid kahte linna ühendavat teed või läbi mingi kolmanda linna.

206. Kahe teineteisega vaenujalal oleva kindluse rüütlid istuvad ümmarguse laua taga ja peavad rahuläbirääkimisi. Nende rüütlite arv, kelle paremal käel istub sõber, võrdub nende rüütlite arvuga, kelle paremal käel istub vaenlane. Tõestada, et rüütlite koguarv jagub 4-ga.

207. Suunatud graafi *tuumaks* nimetatakse tippude hulka S , mille puhul 1) hulga S tippude vahel pole ühtegi kaart ja 2) igast tipust, mis ei kuulu hulka S , viib kaar mingisse hulga S tippu. Olgu G tsükliteta suunatud graaf.

a) Tõestada, et graafil G on olemas üheselt määratud tuum.

b) Leida ülesande 1 graafi tuum.

c) Vaatleme mängu, kus kaks mängijat nihutavad kordamööda nuppu mööda graafi G tippe, järgides kaarte suundi, ning kaotab see, kes enam käiku teha ei saa. Millise algseisu puhul leidub alustajal võitev strateegia? Millise algseisu puhul leidub võitev strateegia alustaja vastasel?

29. Graafide kordamine

208. a) Millega võrdub graafi naabrusmaatriksi ühe rea elementide summa suunamata graafi puhul? Suunatud graafi puhul?

b) Millega võrdub graafi naabrusmaatriksi ühe veeru elementide summa suunamata graafi puhul? Suunatud graafi puhul?

209. Graafil on 495 serva. Osa tippe on astmega 3, ülejäänud astmega 5, seejuures tippe astmega 3 on kaks korda rohkem kui tippe astmega 5. Leida graafi tippude arv.

210. Graafil G on 9 tippu, kusjuures iga tipu aste on 5 või 6. Tõestada, et graafis G leidub vähemalt 5 tippu astmega 6 või vähemalt 6 tippu astmega 5.

211. Tõestada, et igas graafis leidub igast paaritu astmega tipust ahel mingisse teise paaritu astmega tippu.

212. Graafis G leidub iga kahe tipu vahel kaks lihtahelat, mis ei sisalda ühiseid servi. Tõestada, et graafis G pole sildu.

213. Olgu G graaf, kus iga tipp kuulub mingisse tsüklisse. Tõestada, et kui graafis leidub selline tsüklil C , et graafi igal ülejäänud tsüklil on tsükliga C mõni ühine tipp, siis graaf G on sidus.

214. 200-tipulise puu kõik sisetipud (st tipud, mis pole lehed) on astmega 4. Leida puu lehtede arv.

215. Kas leidub 75-tipuline puu, mille ühegi tipu aste pole suurem kui 3 ja mille kõigi lehtede eemaldamisel jääb järele 35-tipuline puu?

216. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

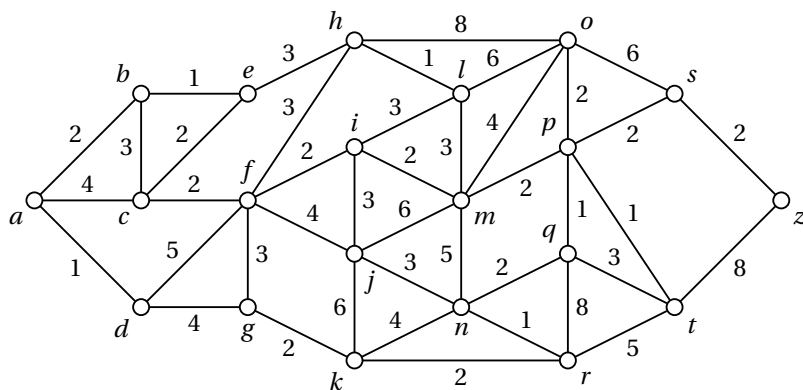
- ükskõik millise serva eemaldamisel jääb järele mittesidus graaf;
- ükskõik millise kahe tipu vahele serva lisamisel tekib tsükel, mis sisaldab seda serva.

Tõestada, et graaf G on puu.

217. Koosnegu graaf G kahest sidusast komponendist, mis on puud. Kaks erinevates komponentides asuvat tippu ühendatakse servaga. Tõestada, et saadud graaf on puu.

218. Olgu G suvaline n -tipuline puu. Tõestada, et iga graaf H , mille kõigi tippude astmed on vähemalt $n - 1$, sisaldab alamgraafi, mis on isomorfnene puuga G .

219. Leida järgmises graafis vähima kaaluga aluspuu ja lühim tee tipust a tippu z .



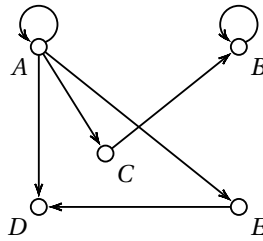
220. Olgu G suunatud graaf ning u ja v kaks tippu. Tõestada, et tippu u sisaldav tugevalt sidus komponent ja tippu v sisaldav tugevalt sidus komponent kas langevad kokku või ei sisalda ühtegi ühist tippu.

221. Tõestada, et n -tipulise täisgraafi servad saab orienteerida nii, et tulemuseks saadud suunatud graafis ei leidu ühtegi suunatud tsüklit.

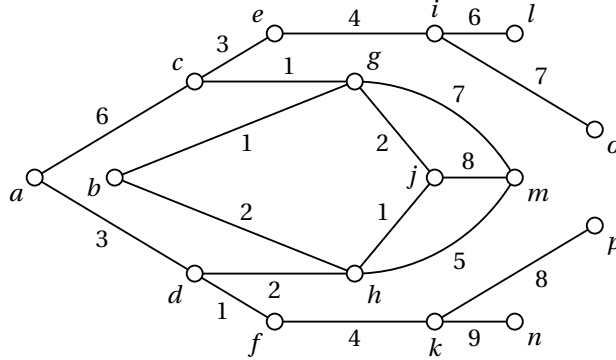
222. Olgu G nõrgalt sidus suunatud graaf ning $a \in G$ selline tipp, et $G \setminus a$ on tugevalt sidus. Tõestada, et iga kahe tipu $u, v \in G$ puhul leidub suunatud ahel tipust u tippu v või suunatud ahel tipust v tippu u .

30. Kontrolltöö. Näidis 2017. aastast.

1. Koostada järgmise graafi naabrusmaatriks.



2. (a) Leida graafi vähima kaaluga aluspuu sobiva kursusel käsitletud algoritmi-ga.



Tulemuseks saadud puus märkida iga serva puhul, mitmendana see serv tulemusse valitakse.

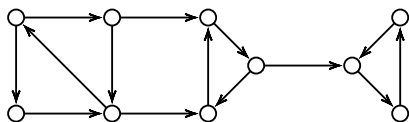
- (b) Mitu erinevat vähima kaaluga aluspuud sellel graafil leidub? Põhjendada.

3. Puus on 60 tippu, neist 25 on lehed. Ülejäänud on kas astmega 2 või 3. Mitu tippu on astmega 2 ja mitu astmega 3?
4. Olgu G (suunamata) graaf ning a ja b tipud, mille vahel serva ei ole. Igast ülejäänud tipust leidub ahel tippu a või tippu b . Tõestada, et kui mingi tipp, millest viib ahel tippu a , ja mingi tipp, millest viib ahel tippu b , on omavahel ühendatud ahelaga, siis graaf G on sidus.
5. Olgu G suunatud graaf, mis on saadud suunamata täisgraafi kõigile servadele suunda omistades. Olgu v graafi G suurima väljundastmega tipp. Tõestada, et tipust v viib igasse ülejäänud tippu suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

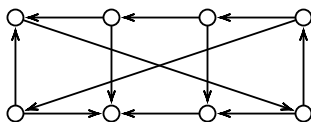
Soovitus: kasutada vastuväitelist tõestust.

31. Tugev sidusus

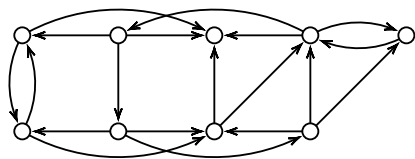
- 223.** Leida järgmiste graafide tugevalt sidusad komponendid.



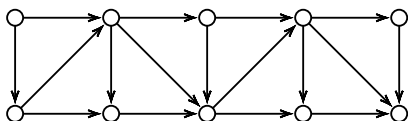
a)



b)

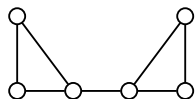


c)

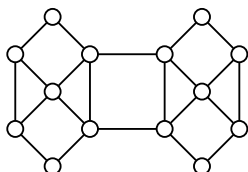


d)

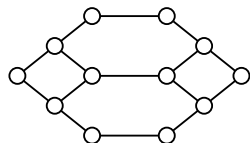
224. Suunamata graafi orienteerimine tähendab graafi servadele suundade omistamist nii, et tulemuseks saadav suunatud graaf on tugevalt sidus. Kui suunamata graafi servadele saab niimoodi suunad omistada, siis nimetame graafi orienteeritavaks. Teha kindlaks, kas järgmised suunamata graafid on orienteeritavad.



a)



b)



c)

225. Tõestada, et tugevalt sidusas graafis kuulub iga kaar mingisse suunatud tsükklisse.

226. Tõestada, et kõik tipud, mida läbib suunatud ahel, mis ühendab suunatud graafis kahte samasse tugevalt sidusasse komponenti kuuluvat tippu, kuuluvad samuti sellesse tugevalt sidusasse komponenti.

227. Kas kehtib väide, et kui silmusteta suunatud graafi alusgraaf on sidus ning iga tipu juures leidub sisenev ja väljuv kaar, siis on see graaf ka tugevalt sidus? Tõestada või tuua kontranäide.

228. Suunatud graaf koosneb n sidusast komponendist (nõrga sidususe mõttes), kusjuures kõik komponendid eraldi võetuna on tugevalt sidusad. Milline on vähim arv kaari, mida tuleb sellele graafile lisada, et tulemuseks saadav graaf muutuks tugevalt sidusaks?

229. Võrkpalliturniiril osaleb n võistkonda, kellest igaüks mängib iga ülejäänuga ühe mängu. Viike ei ole. Tõestada, et pärast turniiri lõppemist saab võistkonnad järjestada

da nii, et esimene võistkond on võitnud teist, teine kolmandat, jne kuni eelviimane viimast.

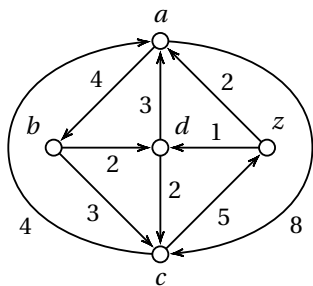
230. Olgu G suunatud täisgraaf ja v tema suurima väljundastmega tipp. Tõestada, et graafi G igasse ülejäänud tippu viib tipust v suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

231. Tõestada, et igas suunatud graafis G leidub tippude hulk S , mille tippude vahel pole ühtegi kaart (*stabiilne hulk*), kuid igasse tippu, mis ei kuulu hulka S , viib hulga S mõnest tipust suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

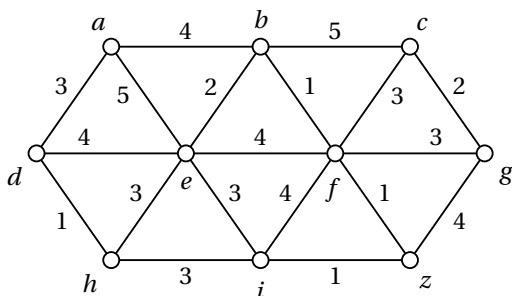
232. Tõestada, et suunatud graaf G on tugevalt sidus parajasti siis, kui graafi G tippude hulga ükskõik millise mittetühja pärisalamhulga X jaoks leidub graafis G kaar uv , et $u \in X$ ja $v \notin X$.

32. Suunatud ahelad ja tsüklid

233. Leida järgmistes kaalutud graafides tippude a ja z vahelise lühima tee pikkus (esimene on suunatud, teine suunamata graaf).



a)



b)

234. Kas suunatud graafi tippude vaheline lühim ahel on üheselt määratud, kui graafis on kõigi kaartede kaalud erinevad?

235. Olgu G suunatud graaf, milles mingist tipust a viib mingisse tippu b kaks erinevat lühimat suunatud ahelat.

- Eeldame, et nendel ahelatel leidub ühine tipp c , mis erineb tippudest a ja b . Tõestada, et esimese ahela osa $a \dots c$ ja teise ahela osa $a \dots c$ on võrdse kaaluga.
- Olgu d esimesel ahelal esimene tipule a järgnev tipp, mis kuulub ka teise ahelasse. Tõestada, et ükski teise ahela tipp, mis asub tippude a ja d vahel, ei kuulu esimesse ahelasse.

236. Lühima tee algoritmide juures eeldasime, et iga kaare kaal on mittenegatiivne. Vastasel juhul ei tarvitse algoritmid anda õiget tulemust. Tuua näide negatiivsete kaaludega graafist, mille puhul

- a) Dijkstra algoritm;
- b) Floyd-Warshalli algoritm

ei anna vastuseks vähima kaaluga lihtahela pikkust ühest tipust teise.

237. Olgu $G = (V, E)$ suunatud graaf ning $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ funktsioon, mis omistab iga-le kaarele reaalarvulise kaalu. Funktsiooni w *potentsiaaliks* nimetatakse funktsiooni $p: V \rightarrow \mathbb{R}$, kui iga kaare $e = uv$ puhul kehtib $w(e) = p(v) - p(u)$. Tõestada, et funktsiooni w potentsiaal eksisteerib parajasti siis, kui iga tsüklikline ringkäik mööda kaari (mitte tingimata suundi arvestades), kus kaare suunas tehtav samm lisab summasse selle kaare kaalu ja vastupidises suunas tehtav samm kaalu vastandarvu, lõpeb summa 0.

238. Muusikapala võib sisaldada järgmist tüüpi osi: *allegro*, *moderato*, *andante* ja *vivo*. Kehtivad järgmised kompositsioonipõhimõtted: *andante*-osa ei või vahetult järgneda *moderato*-osale ega vastupidi ning *vivo* ei või järgneda *allegro*-osale.

- a) Mitu 5-osalist muusikapala saab nendel tingimustel koostada?
- b) Mitu 5-osalist muusikapala saab koostada siis, kui lisaks nõuda, et selles esineks vähemalt üks *allegro*-osa?

239. Tasandil on märgitud teatud arv punkte ning tõmmatud teatud arv vektoreid, kusjuures iga vektor algab mingis märgitud punktis ja lõpeb mingis teises märgitud punktis. Igas punktis algab samapalju vektoreid, kuipalju lõpeb. Tõestada, et kõigi vektorite summa on nullvektor.

240. Tõestada, et iga graafi servad saab orienteerida nii, et ühegi tipu sisendaste ja väljundaste ei erine rohkem kui ühe võrra.

241. Konstrueerida kaalutud suunatud graaf, kus iga tippu vähemalt üks kord külastava tsükli kogukaal on vähim sellise tsükli puhul, mis külastab mõnda tippu rohkem kui üks kord.

242. Tõestada, et ülesande leida vähima kogukaaluga tsükkel, mis külastab kaalutud graafi iga tippu vähemalt üks kord, saab taandada ülesandele leida vähima kogukaaluga tsükkel, mis külastab kaalutud graafi iga tippu täpselt üks kord.

Lahendusvihjed

1. Võtta kasutusele kas lausemuutujat kummagi võrratuse tähistamiseks. Kirjutada välja lausearvutuse valem ja rakendada De Morgani seadust. Tulemus väljendada jällegi võrratuste kaudu.
2. Võrratusavaldised on lausemuutujad, not on eitus, or on disjunksioon. Panna kirja valem ja lihtsustada seda.
3. Panna kirja lausearvutuse valemiga ja teisendada valemit. Teisendamisel panna tähele olukordi, kus üks võrratus on kaetud teise võrratusega.
4. Kontrollida vastavate lausearvutuse valemite samaväärsust.
5. Lihtsustada valemit. Ühesugused liikmed saab tuua sulgude ette.
6. Võtta kasutusele 3 lausemuutujat. Leida (nt tõeväärtustabeliga) kõik nende muutujate väärtustused, kus mõlemad valemid on korraga tõesed. Vaadata, kas kõigil neil väärtustustel on ka küsimuse valem tõene.
7. Leida kõik muutujate väärtustused, kus kõik valemid on tõesed.
8. Teha kindlaks, kas leidub muutujate väärtustus, kus kõik valemid on tõesed.
9. Panna tingimused kirja valemitega. Vaadata, mis järeldub nendest tingimustest, kui valemitesse sisse panna masina senisele olekule ja soovitud olekule vastavad tõeväärtused.
10. Kirjutada tõesuspuu algusesse tingimus, et valem on tõene, ja teisendada seda tõesuspuu reeglite järgi (SML õpik lk 16).
11. Samaselt tõesus sõltub sellest, kas leidub olukord, kus valem on väär. Kirjutada tõesuspuu algusesse tingimus, et valem on väär, ja teisendada seda. Kui igas harus tuleb vastuolu, siis on valem samaselt tõene; kui aga mõni haru jääb avatuks, siis ei ole samaselt tõene.
12. Esimese veeru lahtritesse tuleb kirjutada $\mathcal{F} = t$, $\mathcal{F} = v$, $\mathcal{F} = t$.
13. Rakendada tõesuspuu meetodit üks kord tingimusel, et vaadeldav valem on väär, ning teine kord tingimusel, et vaadeldav valem on tõene.
14. Rakendada tõesuspuu meetodit üks kord tingimusel, et esimene valem on väär, ning teine kord tingimusel, et teine valem on väär. Valemite F ja G tõeväärtuste põhjal saab teha järeldusi valemi liigi kohta.
15. Tõesuspuuga järeldumise kontrollimiseks vaadata, kas saab olla nii, et eeldused on tõesed ja väide samal ajal väär. Näiteks valemis a) kirjutada tõesuspuu algusesse neli tingimust.
16. ja 17. Väljendada arutluskäik valemkujul ja kontrollida, kas kehtib valemite järeldumine.
18. Teisendussammu sooritamiseks märgistada hiirega valemi osa, vajutada reavahetust ja sisestada valem, mis läheb selle osa asemele. Seejärel märgistada järgmine osa, vajutada uuesti reavahetust jne. Teisendus võib kesta mitu sammu, soovitatav on hoida sammud piisavalt lihtsad. 4. Kirjutada valemi ette kahekordne eitus ja seejärel viia sisemine eitus De Morgani seaduse abil sissepoole. 5. ja 6. Teisendus kestab kaks sammu. 7. Kõigepealt viia välimine eitus ühe taseme võrra sissepoole. Järgmisel sammul viia eitus vasakul veel ühe taseme võrra sissepoole. 8. Eituse siseseviimist tasub alustada välimisest eitusest, see võtab samm-sammult sissepoole liikudes sisemised eitused kaasa. 9. Asendada ühekaupa iga tehe õige tehtega. 10. Alustada

implikatsioonist. 11. Asendada tehted ühekaupa õigete tehetega. 12. Elimineerida implikatsioonid. Viia eitused vahetult lausemuutujate ette. Tuua ühine liige sulgude ette. 13. Elimineerida implikatsioon. Seejärel viia eitus vahetult lausemuutujate ette. Korrutada sulud lahti. 14. Reeglipõhisel teisendamisel märgistada osavalem ja rakendada reeglit. Teisendamise etapid on: 1) elimineerida muud tehted peale eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni, 2) viia kõik eitused vahetult lausemuutujate ette; 3) korrutada sulud lahti; 4) jätta liigsed liikmed ära ning võtta ülejäänud liikmed kokku. Lisaülesanded: 1. Lihtsustada valem kujule $\neg A \& \neg B \vee C$ ning seejärel rakendada teist distributiivsuse seadust. 2. Lihtsustada valemit nii palju, kui saab. Seejärel panna tulemus kokku sihtvalemiks. 3. Võtta esimesest ja neljandast liikmest kokku $\neg A$ ning teisest ja kolmandast liikmest A . Esimesel juhul jääb järele avaldis, mis teiseneb valemiks $\neg(B \leftrightarrow C)$, ning teisel juhul avaldis, mis teiseneb valemiks $B \leftrightarrow C$. 4. Elimineerida implikatsioonid ning tuua kolmandas liikmes teise lisamisreegliga sisse B . Seejärel on lihtne neelamiseseadusega mõlemad tekkivad liikmed eemaldada. 5. Tuua konjunktsioonid disjunktsioonidest väljapoole.

19. Arvutada välja valemi tõeväärtuste veerg ja vaadata, millistes ridades on valem tõene.

20. Arvutada välja valemi tõeväärtuste veerg ja vaadata, millistes ridades on valem väär.

21. Panna definitsioonid kõigepealt kirja peast. Seejärel kontrollida õppematerjalist ja vajadusel parandada oma sõnastust.

22. Täielik disjunkttiivne normaalkuju loeb üles kõik väärtustused, kus valem on tõene. Seetõttu saab samaväärsuse, järeldumise jne mõisted väljendada normaalkujude liikmete kaudu. Vastus peaks kirjeldama, millised liikmed valemite normaalkujudes peavad esinema.

23. Võtta kasutusele lausemuutujad, mis kirjeldavad lülitite asendeid. Koostada otsitava valemi tõeväärtuste veerg sõltuvalt nende lausemuutujate väärtustest.

24. Sisendiks on kolm lausemuutujat, mis näitavad andurite sees- või väljasolemist. Koostada kummagi küttekeha jaoks tõeväärtuste veerg. Leida valemid, mis annavad vajalikes ridades õiged tõeväärtused.

25. Analooiliselt eelnevate ülesannetega leida valemid, kuidas S ja K avalduvad A ja B (ja C) kaudu. Kirjutada need valemid ümber loogikaskeemidena.

26. Vaata väljasolevat õppevideot.

27. $P(4)$ tõeväärtuse leidmiseks panna x asemele 4 ja kirjutada välja tekkiv lause. Seejärel otsustada, kas see lause on tõene.

28. Asendada $Q(x)$ antud võrratusega ja kvantorid ning eitused nende sõnalise kujuga. Kirjutada valem välja sõnalise lausena ja vaadata, kas lause on tõene.

29. Kasutada kvantorite definitsiooni. Näiteks esimese lahtri vastus on „iga a puhul $Q(a) = t$ “. Sellest paremal olevas lahtris peab siis kehtima „pole nii, et iga a puhul $Q(a) = t$ “.

30. Kirjutada valemid välja sõnalisel kujul, asendades kvantorid ja eitused vastavate sõnadega.

31. Implikatsioon ja konjunktsioon on erinevad asjad.

32. Ülesannetes g ja h kasutada kahekohalist predikaati. „Teisi“ tähendab „erinevat“ (väljendada võrdusmärgiga).

33. Panna tähele, et predikaadid määratakse kõigi inimeste hulgal, aga laused käivad ainult tudengite kohta. Seetõttu tuua sisse predikaat $T(x) = \text{„}x \text{ on selle rühma tudeng“}$.

34. a) Alati, kui loom on koer, siis ta haugub. b) Alati, kui loom on koer, siis ta ei haugu. c) Leidub loom, kes on koer ja haugub. d) Leidub loom, kes on koer ja ei haugu.

35. a) Iga x puhul leidub y nii, et x armastab y -t b) Leidub x , et iga y puhul y armastab x -i. c) $\neg \exists x (x\text{-i ei armastata})$, kus „ x -i ei armastata“ tähendab, et ei leidu y -t, kes x -i armastaks. d) Leiduvad kaks inimest, kellest esimene armastab teist, aga teine esimest mitte. e) Iga x puhul leidub y nii, et x armastab y -t ja y on armunu), kus „ y on armunu“ tähendab, et y -t armastatakse. f) $\forall x (x \text{ on armunu} \rightarrow x \text{ armastab iseennast})$.

36. a) Vastus on $P(1) \vee P(2) \vee P(3)$. b) Vastus on $P(1) \& P(2) \& P(3)$. c) Väljendada kõigepealt konjunktsiooni pooled. d) Sama nagu b), ainult liikmed on teised. e) Sama nagu b), ainult liikmed on teised.

37. Valem on väär siis, kui ükski x predikaati $P(x)$ ei rahulda.

38. 1. Lähtuda olemasolukvantori definitsioonist. 2. Lähtuda üldisuskvantori definitsioonist. 3. Teises valemis leida predikaadi $\neg A(x)$ tõeväärtustabel ja seejärel rakendada kvantori definitsiooni. Kolmas valem on esimese valemi eitus. 7. Valemid ei ole üksteise eitused. 8. Esimeses valemis ei ole vaja panna mõlema x asemele sama väärtust, sest kvantorite mõjupiirkonnad ei kattu. Teises ja viimases valemis leida kõigepealt kvantorialuse avaldise tõeväärtustabel ning seejärel leida selle põhjal valemi tõeväärtus. 9. Neljanda valemi analüüsimist alustada seestpoolt. 11. Muutujate x ja y väärtusteks ei pea olema erinevad elemendid. 12. Leida valemi komponentide tõeväärtused ja seejärel järk-järgult valemi enda tõeväärtus. 14. Kahekohalise predikaadi esimene argument vastab reale, teine argument veerule. Näiteks esimeses valemis vaadata, kas igas reas leidub element, mis predikaati rahuldab. 17. Refleksiivsus tähendab, et predikaadi tabeli peadiagonaalil on ainult tõesed väärtused. 18. Sümmeetrilisus tähendab, et predikaadi tabel on sümmeetriline peadiagonaali suhtes. 19. Antisümmeetrilisus tähendab, et igale tõesele tõeväärtusele väljaspool peadiagonaali vastab sümmeetriline väär tõeväärtus. Predikaat $I(x, y)$ on lihtsalt võrduspredikaat, mis antisümmeetrilisuse definitsioonis esineb. 20. Transitiivsusel vahetut geomeetrilist tõlgendust ei ole, siin tuleb vaadata, kas alati, kui implikatsiooni vasak pool on tõene, on ka implikatsiooni parem pool tõene.

39. Panna valem kirja sõnalisel kujul ja vaadata, kas saadud lause on tõene või väär. a) tõene, b) väär, c) väär, d) tõene, e) tõene, f) väär, g) väär, h) tõene, i) väär, j) tõene, k) väär.

40. a) $x = y + z$, b) $x = y \cdot z$ c) x avaldub kujul $2y$ (NB! Sümbol 2 ei kuulu signatuuri), d) x avaldub kujul $2y + 1$, e) x avaldub kujul $10y + 3$, f) leidub naturaalarv y nii, et $x = y \cdot y$, g) leidub naturaalarv z nii, et $x + z = y$, h) leidub naturaalarv z nii, et $x + z = y$ ja $z > 0$, i) leidub naturaalarv z nii, et $x = y \cdot z$, j) arvu x ainsad tegurid on 1 ja x , k) x -i saab esitada kujul $x = z \cdot y + r$, kus $r < y$, l) x -i saab esitada kujul $x = q \cdot y + z$, kus $z < y$, m) z on x -i ja y -i ühistegur (x ja y jaguvad mõlemad z -ga) ja z on kõikidest ühisteguritest kõige suurem, n) z on ühiskordne ja kõikidest ühiskordsetest kõige väiksem, o) x jagub ainult 1-ga ja paarisarvudega (alternatiiv: x -i kõik algtegurid on võrdsed 2-ga), p) vaadelda arve $1, x, x^2, \dots, x^y$ jääkidena teatava arvu jagamisel teatavate paarikaupa ühistegurita arvudega.

41. a) Leidub arv x , mis täidab kahte tingimust: 1) arvul x on omadus P , 2) ühelgi x -st erineval arvul ei ole omadust P ; b) korruga peavad kehtima kaks asja: 1) arvul x on omadus P , 2) ühelgi arvust x väiksemal arvul ei ole omadust P ; c) alati, kui arv asub x ja y vahel, siis sellel arvul on omadus P ; d) iga omadust P rahuldava arvu puhul leidub sellest suurem omadust P rahuldav arv.

42. a) Võrratused võib ümber kirjutada sellisel kujul, nagu nad definitsioonis esinevad. Loogilised seosed väljendada loogika tehtemärkide abil. a) Lause tähendab, et ei leidu arvu L , mis rahuldab eelmise punkti valemit. Viia valemi ees olev eitus sisse nii kaugele kui võimalik.

43. Tuleb leida x väärtus (või x ja y väärtused), mille puhul üldisuskvantori(te) alune avaldis on väär. Kuna valemid on määratud kõigi täisarvude hulgal, siis peavad ka need väärtused olema täisarvud.

44. Uurida tõesuspuu abil, kas valem saab olla väär.

45. Proovida kõigepealt definitsioon kirja panna peast. Seejärel hinnata, kas erinevused õppe-materjalis antud definitsioonist on olulised.

46. Vaadata, kas antud hulgas leidub x , nii et selle x korral on valem $\forall y(x \leq y^2)$ tõene. Ülesande valem on tõene, kui mingi lubatud x puhul on valem $\forall y(x \leq y^2)$ tõene. Ülesande valem on väär, kui ühegi lubatud x puhul ei ole valem $\forall y(x \leq y^2)$ tõene.

47. Vaadata, kas iga x puhul on valem $\exists y(xy = 1)$ tõene. See tähendab, kas antud hulgas iga x puhul leidub antud hulgas y nii, et $xy = 1$.

49. a) Kvantori prioriteet on sama mis eituse prioriteet. b) „Iga“ on kvantor.

50. a) Leiduvad a ja b , mis on erinevad, paaris ja millega x jagub. b) Iga a korral: kui a on y -st väiksem positiivne arv, siis x jagub a -ga. c) Kõigepealt väljendada, et järeldub, ning seejärel võtta tulemusest eitus. Järeldub tähendab, et iga kahe arvu puhul kehtib, et kui summa on paarisarv, siis mõlemad arvud on paarisarvud. d) Esitada x ja y kujul $10 \cdot \text{arv} + \text{arv}$, siis saab kirja panna viimaste numbrite summa. e) Ei leidu x -i, millel oleks omadus, et x -i ruut annab 3-ga jagades jäägi 2. f) Leidub a , mis asub x ja y vahel ning on täisruut, ja iga selliste omadustega arv b langeb kokku arvuga a („täpselt üks“). Või teine võimalus: „... ja ei leidu a -st erinevat selliste omadustega arvu b “. g) Arv x on vajalike omadustega (st x sobib) ja iga selliste omadustega arv on väiksem või võrdne x -ga (st x on sobivate arvude seas suurim).

51. a) X ja Y kuuluvad vastastikku teineteise. b) X sisaldab endas iga hulka. c) Z kuulub korraga X -i ja Y -sse ning iga hulk, mis kuulub korraga X -i ja Y -sse, kuulub ka Z -i. Mõlemad osad on vajalikud. d) Tuua sisse abimuutuja V ja asendada lause kahe võrdusega $Y \cap Z = V$ ja $X \cup V = W$. Kuna V esialgses lauses ei esine, siis ei tohi ta ka lõppvalemis olla vaba muutuja. e) Iga hulk, mis kuulub korraga X -i ja Y -sse, kuulub igasse hulka. f) Samaväärne lausete $X \cap Y = \emptyset$ ja $X \cup Y = \mathbb{N}$ konjunktsiooniga. g) Samaväärne lausete $Z \cap Y = \emptyset$ ja $Z \cup Y = X \cup Y$ konjunktsiooniga. h) Hulga X iga alamhulk on kas tühi või X ise. i) Hulga X iga alamhulk on kas tühi, üheelemendiline või X .

52. „Leidub vähim“ = „Leidub“ & „On vähim“.

53. Esimeses loengus tingimused lausete kohta, tingimus 4.

54. a) Samaselt tõene. Otsida tõesuspuuga interpretatsiooni, kus valem on väär. b) Samaselt tõene. c) Samaselt väär.

55. a) Võtta distributiivsuse seadus üldisuskvantori ja konjunktsiooni vahel ning asendada seal konjunktsioon implikatsiooniga. b) Otsida tõesuspuuga interpretatsiooni, kus vasak pool on tõene ja parem pool väär. Järeldumine kehtib. c) Järeldumine ei kehti. d) Kaks valemit on samaväärsed, kui ühest valemist järeldub teine ja vastupidi.

56. a) Otsida tõesuspuuga interpretatsiooni, kus eeldused on tõesed ja väide väär. Järeldumine ei kehti. b) Järeldumine ei kehti. c) Järeldumine ei kehti.

57. Tõesuspuu avatuks jäänud haru annab interpretatsiooni, kus valemitel on sellised tõeväärtused nagu alguses eeldatud. Sisestada see interpretatsioon programmi. (Programmi kasutamise kohta vt 4. nädala interpretatsioonide koostamise praktikumi.)

58. ja 59. Tuua sisse sobivad predikaatsümbolid. Panna väited kirja predikaatarvutuse valemitega. Teha kindlaks, kas eeldustele vastavatest valemitest järeldeb väitele vastav valem. Tõestuse võib teha tõesuspuu kujul või loogilise arutluse kujul, kasutades kvantorite ja lausearvutuse tehete definitsioone.

60. a) Eraldada predikaadid ja väljendada lause valemiga. Kirjutada valemi ette eitus ja lihtsustada. c) Tuua sisse predikaadid "x on küla", "x on küla y elanik", "x tunneb y-t".

61. Panna laused kirja predikaatarvutuse valemitega ja leida, kas valemid on samaväärsed. a) Valemite on üldisuskvantor implikatsiooni ees. b) Valemite on olemasolukvantor konjunktsiooni ees. c) Püüda leida interpretatsiooni, kus valemitel on erinevad tõeväärtused. d) Kasutada teisendamiseks predikaatarvutuse põhisamaväärsusi.

62. Näidata, kuidas need fraasid saab väljendada kvantorite $\forall$ ja $\exists$ abil.

63. 1. Nimetada üks seotud muutuja ümber. 2. Elimineerida implikatsioon ja viia eitus kvantori alla. 3. Teha sammhaaval läbi prefiks kujule viimise algoritm. Lõpuks peab iga kvantor jääma siduma erinevat muutujat. 4. Rakendada prefiks kuju algoritmi. 5. Rakendada prefiks kuju algoritmi. 6. Rakendada prefiks kuju algoritmi.

64. Kirjutada laused ümber sõnalisel kujul vastavalt predikaatide tähendusele selles interpretatsioonis.

65. Siin tuleb leida, mitu erinevat konstanti, ühekohalist predikaati, kahekohalist predikaati ja kahekohalist funktsiooni on olemas antud hulgal. a) 3 b) 8 c) 512 d) 19683

66. a) Leida interpretatsioon, milles valemite tõeväärtused on erinevad. b) Tõestada, et esimesest valemist järeldeb teine ja seejärel, et teisest valemist järeldeb esimene. Eeldada, et üks valem on tõene, ja jõuda loogiliste sammude teel järeldusele, et teine valem on tõene.

67. Järeldumise tõestamise skeem on järgmine. Fikseerida vabalt interpretatsioon ja eeldada, et vasaku poole valemid on selles interpretatsioonis tõesed. Teha järeldussamme vastavalt kvantorite ja lausearvutuse tehete definitsioonidele. Jõuda tulemusele, et ka parema poole valem on selles interpretatsioonis tõene. a) Üldisuskvantoriga algava väite tõestamiseks valida interpretatsiooni kandjast suvaline element ja tõestada, et väide kehtib selle elemendi puhul. Implikatsiooni tõestamiseks eeldada, et implikatsiooni vasak pool on tõene, ja tõestada, et implikatsiooni parem pool on tõene. Tõestussammude tegemiseks kasutada sekvents vasaku poole valemite tõesust. b) Olemasolukvantoriga algava eelduse kasutamiseks tuua sisse tähis interpretatsiooni kandja sobiva elemendi tähistamiseks. Järeldussammudega jõuda tulemusele, et seesama element muudab ka sekvents parema poole tõeseks. c) Kui implikatsioon on tõene, siis on kaks juhtu: kas implikatsiooni vasak pool on väär või implikatsiooni parem pool on tõene. Vaadata kumbagi juhtu ja jõuda mõlemal juhul järeldusele, et sekvents parem pool on tõene. d) Kirjutada lahti vasaku poole olemasolukvantorid, eitus ja implikatsioon. Olenemata sellest, kumb disjunktsiooni pool tõene on, leidub element, mis muudab sekvents parema poole tõeseks.

68. Järeldumist tõestatakse samamoodi nagu eelmistes ülesannetes. Et teada saada, kas järeldumine/samaväärsus kehtib, võib konstrueerida tõesuspuu või proovida valemisse sisse panna konstantse väärtusega predikaate. a) Valemid on samaväärsed. b) Valemid ei ole samaväärsed.

69. Osa on predikaatarvutuse põhisamaväärsused. Osade puhul on vastus kindlaks tehtud praktikumides varem. Ülejäänute puhul püüda leida interpretatsiooni, kus valemitel on erinevad tõeväärtused.

- 70.** a) Ei. Iga poisi jaoks leidub oma tüdruk. b) Jah. Populaarne tüdruk meeldib igale poisile. c) Ei. Inimene f sõltub inimesest e . d) Jah. Milline on vastuväitelse tõestuse loogiline skeem?
- 71.** a) Alustada vasakul olemasolukvantorist. b) Alustada paremal üldisuskvantorist. c) Alustada paremal implikatsiooni vasakust poolest. d) Ekvivalents vasakul on tõene kahel juhul, tõestada, et kummagi juhul on teine valem tõene.
- 72.** Predikaadid: „ x on lind“, „ x on neljajalgne“, „ x on elusolend“.
- 73.** Alustada eeldusest, mis algab olemasolukvantoriga. Selle eelduse põhjal saab sisse tuua elemendi. Seejärel panna see element sisse ülejäänud eeldusesse.
- 74.** Tõestust alustada kas olemasolukvantorist vasakul või üldisuskvantorist paremal, st olukordadest, mis annavad meile konkreetse elemendi.
- 75.** Esimene lause: kas leidub üks punapea, keda kõik imetlevad, või igaühe jaoks leidub tema enda punapea.
- 76.** Vastus: arutluskäik ei ole korrektne. Leida interpretatsioon, milles eeldused on tõesed ja väide väär.
- 77.** Predikaadid: „ X on hulk“, „ X võimsus on suurem kui Y võimsus“, „ X kuulub Y -sse“. Tähis U on konstantsümbol.
- 78.** Vaata viimast loengut, mis on tervenisti pühendatud tõestussammudele. Näiteks a) vastus: toome sisse uue elemendi ja kirjutame, et kvantorialune avaldis on tõene, kui x on see element.
- 79.** a) Alustada olemasolukvantoritest vasakul. b) Alustada teisest valemist. c) Alustada paremast poolest. d) Käsitleda kvantoreid õigest järjekorras vastavalt ülesandele 78..
- 80.** a) Vaadelda kahte juhtu: kas predikaat P on alati tõene või predikaat P ei ole alati tõene. b) Vaadelda kahte juhtu: kas predikaat S on alati tõene või predikaat S ei ole alati tõene. c) Vaadata kahte juhtu: vasak pool tõene või vasak pool väär. Kummagi juhul tõestada, et parem pool on sama tõeväärtusega nagu vasak. d) Iga x puhul võib võtta $y = x$.
- 81.** Panna laused kirja predikaatarvutuse valemitega. Leida interpretatsioon, kus eeldused on tõesed ja väide väär. Seejärel vaadata, kuidas interpretatsioonis leitud olukord vastab lausetes väljendatud olukorraga.
- 82.** Pöördvastandväide.
- 83.** „Kui“-osa on implikatsiooni vasak pool.
- 84.** Kõigepealt tuua sisse predikaadid ja panna laused kirja predikaatarvutuse valemiga. 3. lausest algab järeldumiste ahel.
- 85.** Kontrollida, kas valem saab olla tõene. Seejärel kontrollida, kas valem saab olla väär. Nende küsimuste vastuste põhjal saab valemi liigi üheselt kindlaks määrata.
- 86.** Arvutada valemi tõeväärtus välja järk-järgult, alates seestpoolt. Näiteks $P(x) \leftrightarrow Q(y)$ on teatav kahe muutuva predikaat, mille tõeväärtus sõltub muutujatest x ja y . Arvutada selle predikaadi tõeväärtustabel. Seejärel vaadata predikaati $\forall y(P(x) \leftrightarrow Q(y))$. See on teatav ühe muutuva predikaat, mille tõeväärtus sõltub muutujast x ning mille tõeväärtuste tabeli saab leida eelmise predikaadi tabeli põhjal. Alati võib valemite predikaatarvutuse samaväärsustega teisendada või lihtsustada. Valemite võib püüda teisendada kujule, millest valemi tõeväärtus on lihtsamini leitav.
- 87.** Kasulik on kõigepealt defineerida sobivad abipredikaadid. Lõppvalemis peavad vabad muutujad olema täpselt samad mis ülesande lause vabad muutujad! Signatuuri mittekuuluvad süm-

- bolid, näiteks arv 5 jne, tuleb väljendada signatuuri sümbolite kaudu. Lauses c) tuleb kirja panna ka, et ei leidu teist algarvu (või et iga tingimusi rahuldav algarv võrdub selle algarvuga).
- 88.** a) Elimineerida implikatsioonid ja seejärel viia eitused vahetult predikaatsümolite ette. a) Tuua kvantorid valemi ette.
- 89.** Teha samm-sammult läbi prefiksujule teisendamise algoritm.
- 90.** Panna eeldused ja väide kirja predikaatarvutuse valemitega ning otsida interpretatsiooni, kus eeldused on tõesed ja väide väär. a) Leida interpretatsioon. b) Tõestada, alustades sobivast eeldusest. c) Leida interpretatsioon. d) Tõestada, alustades väitest.
- 91.** a) Õige alguspunkt on teine eeldus. b) Õige alguspunkt on vasakul olev ekvivalents.
- 92.** ja **93.** Panna kirja algeis. Seejärel panna kirja kõik seisud, millesse pääseb algeisust ühe sammuga. Seisud peavad rahuldama ülesande tingimusi. Siis panna kirja kõik seisud, millesse pääseb nendest seisudest ühe sammuga. Jätkata, kuni saadakse lõppseis.
- 95.** Graafil on 6 tippu ja 9 serva.
- 96.** Ekstremaalsus tähendab kahte asja: 1) et selle arvu värvidega saab ja 2) et väiksema arvu värvidega ei saa. Mõlemat tuleb kontrollida.
- 97.** 1. Maatriksi mõõtmeid saab akna parempoolse osa ülääres asuvate nuppudega. Iga rea ja veeru alguses peab hallis ruudus olema kirjas tipu nimi. Lahtrit saab täita sellel klõpsates. 3. Lisada 4 tippu ja anda nendele nimed. Nime andmiseks klõpsata tippu ja vajutada klaviatuuril tähte. Seejärel lisada servad vastavalt maatriksile. 8. Täisgraaf on selline graaf, kus iga kahe tipu vahel on serv. 9. Lisada 4 tippu ja anda nendele nimed. Seejärel lisada servad nende tippude vahele, kus vasakpoolses graafis servad puuduvad. 12. Tipuastmejärjend on tippude astmete järjend. Programmis peab tipuastmejärjend olema järjestatud kahanevalt. 13. Graafis on üks isoleeritud tipp. 15. Luua nii mitu tippu, kui pikk on tipuastmejärjend. Seejärel lisada servad nii, et tippude astmed tuleksid parajasti sellised, nagu järjendis kirjas. 16. Pöörata tähelepanu paaritu astmega tippudele. 17. Kaks esimest tipuastet näitavad, et graafi iga tipp peab olema ühendatud vähemalt kahe ülejäänud tipuga. 18. Esimene tipuaste näitab, et graafi iga tipp peab olema ühendatud vähemalt ühe ülejäänud tipuga. 19. Graaf võib olla mittesidus. 21. Kokku 4 erinevat graafi. 22. Kokku 8 erinevat graafi.
- 98.** Igast tipust väljub $n - 1$ serva. Igal serval on kaks otsa.
- 99.** Graaf ja täiend moodustavad kokku täisgraafi.
- 100.** Moodustada graaf, kus linnad on tipud ja maanteed servad. Kasutada tipuastmete teoreemi.
- 101.** Et iga teed tuleb puhastada kahes suunas, siis on vaja kokku paarisarv masinaid.
- 102.** Kasutada tipuastmete teoreemi ja ülesande tingimust.
- 103.** Moodustada graaf, kus tipud on ruumid ja välisõu. Kasutada tipuastmete teoreemi.
- 104.** Arvutada välja tipuastmete summa kahel viisil: tippude astmetest lähtudes ja servade arvust lähtudes.
- 105.** Leida ülejäänud tippude astmete summa.
- 106.** Tähistada otsitav arv tähega x ja avaldada servade arvud selle kaudu.
- 107.** Graafi ja tema täiendi tipuastmete summad peavad olema võrdsed. Graafi ja tema täiendi tippude astmete põhjal saab määrata graafi tippude arvu.

- 108.** Panna kirja piirid, milles seltskonnaliikme tuttavate arv saab muutuda. Oletades, et igal inimesel on erinev arv tuttavaid, järeldada, et need piirid ei ole korraga saavutatavad.
- 109.** Vaadata alamgraafi, mis koosneb ainult punastest servadest.
- 110.** Panna definitsioon kõigepealt kirja ise. Seejärel kontrollida kirjepandut õppematerjalist.
- 111.** Võtta kaks tippu. Kumbki tipp võib kuuluda kas hulka A või hulka B . Iga võimaluste kombinatsiooni puhul näidata, milline on ahel esimesest tipust teise.
- 112.** Kui graaf G on sidus, siis väide kehtib. Kui graaf G ei ole sidus, siis tõestada, et G täiend on sidus. Selleks tõestada, et G täiendis leidub iga kahe tipu vahel ahel.
- 113.** Kõigepealt tõestada, et graaf on sidus. Selleks võtta kaks tippu ja vaadata juhte, kus nende vahel leidub serv ja kus nende vahel ei leidu serva. Kummalgi juhul tõestada, et leidub ahel ühest tipust teise.
- 114.** Sidusus: DME õpik lk 54, teoreem 5. Isomorfism: graafid on isomorfsed, kui nad saab tippude nihutamisega viia ühtivaks.
- 115.** Leidub bijektiivne funktsioon, millel on teatavad omadused.
- 116.** Võtta näiteks järjend $2, 2, 2, 2, 2, 2$ ja leida kaks mitteisomorfset graafi, mille tipuastmete järjend on selline.
- 117.** c) sellises graafis ja selle graafi täiendis peab olema võrdne arv servi, arvutada välja servade arv. d) võtta eelmistest osadest 4-tipuline või 5-tipuline graaf ja asendada seal teatavad tipud k -tipuliste täisgraafidega ja teatavad tipud k -tipuliste nullgraafidega.
- 118.** Soovitav on panna definitsiooni kõigepealt ise kirja ja seejärel kontrollida õppematerjalist.
- 119.** Valida mingi tipp. Sellest väljub vähemalt 3 ühte värvi serva. Vaadelda juhte sõltuvalt sellest, mis värvi on nende teisi otstippe ühendavad servad.
- 120.** Selles graafis on 5 tippu ja vähemalt 5 ühte värvi serva.
- 121.** Silla kustutamisel jaguneb sidus komponent kaheks. Seejuures ei saa kumbagi komponendi jääda ainult üks paaritu astmega tipp.
- 122.** Lähtuda paaritu astmega tipust ja liikuda mööda servi, valides igal sammul uue serva. Paaristastmega tippudest pääseb alati edasi, paaritu astmega tippudest mitte tingimata.
- 123.** Lähtudes graafi teatavast tipust, konstrueerida tsükliline ringkäik. DME õpiku lk 54 teoreemi 4 põhjal pole tsükli ükski serv sild.
- 124.** Vaadelda graafis maksimaalse pikkusega lihtahelat.
- 125.** Need, kellel on üldse võimalik omavahel tuttavaks saada, asuvad graafi samas sidusas komponendis.
- 126.** Värvida kuubikud mustaks ja valgeks ning kasutada käikude arvu paarsust.
- 127.** Osa a) graaf koosneb tsüklitest. Tõestada, et antud juhul on kõik need tsüklid paarisarvulise pikkusega. Osas b) valida suvaline meeskond ja vaadata meeskondi, kellega ta veel mänginud ei ole (analoogiline ülesandega 119.).
- 128.** a) 2^n . b) $2^{n-1}n$. c) Tõestada, et igast tipust pääseb tippu $00\dots 0$. d) Tõestada, et igast tipust pääseb igasse teise tippu ülimalt n sammuga ja et mingist tipust mingisse teise tippu pääsemiseks tuleb teha vähemalt n sammu. e) Serv on sild, kui ta ei kuulu ühessegi tsüklisse. f) Tipp on eraldav, kui tema kustutamisel jäävad tema naabrid erinevatesse sidusatesse komponentidesse.
- 129.** Lugada kokku sõprussesed poiste ja tüdrukute vahel.

- 130.** Kui tipp kuulub lihttsükklisse, siis selle tipu aste on vähemalt 2. Uurida tipuastmete summat.
- 131.** Paremalt esineb iga tipu w aste liidetavana $d(w)$ korda, sest tipp w on intsidentne $d(w)$ servaga.
- 132.** Näidata, kuidas tuleb liikuda alates tipust a , et jõuda välja tippu b või c ning seejuures mitte läbida teist tippu.
- 133.** Tsükkel peab leiduma G täiendis. Vaadelda komponenti, kuhu ei kuulu tipud u ja v . Graafi G täiendis on kõik selle komponendi tipud ühendatud tippudega u ja v .
- 134.** Väide on kujul „parajasti siis“, selle tõestamiseks tõestatakse mõlematpidi implikatsioon. Kummagi suuna puhul kirjutada kõigepealt välja eeldus ja väide. Seejärel teha järeldusi eeldusest alates.
- 135.** Osa a) sarnaneb ülesandega 130.. Osas b) eeldada, et graaf on mittesidus ja leida kahes sidusas komponendis tsükkel. Seejärel tõsta neis kahes tsükklis servi ümber.
- 136.** Vaadelda maksimaalse pikkusega lihtahelat. Otsitavad tipud leiduvad selle peal.
- 137.** Osa a) puhul sobib lihtne tippude järjest valimine (ahne algoritm). Osas b) vaadelda maksimaalse pikkusega lihtahelat. Kui eeldada, et selle pikkus on ainult $d(v)$, siis saame mõne sammu järel vastuolu.
- 138.** Kujundit saab ühe joonega joonistada siis, kui graafis leidub Euleri tsükkel või Euleri ahel. Teoreem Euleri tsükli leidumise kohta.
- 139.** Sõnastada olukord graafiteooria terminites ja rakendada Euleri tsükli/ahela leidumise tingimust.
- 140.** a) Ühendada need kaks tippu omavahel, siis leidub graafis Euleri tsükkel. b) Ühendada need tipud paarikaupa omavahel.
- 141.** Leida graafi kõigi tippude astmed. Tipu $\{i, j\}$ aste on selle tipu naabrite arv.
- 142.** Eeldada, et lause 1 ei kehti, ja tõestada, et siis kehtib lause 2. Kui lause 1 ei kehti, siis leidub graafis paaritu astmega tippe. Need võib ühendada kõik ühe uue tipu külge.
- 143.** Hamiltoni tsükli mitteleidumist saab tõestada paarsuskaalutlustega, värvides osa tippe ühte ja ülejäänud teist värvi. a) leidub; b) leidub; c) ei leidu; d) ei leidu; e) leidub; f) ei leidu.
- 144.** a) Kirjutada välja see ahel. b) Iga tsükkel peab vaheldumisi külastama esimest ja teist alust.
- 145.** Kumbki väide ei kehti. Tuua näited.
- 146.** a) Hamiltoni ahel (tsükkel). b) Joonistada 3-mõõtmeline kuup. c) Tõestada võib induktiooniga kuubi mõõtme järgi.
- 147.** a) Malelauale jääb 30 ühte värvi ja 32 teist värvi ruutu. b) Leida malelaual Hamiltoni tsükkel. Ruutude väljalõikamisega see katkeb, muutudes ahelateks. Tõestada, et ahelad saab katta doominokividega.
- 148.** Kasutada puu definitsiooni ja põhiomadusi (DME õpikus lk 63-67). a) ei leidu; b) leidub; c) leidub; d) ei leidu; e) leidub; f) ei leidu; g) leidub.
- 149.** Milline on n -tipulise puu servade arv? Selle järgi saab leida tipuastmete summa.
- 150.** Puu tipuastmete summa saab arvutada nii tippude koguarvu järgi kui ka antud astmete järgi.
- 151. ja 152.** Tähistada tundmatud. Arvutada puu tipuastmete summa kahel viisil: tippude arvu järgi ja tippude astmete järgi.

- 153.** Uurida juurega puud, kus igal sisetipul on 5 alluvat. Adressaatide koguarv võrdub selle puu servade arvuga. Lehtede arv on tippude koguarv miinus sisetippude arv.
- 154.** Tõestada, et sellises graafis leidub täpselt üks tsükkel.
- 155.** Vastuväiteline tõestus: oletada, et leidub leht, mis asub kaugemal ja näidata ahel, mille pikkus on suurem kui $2d$.
- 156.** Kui oletada, et sellist lehte ei leidu, siis saab leida ahela, mis sisaldab rohkem tippe kui puus üldse on. Selle ahela leidmiseks liikuda tipust v ühele ja teisele poole.
- 157.** Väide on „parajasti siis“, seetõttu tuleb teha kaks tõestust. ($\Rightarrow$) Serva eemaldamisel muutub otstippude aste paarisarvuks, samas peab igas komponendis olema paaritu astmega tippe paarisarv. ($\Leftarrow$) Puus peab olema kokku paarisarv tippe. Kui mõne tipu aste oleks paaris, siis oleks tippude koguarv paaritu.
- 158.** a) Et puu on sidus graaf, siis leidub lisatava serva otstippude vahel juba ahel. b) Kui oletada, et pärast serva kustutamist jääb graaf sidusaks, siis moodustavad kustutatud serv ja teatav ahel esialgses graafis tsükli.
- 159.** Tõestada, et graaf on sidus. Seejärel tõestada, et graaf on tsükliteta. Kumbagi väidet võib tõestada vastuväiteliselt – oletusest, et väide ei kehti, tuletada vastuolu eeldusega.
- 160.** Eeldusest 1 järeldub, et graaf on tsükliteta. Järelikult iga sidus komponent on puu ja seal on servi ühe võrra vähem kui tippe. Eeldusest 2 järeldub, et sidusaid komponente on täpselt üks.
- 161.** Tõestada, et saadud graaf on sidus ja et $m = n - 1$. Nendest omadustest järeldub, et graaf on puu õpiku või loengu põhjal.
- 162.** Tõestada, et graafi tipuastmete summa on 22 või väiksem. Sellest järeldub, et graafi servade arv on 11 või väiksem.
- 163.** Igast tipust leidub täpselt üks lihtahel juurtippu. Iga vasall hakkab liikuma mööda seda lihtahelat suunas, mille puhul kaugus juurest väheneb.
- 164.** Korrektses tõestuses peaks induktsiooni samm katma ära kõik $n + 1$ -tipulised puud.
- 165.** a) Kui ühist tippu ei leiduks, siis saaks konstrueerida ahela, mille pikkus on suurem kui maksimaalse ahela pikkus. b) Kui ühist tippu ei leiduks, siis saaks graafis leida tsükli.
- 166.** Uurida, mis järeldub eeldusest, et puu täiend on mittesidus. Puu mittesidusa täiendi komponentide tippude arvud ja servad peavad rahuldama teatavaid tingimusi.
- 167.** Kui tsentri tipust lähtuvaid maksimaalse pikkusega lihtahelaid on kaks või rohkem, siis on tsenter ühetipuline. Kui selliseid lihtahelaid on ainult üks, siis on tsenter kahetipuline.
- 168.** Iga sisetipu aste on vähemalt 3. Arvutada tipuastmete summa sisetippude astmete ja lehtede astmete kaudu ning võrrelda seda kümnetipulise puu tipuastmete summaga.
- 169.** Kui iga sisetipu aste oleks ülimalt 3, siis oleks puu tipuastmete summa väiksem kui vaja.
- 170.** Ahelkiri peab edasi levima 6 taset, et süsteemi sisenenud inimene tulu teenima hakkaks. Igal tasemel paljuneb inimese nimi 10-kordseks.
- 171.** Leida antud kahendpuu servade arv. Seejärel leida kahendpuu tippude koguarv.
- 172.** Leida puu servade arv. Seejärel leida puu sisetippude arv.
- 173.** Vaadelda kummaski puus pikima lihtahela keskpunkti.
- 174.** a) Isomeer on ühend, millel on sama arv süsinikuaatomeid ja sama arv vesinikuaatomeid, aga need on ühendatud teistmoodi. b) Oletada, et graaf ei ole puu ning kirjutada lahti puu tingi-

- mus. Seejärel konstrueerida graaf, milles vesinikuaatomeid on rohkem. c) Olgu I vesinikuaatomeite arv. Leida tipuastmete summa kahel viisil ja võrrelda tulemusi.
- 175.** Põhiline on siin tõestada, et lausest 2) järeldub lause 1). Seda võib teha induktsiooniga n järgi.
- 176.** Vaadelda sipelga algtipu juurena ning jaotada puu tipud tasemeteks vastavalt nende kaugusele juurest.
- 177.** Lähtuda suvalisest tipust ja liikuda suurima tippude arvuga haru poole. Tuleb tõestada, et see liikumine ei saa jääda kahe tipu vahele pendeldama ega minna tsükklisse.
- 178.** Võtta ette Kruskali/Primi algoritmi kirjeldus ja teha see sammhaaval läbi.
- 179.** Kumbki algoritm teeb töö lõpuni ühe sidusa komponendi sees.
- 180.** Jah. Tuua näide.
- 181.** Lisada serv e puusse P ja kustutada tekkinud tsüklist üks teine serv.
- 182.** Kui e mõnda vähima kaaluga aluspuusse ei kuuluks, siis saaksime selles aluspuus teha servade vahetuse nii, et tulemuseks on veelgi väiksema kaaluga aluspuu.
- 183.** Kui lihttsükli suurima kaaluga serv kuuluks vähima kaaluga aluspuusse, siis saaksime aluspuus asendada selle serva lihttsüklist mõne teise, väiksema kaaluga servaga.
- 184.** Kui leiduks kaks erinevat vähima kaaluga aluspuud, siis saaksime emmas-kummas servi ümber vahetada nii, et tulemuseks on veelgi väiksema kaaluga aluspuu.
- 185.** Eeskujuks võib võtta DME õpiku lk 73 teoreemi 7.
- 186.** Võtta aluseks eelnimetatud teoreem ja ülesande 185. lahendus. Tõestada tuleb kahte asja: et tekkinud graaf on aluspuu ja et selle aluspuu kaal on vähim võimalik.
- 187.** a) Vaadelda ühte tippu koonduvate nurkade suurusi. Kolmnurgas vastab suuremale nurgale suurem vastaskülge ja vastupidi. b) Tõestada, et kaks lõikuvat serva saab asendada kahe lõikumatu servaga nii, et kogukaal väheneb. Kumera nelinurga kahe vastaskülje pikkuste summa on väiksem kui nelinurga diagonaalide pikkuste summa.
- 188.** Tõestada, et selline graaf ei sisalda tsikleid. Seejärel kasutada DME õpiku lk 66 järeldust 1.
- 189.** Tõestada, et selline graaf on sidus. Seejärel kasutada DME õpiku lk 66 järeldust 1.
- 190.** Tõestada, et T on sidus ja et T sisaldab kõiki graafi G tippe.
- 191.** Tegemist on väitega kujul „parajasti siis“, tõestada kahtepidi järeldumine. ($\Rightarrow$) Kui serva e kustutamisel jääb graaf sidusaks, siis leidub graafil aluspuu (miks?), mis serva e ei sisalda. ($\Leftarrow$) Kui leiduks aluspuu, mis serva e ei sisalda, siis jäävad serva e otstipud pärast serva kustutamist ühendatuks sellesse aluspuusse kuuluva ahelaga.
- 192.** Jaotada tipud kolme klassi: astmega 4, astmega 1 ja ülejäänud.
- 193.** Lugeda kokku graafi kaarte arv poiste poolt ja seejärel tüdrukute poolt.
- 194.** a) Tipud meiliaadressid, servad saadetud kirjad. b) Kas kahe aadressi kirjade sihtaadresside hulgas on sarnased ja lähteadresside hulgas on sarnased. c) See aadress on saatnud teatavatele aadressidele võrdse arvu kirju ja ülejäänutele mitte midagi.
- 195.** a) Et käsk $K3$ kasutab käsu $K1$ tulemust, siis leidub graafis kaar tipust $K1$ tippu $K3$. Lisaks vahetult kasutatavatele käskudele peavad olema täidetud ka kõik käsud, millega vahetult kasutatavate käskude tulemused välja arvutatakse.

- 196.** Joonistada tööde eelnevusgraaf. Vastust tuleb põhjendada kahest aspektist: miks sellisest päevade arvust piisab ja miks väiksemast päevade arvust ei piisa.
- 197.** Tugevalt sidus graaf: DME õpik lk 79. Servadele suundade määramine: DME õpik lk 80 teoreem 4 + tõestus.
- 198.** a) Tipud on $8, 7, 6, \dots, 0$. Tipust 8 saab minna tippudesse 7, 6 ja 5. b) Sõltumata vastase käigust saab mängija alati vähendada tikkude arvu laual $k + 1$ võrra. Seda sammu korrates saab mängija vähendada tikkude arvu laual $k + 1$ kordse võrra.
- 199. ja 200.** Induktsioon. Koostada sobiv skeem 4 isiku jaoks ja laiendada seda n isikule $n + 1$ isikule.
- 201.** Nimetada üks tipp juureks ning orienteerida servad vastavalt kaugusele juurest.
- 202.** a) See on Hamiltoni tsükkel. b) Võtta eelmise punkti tsüklist iga tipu esimene kahendkoht. c) Teha eelnev läbi neljakohaliste kahendarvude jaoks.
- 203.** Leida, milline on iga tipu sisendaste ja väljundaste. Suunatud graafide puhul kehtib Euleri teoreemi analoog.
- 204.** Tõestada, et leidub tsükkel. Seejärel tõmmata tsükkel kokku üheks punktiks.
- 205.** Leida näited juhul $n = 5$ ja $n = 6$ ning teha induktsioon $k \rightarrow k + 2$.
- 206.** Liikuda päripäeva ümber laua. Kui rüütli paremal käel on vaenlane, siis muutub kindlus vastupidiseks. Et alguspunkti tagasi jõudes oleks kindlus ikka endine, peab selliseid vastupidi-seks muutumisi olema paarisarv.
- 207.** a) Jaotada tipud klassidesse vastavalt sealt väljuva pikima suunatud ahela pikkuse järgi. Igast klassist võtta sisse need tipud, millest ei vii senistesse tippudesse kaart. b) $k + 1$ kordsed. c) Olles tuumast väljaspool, saab liikuda tuuma. Olles tuumas, peab liikuma väljapoole.
- 208.** Tipu aste.
- 209.** Tähistada ära astmega 3 tippude arv ja astmega 5 tippude arv, ning panna kirja algebralised seosed nende suuruste vahel. Tipuastmete summa on kahekordne servade arv.
- 210.** Oletada, et kumbagi ei leidu. Panna kirja väite eitus ja järeldada sellest vastuolu.
- 211.** Võtta üks paaritu astmega tipp ja hakata liikuma mööda servi. Liikumine ei saa lõppeda algustipus. Tõestada, et tipp, kus liikumine lõpeb, rahuldab nõutavaid tingimusi.
- 212.** Võtta serv ja tõestada, et see serv kuulub mingisse tsükklisse.
- 213.** Võtta vabalt kaks tippu ja näidata kätte ahel ühest teise.
- 214.** Tähistada ära sisetippude arv ja lehtede arv. Panna kirja algebralised seosed nende vahel, lähtudes puu omadustest.
- 215.** Sellel puul on 75-35 lehte, mingi arv sisetippe astmega 2 ja mingi arv sisetippe astmega 3.
- 216.** Teisest faktist järeldada, et graaf on sidus. Seejärel järeldada esimesest faktist, et graaf on tsükkliteta.
- 217.** Tõestada, et graaf on sidus ja tsükkliteta. Tõestus taandada mõistete definitsioonidele ja varem teadaolevatele teoreemidele.
- 218.** Induktsioon n järgi.
- 219.** Kruskali algoritm. Dijkstra algoritm.
- 220.** On kaks võimalust: kas leiduvad mõlemad suunatud ahelad $u \dots v$ ja $v \dots u$ või vähemalt ühte ahelat ei leidu. Vaadata kumbagi juhtu eraldi.

- 221.** Nummerdada tipud numbrita $1, \dots, n$ ning suunata servad väiksema numbriga tipust suurema numbriga tipu poole.
- 222.** Et graaf on nõrgalt sidus, siis leidub tipu a juures kas väljuv kaar või sisenev kaar. Graafis $G \setminus a$ saab liikuda igast tipust igasse teise tippu tugevalt sidususe tõttu.
- 223.** Algoritm: DME õpik lk 80-81.
- 224.** a) Ei. b) Jah. c) Jah.
- 225.** Tugevalt sidusas graafis peab pääsema igast tipust igasse teise tippu, sealhulgas kaare lõpptipust algtipu.
- 226.** Tõestada, et iga selline tipp on ühendatud selle komponendi mingi tipuga mõlematpidi ahelaga.
- 227.** Ei kehti.
- 228.** Ühendada komponendid tsükliliselt. Tuleb ka põhjendada, miks see servade arv on vähim.
- 229.** Induksioon. Sõltuvalt sellest, kuidas juurdetulnud võistkond mängis ülejäänutega, saab selle võistkonna ahelasse õigele kohale vahele lisada.
- 230.** Kui leiduks vastupidise omadusega tipp, siis peaks sellest minema kaar nii tippu v kui ka selle väljundnaabritesse. Selle tipu aste oleks tipu v astmest suurem.
- 231.** Induksioon. Eemaldada suvaline tipp ja tema väljundnaabrid.
- 232.** ($\Rightarrow$) Liikudes mingist X -i tipust mingisse väljaspool X -i asuvasse tippu, peab ahel tegema sammu X -st välja. ($\Leftarrow$) Vaadata tippe, kuhu antud tipust saab minna mõõda mingit suunatud ahelat. Kui nende tippude hulk ei kata kõiki tippe, siis saab tippu juurde lisada.
- 233.** Teha läbi Dijkstra või Floyd-Warshalli algoritm. a) 12; b) 6.
- 234.** Ei. Tuua näide.
- 235.** a), b) Näidata, et vastasel juhul saab konstrueerida ahela, mille kaal on väiksem kui vähima kaaluga ahela kaal
- 236.** a) Leidub kolmetipuline näide. b) Leidub kahetipuline näide.
- 237.** Kui potentsiaal eksisteerib, siis saab tsüklilise ringkäigu kaalu avaldada sinna kuuluvate kaarte otstippude potentsiaalide kaudu. Vastupidi, kui iga ringkäigu summa on 0, siis võib tipu potentsiaali väärtuseks võtta selle tipu kauguse mingist fikseeritud tipust. Tuleb näidata, et selline potentsiaali väärtus on üheselt määratud ja rahuldab ülesande tingimusi.
- 238.** Graafi naabrusmaatriksi ruut näitab kahesammuliste (st kolmetipuliste) ahelate arvu eri tippude vahel, naabrusmaatriksi kuup näitab kolmesammuliste ahelate arvu jne.
- 239.** Lähtudes suvalisest punktist, konstrueerida tsükel. Selle vektorite summa on nullvektor. Eemaldada tsükel.
- 240.** Ühendada graafis paaritu astmega tipud paarikaupa omavahel ja leida graafis suunatud Euleri tsükel. Seejärel kustutada lisatud servad.
- 241.** Selline olukord võib tekkida siis, kui ühe tsükli kuuluva kaare kaal on väga suur. Siis võib olla kasulik temast ümber minna.
- 242.** Vaadelda teist graafi, mille tipud on samad mis graafil G ja milles kaare uv kaaluks võetakse graafi G vähima kaaluga suunatud ahela $u \dots v$ kaal.