

Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria¹

EVE OJA
Tartu Ülikool

1. “Auklik” matemaatika

Hea insener tunneb piisavalt hästi rakendusmatemaatikat selleks, et rakendusmatemaatiku abiga sõnastada oma probleem. Nii saab inseneriprobleemist rakendusmatemaatikaprobleem. Hea rakendusmatemaatik tunneb piisavalt hästi matemaatikat selleks, et oma probleemide lahendamiseks valida sobivat aparatuuri ja vahendeid puhta matemaatika vallast. Et see aga võimalik oleks, peab matemaatika selle koha pealt, mida rakendusmatemaatik kasutada soovib, olema valmis, olema terviklik. Kuid isegi matemaatika klassikaline osa ei ole valmis. Ehkki esmapilgul terviklik ja sile, on ta täis aukusid — lahendamata probleemid — justkui šveitsi juust.

Matemaatikategemiseks on põhimõtteliselt kaks võimalust: kas “lappida aukusid” või arendada edasi mingit matemaatika “aukudeta” osa, ümbritsedes ennast üha üldisemate mõistete labürindiga. “Augulappimine”, kui see õnnestub, on enamasti seotud sügavamate ja täpsemate meetodite (iseги teooriate) leidmisega. Sageli võimaldavad uued meetodid haarata endasse eelnevat ning asendada lihtsamatega endisi liigkeerulisi arutlusi. Käesoleva uurimuste tsükli puhul ongi tegemist sedasorti “augulappimisega”.

2. Banachi ruumide keskkond

Uurimuste tsükkel “**Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria**” (artiklid [1]–[14]) tegeleb

¹Eve Oja artikli *Teaduspreemia täppisteaduste alal tööde tsükli “Banachi ruumide aproksimatsiooniomadused ja kaasruumide geomeetria” eest* (Eesti Vabariigi teaduspreemiad 2001, Tallinn, 2001, 22–29) ümbertöötatud variant.

matemaatika alusuuringutega ja kuulub funktsionaalanalüüsi valdkonda. Kaasaegse funktsionaalanalüüsi sünniaastaks peetakse aastat 1932, mil ilmus Stefan Banachi monograafia *Théorie des opérations linéaires* (*Lineaarsete operatsioonide teooria*). Käesoleva uurimuste tsükli keskkonnaks on Banachi nime kandvad ruumid — Banachi ruumid.

Banachi ruumi mõistet on võimalik tajuda koolimatemaatika baasil. Igaühel meist on olemas intuiitiivne ettekujutus *hulgast* kui mingist objektide ehk elementide kogumist (näiteks: kõigi punktide hulk tasandil, kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$). *Banachi ruumiks* nimetatakse niisugust hulka, mille elemente saab liita ja arvudega korrutada (s.t. tegemist on vektorruumiga) ning mille iga elemendi x jaoks on defineeritud norm $\|x\|$ — elemendi x “pikkus” (norm ongi oma olemuselt vektori pikkuse üldistus). Lisaks kehtib nn. täielikkuse aksioom, mis kirjeldab selles ruumis koonduvaid jadasid (jada (x_n) koondub, kui $\lim \|x_n - x_m\| = 0$).

Toome mõned Banachi ruumide näited. Eukleidiline tasand $\mathbb{R}^2$ on Banachi ruum, kus vektori $x = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ norm on defineeritud tema pikkusena:

$$\|x\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Banachi ruumi moodustavad lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid, kui funktsiooni $x = x(t)$ norm defineerida maksimumi abil:

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$$

Seda ruumi tähistatakse $C[a, b]$ ning ta on funktsionaalanalüüsi arvukates rakendustes kõige enam kasutatav ruum.

Enamuse funktsionaalanalüüsi rakenduste jaoks on Banachi ruumide keskkond just see kõige sobivam keskkond — piisavalt üldine, aga samal ajal ka mitte nii üldine keskkond, et seal enam küllaldaselt konkreetseid sisukaid tulemusi ei tekiks. Paljusid Banachi ruumide teooria tulemusi ja probleeme on võimalik sõnastada elementaarselt, tavalist ülikoolimatemaatikat kasutades. Seetõttu pakuvad need huvi paljudele matemaatikutele.

3. Kaasruumid

Auhinnatud tööde tsükli pealkirjas figureerivatest mõistetest on veel tutvustamata “kaasruum” ja “aproksimatsiooniomadus”. Kaasruumi mõiste peaks olema koolimatemaatika baasil küllaltki hästi tajutav. Seetõttu peatumegi kõigepealt töödetsükli sellel osal, mis käsitleb põhiliselt kaasruume ning esialgu ei puuduta veel aproksimatsiooniomadusi.

Banachi ruumi X kaasruumi X^* moodustavad kõikvõimalikud ruumil X määratud arvulise väärtusega funktsioonid, mis on lineaarsed (s.t. säilitavad liitmise ja arvuga korrutamise) ja pidevad (s.t. säilitavad jadade koonduvuse). Kaasruum osutub ka ise Banachi ruumiks. See asjaolu võimaldab kaasruumile X^* omakorda moodustada kaasruumi X^{**} — ruumi X teise kaasruumi. Niiviisi jätkates tekivad lähteruumi X korral, tema kaasruumist X^* edasi minnes, teine kaasruum X^{**} , kolmas kaasruum X^{***} jne. Seejuures osutub, et ruum X paikneb alati oma teises kaasruumis. Kui X peaks aga enda alla haarama kogu oma teise kaasruumi, siis öeldakse, et ruum X on *refleksiivne*. Näiteks $\mathbb{R}^2$ on refleksiivne, kuid $C[a, b]$ ei ole refleksiivne ruum.

Enamasti on nii, et kui kaasruumil X^* on mingi hea omadus, siis on see omadus ka lähteruumil X . Vastupidi aga üldiselt mitte. Kui ruum ei ole refleksiivne, siis mida kõrgemale tema kaasruumidesse tõusta, seda keerulisemaks muutub ruumide struktuur. Isegi raketustes kõige enam kasutatavate ning kõige põhjalikumalt läbiuuritud ruumide korral osatakse kaasruume täielikult kirjeldada maksimaalselt kuni kolmanda kaasruumini. Kaasruumide kasvõi osalinegi kirjeldamine on olnud üheks funktsionaalanalüüsi klassikaliseks ülesandeks alates 1930. aastatest kuni tänapäevani välja.

Käesolevas töödetsükli kirjeldatakse kaasruume niisuguste geomeetriliste mõistete kaudu nagu M -ideaalid, ühesusomadused U , SU ja HB , $M(r, s)$ -võrratust rahuldavad ideaalid ning u - ja h -ideaalid. Uurimuslikuks lähtekohaks on siin Alfseni ja Effrose fundamentaalne töö (1972, *Ann. Math.* **96**). Artiklites [1] ja [12] antakse üksikasjalik käsitus ühesusomadusele U (Phelps 1960, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**) ja tugevale ühesusomadusele SU (Oja 1988, *Mat. Zametki* **43**) Banachi ruumide sisemise geomeetria kaudu (kerade lõikumisomadused ning nende analüütilised analoogid) ning Goduni

hulga (Godefroy, Kalton, Saphar 1993, *Studia Math.* **104**) üldistuse kaudu Banachi ruumidelt operaatorruumidele. Rakendusena tõestatakse näiteks üks Lima hüpoteese (1983, *Math. Scand.* **53**) ühe-susomaduse HB (Hennefeld 1979, *Indiana Univ. Math. J.* **28**) päranduvuse kohta. Artiklis [3] iseloomustatakse $M(r, s)$ -võrratust rahuldavaid ideaale Banachi ruumi ühiksfääri geomeetrilise struktuuri kaudu ning töös [5] uuritakse, millisel määral on ruumi omadused determineeritud arvuliste parameetrite r ja s poolt. Ehkki $M(r, s)$ -võrratust rahuldavad ideaalid üldistavad M -ideaale, ei rakendu neile vaadeldavas valdkonnas M -ideaalide teooria meetodid. Seetõttu on siin välja töötatud uus uurimismetoodika, mis põhineb teatud elementaarsete funktsionaalide ühesel jätkamisel. Rakendusena tehakse kindlaks $M(r, s)$ -võrratuste seos ruumis ilmnevate aproksimatsiooniomadustega. Tööd [2], [4] ja [7] käsitlevad kaasruumide kirjeldamise üht tähtsamat klassikalist ülesannet — ruumide refleksiivsuse kindlakstegemist. Muuhulgas on tuletatud efektiivsed kriteeriumid Lorentzi ja Orliczi jadaruumides tegutsevate operaatorite ruumide refleksiivsuseks.

Ma ei hakkaks lugejat koormama eelmises lõigus mainitud mõistete ja tulemuste matemaatilise sisu avamisega. Küll aga peatuksin mõneti erandlikul artiklil [4], mis ilmus ajakirja *Proceedings of the American Mathematical Society* eriliste nõudmistega rubriigis *Shorter Notes*. Sellesse rubriiki sobimiseks peab artikkel näiteks andma uue elegantse tõestuse mõnele juba klassikaliseks saanud teoreemile või ümber lükkama mõne tõepäraseks peetava kauapüsinud hüpoteesi. Lisaks on artiklile seatud väga tugev vormiline kitsendus: ta peab ära mahtuma kahele leheküljele ning tema esituslaad peab olema üksikasjaline ja põhjalik. Kitsendused rubriiki *Shorter Notes* pääsemiseks on niivõrd tugevad, et neid tingimusi täitvaid artikleid ilmub aastas ainult mõni ning tõenäosus, et eesti matemaatiku töö sinna pääseks, on kaduvväike.

Artiklis [4] on esitatud lühike ja lihtne tõestus kuulsale Jamesi refleksiivsusteoreemile (1964, *Israel J. Math.* **2**). Mäletatavasti nimetatakse ruumi refleksiivseks, kui ta täidab kogu oma teise kaasruumi. Refleksiivsus defineeritakse seega kaasruumide terminites. Jamesi teoreemi võlu seisneb selles, et ta iseloomustab refleksiivsust ruumi enese terminites, ilma kaasruumidesse väljumata. Jamesi teoreemi

sõnastus on matemaatilises mõttes äärmiselt elementaarne: ta kasutab üksnes funktsionaalanalüüsi algmõisteid. Samal ajal olid kõik siinamaani ilmunud Jamesi teoreemi tõestused, mida ka mitmes monograafias (*Beauzamy* 1982, *North-Holland*; *Guerre-Delabrière* 1992, *Marcel Dekker*; *Megginson* 1998, *Springer*) lihvitud, küllaltki pikad ning kaugel igasugusest elementaarsusest. Artiklis [4] sisalduv Jamesi teoreemi tõestus on aga sama elementaarne nagu selle teoreemi sõnastuski ning võtab enda alla kõigest pool lehekülge.

4. Aproksimatsiooniprobleem ja valge hani

Matemaatilisele rangusele lõivu makstes võib öelda, et *aproksimatsiooniomadus* tähendab seda, et ruumi elemente on võimalik lähendada elementidega teatud lõplikumõõtmelistest alamruumidest. Niisugune lähendamisvõimalus avab tee arvutite kasutamisele, mistõttu aproksimatsiooniomadusega ruumid on olulised mitmesugustes funktsionaalanalüüsi rakendustes. Juba 1930. aastate alguseks oli selgunud, et aproksimatsiooniomadus on paljudel rakenduste jaoks olulistel konkreetsetel Banachi ruumidel (näiteks pidevate funktsioonide ruumil $C[a, b]$). Kas aga igal Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus? Seda nn. aproksimatsiooniprobleemi on peetud üheks kõige olulisemaks ja haaravamaks probleemiks funktsionaalanalüüsi vallas. Aproksimatsiooniprobleemiga samaväärse probleemi, mis üllataval kombel käsitles küll hoopis pidevate kahemuutuva funktsioonide lähendamist, pani kirja Mazur (Banachi õpilane ja kaastööline) kuulsasse *Šoti raamatusse* 1936. aastal, lubades probleemi lahenduse eest auhinnaks elava hane.

Šoti raamat on üks omapärasemaid matemaatikaprobleemide kogusid. Tema tekkelugu on järgmine. Lvovis, mis enne II ilmasõda oli Poola linn, asub joogi- ja söögikoht nimega “Šoti kohvik”. 1930. aastatel kogunes “Šoti kohvikusse” pea igal õhtupoolikul matemaatikute seltskond eesotsas Banachi, Steinhausi, Mazuri ja Ulamiga. Söödi, joodi (mitte üksnes kohvi) ning “tehti” matemaatikat. Matemaatikategemise käigus kattusid kohviku marmorlauakesed valemite kribu-krabuga, mis järgmiseks hommikuks loomulikult maha pestud said. Legend (Steinhausi mälestused) räägib, et kord olevat üks selline “istung” kestnud ühtejäre 17 tundi. Tulemuseks olevat

olnud suurepärase teoreemi, mille tõestus, nagu tavaliselt, lauaplaadile kirjutati ning mis, nagu tavaliselt, järgmiseks hommikuks sealt ka kadunud oli. Kuna aga mitte keegi ei olevat suutnud tõestust taastada, siis olevatki see suurepärase teoreemi kaotsi läinud. Et niisugust õnnetust enam ei juhtuks, ostis proua Banach paksu klade, mida säilitati kohvikus ning anti matemaatikutele, kui neil tekkis tahtmine midagi olulist kirja panna. Seda kladet hakatigi kutsuma *Šoti raamatuks*. *Šoti raamat* sisaldab 193 matemaatilist probleemi. Probleemipüstitajad lubasid nii mõnigi kord ka auhindasid: näiteks väike tass musta kohvi, 2 suurt õlut, pudel veini jne. Aproksimatsiooniprobleemi lahenduse eest lubas Mazur, nagu juba öeldud, elava hane.

Aproksimatsiooniprobleemile lahenduse otsimisega tegelesid tuhandeid matemaatikuid. Enamasti usuti probleemi positiivsesse lahendusse ning püüti tõestada, et igal Banachi ruumil on aproksimatsiooniomadus. Paljud matemaatikud pühendasid nendele uuringutele kogu oma energia. Dramaatiline lahendus saabus 1972. aastal: noor rootsi matemaatik Per Enflo konstrueeris niisuguse Banachi ruumi, millel ei olnud aproksimatsiooniomadust. Enflo sai ka Mazuri lubatud auhinna — elava hane. Kaluža raamatus *The Life of Stefan Banach* (1996, *Birkhäuser*) on foto, kus tollal ligi 70-aastane Mazur ulatab naeratavale Enflole punutud korvi valge hanega, kes tundub pildil sama tõsine ja asjalik nagu Mazur isegi.

5. Aproksimatsiooniomadus ja Afganistani sõda

See, et aproksimatsiooniprobleemi lahendus osutus negatiivseks, tähendas eelkõige seda, et Banachi ruumide teooria on palju keerulisem ja rikkalikum, kui esialgu aimata võis. Selgus, et aproksimatsiooniomadust puudutavate probleemide spekter on vägagi lai. Mis tõukas aga aproksimatsiooniomadusega tegelema käesolevate ridade autorit? Võib öelda, et kummalisel kombel oli selleks NSV Liidu poolt vallapäästetud Afganistani sõda.

1980–81 õppeaasta veetsin ma NSV Liidu stažöörina ning ühtlasi Prantsuse Vabariigi stipendiaadina Marseille's. Sinna sattusin ma aga just seoses Afganistani sõjaga. Ise soovisin küll Pariisi ning NSV Liidu poolne taotlus oli ka Pariisi jaoks, kuid maailmakuulus matemaatik (Fieldsi preemia 1950) Laurent Schwartz, kes Afganistani

sõja asjus aktiivselt NSV Liidu vastu välja astus, olevat soovinud vaenuliku riigi stažööri iseendast ja seega ka Pariisist võimalikult kaugele saata. Sellest Marseille'sse pagendamise loost rääkis mulle professor Billard, kelle juurde Marseille'sse Schwartz mind suunaski.

Professor Billard'i seminaris uuriti aga parajasti üht Retherfordi ja Stegalli fundamentaalset tööd, kus igal sammul oli mängus aproksimatsiooniomadus. Mäletan, kuidas professor Billard, silmad säramas ja ümar pealagi piljardikuulina läikimas (billard — "piljard" pr.k.), aeg-ajalt hüüatas: "Madam Ožaa, vaadake siia, vaadake siia! Juba jälle kasutavad nad seda tuumaoperaatorite kohta käivat väidet eeldusel, et teisel kaasruumil on aproksimatsiooniomadus. See on ju tõestamata!" Tõepoolest, kõnealune väide, mis sisaldub Alexander Grothendiecki (Fieldsi preemia 1966) 1955. aastal ilmunud põhjapanevas monograafias *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, nn. *Grothendiecki memuaaris*, oligi tõestamata. *Grothendiecki memuaaris* on üksnes kirjas, et see väide on tõestatav (eelmise arutlusega) sümmeetrilise arutluse teel. Kuid nagu ütles Billard: "Meie siin oleme korduvalt proovinud seda sümmeetrilist arutlust läbi teha, aga see ei anna mitte kui midagi. Proovige ka, madam Ožaa, proovige ka!" Ja nii ma proovisingi. Tulemuseks oli koostöös Leningradi matemaatiku Oleg Reinoviga kirjutatud artikkel, mis ilmus Pariisi Teaduste Akadeemia toimetistes 1987. aastal, kus me konstrueerisime Grothendieckile kontranäite ning tõestasime, et see tuumaoperaatorite kohta käiv väide ei kehti, kui eeldada aproksimatsiooniomadust *teiselt* kaasruumilt, kuid väide kehtib, kui eeldada aproksimatsiooniomadust *kolmandalt* kaasruumilt. Aproksimatsiooniomaduste vallas tegutsedes on ka viimastel aastatel õnnestunud nii mõndagi ära teha. Mida nimelt, seda püüaksingi järgnevas põgusalt kirjeldada.

6. Aproksimatsiooniomaduse olemus

Osas "Kaasruumid" tutvusime auhinnatud uurimuste tsükli nende tööde ja tulemustega, mida oli võimalik kirjeldada, kasutades suhteliselt üldarusaadavaid mõisteid nagu "Banachi ruum" ja "kaasruum". Kuigi ka nendes töödes on tunda aproksimatsiooniomaduse kohalolekut, pole seal aproksimatsiooniomaduse olemus uurimisobjektiks

omaette. Uurimuste tsükli ülejäänud artiklid on aga nii või teisiti pühendatud aproksimatsiooniomaduse olemuse avamisele.

Aproksimatsiooniomaduse olemuslike uuringute käigus (mis kestavad 1930. aastate algusest kuni tänapäevani välja) on kasutatud palju erinevaid matemaatilisi mõisteid ning loodud uusi teooriaid. Näiteks *Grothendiecki* memuaar kirjeldab aproksimatsiooniomadust kaheksa kvalitatiivselt erineva tingimuse kaudu, millest igaüks on samaväärne aproksimatsiooniomadusega. Et oma kirjeldustega edasi minna, peaksime end varustama vähemalt operaatori mõistega. Operaator on koolimatemaatikast tuntud funktsiooni üldistus: *operaator* on niisugune funktsioon, mille määramispiirkonnaks on mingi Banachi ruum ja ka muutumispiirkonnaks on mingi Banachi ruum. Lisaks eeldatakse operaatorilt lineaarsust ja pidevust. Kui operaatori väärtuste hulk on lõplikumõõtmeline, siis räägitakse *lõplikumõõtmelisest operaatorist*. Topoloogiliste mõistete “hulga kompaktsus” ja “hulga nõrk kompaktsus” abil defineeritakse *kompaktsed* ja *nõrgalt kompaktsed* operaatorid. Kõigi kompaksete operaatorite hulk ja kõigi nõrgalt kompaksete operaatorite hulk kujutavad endast Banachi ruume. Lõplikumõõtmelised operaatorid paiknevad seejuures kompaksete operaatorite ruumis, mis omakorda asetseb nõrgalt kompaksete operaatorite ruumis.

Üks *Grothendiecki memuaari* kuulsamaid aproksimatsiooniomadusega samaväärseid tingimusi väljendub lõplikumõõtmeliste operaatorite asendis kompaksete operaatorite ruumis: lõplikumõõtmelised operaatorid paiknevad seal kõikjal tihedalt. Artiklis [10] iseloomustatakse nii Banachi ruumi kui ka tema kaasruumi aproksimatsiooniomadusi lõplikumõõtmeliste operaatorite asendi kaudu kompaksete operaatorite ruumis, kuid erinevalt Grothendiecki tingimusest väljendutakse siin operaatorite ruumide kaasruumide geomeetria kaudu, kasutades kerade lõikumisomadusi ja ideaalide terminoloogiat (*Godefroy, Kalton, Saphar* 1993, *Studia Math.* **104**).

Artikli [14] esialgseks eesmärgiks oli iseloomustada aproksimatsiooniomadust lõplikumõõtmeliste operaatorite asendi kaudu nõrgalt kompaksete operaatorite ruumis (mis on oluliselt suurem ruum kui kompaksete operaatorite ruum). Uuringud selle eesmärgi realiseerimise nimel võtsid aga tunduvalt ulatuslikuma iseloomu ning tulemusena võib öelda, et lisaks põhieesmärgi realiseerimisele sisal-

dub kirjeldatavas artiklis veel vähemalt kolm fundamentaalse tähtsusega tulemust. Esiteks, tõestatakse *Davis-Figiel-Johnson-Pelczyński* (1974, *J. Funct. Anal.* **17**) kuulsa faktoriseerimisteoreemi isomeetriline ja ühtlane variant. Teiseks, selle rakendusena luuakse teooria Banachi ruumide ja nende kaasruumide aproksimatsiooniomaduste iseloomustamiseks nõrgalt kompaksete operaatorite ruumi kaasruumi geometria kaudu. Kolmandaks, on leitud ühtne ja efektiivne meetod meetriliste aproksimatsiooniomaduste kindlakstegemiseks juhul, kui ruumidel ilmnevad aproksimatsiooniomadused. Kirjeldatava artikli üheks kõige meeldivamaks tulemuseks on teoreem, mis oluliselt täiendab *Grothendiecki memuaari*: Banachi ruumi aproksimatsiooniomadus on samaväärne tingimusega, et lõplikumõõtmelised operaatorid, mille norm on ≤ 1 , paiknevad nõrgalt kompaksete operaatorite ruumi ühikkeras kõikjal tihedalt (tugeva operaatoritopoloogia mõttes). Meetodid, mida kasutas Grothendieck, võimaldasid tal tõestada üksnes selle tingimuse tarvilikkuse kaasruumi (isegi mitte ruumi enda!) aproksimatsiooniomaduse jaoks.

Õeldakse, et Banachi ruum on *separaabel*, kui temas leidub niisugune elementide jada, mis paikneb selles ruumis kõikjal tihedalt. Separaablite ruumide uurimiseks on olemas rikkalik spetsiifiliste meetodite varasalg. Nii mõnigi kord juhtub, et neid meetodeid kasutades õnnestub tõestada mingi üldine teoreem separaablite ruumide jaoks. Siis püstitub kohe loomulik küsimus: kas see teoreem kehtib ka üldistes, sh. mitteseparaablites, Banachi ruumides? Sedasorti küsimustele vastatakse artiklis [6], kus, kasutades aproksimatsiooniomadusi, üldistatakse separaablilt Banachi ruumidelt üldistele Banachi ruumidele rida põhitulemusi artiklitest *Kalton, D. Werner* 1995, *J. reine angew. Math.* **461**; *Payá, W. Werner* 1991, *Proc. Amer. Math. Soc.* **111**; *Lima, Oja, Rao, D. Werner* 1994, *Michigan Math. J.* **41**.

Aproksimatsiooniomadust saab alati kirjeldada teatud lõplikumõõtmeliste operaatorite perede — aproksimeerivate perede — kaudu. Töös [13] on loodud uus ühtne teooria, mille üks põhitulemusi väidab, et aproksimeerivate perede kvantitatiivsed omadused on olemuslikult ja adekvaatselt seotud Banachi ruumide kaasruumide sisemise geometriaga. Seejuures osutub, et vaadeldavad aproksimeerivate perede kvantitatiivsed omadused on jadaltselt määratud. Ülalmainitud teoorias mängib olulist osa klassikaline Simonsi

võrratus, millele artiklis [9] antakse lühike ja elementaarne tõestus. Teooria rakendusena arendatakse välja alternatiivne ja ühtne ning olemasolevast tunduvalt lihtsam meetod kompaksete operaatorite M -, u - ja h -ideaalide teooriate ülesehitamiseks (varem kasutati kõigil kolmel juhul täiesti erinevaid spetsiifilisi meetodeid), mis erinevalt varasematest meetoditest rakendub võrdselt ka mitteseparaablitele ruumidele. Muuhulgas üldistatakse või parendatakse näiteks Cabello, Casazza, Cho, Godefroy, Johnsoni, Kaltoni, Lima, Nieto, Saphari, Simonsi, D. Werneri ja W. Werneri valdavalt aastatel 1990–1995 ilmunud tulemusi. Teooria põhiteesid [11] ilmusid Pariisi Teaduste Akadeemia toimetistes, mis on tuntud oma ülima selektiivsuse poolest: sealne artikkel peab olema “*the first report of an important discovery or a significant result*”.

Kirjandus

- [1] *HB-subspaces and Godun sets of subspaces in Banach spaces*, Mathematika **44** (1997), 120–132.
- [2] *Pitt's theorem for Lorentz and Orlicz sequence spaces*, Mat. Zametki **61** (1997), 18–25 (in Russian); English translation in: Math. Notes **61** (1997), 16–21. (Kaasautor doktorant J. Ausekle.)
- [3] *Geometric characterizations of positions of Banach spaces in their biduals*, Archiv Math. **69** (1997), 227–233. (Kaasautor magistrant R. Haller.)
- [4] *A short proof of a characterization of reflexivity of James*, Proc. Amer. Math. Soc. **126**, No. 8 (1998), 2507–2508.
- [5] *On ideals of compact operators satisfying the $M(r,s)$ -inequality*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 334–348. (Kaasautorid J. C. Cabello ja E. Nieto (Hispaania).)
- [6] *M -ideals of compact operators are separably determined*, Proc. Amer. Math. Soc. **126**, No. 9 (1998), 2747–2753.
- [7] *Compactness of operators acting from a Lorentz sequence space to an Orlicz sequence space*, Arkiv Mat. **36** (1998), 233–239. (Kaasautor doktorant J. Ausekle.)
- [8] *On the geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Preprint Nr. A/5/98, FU Berlin, 1998, 24 pp.
- [9] *A proof of the Simons inequality*, Acta Comment. Univ. Tartuensis Math. **2** (1998), 27–28.
- [10] *Ideals of finite rank operators, intersection properties of balls, and the approximation property*, Studia Math. **133** (1999), 175–186. (Kaasautor Å. Lima (Norra).)
- [11] *Géométrie des espaces de Banach ayant des approximations de l'identité contractantes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **328** (1999), 1167–1170.

- [12] *Intersection properties of ball sequences and uniqueness of Hahn-Banach extensions*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **129A** (1999), 1251–1262. (Kaasautor doktorant M. Põldvere.)
- [13] *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801–2823.
- [14] *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348. (Kaasautorid Å. Lima ja O. Nygaard (Norra).)