I peatükk.
Operaatorid Banachi ruumides

§ 1. Poolnorm. Zabreiko lemma

1.1. Poolnormi mõiste ja põhiomadused

Olgu X vektorruum.

Definitsioon 1.1. Funktsiooni $p\colon X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *poolnormiks,* kui

1° $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ kõikide $x \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral;

2° $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ kõikide $x, y \in X$ korral.

Arvule $p(x)$ viidatakse kui elemendi x poolnormile. Tingimusi 1° ja 2°—*poolnormi aksioome*—nimetatakse vastavalt *homogeensuse aksioomiks* ja *kolmnurga võrratuseks.*

Kõige lihtsam näide poolnormist on norm. Enne veidi keerukamate näidete toomist loetleme mõned poolnormi omadused.

Olgu X vektorruum ning olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm. Siis

(1) $p(x) \geqslant 0$ iga $x \in X$ korral;

(2) $p(0) = 0$;

(3) $p(-x) = p(x)$ iga $x \in X$ korral;

(4) $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y)$ kõikide $x, y \in X$ korral.

Omadust (4) nimetatakse *tagurpidi kolmnurga võrratuseks.* Vahetult omadusest (2) näeme, et poolnorm p vektorruumil X on norm parajasti siis, kui

$$x \in X,\ p(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Ülesanne 1.1. Tõestada väited (1)–(4).

Näpunäide. Kõigepealt on mõistlik tõestada väited (2) ja (3).

Näide 1.1. Olgu X vektorruum, olgu Y normeeritud ruum ning olgu $T\colon\ X \to Y$ lineaarne operaator. Siis funktsioon

$$p(x) = \|Tx\|, \quad x \in X,$$

on poolnorm. Seejuures p on norm parajasti siis, kui T on injektsioon.

Näide 1.2. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Tähistame

$$\mathcal{M}_1 := \left\{ f\colon\ X \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ on mõõtuv}, \int |f|\, d\mu < \infty \right\}.$$

Ilmselt on $\mathcal{M}_1$ vektorruum. Funktsioon

$$p(f) = \int |f|\, d\mu, \quad f \in \mathcal{M}_1,$$

on poolnorm, kuid pole üldjuhul norm.

Näide 1.3 (Minkowski funktsionaal)**.** Olgu X vektorruum.

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et hulk $A \subset X$ on

- *kumer,* kui
$$x, y \in A,\ \lambda \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in A;$$
- *tasakaalus,* kui
$$x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha x \in A;$$
- *neelav,* kui iga $x \in X$ korral leidub arv $s_x > 0$ nii, et
$$t > s_x \quad \Longrightarrow \quad x \in tA.$$

Eeldame nüüd, et alamhulk $A \subset X$ on neelav. Defineerime

$$p_A(x) = \inf\{t > 0\colon\ x \in tA\}, \quad x \in X.$$

Funktsiooni p_A nimetatakse hulga A *Minkowski funktsionaaliks.*

Lause 1.1. *Kui A on kumer ja tasakaalus, siis p_A on poolnorm. Seejuures*

$$\{x \in X\colon\ p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X\colon\ p_A(x) \leqslant 1\}.$$

TÕESTUS.

Ülesanne 1.2. Tõestada lause 1.1.

$\square$

Järgnev lause näitab, kuidas Minkowski funktsionaal võimaldab genereerida uusi norme.

Lause 1.2. *Olgu X Banachi ruum ning olgu $B \subset X$ kinnine tõkestatud kumer tasakaalus alamhulk. Tähistame $Y := \operatorname{span} B$. Olgu p hulga B Minkowski funktsionaal alamruumis Y. Siis (Y, p) on Banachi ruum, kusjuures $B_Y = B$.*

1.2. Zabreiko lemma

Paljudes rakendustes osutub kasulikuks poolnormi *tõkestatuse* mõiste.

Definitsioon 1.3. Olgu X normeeritud ruum. Öeldakse, et poolnorm $p\colon X \to \mathbb{R}$ on *tõkestatud,* kui leidub arv $M \geqslant 0$ nii, et

$$p(x) \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Paneme tähele, et poolnormi tõkestatus normeeritud ruumis on samaväärne tema pidevusega.

Ülesanne 1.3. Olgu X normeeritud ruum ning olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) p on tõkestatud;

(ii) p on pidev;

(iii) p on pidev punktis 0.

Tõhus tööriist poolnormi tõkestatuse tõestamiseks on Zabreiko lemma, mille sõnastamiseks toome kõigepealt sisse poolnormi *loenduva subaditiivsuse* mõiste.

Definitsioon 1.4. Olgu X normeeritud ruum. Öeldakse, et poolnorm $p\colon X \to \mathbb{R}$ on *loenduvalt subaditiivne,* kui mistahes koonduva rea $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ korral ruumis X

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j).$$

Märkus 1.1. Loenduvalt subaditiivseid poolnorme nimetatakse kirjanduses ka *loenduvalt pooladitiivseteks* poolnormideks.

Ülesanne 1.4. Tõestada, et tõkestatud poolnorm normeeritud ruumis on loenduvalt subaditiivne.

NÄPUNÄIDE. Kasutada fakti, et koonduva rea jääkliige koondub nulliks, ja ülesannet 1.3.

Teiselt poolt, loenduvalt subaditiivne poolnorm ei tarvitse olla tõkestatud.

Näide 1.4. Vaatleme normeeritud ruumi c_0 alamruumi c_{00}, mis koosneb *statsionaarsetest nullijadadest* (s.t. niisugustest jadadest, mille liikmed alates mingist indeksist on nullid):

$$\begin{aligned} c_{00} :&= \big\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\colon\ \xi_j \in \mathbb{K},\ j \in \mathbb{N},\ \text{leidub } N \in \mathbb{N} \text{ nii, et } \xi_j = 0, \text{ kui } j \geqslant N\big\} \\ &= \big\{(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)\colon\ n \in \mathbb{N},\ \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}\big\}. \end{aligned}$$

Ruum c_{00} on varustatud ruumi c_0 normiga, s.t.

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\xi_j|, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) \in c_{00}.$$

Vaatleme ruumil c_{00} poolnormi

$$p(x) = \|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) \in c_{00}$$

(teisisõnu, poolnorm p on ruumi ℓ_1 norm ruumil c_{00}). Poolnorm p on loenduvalt subaditiivne, kuid mitte tõkestatud.

Ülesanne 1.5. Tõestada, et poolnorm p on loenduvalt subaditiivne, kuid mitte tõkestatud.

Teoreem 1.3 (Zabreiko lemma)**.** *Loenduvalt subaditiivne poolnorm Banachi ruumis on tõkestatud.*

Zabreiko lemma tõestuseks on mugav eelnevalt sõnastada järgnev

Lemma 1.4. *Olgu X normeeritud ruum. Tähistame iga $r > 0$ korral*

$$\mathcal{U}_r := \big\{x \in X\colon\ p(x) \leqslant r\big\}.$$

Olgu $a \in X$ ja $R, r > 0$ sellised, et

$$\overline{B}(a, R) \subset \overline{\mathcal{U}_r}.$$

Siis iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\overline{B}(0, \varepsilon) \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{r\varepsilon}{R}}}.$$

TÕESTUS.

Ülesanne 1.6. Tõestada lemma 1.4

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 1.7. Kõigepealt näidata, et $\overline{B}(0, R) \subset \overline{\mathcal{U}_r}$.

□

TEOREEMI 1.3 (ZABREIKO LEMMA) TÕESTUS. Olgu X Banachi ruum ning olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ loenduvalt subaditiivne poolnorm. Peame näitama, et p on tõkestatud, s.t. leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$p(x) \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Selleks tähistame iga $r > 0$ korral

$$\mathcal{U}_r := \big\{x \in X\colon\ p(x) \leqslant r\big\}.$$

Siis ilmselt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, seega ka $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{U}_n}$. Baire'i teoreemi põhjal sisaldab mingi $\overline{\mathcal{U}_n}$ mingi kera, s.t. leiduvad $N \in \mathbb{N}$, $a \in X$ ja $R > 0$ nii, et $\overline{B}(a, R) \subset \overline{\mathcal{U}_N}$. Lemma 1.4 põhjal nüüd

$$\overline{B}(0, \varepsilon) \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{N\varepsilon}{R}}} \quad \text{iga } \varepsilon > 0 \text{ korral.}$$

Fikseerime vabalt $x \in X \backslash \{0\}$. Siis $x \in \overline{B}\big(0, \|x\|\big) \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{R}}}$, seega leidub $x_1 \in \mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{R}}$ nii, et

$$\|x - x_1\| < \frac{\|x\|}{2}.$$

Nüüd $x - x_1 \in \overline{B}\Big(0, \frac{\|x\|}{2}\Big) \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{2R}}}$, seega leidub $x_2 \in \mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{2R}}$ nii, et

$$\|(x - x_1) - x_2\| < \frac{\|x\|}{2^2}.$$

Edasi, $x - x_1 - x_2 \in \overline{B}\Big(0, \frac{\|x\|}{2^2}\Big) \subset \overline{\mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{2^2R}}}$, seega leidub $x_3 \in \mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{2^2R}}$ nii, et

$$\|(x - x_1 - x_2) - x_3\| < \frac{\|x\|}{2^3}.$$

Sarnaselt jätkates leiame iga $n \in \mathbb{N}$ korral elemendi $x_n \in \mathcal{U}_{\frac{N\|x\|}{2^{n-1}R}}$ nii, et

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| < \frac{\|x\|}{2^n}.$$

Nüüd $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, seega poolnormi p loenduva subaditiivsuse tõttu

$$p(x) = p\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N\|x\|}{2^{j-1}R} = \frac{N\|x\|}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{2N}{R}\|x\|.$$

Niisiis iga $x \in X \backslash \{0\}$ korral

$$p(x) \leqslant \frac{2N}{R}\|x\|.$$

Kuna see võrratus kehtib ka $x = 0$ korral, siis p on tõkestatud. □

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 1.7. Olgu X vektorruum ning olgu $p\colon X \to \mathbb{R}$ poolnorm. Kui $r > 0$, siis tähistame

$$\mathcal{U}_r := \{x \in X : p(x) \leqslant r\}.$$

Tõestada, et iga $r > 0$ korral

(a) $\mathcal{U}_r$ on kumer ja tasakaalus;

(b) iga $t \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ korral $t\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_{|t|r}$;

Tõestada, et kui X on normeeritud ruum, siis väited (a) ja (b) jäävad kehtima, kui vaadelda seal hulkade $\mathcal{U}_r$ ja $\mathcal{U}_{|t|r}$ asemel vastavalt nende sulundeid $\overline{\mathcal{U}_r}$ ja $\overline{\mathcal{U}_{|t|r}}$.

Ülesanne 1.8. Tõestada, et poolnorm p normeeritud ruumis X on tõkestatud parajasti siis, kui ta on tõkestatud mingis kinnises keras, s.t. leiduvad $a \in X$, $r > 0$ ja $M \geqslant 0$ nii, et

$$p(x) \leqslant M \quad \text{iga } x \in \overline{B}(a, r) \text{ korral.}$$

§ 2. Banachi teoreem pöördoperaatorist

2.1. Banachi teoreem pöördoperaatorist

Kui $X, Y \neq \varnothing$ ja $A\colon X \to Y$ on bijektsioon, siis kujutuse A pöördkujutus $A^{-1}\colon Y \to X$ defineeritakse seosega

$$A^{-1}y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = Ax.$$

Kui seejuures X ja Y on vektorruumid ja A on lineaarne, siis ka A^{-1} on lineaarne.

Ülesanne 2.1. Tõestada, et kui X ja Y on vektorruumid ja bijektsioon $A\colon X \to Y$ on lineaarne, siis ka A^{-1} on lineaarne.

Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis pideva lineaarse bijektsiooni $A\colon X \to Y$ pöördkujutus ei ole üldjuhul pidev.

Näide 2.1. Formaalne ühikoperaator

$$I\colon (c_{00}, \|\cdot\|_1) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty), \qquad Ix = x, \quad x \in c_{00},$$

on pidev, kuid tema pöördoperaator $I^{-1}\colon (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ pole pidev.

Ülesanne 2.2. Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Pöördoperaatori $I^{-1}\colon (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ mittepidevuse tõestamisel kasutada näite 1.4 tulemust, mille kohaselt norm $\|\cdot\|_1$ ei ole tõkestatud ruumil $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$.

Järgnev teoreem ütleb, et täielike normeeritud ruumide vahel tegutseva pideva lineaarse bijektsiooni pöördkujutus on pidev.

Teoreem 2.1 (Banachi teoreem pöördoperaatorist)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $A\colon X \to Y$ pidev lineaarne bijektsioon. Siis ka pöördoperaator A^{-1} on pidev.*

Meenutame normeeritud ruumide isomorfismi mõistet.

Definitsioon 2.1. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $T\colon X \to Y$ bijektsioon. Öeldakse, et T on (normeeritud ruumide) *isomorfism,* kui ta on lineaarne, pidev ning tema ka pöördoperaator T^{-1} on pidev, s.t. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Sel juhul öeldakse ka, et normeeritud ruumid X ja Y on *isomorfsed* ja kirjutatakse $X \simeq Y$.

Ülesanne 2.3. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $T\colon X \to Y$. Tõestada järgmiste väidete samaväärsus:

(i) T on (normeeritud ruumide) isomorfism;

(ii) T on lineaarne sürjektsioon, kusjuures leiduvad arvud $\alpha, \beta > 0$ nii, et

$$\alpha\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \beta\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Banachi teoreem pöördoperatorist väidab niisiis, et pidev lineaarne bijektsioon Banachi ruumide vahel on isomorfism.

Banachi teoreemi 2.1 pöördoperaatorist tõestus. Pöördoperaatori A^{-1} lineaarsuse tõttu piisab tema pidevuseks näidata, et ta on tõkestatud, s.t. leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|A^{-1}y\| \leqslant M\|y\| \quad \text{iga } y \in Y \text{ korral},$$

ehk, teisisõnu, poolnorm $p(y) = \|A^{-1}y\|$, $y \in Y$, on tõkestatud, milleks Zabreiko lemma põhjal piisab näidata, et p on loenduvalt subaditiivne. (Me kasutasime siin eeldust, et Y on Banachi ruum).

Olgu $\sum_{j=1}^{\infty} y_j$ koonduv rida ruumis Y. Poolnormi p loenduvaks subaditiivsuseks peame näitama, et

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p(y_j),$$

s.t.

$$\left\|A^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} y_j\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|A^{-1}y_j\|.$$

Kui $\sum_{j=1}^{\infty} \|A^{-1}y_j\| = \infty$, siis eelnev võrratus kehtib triviaalselt. Jääb vaadelda juhtu, kus $\sum_{j=1}^{\infty} \|A^{-1}y_j\| < \infty$. Sellisel juhul rida $\sum_{j=1}^{\infty} A^{-1}y_j$ koondub (sest Banachi ruumis järeldub rea absoluutsest koonduvusest tema koonduvus—me kasutame siin eeldust, et X on Banachi ruum). Nüüd

$$\begin{aligned}\left\|A^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} y_j\right\| &= \left\|A^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} AA^{-1}y_j\right\| = \left\|A^{-1}A\sum_{j=1}^{\infty} A^{-1}y_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} A^{-1}y_j\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|A^{-1}y_j\|.\end{aligned}$$

$\square$

Meenutame normide ekvivalentsuse mõistet vektorruumis.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et normid $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ vektorruumis X on ekvivalentsed ja kirjutatakse $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$, kui leiduvad arvud $\alpha, \beta > 0$ nii, et

$$\alpha\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant \beta\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral}.$$

Teisisõnu, normide $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ ekvivalentsus vektorruumis X tähendab, et ruumi X samasusteisendus $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$, $Ix = x$, $x \in X$, on normeeritud ruumide isomorfism.

Järeldus 2.2. *Olgu vektorruum X Banachi ruum normide $\|\cdot\|$ ja $|||\cdot|||$ suhtes, kusjuures leidub $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|||x||| \leqslant M\|x\| \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

Siis $\|\cdot\| \sim |||\cdot|||$.

Tõestus.

Ülesanne 2.4. Tõestada järeldus 2.2.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Banachi teoreemi 2.1 pöördoperaatorist.

□

Järeldus 2.3. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $T\colon X \to Y$ pidev lineaarne injektsioon. Siis pöördoperaator $T^{-1}\colon \operatorname{ran} T \to X$ on pidev parajasti siis, kui* $\operatorname{ran} T$ *on kinnine.*

TÕESTUS.

Ülesanne 2.5. Tõestada järeldus 2.3.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Banachi teoreemi 2.1 pöördoperaatorist.

□

2.2. Lahtise kujutuse printsiip

Definitsioon 2.3. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Öeldakse, et kujutus $A\colon X \to Y$ on *lahtine,* kui ta teisendab lahtised hulgad ruumis X lahtisteks hulkadeks ruumis Y, s.t. iga lahtise hulga $U \subset X$ kujutis $A[U] := \{Ax\colon x \in U\} \subset Y$ on lahtine hulk ruumis Y.

Kehtib järgnev fundamentaalne

Teoreem 2.4 ((Banachi) lahtise kujutuse printsiip)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Siis iga pidev lineaarne sürjektsioon $T\colon X \to Y$ on lahtine.*

Lahtise kujutuse printsiibi (teoreemi 2.4) tõestame me ülesandes 11.13.

Ülesanne 2.6. Tõestada Banachi teoreem 2.1 pöördoperaatorist, tuginedes lahtise kujutuse printsiibile (s.t. teoreemile 2.4).

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 2.7. Olgu $X = C[0,1]$ ja $Y = \{y \in C^1[0,1]\colon y(0) = 0\}$ varustatud ruumi $C[0,1]$ normiga. Vaatleme integreerimisoperaatorit $A \in \mathcal{L}(X,Y)$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \quad t \in [0,1], \qquad x \in X,$$

ja diferentseerimisoperaatorit $\mathcal{D}\colon Y \to X$,

$$\mathcal{D}y(t) = y'(t), \quad t \in [0,1], \qquad y \in Y.$$

Tõestada, et on olemas pöördoperaator A^{-1}, kusjuures $A^{-1} = \mathcal{D}$. Tõestada, et $\mathcal{D}$ ei ole pidev.

Ülesanne 2.8. Olgu X, Y ja Z Banachi ruumid, olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne ning olgu $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ bijektiivne, kusjuures ST on pidev. Tõestada, et siis $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

§ 3. Teoreem kinnisest graafikust

3.1. Normeeritud ruumide korrutisruum

Kui X ja Y on vektorruumid (üle korpuse $\mathbb{K}$), siis otsekorrutis

$$X \times Y := \{(x, y) \colon \ x \in X, \ y \in Y\}$$

on vektorruum tehete

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{ja} \qquad \alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y)$$

suhtes.

Ülesanne 3.1. Veenduda selles.

Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis vektorruum $X \times Y$ on normeeritud ruum normi

$$\|(x, y)\| = \|(x, y)\|_\infty := \max\{\|x\|, \|y\|\} \tag{3.1}$$

suhtes.

Ülesanne 3.2. Veenduda selles.

Koonduvus ruumis $X \times Y$ tähendab seejuures koordinaaditi koonduvust, s.t.

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ruumis } X \times Y} (x, y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ruumis } X} x \quad \text{ja} \quad y_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ruumis } Y} y.$$

Ülesanne 3.3. Veenduda selles.

Normeeritud ruum $X \times Y$ on täielik parajasti siis, kui ruumid X ja Y on täielikud.

Ülesanne 3.4. Veenduda selles.

3.2. Teoreem kinnisest graafikust

Definitsioon 3.1. Olgu $X, Y \neq \varnothing$. Kujutuse $A \colon \ X \to Y$ *graafikuks* nimetatakse otsekorrutise $X \times Y$ alamhulka

$$\operatorname{gr} A := \{(x, Ax) \colon \ x \in X\}.$$

Kui X ja Y on normeeritud ruumid ja $A \colon \ X \to Y$ on pidev operaator, siis tema graafik $\operatorname{gr} A$ on kinnine hulk ruumis $X \times Y$.

Ülesanne 3.5. Veenduda selles.

Vastupidine väide üldjuhul ei kehti: normeeritud ruumide vahel tegutsev kinnise graafikuga kujutus (isegi kinnise graafikuga lineaarne kujutus) ei tarvitse olla pidev.

Näide 3.1. Näites 2.1 veendusime, et formaalne ühikoperaator

$$I \colon \ (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_1), \qquad Ix = x, \quad x \in c_{00},$$

ei ole pidev. Samas selle operaatori graafik on kinnine.

Ülesanne 3.6. Veenduda, et formaalse ühikoperaatori $I\colon (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_1)$ graafik on kinnine.

Teoreem 3.1 (teoreem kinnisest graafikust)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $A\colon X \to Y$ lineaarne operaator. Kui operaatori A graafik* $\operatorname{gr} A$ *on kinnine, siis A on pidev.*

Kontrollides teoreemi abil kinniset graafikust Banachi ruumide X ja Y vahel tegutseva lineaarse operaatori $A\colon X \to Y$ pidevust, peame näitama, et operatori A graafik on kinnine, s.t.

$$z_n \in \operatorname{gr} A,\ n \in \mathbb{N}, \quad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X \times Y} z \qquad \Longrightarrow \qquad z \in \operatorname{gr} A,$$

s.t.

$$(x_n, Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X \times Y} (x, y) \qquad \Longrightarrow \qquad (x, y) \in \operatorname{gr} A,$$

s.t.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X} x \quad \text{ja} \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } Y} y \qquad \Longrightarrow \qquad y = Ax.$$

Mille poolest on teoreem kinnisest graafikust hea? Viimane implikatsioon on samaväärne implikatsiooniga

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X} x \quad \text{ja} \quad \text{jada } (Ax_n) \text{ koondub ruumis } Y \qquad \Longrightarrow \qquad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } Y} Ax.$$

Niisiis, kui operaatori $A\colon X \to Y$ pidevuse kontrollimisel lähtudes pidevuse (Heine) definitsioonist tuleb näidata, et

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X} x \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } Y} Ax,$$

siis operaatori A pidevuse kontrollimisel lähtudes teoreemist kinnisest graafikust võime selle implikatsiooni tõestamisel täiendavalt eeldada, et jada (Ax_n) koondub ruumis Y, mis muudab sageli asja oluliselt lihtsamaks.

Teoreemi 3.1 kinnisest graafikust tõestus. Olgu operaatori A graafik $\operatorname{gr} A$ kinnine. Veendumaks, et A on pidev, piisab näidata, et ta on tõkestatud, s.t. leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral},$$

s.t. poolnorm $p(x) = \|Ax\|$, $x \in X$, on tõkestatud, milleks Zabreiko lemma põhjal piisab ruumi X täielikkuse tõttu näidata, et p on loenduvalt subaditiivne.

Olgu $\sum_{j=1}^\infty x_j$ koonduv rida ruumis X. Poolnormi p loenduvaks subaditiivsuseks piisab näidata, et

$$p\Big(\sum_{j=1}^\infty x_j\Big) \leqslant \sum_{j=1}^\infty p(x_j)$$

ehk

$$\Big\|A\sum_{j=1}^\infty x_j\Big\| \leqslant \sum_{j=1}^\infty \|Ax_j\|. \tag{3.2}$$

Kui $\sum_{j=1}^{\infty}\|Ax_j\| = \infty$, siis see võrratus kehtib triviaalselt. Jääb vaadelda juhtu, kus $\sum_{j=1}^{\infty}\|Ax_j\| < \infty$. Sellisel juhul rida $\sum_{j=1}^{\infty} Ax_j$ koondub ruumis Y (sest normeeritud ruum on täielik parajasti siis, kui temas iga absoluutselt koonduv rida koondub). Võrratuse (3.2) kehtivuseks piisab nüüd näidata, et

$$A\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} Ax_j. \tag{3.3}$$

Tõepoolest, võrduse (3.3) kehtides kehtib kolmnurga võrratuse põhjal ka (3.2):

$$\Big\|A\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\| = \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} Ax_j\Big\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\|Ax_j\|.$$

Võrduse (3.3) tõestuseks märgime, et

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } X} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \qquad \text{ja} \qquad A\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} Ax_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ruumis } Y} \sum_{j=1}^{\infty} Ax_j$$

ehk

$$\operatorname{gr} A \ni \left(\sum_{j=1}^{n} x_j, A\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=1}^{\infty} Ax_j\right) \quad \text{ruumis } X\times Y,$$

millest graafiku $\operatorname{gr} A$ kinnisuse tõttu $\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=1}^{\infty} Ax_j\right) \in \operatorname{gr} A$, s.t. $A\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} Ax_j$, nagu soovitud. □

3.3. Pidevad lineaarsed projektorid Banachi ruumides

Olgu X vektorruum.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et lineaarne operaator $P\colon X\to X$ on *projektor,* kui $P^2 = P$, s.t.

$$P(Px) = Px \quad \text{iga } x\in X \text{ korral.}$$

Olgu $P\colon X\to X$ on lineaarne projektor. Tähistame

$$\operatorname{ran} P := \big\{Px\in X\colon\ x\in X\big\} \quad \text{ja} \quad \ker P := \big\{x\in X\colon\ Px = 0\big\},$$

s.t. $\operatorname{ran} P$ ja $\ker P$ on vastavalt projektori P kujutisruum ja tuum.

Ülesanne 3.7. Tõestada, et $y\in \operatorname{ran} P$ parajasti siis, kui $Py = y$.

Ruum X on projektori P kujutisruumi ja tuuma otsesumma: $X = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$, s.t. iga $x\in X$ korral leiduvad üheselt määratud $y\in \operatorname{ran} P$ ja $z\in \ker P$ nii, et $x = y+z$.

Ülesanne 3.8. Veenduda selles.

Ülesanne 3.9. Tõestada, et kui $P\colon X\to X$ on lineaarne projektor, siis ka $I-P\colon X\to X$ on projektor, kusjuures $\operatorname{ran}(I-P) = \ker P$ ja $\ker(I-P) = \operatorname{ran} P$.

Teiselt poolt, kui mingite alamruumide $Y, Z\subset X$ korral $X = Y\oplus Z$, siis, defineerides $x = y+z$, $y\in Y$, $z\in Z$, korral $Px = y$, on P lineaarne projektor, kusjuures $Y = \operatorname{ran} P$ ja $Z = \ker P$.

Ülesanne 3.10. Veenduda selles.

Olgu nüüd X normeeritud ruum. Kui $P \in \mathcal{L}(X, X)$ on projektor, siis

(a) kui $P \neq 0$, siis $\|P\| \geqslant 1$;

(b) $\operatorname{ran} P$ ja $\ker P$ on kinnised.

Ülesanne 3.11. Veenduda selles.

Teiselt poolt, kui X on Banachi ruum ja tema kinnised alamruumid Y ja Z on sellised, et $X = Y \oplus Z$, siis, defineerides $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$, korral $Px = y$, on P pidev lineaarne projektor (kusjuures $Y = \operatorname{ran} P$ ja $Z = \ker P$).

Ülesanne 3.12. Tõestada, et P on pidev.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi kinnisest graafikust.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 3.13. Tõestada, et võrdusega (3.1) defineeritud norm ruumis $X \times Y$ on iga $p \in [1, \infty)$ korral ekvivalentne normiga $\|\cdot\|_p$, kus

$$\|(x, y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada fakti, et lõplikumõõtmelises vektorruumis on kõik normid paarikaupa ekvivalentsed.

Ülesanne 3.14. Tõestada, et mittepideva lineaarse operaatori (diferentseerimisoperaatori)

$$\mathcal{D}\colon \tilde{C}^1[a, b] \to C[a, b], \qquad (\mathcal{D}x)(t) = x'(t), \quad t \in [a, b], \qquad x \in \tilde{C}^1[a, b],$$

(kus $\tilde{C}^1[a, b]$ on ruumi $C[a, b]$ normiga varustatud ruum $C^1[a, b]$) graafik on kinnine.

Ülesanne 3.15. Tõestada Banachi teoreem 2.1 pöördoperaatorist, tuginedes teoreemile 3.1 kinnisest graafikust.

Ülesanne 3.16. Tõestada teoreem 3.1 kinnisest graafikust, tuginedes Banachi teoreemile 2.1 pöördoperaatorist.

NÄPUNÄIDE. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kinnise graafikuga lineaarse operaatori $A\colon X \to Y$ korral vaadelda operaatorit $\operatorname{gr} A \ni (x, Ax) \longmapsto x \in X$.

Ülesanne 3.17. Olgu X ja Y *BK-ruumid,* s.t. niisugused arvjadade Banachi ruumid, milles koonduvusest järeldub koordinaaditi koonduvus. Tuginedes teoreemile kinnisest graafikust, tõestada, et kui $X \subset Y$, siis formaalne ühikoperaator $I\colon X \to Y$, $Ix = x$, $x \in X$, on pidev.

Ülesanne 3.18. Olgu X normeeritud ruum ning olgu $p \in [1, \infty)$. Saab näidata, et ruumi X elementide *nõrgalt p-summeeruvate jadade* vektorruum

$$\ell_p^w(X) := \ell_p^{weak}(X) := \left\{(x_j) = (x_j)_{j=1}^{\infty} \colon x_j \in X,\, j \in \mathbb{N},\, \sum_{j=1}^{\infty} |x^*(x_j)|^p < \infty \text{ iga } x^* \in X^* \text{ korral}\right\}$$

on normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p^w$ suhtes, kus

$$\|(x_j)\|_p^w = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (x_j) \in \ell_p^w(X),$$

Kui seejuures X on Banachi ruum, siis ka $\ell_p^w(X)$ on Banachi ruum.

Tõestada, et "sup" normi $\|\cdot\|_p^w$ definitsioonis on lõplik, s.t.

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x^*(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{iga } (x_j) \in \ell_p^w(X) \text{ korral.}$$

Näpunäide. Fikseerides vabalt $x = (x_j) \in \ell_p^w(X)$, näidata, kasutades teoreemi kinnisest graafikust, et kujutus

$$X^* \ni x^* \longmapsto \big(x^*(x_j)\big)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$$

on pidev. Seejuures kasutada fakti, et koonduvusest ruumis ℓ_p järeldub koordinaaditi koonduvus.

Ülesanne 3.19. Olgu Y normeeritud ruum ning olgu $q \in [1,\infty)$. Saab näidata, et ruumi Y elementide *tugevalt q-summeeruvate jadade* vektorruum

$$\ell_q(Y) := \left\{(y_j) = (y_j)_{j=1}^{\infty} \colon\ y_j \in Y, j \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^q < \infty\right\}$$

on normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_q$ suhtes, kus

$$\|(y_j)\|_q = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (y_j) \in \ell_q(Y).$$

Kui seejuures Y on Banachi ruum, siis ka $\ell_q(Y)$ on Banachi ruum.

Olgu nüüd X samuti normeeritud ruum ning olgu $p \in [1,\infty)$. Öeldakse, et pidev lineaarne operaator $T\colon\ X \to Y$ on *(q,p)-summeeriv,* kui ta teisendab nõrgalt p-summeeruvad jadad ruumis X tugevalt q-summeeruvateks jadadeks ruumis Y, s.t. iga $(x_j) \in \ell_p^w(X)$ korral $(Tx_j) \in \ell_q(Y)$. Niisugusel juhul on määratud lineaarne operaator

$$\widehat{T}\colon\ \ell_p^w(X) \ni (x_j) \longmapsto (Tx_j) \in \ell_q(Y).$$

Tõestada, et kui X ja Y on Banachi ruumid, siis operaator $\widehat{T}$ on pidev.

Näpunäide. Kasutada teoreemi kinnisest graafikust ja fakti, et koonduvusest ruumides $\ell_p^w(X)$ ja $\ell_q(Y)$ järeldub koordinaaditi koonduvus.

Ülesanne 3.20. Olgu (Ω,Σ,μ) mõõduga ruum ning olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ \Omega \to X$ on *nõrgalt integreeruv,* kui iga $x^* \in X^*$ korral $x^*f \in L_1(\mu)$, s.t. $x^*f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ on mõõtuv funktsioon, mille korral $\int |x^*f|\,d\mu < \infty$. Tõestada, et iga nõrgalt integreeruva funktsiooni $f\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ korral

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} \int |x^*f|\,d\mu < \infty.$$

Näpunäide. Toetudes teoreemile kinnisest graafikust, veenduda, et fikseeritud nõrgalt integreeruva funktsiooni $f\colon\ \Omega \to \mathbb{K}$ korral (lineaarne) operaator

$$X^* \ni x^* \longmapsto x^*f \in L_1(\mu) \tag{3.4}$$

on pidev.

Ülesanne 3.21. Tõestada ülesande 3.20 väide toetudes Zabreiko lemmale.

Näpunäide. Ülesande 3.20 näpunäite operaatori (3.4) pidevuseks piisab näidata, et poolnorm $p(x^*) = \int |x^*f|\,d\mu$, $x^* \in X^*$, on tõkestatud.

§ 4. Ühtlase tõkestatuse printsiip

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 4.1. Öeldakse, et jada $(A_n) = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ on *normi järgi tõkestatud* ehk *ühtlaselt tõkestatud,* kui leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|A_n\| \leqslant M \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Teisisõnu, jada (A_n) normi järgi tõkestatus tähendab, et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Jada (A_n) normi järgi tõkestatus tähendab niisiis selle jada liikmete hulga tõkestatust ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definitsioon 4.2. Öeldakse, et jada (A_n) on punktiviisi tõkestatud, kui iga $x \in X$ korral on $(A_n x)$ tõkestatud jada ruumis Y, s.t. iga $x \in X$ korral leidub arv $M_x \geqslant 0$ nii, et

$$\|A_n x\| \leqslant M_x \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral}$$

Jada (A_n) punktiviisi tõkestatus tähendab niisiis, et iga $x \in X$ korral on $(A_n x)$ tõkestatud jada ruumis Y.

Ülesanne 4.1. Tõestada, et kui jada (A_n) on normi järgi tõkestatud, siis ta on ka punktiviisi tõkestatud.

Punktiviisi tõkestatud operaatorite jada ei ole üldjuhul normi järgi tõkestatud.

Ülesanne 4.2. Vaatleme funktsionaale

$$f_n \colon c_{00} \ni (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \xi_j \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tõestada, et

(a) $f_n \in c_{00}^*$, $n \in \mathbb{N}$ (s.t. funktsionaalid f_n on pidevad ja lineaarsed);

(b) jada (f_n) on punktiviisi tõkestatud;

(c) jada (f_n) pole normi järgi tõkestatud.

Teoreem 4.1 ((Banach–Steinhausi) ühtlase tõkestatuse printsiip)**.** *Olgu X Banachi ruum, olgu Y normeeritud ruum ning olgu $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Kui jada (A_n) on punktiviisi tõkestatud, siis ta on ka normi järgi tõkestatud.*

Esitame teoreemile 4.1 kaks erinevat tõestust.

Teoreemi 4.1 tõestus, mis toetub Zabreiko lemmale. Olgu jada (A_n) punktiviisi tõkestatud. Selle jada normi järgi tõkestatuseks peame näitama, et leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|A_n\| \leqslant M \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

s.t.

$$\|A_n x\| \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ ja iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

s.t.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral}$$

ehk, teisisõnu, poolnorm $p(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|$, $x \in X$, on tõkestatud.

Ülesanne 4.3. Veenduda, et p on poolnorm. (Märgime, et tänu jada (A_n) punktiviisi tõkestatusele on $p(x)$ iga $x \in X$ korral lõplik.)

Kuna X on Banachi ruum, siis Zabreiko teoreemi põhjal piisab poolnormi p tõkestatuseks näidata, et ta on loenduvalt subaditiivne, s.t. mis tahes koonduva rea $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ korral ruumis X

$$p\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p(x_j)$$

ehk

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| A_n \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x_j\|.$$

Olgu $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ koonduv rida ruumis X. Siis

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| A_n \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A_n x_j \right\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} \|A_n x_j\| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x_j\|,$$

nagu soovitud. □

Teoreemi 4.1 tõestus, mis toetub vahetult Baire'i teoreemile. Ülesande 1.8 põhjal piisab eelneva tõestuse poolnormi p tõkestatuseks näidata, et ta on tõkestatud mingis keras (s.t. leiduvad kera B ruumis X ja $M \geqslant 0$ nii, et $p(x) \leqslant M$ iga $x \in B$ korral). Selleks tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$B_j := \{x \in X\colon\ p(x) \leqslant j\}.$$

Kuna $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ ja ruum X on täielik, siis piisab teoreemi tõestuseks veenduda, et hulgad B_j, $j \in \mathbb{N}$, on kinnised, sest niisugusel juhul sisaldaks mingi B_j Baire'i teoreemi põhjal mingi kera B, aga siit järelduks, et $p(x) \leqslant j$ iga $x \in B$ korral, s.t. p oleks tõkestatud keras B.

Ülesanne 4.4. Tõestada, et hulgad B_j, $j \in \mathbb{N}$, on kinnised.

□

§ 5. Punktiviisi koonduvuse mõttes piiroperaatori pidevus

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 5.1. Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$, siis öeldakse, et jada $(A_n) = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ *koondub punktiviisi.* Sel juhul on defineeritud operaator

$$A\colon X \ni x \longmapsto \lim_{n\to\infty} A_n x \in Y,$$

mida nimetatakse jada (A_n) *piiroperaatoriks (punktiviisi koonduvuse mõttes).*

Kui seejuures operaatorid A_n, $n \in \mathbb{N}$, on lineaarsed, siis ka piiroperaator A on lineaarne.

Ülesanne 5.1. Veenduda selles.

Üldiselt—isegi siis, kui $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$—ei tarvitse piiroperaator A olla pidev.

Ülesanne 5.2. Vaatleme ülesande 4.2 funktsionaale

$$f_n\colon c_{00} \ni (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \xi_j \ni \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tõestada, et

(a) jada (f_n) koondub punktiviisi;

(b) jada (f_n) piirfunktsionaal (punktiviisi koonduvuse mõttes) ei ole pidev.

Teoreem 5.1. *Olgu X Banachi ruum, olgu Y normeeritud ruum ning olgu $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$, siis (punktiviisi koonduvuse mõttes) piiroperaator*

$$A\colon X \ni x \longmapsto \lim_{n\to\infty} A_n x \in Y$$

on pidev.

TÕESTUS. Piiroperaatori A lineaarsuse tõttu piisab tema pidevuseks näidata, et ta on tõkestatud, s.t. leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Jada (A_n) punktiviisi koonduvuse tõttu iga $x \in X$ korral jada $(A_n x)$ koondub ruumis Y, seega jada $(A_n x)$ on ka tõkestatud (sest koonduv jada on tõkestatud). Niisiis on jada (A_n) punktiviisi tõkestatud. Kuna X on Banachi ruum, siis ühtlase tõkestatuse printsiibi põhjal on jada (A_n) ka normi järgi tõkestatud, s.t. leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$\|A_n\| \leqslant M \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Aga nüüd iga $x \in X$ korral

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|\,\|x\| \leqslant M\,\|x\|.$$

$\square$

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 5.3. Olgu $p \in [1, \infty)$ ning olgu operaatorid $P_n \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_p)$, $n \in \mathbb{N}$, defineeritud võrdustega

$$P_n(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_n}_{n}, 0, 0, \dots), \quad (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_p, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Tõestada, et $P_n \to I$ punktiviisi, kuid mitte normi järgi.

Ülesanne 5.4. Olgu operaatorid $P_n \in \mathcal{L}(c_0, \ell_1)$, $n \in \mathbb{N}$, defineeritud sama võrdusega nagu ülesandes 5.3. Arvutada $\|P_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (P_n) koondub punktiviisi?

Ülesanne 5.5. Olgu operaatorid $P_n \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_1)$, $n \in \mathbb{N}$, defineeritud sama võrdusega nagu ülesandes 5.3. Arvutada $\|P_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Kas jada (P_n) koondub punktiviisi?

Ülesanne 5.6. Olgu X ja Y normeeritud ruumid, olgu $x_n, x \in X$, $x_n \to x$, ning olgu $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et $A_n x_n \to Ax$,

(a) kui $A_n \to A$ normi järgi;

(b) kui $A_n \to A$ punktiviisi ja ruum X on täielik.

Ülesanne 5.7. Tõestada, et Banachi ruumides tegutsevate operaatorite korrutamine on pidev punktiviisi koonduvuse mõttes, s.t. kui X, Y ja Z on Banachi ruumid, $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B_n, B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $n \in \mathbb{N}$, ning $A_n \to A$ ja $B_n \to B$ punktiviisi, siis $B_n A_n \to BA$ punktiviisi.

Ülesanne 5.8. Tõestada, et kui arvjada $(\alpha_j) = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ korral

$$(\xi_j) \in c_0 \quad \Longrightarrow \quad (\alpha_j \xi_j) \in c_0,$$

siis $(\alpha_j) \in \ell_\infty$.

NÄPUNÄIDE. Vaadelda operaatoreid

$$A_n\colon\ c_0 \ni (\xi_j) \longmapsto (\alpha_1 \xi_1, \dots, \alpha_n \xi_n, 0, 0, \dots) \in c_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ülesanne 5.9. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A, A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $A_n \to A$ punktiviisi. Tõestada, et

$$\|A\| \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|A_n\|.$$

§ 6. Banach-Steinhausi teoreem

6.1. Banach-Steinhausi teoreemid

Meenutame, et vektorruumi X alamhulga E *lineaarseks katteks* $\operatorname{span} E$ nimetatakse vähimat ruumi X alamruumi, mis sisaldab hulka E. On ilmne, et kui $E \neq \varnothing$, siis $\operatorname{span} E$ on hulga E elementide kõikvõimalike lineaarkombinatsioonide hulk, s.t.

$$\operatorname{span} E := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \colon\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ x_1, \ldots, x_n \in E \right\}.$$

Definitsioon 6.1. Öeldakse, et normeeritud ruumi X alamhulk E on *totaalne* (ruumis X), kui tema lineaarse katte sulund on X, s.t.

$$\overline{\operatorname{span} E} = X$$

Normeeritud ruumi totaalseid alamhulki nimetatakse ka *põhihulkadeks* (selles ruumis).

Teoreem 6.1 (Banach–Steinhausi teoreem)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, olgu E põhihulk ruumis X ning olgu $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Jada (A_n) koondub punktiviisi ruumis X parajasti siis, kui kehtivad järgmised kaks tingimust:*

(1) *leidub $M \geqslant 0$ nii, et $\|A_n\| \leqslant M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral;*

(2) *piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$ eksisteerib iga $x \in E$ korral.*

Ülesanne 6.1. Tõestada, kui kehtib teoreemi 6.1 tingimus (2), siis piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$ eksisteerib iga $x \in \operatorname{span} E$ korral.

Banach–Steinhausi teoreemi 6.1 tõestus. *Tarvilikkus.*

Ülesanne 6.2. Tõestada tarvilikkus teoreemis 6.1.

Näpunäide. Tingimuse (1) kontrollimisel kasutada ühtlase tõkestatuse printsiipi.

Piisavus. Kehtigu tingimused (1) ja (2) ning olgu $x \in X$ suvaline. Peame näitame, et jada $(A_n x)$ koondub ruumis Y, milleks ruumis Y täielikkuse tõttu piisab näidata, et ta on Cauchy jada, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon.$$

Selleks, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, paneme tähele, et kõikide $n, m \in \mathbb{N}$ ja $z \in \operatorname{span} E$ korral

$$\begin{aligned} \|A_n x - A_m x\| &\leqslant \|A_n x - A_n z\| + \|A_n z - A_m z\| + \|A_m z - A_m x\| \\ &\leqslant \|A_n\|\,\|x - z\| + \|A_n z - A_m z\| + \|A_m\|\,\|z - x\| \\ &\leqslant 2M\,\|x - z\| + \|A_n z - A_m z\|. \end{aligned}$$

Kuna E on ruumi X põhihulk, siis leidub $z \in \operatorname{span} E$ nii, et

$$M \|x - z\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna eelduse (2) põhjal jada $(A_n z)$ koondub (vt. ülesannet 6.1), siis ta on Cauchy jada, seega leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|A_n z - A_m z\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nüüd $n, m \geqslant N$ korral

$$\|A_n x - A_m x\| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Teoreem 6.2 (Banach–Steinhausi teoreem)**.** *Olgu X Banachi ruum, olgu Y normeeritud ruum, olgu E põhihulk ruumis X ning olgu $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Jada (A_n) koondub punktiviisi operaatoriks A ruumis X parajasti siis, kui kehtivad järgmised kaks tingimust:*

(1) *leidub $M \geqslant 0$ nii, et $\|A_n\| \leqslant M$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral;*

(2) *$A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ iga $x \in E$ korral.*

Ülesanne 6.3. Tõestada, kui kehtib teoreemi 6.2 tingimus (2), siis $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ iga $x \in \operatorname{span} E$ korral.

BANACH–STEINHAUSI TEOREEMI 6.2 TÕESTUS. *Tarvilikkus.*

Ülesanne 6.4. Tõestada tarvilikkus teoreemis 6.2.

NÄPUNÄIDE. Tingimuse (1) kontrollimisel kasutada ühtlase tõkestatuse printsiipi.

Piisavus. Kehtigu tingimused (1) ja (2) ning olgu $x \in X$ suvaline. Peame näitama, et $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$, s.t. iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|A_n x - Ax\| < \varepsilon.$$

Selleks, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, paneme tähele, et kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $z \in \operatorname{span} E$ korral

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\| &\leqslant \|A_n x - A_n z\| + \|A_n z - Az\| + \|Az - Ax\| \\ &\leqslant \|A_n\| \, \|x - z\| + \|A_n z - Az\| + \|A\| \, \|z - x\| \\ &\leqslant M \|x - z\| + \|A_n z - Az\| + \|A\| \, \|z - x\|.\end{aligned}$$

Kuna E on ruumi X põhihulk, siis leidub $z \in \operatorname{span} E$ nii, et

$$M \|x - z\| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{ja} \qquad \|A\| \, \|z - x\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna eelduse (2) põhjal $A_n z \xrightarrow[n\to\infty]{} Az$ (vt. ülesannet 6.3), siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|A_n z - Az\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nüüd $n \geqslant N$ korral

$$\|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

6.2. Põhihulki Banachi ruumides

Teame, et iga $x = (\xi_j) = (\xi_j)_{j=1}^\infty$ korral ruumist ℓ_p ($p \in [1, \infty)$) või c_0

$$x = \sum_{j=1}^\infty \xi_j e_j \qquad \text{(vastavalt ruumis } \ell_p \text{ või } c_0\text{);}$$

iga $x = (\xi_j) \in c$ korral aga

$$x = \xi e + \sum_{j=1}^\infty (\xi_j - \xi) e_j \quad (\xi = \lim_{j\to\infty} \xi_j),$$

kus $e := (1, 1, 1, \ldots)$ ning iga $j \in \mathbb{N}$ korral $e_j := (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots)$. Siit järeldub, et

- hulk $\{e_j \colon\ j \in \mathbb{N}\}$ on põhihulk ruumides ℓ_p ($p \in [1, \infty)$) ja c_0;
- hulk $\{e, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ on põhihulk ruumis c.

Weierstrassi teoreemi põhjal saab iga lõigus $[a, b]$ pidevat funktsiooni lähendada selles lõigus polünoomiga ühtlaselt kui tahes täpselt. Siit järeldub, et

- monoomide (üksliikmete) hulk $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$ on põhihulk ruumis $C[a, b]$.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 6.5. Tõestada Banach–Steinhausi teoreemi abil, et koonduva arvjada $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ aritmeetiliste keskmiste jada $(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n})_{n=1}^\infty$ koondub ning

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = \lim_n \xi_n.$$

Ülesanne 6.6. Olgu operaatorid $A_n \colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, defineeritud võrdustega

$$A_n x\,(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}}), \quad t \in [0, 1], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Näidata, et iga funktsiooni $x \in C[0, 1]$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} A_n x$ ruumis $C[0, 1]$. Leida operaatorite jada (A_n) piiroperaator punktiviisi koonduvuse mõttes. Kas jada (A_n) koondub normi järgi?

§ 7. Üldisi fakte operaatorite laiendamise kohta

Olgu X ja Y mingid mittetühjad hulgad ning olgu X_0 hulga X mittetühi alamhulk.

Definitsioon 7.1. Öeldakse, et kujutus $T\colon X \to Y$ on kujutuse $T_0\colon X_0 \to Y$ *jätk* (ehk *laiend*) (hulgale X), kui

$$Tx = T_0 x \quad \text{iga } x \in X_0 \text{ korral.}$$

Sel juhul öeldakse ka, et kujutus T_0 on kujutuse T *ahend* alamhulgale X_0 ja kirjutatakse $T|_{X_0} = T_0$.

Konkreetsemalt, kui sellised X_0, X ja Y on normeeritud ruumid ja $T_0\colon X_0 \to Y$ on pidev lineaarne operaator, siis üldjuhul ei tarvitse operaatoril T_0 leiduda pidevat lineaarset jätku ruumile X. (Kõige tavalisem näide sellisest olukorrast on juht, kus $X_0 = Y = c_0$, $X = \ell_\infty$ ja $T_0 = I_{c_0}$ on ruumi c_0 ühikoperaator, vt. nt. [R.E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* 1998; järeldus 3.2.21]. Kui selline pidev lineaarne jätk T on olemas, siis

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| \geqslant \sup_{x\in B_{X_0}} \|Tx\| = \sup_{x\in B_{X_0}} \|T_0 x\| = \|T_0\|,$$

s.t. operaatori jätkamisel tema norm ei kahane. Seejuures, isegi siis, kui operaatoril T_0 leidub pidev lineaarne jätk ruumile X, võib juhtuda, et tema iga jätku $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ korral $\|T\| > \|T_0\|$, s.t. operaatorit T_0 pole võimalik jätkata normi säilides. (Kõige tavalisem näide sellisest olukorrast on juht, kus $X_0 = Y = c_0$, $X = c$ ja $T_0 = I_{c_0}$ on ruumi c_0 ühikoperaator: kui $T \in \mathcal{L}(c, c_0)$ on selline, et $T|_{c_0} = I_{c_0}$, siis $\|T\| \geqslant 2 > 1 = \|I_{c_0}\|$; vt. ülesannet 7.2.)

Järgnevalt esitame kaks näidet olukordadest, kus pideva lineaarse operaatori pidev lineaarne jätkamine normi säilides on alati võimalik. Esimene neist on juht, kus sihtruum Y on Banachi ruum, s.t. Y on täielik, ning alamruum X_0 on kõikjal tihe ruumis X, s.t. $\overline{X_0} = X$.

Teoreem 7.1. *Olgu X normeeritud ruum, olgu Y Banachi ruum ning olgu X_0 ruumi X kõikjal tihe alamruum. Siis igal operaatoril $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ eksisteerib parajasti üks pidev jätk $T\colon X \to Y$. See jätk on lineaarne, s.t. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; seejuures $\|T\| = \|T_0\|$.*

Tõestus. Olgu $T_0 \in \mathcal{L}(X_0, Y)$. Kui $T\colon X \to Y$ oleks operaatori T_0 pidev jätk, siis mis tahes $x \in X$ korral, valides $x_n \in X_0$ nii, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ (niisugune jada (x_n) leidub, sest alamruum X_0 on kõikjal tihe ruumis X), peaks kehtima

$$Tx = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n.$$

Siit järeldub, et operaatoril T_0 eksisteerib ülimalt üks pidev jätk $X \to Y$. Veendume niisuguse pideva jätku olemasolus.

Olgu $x \in X$ ning olgu $x_n \in X_0$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Kuna koonduv jada (x_n) on Cauchy jada, siis ka $(T_0 x_n)$ on Cauchy jada (ruumis Y), sest

$$\|T_0 x_n - T_0 x_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \leqslant \|T_0\|\,\|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Ruumi Y täielikkuse tõttu eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} T_0 x_n$ ruumis Y. Seejuures mis tahes alamruumi X_0 elementide jada (z_n) korral, mille puhul $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, kehtib $\lim_{n\to\infty} T_0 z_n = \lim_{n\to\infty} T_0 x_n$, sest

$$\begin{aligned}\|T_0 z_n - T_0 x_n\| &\leqslant \|T_0\|\,\|z_n - x_n\| \\ &= \|T_0\|\,\|z_n - x + x - x_n\| \leqslant \|T_0\|\big(\|z_n - x\| + \|x - x_n\|\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Seega on operaator

$$T\colon\ X \ni x \longmapsto \lim_{n\to\infty} T_0 x_n \in Y \qquad (x_n \in X_0, n \in \mathbb{N},\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x)$$

korrektselt defineeritud. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, kusjuures $\|T\| = \|T_0\|$.

Ülesanne 7.1. Tõestada, et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, kusjuures $T|_{X_0} = T_0$ ja $\|T\| = \|T_0\|$.

□

Teine näide olukorrast, kus pideva lineaarse operaatori pidev lineaarne jätkamine normi säilides on alati võimalik, on juht, kus operaatori sihtruum on arvude ruum $\mathbb{K}$, s.t. operaatorid on pidevad lineaarsed funktsionaalid.

Teoreem 7.2 (Hahn–Banachi teoreem)**.** *Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum ning olgu $g \in X_0^*$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$f|_{X_0} = g \quad \textit{ja} \quad \|f\| = \|g\|.$$

Hahn–Banachi teoreemi tõestuse esitame paragrahvis 9.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 7.2. Tõestada, et

(a) ühikoperaatori $I\colon c_0 \to c_0$ iga lineaarne jätk $A\colon\ c \to c_0$ on pidev, s.t. $A \in \mathcal{L}(c, c_0)$;

(b) ühikoperaatori $I\colon c_0 \to c_0$ iga jätku $A \in \mathcal{L}(c, c_0)$ korral $\|A\| \geqslant 2$;

(c) ühikoperaatoril $I\colon c_0 \to c_0$ leidub jätk $A \in \mathcal{L}(c, c_0)$, mille norm $\|A\| = 2$;

(d) ühikoperaatoril $I\colon c_0 \to c_0$ leidub iga $\alpha \geqslant 2$ korral jätk $A \in \mathcal{L}(c, c_0)$, mille norm $\|A\| = \alpha$.

Ülesanne 7.3. Olgu X normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X alamruum, olgu Y normeeritud ruum, olgu $A \in \mathcal{L}(X_0, Y)$ ning olgu $x \in X \backslash \overline{X_0}$. Tähistame $X_1 := \operatorname{span}\big(X_0 \cup \{x\}\big)$. Olgu $y \in Y$. Defineerime kujutuse

$$B\colon\ X_1 \ni u + \alpha x \longmapsto Au + \alpha y \in Y \quad (u \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Tõestada, et $B \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, kusjuures $B|_{X_0} = A$.

Ülesanne 7.4. Olgu X normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X alamruum ning olgu $x \in X \backslash \overline{X_0}$. Tõestada, et $\overline{\operatorname{span}\big(X_0 \cup \{x\}\big)} = \overline{X_0} \oplus \operatorname{span}\{x\}$.

§ 8. Kaasruumide kirjeldusi

Meenutame, et normeeritud ruumi X kaasruum $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ (pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ ruum) on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|f\| := \sup_{x \in B_X} |f(x)| = \min\{M \geqslant 0\colon\ |f(x)| \leqslant M\|x\| \text{ iga } x \in X \text{ korral}\}, \quad f \in X^*.$$

Veelgi enam, X^* on alati Banachi ruum.

Definitsioon 8.1. Olgu X ja Y normeeritud ruumid (üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$). Lineaarset sürjektsiooni $T\colon\ X \to Y$ nimetatakse *isomeetriliseks isomorfismiks,* kui

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.} \tag{8.1}$$

Kui leidub isomeetriline isomorfism $X \to Y$, siis öeldakse, et ruumid X ja Y on *isomeetriliselt isomorfsed* ning kirjutatakse $X \cong Y$.

Isomeetriline isomorfism on ilmselt isomorfism, sest tingimust (8.1) rahuldav lineaarne operaator $T\colon\ X \to Y$ on injektsioon.

Ülesanne 8.1. Veenduda, et tingimust (8.1) rahuldav lineaarne operaator $T\colon\ X \to Y$ on injektsioon.

Selles paragrahvis me kirjeldame mitme meile tuntud klassikalise Banachi ruumi kaasruumi: me näitame, et need kaasruumid on isomeetrilised isomorfsed meile samuti tuntud Banachi ruumidega.

Kõikjal selles paragrahvis tähistame

$$e := (1, 1, 1, \ldots)$$

ning iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$e_j := (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots).$$

Arvu $\alpha \in \mathbb{K}$ *märgi* $\operatorname{sgn} \alpha$ defineerime võrratusega

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|\alpha|}, & \text{kui } \alpha \neq 0; \\ \quad 1 & \text{kui } \alpha = 0. \end{cases}$$

Märgime, et sel juhul $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn} \alpha$.

Teoreem 8.1. *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $p, q \in [1, \infty]$ kaaseksponendid (s.t. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)*[1]. *Siis kujutus $T\colon\ \ell_q^n \to (\ell_p^n)^*$,*

$$(Ta)(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \xi_j, \qquad x = (\xi_j)_{j=1}^n \in \ell_p^n, \quad a = (\alpha_j)_{j=1}^n \in \ell_q^n,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $(\ell_p^n)^* \cong \ell_q^n$.

[1] $p = 1$ kaaseksponent on $q = \infty$ ning $p = \infty$ kaaseksponent on $q = 1$

TÕESTUS.

Ülesanne 8.2. Tõestada teoreem 8.1.

□

Teoreem 8.2. *Kujutus* $T\colon\ \ell_\infty \to \ell_1^*$,

$$(Ta)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \xi_j, \qquad x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1, \quad a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $\ell_1^* \cong \ell_\infty$.

TÕESTUS. Veendume kõigepealt operaatori T definitsiooni korrektsuses, s.t. näitame, et iga $a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ korral

(a) rida $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \xi_j$ koondub iga $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ korral;

(b) $Ta \in \ell_1^*$, s.t. Ta on pidev ja lineaarne.

Olgu $a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$.

(a). Olgu $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$. Rea $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \xi_j$ koonduvuseks piisab näidata, et see rida koondub absoluutselt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j\, \xi_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|\, |\xi_j| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|a\|\, |\xi_j| = \|a\| \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| = \|a\|\, \|x\|. \tag{8.2}$$

(b). Vahetult on kontrollitav, et Ta on lineaarne.

Ülesanne 8.3. Veenduda, et Ta on lineaarne.

Funktsionaali Ta pidevuseks piisab nüüd näidata, et Ta on tõkestatud: iga $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ korral (8.2) põhjal

$$|(Ta)(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \xi_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j\, \xi_j| \leqslant \|a\|\, \|x\|.$$

Muuhulgas järeldub siit, et

$$\|Ta\| \leqslant \|a\| \quad \text{iga } a \in \ell_\infty \text{ korral.} \tag{8.3}$$

Edasi, vahetult on kontrollitav, et operaator T on lineaarne.

Ülesanne 8.4. Veenduda, et T on lineaarne.

Võrratusest (8.3) järeldub, et T on tõkestatud, niisiis $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_1^*)$. Teoreemi tõestuseks jääb nüüd näidata, et

(1) T on üksühene;

(2) T on pealekujutus;

(3) T on isomeetriline.

Märkus 8.1. Üldiselt, isomeetriline lineaarkujutus on üksühene. Antud konkreetsel juhul on vaja T üksühesust eraldi kontrollida sellepärast, et tema isomeetrilisuse tõestus tugineb üksühesusele.

(1). Olgu $a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, $b = (\beta)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$, $a \neq b$. Veendumaks operaatori T üksühesuses, piisab näidata, et $Ta \neq Tb$, s.t. mingi $x \in \ell_1$ korral $(Ta)(x) \neq (Tb)(x)$. Kuna $a \neq b$, siis mingi $k \in \mathbb{N}$ korral $\alpha_k \neq \beta_k$. Nüüd

$$(Ta)(e_k) = \alpha_k 1 = \alpha_k \neq \beta_k = \beta_k 1 = (Tb)(e_k).$$

Märkus 8.2. Teine võimalus operaatori T üksühesuse tõestamiseks on näidata, et kui $Ta = 0$, siis $a = 0$. Näitame seda: olgu $a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ selline, et $Ta = 0$, s.t. $(Ta)(x) = 0$ iga $x \in \ell_1$ korral. Siis muuhulgas iga $j \in \mathbb{N}$ korral $0 = (Ta)(e_j) = \alpha_j 1 = \alpha_j$, s.t. $\alpha_j = 0$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral, aga see tähendabki, et $a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} = 0$.

(2). Olgu $f \in \ell_1^*$. Veendumaks, et T on pealekujutus, piisab leida $a \in \ell_{\infty}$ nii, et $Ta = f$. Selleks paneme tähele, et iga $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ korral $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$, seega

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} f(e_j) \xi_j. \tag{8.4}$$

Ülesanne 8.5. Tõestada, et iga $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ korral $x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j$.

Operaatori T sürjektiivsuseks piisab seega näidata, et $a := \big(f(e_j)\big)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ (sest sel juhul (8.4) põhjal iga $x \in \ell_1$ korral $f(x) = (Ta)(x)$, niisiis $Ta = f$). Selleks paneme tähele, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$|f(e_j)| \leqslant \|f\| \, \|e_j\| = \|f\|,$$

millest

$$\|a\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(e_j)| \leqslant \|f\| < \infty,$$

s.t. $a = \big(f(e_j)\big)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$, nagu soovitud. Arvestades, et nüüd $Ta = f$, oleme tänu operaatori T üksühesusele ühtlasi tõestanud, et

$$\|Ta\| \geqslant \|a\| \quad \text{iga } a \in \ell_{\infty} \text{ korral.} \tag{8.5}$$

(3). Kujutuse T isomeetrilisus tähendab, et iga $a \in \ell_{\infty}$ korral $\|Ta\| = \|a\|$. See järeldub võrratustest (8.3) ja (8.5). □

Teoreem 8.3. *Olgu $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid, s.t. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siis kujutus $T\colon \ell_q \to \ell_p^*$,*

$$(Ta)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j, \qquad x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p, \quad a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $\ell_p^* \cong \ell_q$.

TÕESTUS.

Ülesanne 8.6. Tõestada teoreem 8.3

□

Märkus 8.3. Teoreem 8.3 ütleb, et kui $p, q \in (1, \infty)$ on kaaseksponendid, siis $\ell_p^* \cong \ell_q$; teoreemi 8.2 põhjal samuti $\ell_1^* \cong \ell_\infty$. Samas $\ell_\infty^* \not\cong \ell_1$. Tõepoolest, ruum ℓ_1 on separaabel, kuid ruum ℓ_∞^* mitte (sest ℓ_∞ on mitteseparaabel ning ülesande 10.5 põhjal on mitteseparaabli ruumi kaasruum mitteseparaabel); kui üks isomorfsetest normeeritud ruumidest on separaabel, siis on seda ka teine; järelikult ei saa ruumid ℓ_1 ja ℓ_∞^* olla isomorfsed.

Teoreem 8.4. *Kujutus* $T\colon\ \ell_1 \to c_0^*$,

$$(Ta)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, \xi_j, \qquad x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0, \quad a = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $c_0^* \cong \ell_1$.

TÕESTUS.

Ülesanne 8.7. Tõestada teoreem 8.4

□

Teoreem 8.5. *Kujutus* $T\colon\ \ell_1 \to c^*$,

$$(Ta)(x) = \alpha_0 \, \xi + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, \xi_j, \qquad x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c, \quad \xi = \lim_{j\to\infty} \xi_j \quad a = (\alpha_j)_{j=0}^{\infty} \in \ell_1,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $c^* \cong \ell_1$.

TÕESTUS.

Ülesanne 8.8. Tõestada teoreem 8.5

□

Märkus 8.4. Ei ole raske tõestada (vt. märkust 12.1), et kui normeeritud ruumid X ja Y on isomeetriliselt isomorfsed, siis ka kaasruumid X^* ja Y^* on isomeetriliselt isomorfsed, s.t.

$$X \cong Y \quad \Longrightarrow \quad X^* \cong Y^*.$$

Vastupidine implikatsioon üldjuhul ei kehti: teoreemide 8.4 ja 8.5 põhjal $c_0^* \cong c^*$, kuid samas $c_0 \not\cong c$.

Teoreem 8.6. *Olgu* $p \in [1, \infty)$ *ja* $q \in (1, \infty]$ *kaaseksponendid (s.t.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*). Kujutus* $T\colon\ L_q(a, b) \to L_p(a, b)^*$,

$$(Tg)(f) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx, \qquad f \in L_p(a, b), \quad g \in L_q(a, b),$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $L_p(a, b)^* \cong L_q(a, b)$.

Märkus 8.5. Teoreemist 8.6 näeme, et kui $p, q \in (1, \infty)$ on kaaseksponendid, siis $L_p(a, b)^* \cong L_q(a, b)$; samuti $L_1(a, b)^* \cong L_\infty(a, b)$. Samas $L_\infty(a, b)^* \not\cong L_1(a, b)$ (sest ruum $L_1(a, b)$ on separaabel, kuid ülesande 10.5 põhjal on mitteseparaabli ruumi $L_\infty(a, b)$ kaasruum $L_\infty(a, b)^*$ mitteseparaabel; mitteseparaabel normeeritud ruum ei saa olla isomorfne separaabli ruumiga).

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 8.9. Olgu $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Tõestada, et $f \in \ell_\infty^*$ ja $\|f\| = \|a\|$, kui

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k, \quad x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty.$$

Ülesanne 8.10. Rahuldagu $p, q \in (1, \infty)$ tingimust $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Olgu $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q$. Ilma ruumi ℓ_p kaasruumi kirjeldavat teoreemi 8.3 kasutamata tõestada, et $f \in \ell_p^*$ ja $\|f\| = \|a\|$, kui

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k, \quad x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p.$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada Hölderi võrratust.

Ülesanne 8.11. Olgu $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Ilma ruumi c_0 kaasruumi kirjeldavat teoreemi 8.4 kasutamata tõestada, et $f \in c_0{}^*$ ja $\|f\| = \|a\|$, kui

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k, \quad x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in c_0.$$

Ülesanne 8.12. Toetudes kaasruume kirjeldavatele teoreemidele 8.2–8.5, tõestada, et

(a) leidub $f \in \ell_1^*$ nii, et iga $x \in B_{\ell_1}$ korral $|f(x)| < \|f\|$;

(b) kui $p \in (1, \infty)$, siis iga $f \in \ell_p^*$ korral leidub $x \in B_{\ell_p}$ nii, et $f(x) = \|f\|$;

(c) leidub $f \in c_0^*$ nii, et iga $x \in B_{c_0}$ korral $|f(x)| < \|f\|$;

(d) leidub $f \in c^*$ nii, et iga $x \in B_c$ korral $|f(x)| < \|f\|$.

Ülesanne 8.13. Tuginedes kaasruume kirjeldavale teoreemile 8.1, näidata, et $f \in X^*$ ja leida $\|f\|$, kui

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X,$$

ning

(a) $X = \ell_1^n$, (b) $X = \ell_\infty^n$, c) $X = \ell_2^n$.

Ülesanne 8.14. Tuginedes kaasruume kirjeldavatele teoreemidele 8.2–8.5, näidata, et $f \in X^*$ ning arvutada $\|f\|$, kui

(a) $X = \ell_1$, $\quad f(x) = \sum_{k=2}^\infty \frac{x_k}{k}$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$;

(b) $X = \ell_1$, $\quad f(x) = \sum_{k=1}^\infty \left(2 - \frac{1}{k}\right) x_k$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$;

(c) $X = \ell_1$, $\quad f(x) = \sum_{k=4}^\infty \left(1 - \frac{1}{2k}\right) x_k$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$;

(d) $X = c_0$, $\quad f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{3^k}$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$;

(e) $X = c$, $\quad f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{2^{k+1}}$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in c$;

(f) $X = \ell_2$, $\quad f(x) = \sum_{k=3}^\infty \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$;

(g) $X = \ell_2$, $\quad f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{\sqrt{k!}}$, $\quad x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$.

Ülesanne 8.15. Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Tuginedes kaasruume kirjeldavale teoreemile 8.6, tõestada, et $f \in L_p(a,b)^*$ ja leida $\|f\|$, kui

$$\text{(a)}\quad f(x) = \int_a^b x(t)\,dt;$$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \int_a^b t^2 x(t)\,dt.$$

Ülesanne 8.16. Tuginedes kaasruume kirjeldavale teoreemile 8.6, tõestada, et $f \in L_2(a,b)^*$ ja leida $\|f\|$, kui

$$\text{(a)}\quad a=-1,\quad b=1,\quad f(x) = \int_{-1}^1 t\,x(t)\,dt;$$

$$\text{(b)}\quad a=0,\quad b=1,\quad f(x) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,dt.$$

§ 9. Hahn–Banachi teoreem

Selles paragrahvis me tõestame Hahn–Banachi teoreemi (mille me sõnastasime juba paragrahvis 7):

Teoreem 9.1 (Hahn–Banachi teoreem)**.** *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum ning olgu $g \in Y^*$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$f|_Y = g \quad ja \quad \|f\| = \|g\|.$$

Hahn–Banachi teoreemi tõestus reaalse ruumi juhul toetub *lemmale elementaarsest jätkust* ja *Kuratowski–Zorni lemmale,* millele on pühendatud vastavalt selle paragrahvi esimene ja teine punkt.

9.1. Lemma elementaarsest jätkust

Lemma 9.2 (lemma elementaarsest jätkust)**.** *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X alamruum, olgu $f_0 \in X_0^*$ ning olgu $x \in X \backslash X_0$. Tähistame $X_1 := \operatorname{span}\big(X_0 \cup \{x\}\big)$. Siis leidub $f_1 \in X_1^*$ nii, et $f_1|_{X_0} = f_0$ ja $\|f_1\| = \|f_0\|$.*

TÕESTUS. Teame, et X_1 on ruumi X alamruum. Paneme tähele, et iga $z \in X_1$ korral leiduvad üheselt määratud $y \in X_0$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et $z = y + \alpha x$.

Ülesanne 9.1. Veenduda selles.

Lemma 9.2 tõestuse idee toetub järgmisele tähelepanekule: kui soovitud omadustega $f_1 \in X_1^*$ eksisteeriks, siis mis tahes $z = y + \alpha x \in X_1$ ($y \in X_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) korral

$$f_1(z) = f_1(y + \alpha x) = f_1(y) + \alpha f_1(x) = f_0(y) + \alpha f_1(x);$$

niisiis funktionaal f_1 on üheselt määratud oma väärtusega $f_1(x)$ punktis x. Funktsionaali f_0 nõutud omadustega jätku f_1 leidmiseks tuleb seega leida tema "sobiv(ad)" väärtus(ed) punktis x.

Defineerides iga $t \in \mathbb{R}$ korral funktsionaali $h_t\colon\ X_1 \to \mathbb{R}$,

$$h_t(z) = f_0(y) + \alpha t, \qquad z = y + \alpha x \in X_1 \quad (y \in X_0,\ \alpha \in \mathbb{R}),$$

piisab lemma tõestuseks näidata, et

(1) iga $t \in \mathbb{R}$ korral on h_t lineaarne, kusjuures $h_t|_{X_0} = f_0$;

(2) leidub $t \in \mathbb{R}$ nii, et $h_t \in X_1^*$, kusjuures $\|h_t\| \leqslant \|f_0\|$, s.t.

$$\big|f_0(y) + \alpha t\big| \leqslant \|f_0\|\,\|y + \alpha x\| \qquad \text{kõikide } y \in X_0 \text{ ja } \alpha \in \mathbb{R} \text{ korral.} \tag{9.1}$$

Tõepoolest, sellisel juhul võiksime võtta $f_1 = h_t$, kus $t \in \mathbb{R}$ rahuldab tingimust (9.1).

(1).

Ülesanne 9.2. Tõestada väited (1).

(2). Tingimus (9.1) tähendab, et

$$\Big|f_0\big(\tfrac{1}{\alpha}\,y\big)+t\Big| \leqslant \|f_0\|\,\Big\|\tfrac{1}{\alpha}\,y+x\Big\| \qquad \text{kõikide } y\in X_0 \text{ ja } \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ korral}$$

ehk

$$\big|f_0(u)+t\big| \leqslant \|f_0\|\,\|u+x\| \qquad \text{iga } u\in X_0 \text{ korral}$$

ehk

$$-f_0(u)-\|f_0\|\,\|u+x\| \leqslant t \leqslant -f_0(u)+\|f_0\|\,\|u+x\| \qquad \text{iga } u\in X_0 \text{ korral.}$$

Soovitud $t\in\mathbb{R}$ olemasoluks piisab näidata, et

$$\sup_{u\in X_0}\big(-f_0(u)-\|f_0\|\,\|u+x\|\big) \leqslant \inf_{v\in X_0}\big(-f_0(v)+\|f_0\|\,\|v+x\|\big),$$

milleks piisab näidata, et suvaliste $u,v\in X_0$ korral

$$-f_0(u)-\|f_0\|\,\|u+x\| \leqslant -f_0(v)+\|f_0\|\,\|v+x\|,$$

ehk

$$f_0(v-u) \leqslant \|f_0\|\,\big(\|v+x\|+\|u+x\|\big)$$

Veendume selles: suvaliste $u,v\in X_0$ korral

$$f_0(v-u) \leqslant \|f_0\|\,\|v-u\| = \|f_0\|\,\big\|v+x-(x+u)\big\| \leqslant \|f_0\|\big(\|v+x\|+\|u+x\|\big).$$

□

9.2. Kuratowski–Zorni lemma

Olgu R seos hulgas $X\neq\varnothing$.

Definitsioon 9.1. Öeldakse, et R on *osalise järjestuse seos* (ehk lihtsalt *osaline järjestus*) hulgas X, kui

1° R on *refleksiivne,* s.t iga $x\in X$ korral

$$x\,R\,x;$$

2° R on *antisümmeetriline,* s.t $x,y\in X$ korral

$$x\,R\,y,\ y\,R\,x \quad\Longrightarrow\quad x=y;$$

3° R on *transitiivne,* s.t $x,y,z\in X$ korral

$$x\,R\,y,\ y\,R\,z \quad\Longrightarrow\quad x\,R\,z.$$

Osalise järjestuse seost tähistatakse tavaliselt sümboliga $\leqslant$; kirjutist $x \leqslant y$ loetakse "element x eelneb elemendile y" või "element y järgneb elemendile x". Sageli kasutatakse ka tähistusi

$$\begin{aligned} y \geqslant x \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \leqslant y; \\ x \prec y \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \leqslant y,\ x \neq y; \\ y \succ x \quad &:\Longleftrightarrow \quad x \prec y. \end{aligned}$$

Prototüübilised näited osalise järjestuse seosest on

- järjestus $\leqslant$ reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$;
- sisalduvus $\subset$ hulga X kõigi alamhulkade hulgas $\mathcal{P}(X)$.

Kui $\leqslant$ on osaline järjestus hulgas X, siis kirjutatakse: $(X, \leqslant)$ on *osaliselt järjestatud hulk.* Seejuures öeldakse ka lihtsalt, et X on osaliselt järjestatud hulk (osalise järjestuse $\leqslant$ suhtes).

Olgu $(X, \leqslant)$ osaliselt järjestatud hulk ning olgu $Z \subset X$ mittetühi alamhulk.

Definitsioon 9.2. Öeldakse, et alamhulk Z on *lineaarselt järjestatud* (ehk *ahel*), kui mis tahes kahe elemendi $x, y \in Z$ korral $x \leqslant y$ või $y \leqslant x$ (sellise juhul öeldakse, et elemendid x ja y on *võrreldavad*).

Definitsioon 9.3. Öeldakse, et element $M \in X$ on hulga Z *ülemine tõke,* kui

$$z \leqslant M \quad \text{iga } z \in Z \text{ korral.}$$

Rõhutame, et hulga Z ülemine tõke ei tarvitse olla hulga Z element.

Definitsioon 9.4. Öeldakse, et element $z_0 \in Z$ on hulga Z *suurim element,* kui

$$z \leqslant z_0 \quad \text{iga } z \in Z \text{ korral.}$$

On selge, et hulga Z suurim element on hulga Z ülemine tõke; teiselt poolt, hulga Z ülemine tõke on hulga Z suurim element parajasti siis, kui ta kuulub hulka Z.

Definitsioon 9.5. Öeldakse, et element $z_0 \in Z$ on hulga Z *maksimaalne element,* kui

$$z \in Z,\ z \geqslant z_0 \quad \Longrightarrow \quad z = z_0,$$

s.t. z_0 ei eelne ühelegi endast erinevale hulga Z elemendile.

Rõhutame, et hulga Z maksimaalne element ei tarvitse olla hulga Z ülemine tõke, sest ta ei tarvitse olla võrreldav kõigi hulga Z elementidega; hulga Z maksimaalne element on hulga Z suurim element parajasti siis, kui ta on võrreldav hulga Z kõigi elementidega.

Analoogiliselt defineeritakse hulga *alumine tõke, vähim element* ja *minimaalne element.*

Teoreem 9.3 (Kuratowski–Zorni lemma). *Kui osaliselt järjestatud hulga igal lineaarselt järjestatud alamhulgal on olemas ülemine tõke, siis selles hulgas on olemas maksimaalne element.*

Märkus 9.1. Kuratowski–Zorni lemma on samaväärne *valikuaksioomiga.*

Teoreem 9.4 (valikuaksioom). *Kui $X_j \neq \varnothing$, $j \in J$, kus J on mittetühi indeksite hulk, siis leidub kujutus*

$$f\colon J \to \bigcup_{j\in J} X_j \qquad \text{nii, et} \qquad f(j) \in X_j \quad \text{iga } j \in J \text{ korral.}$$

Definitsioon 9.6. Öeldakse, et osaliselt järjestatud hulk on *täielikult järjestatud,* kui tema igal mittetühjal alamhulgal on olemas vähim element.

Märgime, et täielikult järjestatud hulk X on lineaarselt järjestatud, sest mis tahes $x, y \in X$ korral leidub kaheelemendilisel hulgal $\{x, y\}$ vähim element.

Valikuaksioom on samaväärne *Zermelo teoreemiga.*

Teoreem 9.5 (Zermelo teoreem). *Iga mittetühja hulka on võimalik täielikult järjestada.*

9.3. Hahn–Banachi teoreemi tõestus reaalsel juhul

Hahn–Banachi teoreemi 9.1 tõestus reaalsel juhul. Eeldame, et X on reaalne ruum. Defineerime hulgas

$$\mathcal{A} := \big\{(Z,h)\colon\ Z \subset X \text{ on alamruum, } Z \supset Y,\ h \in Z^*,\ h|_Y = g,\ \|h\| = \|g\|\big\}$$

osalise järjestuse $\preccurlyeq$:

$$(Z_1,h_1) \preccurlyeq (Z_2,h_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad Z_1 \subset Z_2,\ \ h_2|_{Z_1} = h_1.$$

Ülesanne 9.3. Veenduda, et $\preccurlyeq$ on osaline järjestus.

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et hulgas $\mathcal{A}$ eksisteerib maksimaalne element (Z_0,h_0). Tõepoolest, kui sellisel juhul $Z_0 = X$, siis me võime võtta $f = h_0$. Oletame vastuväiteliselt, et $Z_0 \neq X$. Siis leidub $x \in X\backslash Z_0$. Tähistame $Z_1 := \operatorname{span}(Z_0 \cup \{x\})$; siis lemma põhjal elementaarsest jätkust leidub $h_1 \in Z_1^*$ nii, et $h_1|_{Z_0} = h_0$ ja $\|h_1\| = \|h_0\|$. Aga nüüd $h_1|_Y = g$ ja $\|h_1\| = \|g\|$, seega $(h_1, Z_1) \in \mathcal{A}$, seejuures $(Z_1,h_1) \succ (Z_0,h_0)$, mis on vastuolus elemendi (Z_0,h_0) maksimaalsusega.

Veendumaks maksimaalse elemendi olemasolus hulgas $\mathcal{A}$, piisab Kuratowski–Zorni lemma põhjal näidata, et hulga $\mathcal{A}$ igal lineaarselt järjestatud alamhulgal on olemas ülemine tõke.

Olgu $\mathcal{B} := \big\{(Z_\alpha,h_\alpha)\colon\ \alpha \in J\big\}$ hulga $\mathcal{A}$ mingi lineaarselt järjestatud alamhulk (siin J on mingi mittetühi indeksite hulk). Tähistades $Z = \bigcup_{\alpha\in J} Z_\alpha$ ja defineerides $h\colon Z \to \mathbb{R}$,

$$h(z) = h_\alpha(z), \quad \text{kui } \alpha \in J \text{ on selline, et } z \in Z_\alpha,$$

jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $(Z,h) \in \mathcal{A}$, kusjuures (Z,h) on hulga $\mathcal{B}$ ülemine tõke. Selleks tuleb näidata, et

(a) Z on ruumi X alamruum;

(b) h on korrektselt defineeritud; $h \in Z^*$, $\|h\| \leqslant \|g\|$, $h|_Y = g$;

(c) iga $\alpha \in J$ korral $(Z, h) \geqslant (Z_\alpha, h_\alpha)$.

(a). Olgu $z_1, z_2 \in Z$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Peame näitama, et $z_1 + z_2 \in Z$ ja $\lambda z_1 \in Z$. Vastavalt hulga Z definitsioonile leiduvad $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ nii, et $z_1 \in Z_{\alpha_1}$ ja $z_2 \in Z_{\alpha_2}$. Kuna Z_{α_1} on alamruum, siis $\lambda z_1 \in Z_{\alpha_1} \subset Z$. Hulga $\mathcal{B}$ lineaarse järjestatuse tõttu $(Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) \leqslant (Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$ või $(Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2}) \leqslant (Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1})$. Konkreetsuse mõttes oletame, et $(Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) \leqslant (Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$. Siis $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2}$, järelikult $z_1, z_2 \in Z_{\alpha_2}$. Kuna Z_{α_2} on alamruum, siis ka $z_1 + z_2 \in Z_{\alpha_2} \subset Z$.

(b). Olgu $z \in Z$ ning olgu $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ sellised, et $z \in Z_{\alpha_1}$ ja $z \in Z_{\alpha_2}$. Veendumaks, et funktsionaal h on korrektselt defineeritud, tuleb näidata, et $h_{\alpha_1}(z) = h_{\alpha_2}(z)$. Hulga $\mathcal{B}$ lineaarse järjestatuse tõttu $(Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) \leqslant (Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$ või $(Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2}) \leqslant (Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1})$. Konkreetsuse mõttes oletame, et $(Z_{\alpha_1}, h_{\alpha_1}) \leqslant (Z_{\alpha_2}, h_{\alpha_2})$. Siis $Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2}$, kusjuures $h_{\alpha_2}|Z_{\alpha_1} = h_{\alpha_1}$. Kuna $z \in Z_{\alpha_1} \subset Z_{\alpha_2}$, siis $h_{\alpha_2}(z) = h_{\alpha_1}(z)$, nagu soovitud.

Ülesanne 9.4. Tõestada, et

(1) h on lineaarne;

(2) h on tõkestatud, kusjuures $\|h\| \leqslant \|g\|$;

(3) $h|_Y = g$.

(c).

Ülesanne 9.5. Tõestada, et iga $\alpha \in J$ korral $(Z, h) \geqslant (Z_\alpha, h_\alpha)$.

□

9.4. Seos komplekslineaarse funktsionaali ja tema reaalosa vahel. Hahn–Banachi teoreemi tõestus kompleksel juhul

Olgu X kompleksne vektorruum (s.t. vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$). Siis X on loomulikul viisil tõlgendatav reaalse vektorruumina, defineerides seal liitmise ja reaalarvuga korrutamise nagu komplekse ruumi X puhul—kompleksarvude korpus sisaldab reaalarvude korpuse, seega on elemendi korrutamine reaalarvuga ruumis X defineeritud. Ruumi X, tõlgendatuna sel viisil reaalse ruumina, nimetatakse (komplekse) ruumiga X *assotsieeruvaks reaalseks (vektor)ruumiks* ja tähistatakse sümboliga $X_\mathbb{R}$. Rõhutame, et kui $X \neq \{0\}$, siis ruumid X ja $X_\mathbb{R}$ on algebralises mõttes erinevad: näiteks kui $x \neq 0$, siis elemendid x ja ix on ruumis X lineaarselt sõltuvad, ruumis $X_\mathbb{R}$ aga lineaarselt sõltumatud.

Öeldakse, et funktsionaal $u\colon X \to \mathbb{R}$ on *reaallineaarne,* kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

1° $u(x + y) = u(x) + u(y)$,

2° $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

Teisisõnu, reaallineaarseteks funktsionaalideks kompleksel vektorruumil X nimetatakse lineaarseid funktsionaale assotsieeruval reaalsel ruumil $X_\mathbb{R}$.

Lineaarseid funktsionaale $X \to \mathbb{C}$ nimetame edaspidi ka *komplekslineaarseteks* funktsionaalideks.

Komplekslineaarse funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{C}$ reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ defineeritakse loomulikul viisil:

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}\bigl(f(x)\bigr) \quad \text{ja} \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}\bigl(f(x)\bigr), \quad x \in X.$$

Edasises jätame avaldistes $\operatorname{Re} f(x)$ ja $\operatorname{Im} f(x)$ täiendavad sulud panemata, sest sõltumata nende asukohast on avaldise tähendus sama.

Kui X on normeeritud ruum, siis ka $X_{\mathbb{R}}$ on normeeritud ruum sama normi suhtes. (Juhime tähelepanu, et meetriliste ruumidena on X ja $X_{\mathbb{R}}$ identsed, kuid normeeritud ruumidena juhul $X \neq \{0\}$ mitte, sest nad on vektorruumidena erinevad.)

Järgnevad lause (mida kasutab Hahn–Banachi teoreemi tõestus kompleksel juhul) ja järeldus selgitavad pideva komplekslineaarse funktsionaali ning tema reaal- ja imaginaarosa vahekorda.

Lause 9.6. *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) *Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ on reaallineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) *Olgu $u\colon X \to \mathbb{R}$ reaallineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks komplekslineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $u = \operatorname{Re} f$. Seejuures*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.} \tag{9.2}$$

(c) *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Re} f \in X^*_{\mathbb{R}}$. Seejuures $\|f\| = \|\operatorname{Re} f\|$.*

Tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et iga $x \in X$ korral $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$, sest

$$f(ix) = if(x) = i\bigl(\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)\bigr) = i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x).$$

Seega iga $x \in X$ korral

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i\bigl(-\operatorname{Re} f(ix)\bigr) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix).$$

Funktsionaal $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ on reaallineaarne, sest mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

$$\operatorname{Re} f(\alpha x + y) = \operatorname{Re}\bigl(\alpha f(x) + f(y)\bigr) = \operatorname{Re}\bigl(\alpha f(x)\bigr) + \operatorname{Re} f(y) = \alpha \operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Re} f(y).$$

(b). Väitest (a) järeldub, et komplekslineaarseid funktsionaale $f\colon X \to \mathbb{C}$ mille korral $\operatorname{Re} f = u$ saab olla ülimalt üks: niisuguse funktsionaali f korral peab kehtima (9.2). Väite tõestuseks jääb näidata, et seosega (9.2) defineeritud funktsionaal f on komplekslineaarne. Mis tahes $x \in X$ ja $\gamma = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) korral

$$\begin{aligned}
f(\gamma x) &= f(\alpha x + i\beta x) = u(\alpha x + i\beta x) - iu\bigl(i(\alpha x + i\beta x)\bigr) \\
&= u(\alpha x + i\beta x) - iu(i\alpha x - \beta x) = \alpha u(x) + \beta u(ix) - i\bigl(\alpha u(ix) - \beta u(x)\bigr) \\
&= (\alpha + i\beta)\, u(x) + (\alpha + i\beta)\bigl(-iu(ix)\bigr) = (\alpha + i\beta)\bigl(u(x) - iu(ix)\bigr) = \gamma\, f(x).
\end{aligned}$$

Ülesanne 9.6. Tõestada, et mis tahes $x, y \in X$ korral $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(c). Väite tõestuseks piisab näidata, et

$$\sup_{x \in B_X} |f(x)| = \sup_{x \in B_X} \operatorname{Re} f(x).$$

Selleks paneme tähele, et iga $x \in B_X$ korral, tähistades $\theta_x := \frac{1}{\operatorname{sgn} f(x)}$, kehtivad $\theta_x x \in B_X$ ja

$$|f(x)| = \theta_x f(x) = f(\theta_x x) = \operatorname{Re} f(\theta_x x).$$

Seega

$$\sup_{x \in B_X} |f(x)| = \sup_{x \in B_X} \operatorname{Re} f(\theta_x x) \leqslant \sup_{u \in B_X} \operatorname{Re} f(u) = \sup_{x \in B_X} \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup_{x \in B_X} |f(x)|.$$

□

Järeldus 9.7. *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) *Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $\operatorname{Im} f\colon X \to \mathbb{R}$ on reaallineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Im} f(ix) + i \operatorname{Im} f(x) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) *Olgu $v\colon X \to \mathbb{R}$ reaallineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks komplekslineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $v = \operatorname{Im} f$. Seejuures*

$$f(x) = v(ix) + iv(x) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Im} f \in X^*_{\mathbb{R}}$. Seejuures $\|f\| = \|\operatorname{Im} f\|$.*

Tõestus.

Ülesanne 9.7. Tõestada järeldus 9.7

□

Hahn–Banachi teoreemi 9.1 tõestus kompleksel juhul. Eeldame, et X on kompleksne ruum. Tähistame $v := \operatorname{Re} g \in Y^*_{\mathbb{R}}$. Siis Hahn–Banachi teoreemi põhjal reaalse ruumi jaoks leidub $u \in X^*_{\mathbb{R}}$ nii, et $u|_Y = v$ ja $\|u\| = \|v\|$. Defineerime funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$f(x) = u(x) - iu(ix), \quad x \in X,$$

siis lause 9.6 põhjal $f \in X^*$, kusjuures $f|_Y = g$, sest iga $y \in Y$ korral

$$f(y) = u(y) - iu(iy) = v(y) - iv(iy) = g(y),$$

ning $\|f\| = \|u\| = \|v\| = \|g\|$. □

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 9.8. Olgu X vektorruum (üle korpuse $\mathbb{K}$), olgu $f\colon X \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, lineaarne funktsionaal ning olgu $x_0 \in X$ selline, et $f(x_0) \neq 0$. Tõestada, et $X = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus \ker f$, s.t. iga $x \in X$ korral leiduvad üheselt määratud $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $z \in \ker f$ nii, et $x = \alpha x_0 + z$.

Ülesanne 9.9. Olgu X vektorruum (üle korpuse $\mathbb{K}$) ning olgu $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ lineaarsed funktsionaalid. Tõestada, et $\ker f = \ker g$ parajasti siis, kui leidub $\beta \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ nii, et $\beta f = g$.

Ülesanne 9.10. Tõestada, et kui lineaarne funktsionaal f normeeritud ruumil X on mittepidev, siis $\overline{\ker f} = X$.

Näpunäide. Panna tähele, et kui $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on kinnise ühikkera B_X elementide jada, mille korral $0 \neq |f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, siis mis tahes $a \in X$ korral $\ker f \ni a - \dfrac{f(a)}{f(x_n)} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Ülesanne 9.11. Tõestada, et lineaarne funktsionaal f normeeritud ruumil X on pidev parajasti siis, kui $\ker f$ on kinnine.

Näpunäide. Piisavuse tõestamisel kasutada ülesannet 9.10.

Ülesanne 9.12. Tõestada, et iga lineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel normeeritud ruumil on pidev.

Näpunäide. Kasutada ülesannet 9.11 ja fakti, et normeeritud ruumi lõplikumõõtmeline alamruum on kinnine.

Teine võimalus on valida vaadeldavas lõplikmõõtmelises ruumis X mingi baas $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ning vaadelda ruumi X esialgse normiga ekvivalentset normi $|||x||| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$, $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$.

Ülesanne 9.13. Olgu $X_0 = \{(\xi, 0)\colon \xi \in \mathbb{R}\}$ reaalse ruumi $X = \ell_\infty^2$ alamruum. Olgu funktsionaal $f_0 \in X_0^*$ antud valemiga

$$f_0(\xi, 0) = \xi.$$

Leida funktsionaali f_0 kõik normi säilitavad jätkud, s.t. jätkud $f \in X^*$, mille puhul $\|f\| = \|f_0\|$.

Ülesanne 9.14. Lahendada eelmine ülesanne (a) juhul $X = \ell_2^2$; (b) juhul $X = \ell_1^2$.

Ülesanne 9.15. Olgu $X_0 = \{(\xi, -\xi)\colon \xi \in \mathbb{R}\}$ reaalse ruumi $X = \ell_\infty^2$ alamruum. Olgu funktsionaal $f_0 \in X_0^*$ antud valemiga

$$f_0(\xi, -\xi) = \xi.$$

Leida kõik funktsionaali f_0 normi säilitavad jätkud $f \in X^*$.

Ülesanne 9.16. Olgu X_0 normeeritud ruumi X alamruum ning olgu $f_0 \in X_0^*$. Tõestada, et kui $f_1, f_2 \in X^*$ on funktsionaali f_0 normi säilitavad jätkud, siis iga $\lambda \in [0,1]$ korral on ka $f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$ funktsionaali f_0 normi säilitav jätk.

Ülesanne 9.17. Olgu X^* rangelt kumer, s.t.

$$f, g \in X^*, \quad \|f\| = \|g\| = 1, \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\| = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f = g.$$

Tõestada, et ruumi X mis tahes alamruumi Y korral eksisteerib igal funktsionaalil $g \in Y^*$ parajasti üks normi säilitav jätk $f \in X^*$.

Ülesanne 9.18. Olgu $x_1, \ldots, x_n$ lineaarselt sõltumatud elemendid normeeritud ruumis X ning olgu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Tõestada, et leidub $f \in X^*$ nii, et

$$f(x_i) = \alpha_i \quad \text{iga } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ korral.}$$

Ülesanne 9.19. Tõestada, et leidub $f \in \ell_\infty^*$, $\|f\| = 1$, nii, et $f|_c = \lim$ (s.t. $f(x) = \lim\limits_{j\to\infty} \xi_j$ iga $x = (\xi_j) \in c$ korral).

§ 10. Järeldusi Hahn–Banachi teoreemist

Järeldus 10.1 (punkti eraldamine kinnisest alamruumist)**.** *Olgu X normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X kinnine alamruum ning olgu $x \in X \setminus X_0$. Siis leidub $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, nii, et*

$$f|_{X_0} = 0 \quad \textit{ja} \quad f(x) = d(x, X_0).$$

Tõestus. Vaatleme alamruumi

$$Y := \operatorname{span}\bigl(X_0 \cup \{x\}\bigr) = \bigl\{z + \alpha x\colon\ z \in X_0,\, \alpha \in \mathbb{K}\bigr\}.$$

Defineerime funktsionaali

$$g\colon\ Y \ni z + \alpha x \longmapsto \alpha\, d(x, X_0) \in \mathbb{K}.$$

Kuna $g|_{X_0} = 0$ ja $g(x) = d(x, X_0)$, siis järelduse tõestuseks piisab näidata, et $g \in Y^*$, kusjuures $\|g\| = 1$, sest sel juhul sobib otsitavaks funktsionaaliks f funktsionaali g iga normi säilitav jätk ruumile X.

Ilmselt on g lineaarne. Funktsionaal g on ka tõkestatud, kusjuures $\|g\| \leqslant 1$, sest $\alpha = 0$ korral $|g(z + \alpha x)| = 0 \leqslant \|z + \alpha x\|$, kui aga $\alpha \neq 0$, siis

$$|g(z + \alpha x)| = |\alpha|\, d(x, X_0) \leqslant |\alpha|\, \bigl\|x - \bigl(-\tfrac{1}{\alpha} z\bigr)\bigr\| = \|z + \alpha x\|.$$

Jääb veenduda, et $\|g\| \geqslant 1$. Selleks näitame, et $d(x, X_0) \leqslant \|g\|\, d(x, X_0)$: iga $z \in X_0$ korral

$$d(x, X_0) = g(-z + x) = |g(-z + x)| \leqslant \|g\|\, \|x - z\|,$$

seega

$$d(x, X_0) \leqslant \inf_{z \in X_0} \|g\|\, \|x - z\| = \|g\| \inf_{z \in X_0} \|x - z\| = \|g\|\, d(x, X_0).$$

□

Järeldus 10.2 (punkti eraldamine kinnisest alamruumist)**.** *Olgu X normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X kinnine alamruum ning olgu $x \in X \setminus X_0$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$f|_{X_0} = 0 \quad \textit{ja} \quad f(x) = 1.$$

Tõestus.

Ülesanne 10.1. Tõestada järeldus 10.2.

□

Järeldus 10.3 (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest)**.** *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in X \setminus \{0\}$. Siis leidub $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, nii, et $f(x) = \|x\|$.*

Tõestus. Otsitava $f \in X^*$ leidmiseks piisab võtta järelduses 10.1 $X_0 = \{0\}$. □

Järelduse 10.3 vahetu tõestus. Defineerime funktsionaali

$$g\colon\ \operatorname{span}\{x\} \ni \alpha x \longmapsto \alpha \|x\| \in \mathbb{K}.$$

Siis ilmselt $g \in (\operatorname{span}\{x\})^*$, kusjuures $\|g\| = 1$ ja $g(x) = 1$. Otsitavaks funktsionaaliks f sobib funktsionaali g mis tahes normi säilitav jätk ruumile X. □

Märkus 10.1. Järeldus 10.3 ütleb muuhulgas, et igal mittetriviaalsel normeeritud ruumil leidub nullist erinevaid pidevaid lineaarseid funktsionaale.

Märgime, et nullist erinevat pidevate lineaarsete funktsionaalide olemasolu tõestamisel lõpmatumõõtmelisel normeeritud ruumil kasutasime Zorni lemmat. Zorni lemmat kasutatakse ka mittepidevate lineaarsete funktsionaalide olemasolu tõestamisel lõpmatumõõtmelisel normeeritud ruumil.

Järeldus 10.4 (normeeritud ruumi punktide eraldamine)**.** *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

TÕESTUS. Võtta järelduses 10.3 $x = x_1 - x_2$. □

Järeldus 10.5. *Olgu X normeeritud ruum. Siis iga $x \in X$ korral*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

TÕESTUS. Olgu $x \in X$. Mis tahes $f \in B_{X^*}$ korral $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| \leqslant \|x\|$, seega

$$\|x\| \geqslant \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

Teiselt poolt, järelduse 10.3 põhjal leidub $h \in B_{X^*}$ nii, et $h(x) = \|x\|$, seega

$$\|x\| = |h(x)| \leqslant \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

□

Märkus 10.2. Normeeritud ruumi X elementide x ja ruumil X tegutsevate pidevate lineaarsete funktsionaalide f normi arvutamisel on täheldatav teatav sümmeetria:

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|, \qquad \|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$$

Siin esimene supreemum saavutatakse (teoreemi põhjal piisavast arvust funktsionaalidest), teine aga üldjuhul mitte.

Järeldus 10.6. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in X$. Siis funktsionaal*

$$F_x\colon\ X^* \ni f \longmapsto f(x) \in \mathbb{K}$$

on pidev ja lineaarne, kusjuures $\|F_x\| = \|x\|$.

TÕESTUS. Funktsionaali F_x lineaarsus on vahetult kontrollitav. Tema tõkestatuseks ja võrduseks $\|F_x\| = \|x\|$ märgime, et järelduse 10.5 põhjal

$$\sup_{f \in B_{X^*}} |F_x(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \|x\|.$$

□

Normeeritud ruumi X kaasruumi X^* kaasruumi $(X^*)^*$ nimetatakse ruumi X *teiseks kaasruumiks* ja tähistatakse sümboliga X^{**}. Analoogiliselt defineeritakse ka ruumi X kolmas, neljas jne. kaasruumid $X^{***} = (X^{**})^*$, $X^{(4)} = (X^{***})^*$ jne.

Kujutust

$$j_X\colon\ X \ni x \longmapsto F_x \in X^{**}$$

(siin funktsionaal F_x on defineeritud järelduses 10.6) nimetatakse ruumi X *kanooniliseks sisestuseks* oma teise kaasruumi.

Definitsioon 10.1. Öeldakse, et Banachi ruum X on *refleksiivne,* kui tema kanooniline sisestus j_X oma teise kaasruumi on sürjektsioon.

Märkus 10.3. Kui ruum X on refleksiivne, siis ilmselt $X \cong X^{**}$. See tingimus pole piisav ruumi X refleksiivsuseks, sest leidub mitterefleksiivseid Banachi ruume X, mille korral $X \cong X^{**}$.

Märkus 10.4. Kui Banachi ruum X on refleksiivne, siis iga $f \in X^*$ korral leidub $x \in B_X$ nii, et $f(x) = \|f\|$.

Ülesanne 10.2. Veenduda selles.

Osutub, et kui iga $f \in X^*$ korral leidub $x \in B_X$ nii, et $f(x) = \|f\|$, siis ruum X on refleksiivne. (Selle fakti tõestus on tugevalt mittetriviaalne.)

Meile tuntud ruumidest on refleksiivsed kõik lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid, jadaruumid ℓ_p, kus $p \in (1, \infty)$, ning ruumid $L_p(a, b)$, kus kus $p \in (1, \infty)$. Ruumid ℓ_1, ℓ_∞, c_0, c, $L_1(a, b)$, $L_\infty(a, b)$ ja $C[a, b]$ ei ole refleksiivsed.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 10.3. Olgu X normeeritud ruum, olgu X_0 ruumi X alamruum ning olgu $x_0 \in X$. Tõestada, et $x_0 \in \overline{X_0}$ parajasti siis, kui

$$f \in X^*, \quad f(x) = 0 \quad \text{iga } x \in X_0 \text{ korral} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) = 0.$$

Ülesanne 10.4. Olgu X normeeritud ruum, olgu $E \subset X$ ning olgu $x_0 \in X$. Tõestada, et $x_0 \in \overline{\operatorname{span} E}$ parajasti siis, kui

$$f \in X^*, \quad f(x) = 0 \quad \text{iga } x \in E \text{ korral} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_0) = 0.$$

Ülesanne 10.5. Tõestada, et kui normeeritud ruumi X kaasruum X^* on separaabel, siis ka ruum X ise on separaabel.

Näpunäide. Olgu $\{f_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ kõikjal tihe alamhulk kaasruumis X^*. Valime kõikide $m, n \in \mathbb{N}$ korral elemendi $x_n^m \in B_X$ nii, et $f_m(x_n^m) > \|f_m\| - \frac{1}{n}$. Ruumi X separaabluseks piisab näidata, et $\overline{\operatorname{span}\{x_n^m\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}} = X$.

NB! Tõestus lihtsustub, kui kasutada fakti, et separaabli meetrilise ruumi alamruum on separaabel. Sellisel juhul valime ülaltoodud näpunäites kõikjal tiheda alamhulga $\{f_m\colon\ m \in \mathbb{N}\}$ kaasruumi X^* ühiksfääris S_{X^*}.

Ülesanne 10.6. Tõestada, et ruumid ℓ_p, $1 < p < \infty$, on refleksiivsed.

§ 11. Faktorruumid

11.1. Vektorruumi faktorruum alamruumi järgi

Olgu X vektorruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Defineerime ruumis X ekvivalentsiseose $\sim$:

$$x \sim z \quad \Longrightarrow \quad x - z \in Y \qquad (x, z \in X).$$

Ülesanne 11.1. Tõestada, et $\sim$ on ekvivalentsiseos.

Siis faktorhulk $X/\sim$ on vektorruum esindajate kaudu defineeritud tehete suhtes:

$$[x] + [z] := [x + z], \quad \alpha[x] := [\alpha x] \qquad (x, z \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}).$$

Ülesanne 11.2. Veenduda selles. (Kõigepealt veenduda, et need tehted on korrektselt defineeritud.) Seejuures panna tähele, et selle vektorruumi nullelement $0 = [0] = Y$.

Vektorruumi $X/\sim$ nende tehete suhtes tähistatakse sümboliga X/Y ja nimetatakse *vektorruumi X faktorruumiks alamruumi Y järgi.*

Paneme tähele, et faktorhulga $X/\sim$ elemendid (s.t. ekvivalentsiklassid seose $\sim$ järgi) esituvad kujul

$$[x] = x + Y = \{x + y\colon\ y \in Y\}, \qquad x \in X,$$

(s.t. ekvivalentsiklassid on alamruumi Y nihked). Tõepoolest,

$$z \in [x] \quad \Longleftrightarrow \quad z - x \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad z \in x + Y.$$

11.2. Normeeritud ruumi faktorruum kinnise alamruumi järgi kui normeeritud ruum

Olgu X normeeritud ruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Selles punktis on meie eesmärk anda faktorruumile X/Y normeeritud ruumi struktuur.

Lause 11.1. *Defineerime $x \in X$ korral*

$$\|x + Y\| := \inf_{z \in x+Y} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = d(x, Y).$$

Siis

(a) *$\|\cdot\|$ on poolnorm faktorruumis X/Y;*

(b) *$\|\cdot\|$ on norm parajasti siis, kui alamruum Y on kinnine.*

Tõestus. (a). Veendumaks, et $\|\cdot\|$ on poolnorm faktorruumis X/Y, peame näitama, et mis tahes $x, u \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

1° $\|\alpha(x + Y)\| = |\alpha|\, \|x + Y\|$;

2° $\|(x + Y) + (u + Y)\| \leqslant \|x + Y\| + \|u + Y\|$.

Olgu $x, u \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$.

1°. Kui $\alpha \neq 0$, siis

$$\begin{aligned}\|\alpha(x+Y)\| &= \|\alpha x + Y\| = \inf_{y\in Y}\|\alpha x + y\| = |\alpha| \inf_{y\in Y}\left\|x + \frac{1}{\alpha}\,y\right\| = |\alpha| \inf_{y\in Y}\|x+y\| \\ &= |\alpha|\,\|x+Y\|,\end{aligned}$$

kui aga $\alpha = 0$, siis $\|\alpha(x+Y)\| = \|0+Y\| = d(0,Y) = 0 = |\alpha|\,\|x+Y\|$.

2°. Mis tahes $y, v \in Y$ korral

$$\|(x+Y)+(u+Y)\| = \|x+u+Y\| = \inf_{w\in Y}\|x+u+w\| \leqslant \|x+u+y+v\| \leqslant \|x+y\|+\|u+v\|,$$

seega

$$\|(x+Y)+(u+Y)\| \leqslant \inf_{y\in Y}\|x+y\| + \inf_{v\in Y}\|u+v\| = \|x+Y\| + \|u+Y\|.$$

(b). Poolnorm $\|\cdot\|$ faktorruumis X/Y on norm parajasti siis, kui $x \in X$ korral kehtib

$$\|x+Y\| = 0 \quad\Longrightarrow\quad x+Y = 0$$

ehk, arvestades, et, ühelt poolt, $\|x+Y\| = d(x,Y)$ ning, teiselt poolt, nullelement ruumis X/Y on $0+Y$ ning seega $x+Y=0$ parajasti siis, kui $x \in Y$,

$$d(x,Y) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x \in Y.$$

Kuna $d(x,Y) = 0$ parajasti siis, kui $x \in \overline{Y}$, siis implikatsioon kehtib parajasti siis, kui $\overline{Y} = Y$, s.t. Y on kinnine. Seega poolnorm $\|\cdot\|$ faktorruumis X/Y on norm parajasti siis, kui alamruum Y on kinnine. □

Järgnevad ülesanded sisaldavad mõned kasulikud tähelepanekud poolnormi $\|\cdot\|$ kohta.

Ülesanne 11.3. Olgu X normeeritud ruum, olgu Y ruumi X alamruum ning olgu $x, u \in X$. Tõestada, et

$$\|(x+Y)-(u+Y)\| = d_X(x, u+Y) = d_X(x+Y, u+Y),$$

kus $d_X(x, u+Y)$ on elemendi x kaugus hulgast $u+Y$ ruumis X, s.t.

$$d_X(x, u+Y) = \inf_{v\in u+V}\|x-v\|,$$

ja $d_X(x+Y, u+Y)$ on hulkade $x+Y$ ja $u+Y$ vaheline kaugus ruumis X, s.t.

$$d_X(x+Y, u+Y) = \inf_{\substack{z\in x+Y\\ v\in u+V}}\|z-v\|.$$

Ülesanne 11.4. Olgu X normeeritud ruum, olgu Y ruumi X alamruum ning olgu $x, x_j \in X$, $j \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) kui $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ ruumis X, siis $\|(x_j+Y)-(x+Y)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ruumis X/Y;

(b) kui $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = x$ ruumis X, siis $\left\|\sum_{j=1}^{n}(x_j+Y)-(x+Y)\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ruumis X/Y.

11.3. Faktorruumi täielikkus

Teoreem 11.2. *Olgu X Banachi ruum ning olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis X/Y on Banachi ruum.*

TÕESTUS. Olgu $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+Y)$ absoluutselt koonduv rida faktorruumis X/Y, s.t. $\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j+Y\|<\infty$. Kuna normeeritud ruum on täielik parajasti siis, kui temas iga absoluutselt koonduv rida koondub, siis faktorruumi X/Y täielikkuseks piisab näidata, et rida $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+Y)$ koondub ruumis X/Y.

Valime iga $j\in\mathbb{N}$ korral $z_j\in x_j+Y$ nii, et $\|z_j\|<\|x_j+Y\|+\frac{1}{2^j}$; siis

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|z_j\|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\left(\|x_j+Y\|+\frac{1}{2^j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j+Y\|+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}=\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j+Y\|+1<\infty,$$

s.t. rida $\sum_{j=1}^{\infty}z_j$ koondub absoluutselt ruumis X. Ruumi X täielikkuse tõttu see rida koondub ruumis X. Olgu $x\in X$ selle rea summa, s.t. $\sum_{j=1}^{\infty}z_j=x$. Aga nüüd (ülesande 11.4) põhjal

$$\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+Y)=\sum_{j=1}^{\infty}(z_j+Y)=z+Y\quad\text{ruumis } X/Y,$$

niisiis rida $\sum_{j=1}^{\infty}(x_j+Y)$ koondub, nagu soovitud. □

11.4. Kanooniline kujutus faktorruumile

Definitsioon 11.1. Olgu X vektorruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Kujutust

$$q\colon\ X\ni x\longmapsto x+Y\in X/Y$$

nimetatakse (ruumi X) *kanooniliseks kujutuseks faktorruumile* (X/Y).

Ülesanne 11.5. Tõestada, et kanooniline kujutus $q\colon X\to X/Y$ on lineaarne, kusjuures $\ker q=Y$.

Lause 11.3. *Olgu X normeeritud ruum, olgu Y ruumi X kinnine alamruum ning olgu $q\colon X\to X/Y$ kanooniline kujutus faktorruumile. Siis $q\in\mathcal{L}(X,X/Y)$; seejuures, kui $Y\neq X$, siis $\|q\|=1$.*

TÕESTUS. Suvalise $x\in X$ korral

$$\|qx\|=\|x+Y\|=\inf\bigl\{\|z\|\colon\ z\in x+Y\bigr\}\leqslant\|x\|,$$

seega q on tõkestatud, niisiis $q\in\mathcal{L}(X,X/Y)$, kusjuures $\|q\|\leqslant 1$.

Eeldame nüüd, et $Y\neq X$. Siis leidub $x\in X$ nii, et $\|x+Y\|=1$. Veendumaks, et $\|q\|=1$, jääb näidata, et $\|q\|\geqslant 1$. Fikseerime vabalt $\varepsilon>0$. Siis leidub $z\in x+Y$ nii, et $\|z\|\leqslant\|x+Y\|+\varepsilon=1+\varepsilon$. Nüüd $\frac{1}{1+\varepsilon}z\in B_X$, kusjuures

$$\left\|q\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\,z\right)\right\|=\frac{1}{1+\varepsilon}\,\|qz\|=\frac{1}{1+\varepsilon}\,\|x+Y\|=\frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Seega iga $\varepsilon>0$ korral

$$\|q\|=\sup_{u\in B_X}\|qu\|\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon},$$

millest järeldub, et $\|q\|\geqslant 1$. □

11.5. Lineaarse kujutuse faktoriseerimine

Lause 11.4. *Olgu X ja Y vektorruumid ning olgu $T\colon X \to Y$ lineaarne kujutus. Defineerime kujutuse $\widehat{T}\colon X/\ker T \to \operatorname{ran} T$ võrdusega*

$$\widehat{T}(x + \ker T) = Tx, \quad x \in X.$$

Siis

[I] (a) *$\widehat{T}$ on lineaarne bijektsioon;*

(b) *$T = j\,\widehat{T}\,q$, kus $q\colon X \to X/\ker T$ on kanooniline kujutus faktorruumile ja $j\colon \operatorname{ran} T \ni y \mapsto y \in Y$ on loomulik sisestus, s.t. järgnev diagramm kommuteerub:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\uparrow{\scriptstyle j} \\ X/\ker T & \xrightarrow{\widehat{T}} & \operatorname{ran} T \end{array} ;$$

[II] *kui X ja Y on normeeritud ruumid ning $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, siis*

(c) *$\widehat{T} \in \mathcal{L}(X/\ker T, \operatorname{ran} T)$, kusjuures $\|\widehat{T}\| = \|T\|$;*

kui lisaks X on Banachi ruum ja $\operatorname{ran} T$ on täielik, siis

(d) *$\widehat{T}$ on isomorfism.*

TÕESTUS. [I].

Ülesanne 11.6. Tõestada väited (a) ja (b). Seejuures kõigepealt veenduda, et operaator $\widehat{T}$ on korrektselt defineeritud.

[II]. Olgu nüüd X ja Y on normeeritud ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(c). Ühelt poolt, kui $x \in X$ ja $z \in x + \ker T$, siis

$$\|\widehat{T}(x + \ker T)\| = \|Tx\| = \|Tz\| \leqslant \|T\|\,\|z\|,$$

seega

$$\|\widehat{T}(x + \ker T)\| \leqslant \|T\| \inf_{z \in x + \ker T} \|z\| = \|T\|\,\|x + \ker T\|,$$

millest järeldub, et $\widehat{T}$ on tõkestatud, kusjuures $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$.

Teiselt poolt, kuna $T = j\,\widehat{T}\,q$, siis

$$\|T\| \leqslant \|j\|\,\|\widehat{T}\|\,\|q\| = \|\widehat{T}\|,$$

seega $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

(d). Kui eeldada lisaks, et X ja $\operatorname{ran} T$ on täielikud, siis $\widehat{T}\colon X/\ker T \to \operatorname{ran} T$ on eelneva põhjal pidev lineaarne bijektsioon Banachi ruumide vahel, seega Banachi teoreemi 2.1 põhjal pöördoperaatorist ka tema pöördoperaator $\widehat{T}^{-1}$ on pidev, seega $\widehat{T}$ on isomorfism. $\square$

11.6. Alamruumi ja faktorruumi kaasruum

Definitsioon 11.2. Olgu X normeeritud ruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Hulka

$$Y^{\perp} := \{f \in X^*\colon\ f|_Y = 0\}$$

nimetatakse alamruumi Y *annullaatoriks.*

Ülesanne 11.7. Tõestada, et normeeritud ruumi X alamruumi Y annullaator $Y^{\perp}$ on kaasruumi X^* kinnine alamruum.

Teoreem 11.5. *Olgu X normeeritud ruum.*

(a) *Olgu Y ruumi X alamruum. Siis kujutus $T\colon\ X^*/Y^{\perp} \to Y^*$,*

$$\big(T(f + Y^{\perp})\big)(y) = f(y), \quad y \in Y, \quad f \in X^*,$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $Y^* \cong X^*/Y^{\perp}$.

(b) *Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Siis kujutus $T\colon\ Y^{\perp} \to (X/Y)^*$,*

$$(Tf)(x + Y) = f(x), \quad x \in X, \quad f \in Y^{\perp},$$

on isomeetriline isomorfism. Niisiis, $(X/Y)^* \cong Y^{\perp}$.

Tõestus.

Ülesanne 11.8. Tõestada teoreem 11.5.

□

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 11.9. Olgu X vektorruum ning olgu $p\colon\ X \to \mathbb{R}$ poolnorm. Tõestada, et

(a) $N := \{x \in X\colon\ p(x) = 0\}$ on alamruum;

(b) X/N on normeeritud ruum normi

$$\|x + N\| = p(x), \quad x \in X,$$

suhtes. Kõigepealt veenduda, et see norm on korrektselt defineeritud.

Ülesanne 11.10. Kasutades normeeritud ruumi faktorruumi mõistet, tõestada järgnev kursusest "Funktsionaalanalüüs I" tuttav Rieszi lemma.

Rieszi lemma (vt. ???). *Olgu Y normeeritud ruumi kinnine pärisalamruum. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $x_\varepsilon \in S_X$ nii, et $d(x_\varepsilon, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Näpunäide. Mis tahes $x \in X$ korral $d(x, Y) = \|x + Y\|$.

Ülesanne 11.11. Tõestada järgnev teoreem.

Teoreem 11.6. *Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *T on sürjektsioon, kusjuures iga $y \in Y$ korral*

$$\|y\| = \inf\{\|x\|\colon\ x \in X,\ Tx = y\};$$

(ii) $T[B_X^\circ] = B_Y^\circ$;

(iii) *kujutus*

$$\widehat{T}\colon\ X/\ker T \ni x + \ker T \longmapsto Tx \in Y$$

on isomeetriline isomorfism.

Definitsioon 11.3. Operaatorit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, mis rahuldab ühte (ja seega kõiki) teoreemi 11.6 samaväärsetest tingimustest (i)–(iii), nimetatakse *faktorkujutuseks*.

Ülesanne 11.12. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Tõestada, et faktorkujutus $T\colon X \to Y$ teisendab ruumi X lahtised hulgad lahtisteks hulkadeks ruumis Y.

Ülesanne 11.13. Toetudes lausele 11.4 ja ülesandele 11.12, tõestada lahtise kujutuse printsiip (teoreem 2.4).

Lahtise kujutuse printsiip (vt. teoreemi 2.4)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Siis iga pidev lineaarne sürjektsioon $T\colon X \to Y$ on lahtine.*

Ülesanne 11.14. Olgu X normeeritud ruum, olgu $x \in X$ ning olgu $f \in X^*$, $\|f\| = 1$. Tõestada, et $d(x, \ker f) = |f(x)|$.

§ 12. Pideva lineaarse operaatori kaasoperaator

Alates sellest paragrahvist me hakkame normeeritud ruumi X kaasruumi X^* elementide tähistamiseks sageli kasutama sümbolit x^* (või ka näiteks u^*, z^* vms.) ja teise kaasruumi elementide tähistamiseks sümbolit x^{**} (või ka näiteks u^{**}, z^{**} vms.). Rõhutame, et need x^* ja x^{**} on terviklikud sümbolid (mitte mingid derivaadid elemendist x – erinevalt sümbolitest X^* ja X^{**}, mis tähistavad vastavalt ruumi X kaasruumi ja teist kaasruumi).

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Definitsioon 12.1. Operaatorit $A^*\colon Y^* \to X^*$,

$$(A^*y^*)(x) = y^*(Ax), \quad x \in X, \quad y^* \in Y^*,$$

nimetatakse operaatori A *kaasoperaatoriks.*

Märgime, et see definitsioon on korrektne, s.t. fikseeritud $y^* \in Y^*$ korral tõepoolest $A^*y^* \in X^*$.

Ülesanne 12.1. Veenduda selles. Seejuures tõestada, et $\|A^*y^*\| \leqslant \|A\|\,\|y^*\|$.

Lause 12.1. *Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kaasoperaator $A^*\colon Y^* \to X^*$ on pidev ja lineaarne, s.t. $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Seejuures $\|A^*\| = \|A\|$.*

TÕESTUS. Vahetult on kontrollitav, et kaasoperaator A^* on lineaarne.

Ülesanne 12.2. Tõestada, et operaator A^* on lineaarne.

Edasi, võrdustest

$$\begin{aligned}\sup_{y^*\in B_{Y^*}} \|A^*y^*\| &= \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sup_{x\in B_X} \big|(A^*y^*)(x)\big| = \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \sup_{x\in B_X} \big|y^*(Ax)\big| \\ &= \sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \big|y^*(Ax)\big| = \sup_{x\in B_X} \|Ax\| = \|A\|\end{aligned}$$

järeldub, et $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, kusjuures $\|A^*\| = \|A\|$. $\square$

Ülesanne 12.3. Olgu X normeeritud ruum. Tõestada, et $(I_X)^* = I_{X^*}$. (Siin I_X ja I_{X^*} on vastavalt ruumide X ja X^* ühikoperaatorid.)

Lause 12.2. *Olgu X, Y ja Z normeeritud ruumid ning olgu $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ja $C \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Siis*

(a) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

(b) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$;

(c) $(CA)^* = A^*C^*$.

(d) *kui A on pööratav, kusjuures $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, siis ka A^* on pööratav, kusjuures $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;*

TÕESTUS. (a), (b) ja (c). Fikseerime vabalt $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$ ja $x \in X$. Väidete (a), (b) ja (c) tõestuseks piisab näidata, et

(a) $\big((A + B)^*y^*\big)(x) = \big((A^* + B^*)\, y^*\big)(x)$;

(b) $\big((\alpha A)^* y^*\big)(x) = \big((\alpha A^*) y^*\big)(x)$;

(c) $\big((CA)^* z^*\big)(x) = (A^* C^* z^*)(x)$.

Ülesanne 12.4. Tõestada need võrdused.

(d). Eeldame, et A on pööratav, kusjuures $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Veendumaks, et A^* on pööratav, kusjuures $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, piisab tähele panna, et väite (c) ja ülesande 12.3 põhjal

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = (I_X)^* = I_{X^*}$$

ja

$$(A^{-1})^* A^* = (A\,A^{-1})^* = (I_Y)^* = I_{Y^*}.$$

□

Märkus 12.1. Olgu X ja Y on normeeritud ruumid. Lausest 12.2, (d), nähtub, et kui $A\colon X \to Y$ on (normeeritud ruumide) isomorfism, siis ka $A^*\colon Y^* \to X^*$ on (normeeritud ruumide) isomorfism. Niisiis, *kui X ja Y on isomorfsed, siis ka kaasruumid X^* ja Y^* on isomorfsed.* Järgnevast ülesandest järeldub, et *kui X ja Y on isomeetriliselt isomorfsed, siis ka kaasruumid X^* ja Y^* on isomeetriliselt isomorfsed.*

Ülesanne 12.5. Tõestada, et kui $A\colon X \to Y$ on isomeetriline isomorfism, siis ka $A^*\colon Y^* \to X^*$ on isomeetriline isomorfism.

Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatori $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ kaasoperaatorit $A^{**} := (A^*)^* \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ nimetatakse operaatori A *teiseks kaasoperaatoriks.* Analoogiliselt defineeritakse ka operaatori A kolmas kaasoperaator $A^{***} := (A^{**})^* \in \mathcal{L}(Y^{***}, X^{***})$ jne.

Ülesanne 12.6. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Siis

$$A^{**} j_X = j_Y\, A$$

(siin $j_X\colon X \to X^{**}$ ja $j_Y\colon Y \to Y^{**}$ on loomulikud sisestused teise kaasruumi, vt. § 10).

Ülesanne 12.7. Olgu X normeeritud ruum ning olgu $j_X\colon X \to X^{**}$ ja $j_{X^*}\colon X^* \to X^{***}$ loomulikud sisestused. Tõestada, et

(a) $(j_X)^* j_{X^*} = I_{X^*}$ (siin I_{X^*} on kaasruumi X^* ühikoperaator);

(b) $\pi := j_{X^*}(j_X)^* \in \mathcal{L}(X^{***}, X^{***})$ on projektor, kusjuures $\ker \pi = \big(j_X(X)\big)^\perp$ ja $\operatorname{ran} \pi = j_{X^*}(X^*)$.

Projektorit $\pi = j_{X^*}(j_X)^*\colon X^{***} \to X^{***}$ ülesandest 12.7, (b), nimetatakse *Dixmier' projektoriks.* Kuna $X^{***} = \operatorname{ran} \pi \oplus \ker \pi$, siis

$$X^{***} = j_{X^*}(X^*) \oplus \big(j_X(X)\big)^\perp. \tag{12.1}$$

Ülesanne 12.8. Olgu Y ruumi X kinnine alamruum ning olgu $q\colon X \to X/Y$ kanooniline kujutus.

(a) Tõestada, et $\operatorname{ran} q^* \subset Y^\perp$.

(b) Teoreemi 11.5, (b), põhjal on kujutus $T\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$,

$$(Tx^*)(x+Y) = x^*(x), \quad x \in X, \quad x^* \in Y^\perp,$$

isomeetriline isomorfism. Defineerime kujutuse $q^\times\colon (X/Y)^* \ni f \mapsto q^*f \in Y^\perp$ (teisisõnu, $q^\times$ on kaasoperaator q^* tõlgendatuna operaatorina $(X/Y)^* \to Y^\perp$ (meenutame, et väite (a) põhjal $\operatorname{ran} q^* \subset Y^\perp$)). Tõestada, et $q^\times = T^{-1}$.

II peatükk.
Hilberti ruumid

§ 1. Skalaarkorrutisega ruum. Hilberti ruum

1.1. Skalaarkorrutisega ruum

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et vektorruum H üle korpuse $\mathbb{K}$ on *skalaarkorrutisega ruum,* kui tema igale järjestatud elemendipaarile $x, y \in H$ on seatud vastavusse kindel arv $(x, y) \in \mathbb{K}$, mida nimetatakse elementide x ja y *skalaarkorrutiseks* ja mis rahuldab järgmisi tingimusi: kõikide $x, y, z \in H$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

1° $(x, x) \geqslant 0$, kusjuures $\big[\, (x, x) = 0 \iff x = 0 \,\big]$;

2° $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3° $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$;

4° $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

Märkus 1.1. (a) Kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis aksioom 2° omandab kuju

2° $(x, y) = (y, x)$;

(b) Skalaarkorrutisega ruumi vektoralamruum on samuti skalaarkorrutisega ruum.

Loetleme mõned skalaarkorrutise omadused: mis tahes $x, y, z \in H$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

(1) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

(2) $(x + y, x + y) = (x, x) + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + (y, y)$;

(3) $(x - y, x - y) = (x, x) - 2\,\mathrm{Re}(x, y) + (y, y)$;

(4) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$;

(5) $(x, 0) = (0, x) = 0$;

(6) $(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|^2(x, y)$.

Ülesanne 1.1. Tõestada omadused (1)–(6).

1.2. Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus

Teoreem 1.1 (Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus). *Olgu H skalaarkorrutisega ruum. Siis mis tahes $x, y \in H$ korral*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\,\sqrt{(y,y)}. \tag{1.1}$$

TÕESTUS. Olgu $x, y \in H$. Mis tahes $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x) + 2\operatorname{Re}(x,\alpha y) + (\alpha y, \alpha y)\\ &= (x,x) + 2\operatorname{Re}\overline{\alpha}(x,y) + |\alpha|^2(y,y).\end{aligned}$$

Kui $y \neq 0$, järeldub sellest võrratusteahelast, võttes $\alpha = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$, et

$$\begin{aligned}0 &\leqslant (x,x) + 2\operatorname{Re}\Big(-\overline{\frac{(x,y)}{(y,y)}}\,(x,y)\Big) + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}\,(y,y)\\ &= (x,x) - 2\operatorname{Re}\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} = (x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\\ &= (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)},\end{aligned}$$

millest $\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \leqslant (x,x)$, s.t võrratus (1.1) kehtib. Kui $y = 0$, siis on võrratuse (1.1) kehtivus ilmne. □

Ülesanne 1.2. Tõestada, et Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuses (1.1) kehtib võrdus parajasti siis, kui elemendid x ja y on lineaarselt sõltuvad.

NÄPUNÄIDE. Tarvilikkuse tõestuseks ideede leidmiseks soovitame uurida Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse tõestust.

1.3. Skalaarkorrutisega ruum kui normeeritud ruum. Hilberti ruumi mõiste

Teoreem 1.2. *Skalaarkorrutisega ruum H on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad x \in H. \tag{1.2}$$

TÕESTUS.

Ülesanne 1.3. Tõestada, et võrdusega (1.2) defineeritud funktsioon $\|\cdot\|$ rahuldab normi aksioome.

NÄPUNÄIDE. Kolmnurga võrratuse kontrolli juures näidata, et mis tahes $x, y \in H$ korral $\|x+y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$. Selleks kasutada Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratust.

□

Märkus 1.2. (a) Kui H on skalaarkorrutisega ruum, siis (eelmises paragrahvis toodud skalaarkorrutise omaduste (2)–(3) põhjal) mis tahes $x, y \in H$ korral

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2. \tag{1.3}$$

(b) Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse võib skalaarkorrutisega ruumi H normi abil panna kirja järgmiselt:

$$|(x,y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Teoreem 1.3. *Skalaarkorrutisega ruumis H kehtib* rööpküliku võrdus:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \textit{mis tahes } x,y \in H \textit{ korral,} \tag{1.4}$$

s.t. rööpküliku diagonaalide ruutude summa on võrdne tema külgede ruutude summaga.

Märkus 1.3. Saab näidata (vt. ülesannet 1.6), et kui normeeritud ruumis H kehtib rööpküliku võrdus (1.4), siis saab selles ruumis defineerida skalaarkorrutise $(\cdot,\cdot)$ nii, et tema norm esitub võrdusega (1.2). Niisiis, normeeritud ruumi norm on indutseeritud mingi skalaarkorrutise poolt parajasti siis, kui see norm rahuldab rööpküliku võrdust.

Teoreemi 1.3 tõestus. Olgu $x, y \in H$. Siis võrduse (1.3) põhjal

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x,y) + \|y\|^2 \\ &= 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).\end{aligned}$$

□

Lause 1.4. *Skalaarkorrutis ruumis H on tema poolt indutseeritud normi suhtes pidev, s.t. kui $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ ruumis H, siis $(x_n, y_n) \to (x,y)$.*

Tõestus. Olgu $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ ruumis H, s.t. $\|x_n - x\| \to 0$ ja $\|y_n - y\| \to 0$. Siis Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}\big|(x_n,y_n) - (x,y)\big| &= \big|(x_n,y_n) - (x,y_n) + (x,y_n) - (x,y)\big| \\ &= \big|(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)\big| \leqslant \big|(x_n - x, y_n)\big| + \big|(x, y_n - y)\big| \\ &\leqslant \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,\|y\| + \|x\|\,0 = 0.\end{aligned}$$

□

Definitsioon 1.2. Skalaarkorrutisega ruumi (vaadelduna normeeritud ruumina) nimetatakse *pre-Hilberti ruumiks.* Täielikku skalaarkorrutisega ruumi nimetatakse *Hilberti ruumiks.*

Vahetult Hilberti ruumi definitsioonist ja faktist, et täieliku normeeritud ruumi alamruum on täielik parajasti siis, kui ta on kinnine, järeldub

Lause 1.5. *Hilberti ruumi (vektor)alamruum on Hilberti ruum parajasti siis, kui ta on kinnine.*

Paragrahvi lõpetuseks toome mõned näited Hilberti ruumide kohta.

Näide 1.1. Meile tuntud ruumidest on Hilberti ruumid järgmised:

- ℓ_2^n—skalaarkorrutisega

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\,\overline{\eta_j},\quad x=(\xi_j)_{j=1}^n,\ y=(\eta_j)_{j=1}^n\in\ell_2^n;$$

- ℓ_2—skalaarkorrutisega

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\,\overline{\eta_j},\quad x=(\xi_j)_{j=1}^\infty,\ y=(\eta_j)_{j=1}^n\in\ell_2;$$

- $L_2(a,b)$—skalaarkorrutisega

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt,\quad x,y\in L_2(a,b).$$

Igaühes neist ruumidest indutseerib skalaarkorrutis esialgse normi.

Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

Ülesanne 1.4. Olgu H prehilberti ruum ning olgu $x,y,x_j\in H$, $j\in\mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) $(x,z)=(y,z)$ iga $z\in H$ korral $\implies$ $x=y$;

(b) $(z,x)=(z,y)$ iga $z\in H$ korral $\implies$ $x=y$;

(c) $\|x\|^2=\operatorname{Re}(x,y)=\|y\|^2 \implies x=y$;

(d) kui H on reaalne ruum, siis $\Big[(x-y,x+y)=0 \iff \|x\|=\|y\|\Big]$;

(e) $\|x\|=\|y\|=\big\|\frac12(x+y)\big\|=1 \implies x=y$;

(f) $(x_j,x)\xrightarrow[j\to\infty]{}(x,x)$, $\|x_j\|\xrightarrow[j\to\infty]{}\|x\| \implies x_j\xrightarrow[j\to\infty]{}x$;

(g) kehtib üldistatud rööpküliku võrdus: mis tahes $n\in\mathbb{N}$ korral

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\,x_j\Big\|^2=2^n\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

Ülesanne 1.5. Olgu H prehilberti ruum. Tõestada, et mis tahes $x,y\in H$ korral

(a) $(x,iy)=-(ix,y)$;

(b) $\operatorname{Im}(x,y)=\operatorname{Re}(x,iy)=-\operatorname{Re}(ix,y)$;

(c) $\operatorname{Re}(x,y)=-\operatorname{Im}(x,iy)=\operatorname{Im}(ix,y)$;

(d) $\operatorname{Re}(x,y)=\dfrac14\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)$;

(e) $\operatorname{Im}(x,y)=\dfrac14\big(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\big)$.

Ülesanne 1.6. Tõestada, et kui normeeritud ruumis H kehtib rööpküliku võrdus, s.t.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \quad \text{mis tahes } x, y \in H \text{ korral,}$$

siis juhul, kui H on reaalne ruum, saab temas defineerida skalaarkorrutise võrdusega

$$(x,y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big), \quad x, y \in H,$$

kui aga H on kompleksne ruum, siis võrdusega

$$(x,y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\big), \quad x, y \in H.$$

Seejuures mõlemal juhul on ruumi H norm indutseeritud selle skalaarkorrutise poolt, s.t.

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \quad \text{iga } x \in H \text{ korral.}$$

Märkus 1.4. Kui definitsioonis 1.1 kehtib aksioomi

1° $(x,x) \geqslant 0$, kusjuures $\big[\,(x,x) = 0 \iff x = 0\,\big]$

asemel (temast nõrgem) aksioom

$1^{\circ\circ}$ $(x,x) \geqslant 0$,

siis öeldakse, et H on *poolskalaarkorrutisega ruum* ning arvu (x,y) nimetatakse elementide x ja y *poolskalaarkorrutiseks.*

Poolskalaarkorrutisel on kõik skalaarkorrutise omadused (1)–(6) leheküljelt 49. Samuti jääb teoreem 1.1 kehtima, kui temas eeldada, et H on poolskalaarkorrutisega ruum. Teisisõnu, Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus kehtib ka poolskalaarkorrutise jaoks.

Ülesanne 1.7. Tõestada teoreem 1.1 eeldusel, et H on poolskalaarkorrutisega ruum (s.t. tõestada Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratus poolskalaarkorrutise jaoks).

NÄPUNÄIDE. Kohandada sobivalt teoreemi 1.1 tõestust.

Juhime tähelepanu, et ülesande 1.2 väide poolskalaarkorrutise jaoks ei üldjuhul ei kehti.

Märgime, et poolskalaarkorrutisega ruumis H on funktsioon

$$H \ni x \mapsto \sqrt{(x,x)}$$

poolnorm.

§ 2. Ortogonaalsus skalaarkorrutisega ruumis

Kõikjal selles paragrahvis olgu H skalaarkorrutisega ruum, olgu $A, B \subset H$ ning olgu $x, y, x_j, y_j \in H$, $j \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et

- elemendid x ja y on *ortogonaalsed* ja kirjutatakse $x \perp y$, kui $(x, y) = 0$;
- element x on *ortogonaalne* hulgaga A ja kirjutatakse $x \perp A$, kui $x \perp a$ iga $a \in A$ korral;
- hulgad A ja B on ortogonaalsed ja kirjutatakse $A \perp B$, kui $a \perp b$ kõikide $a \in A$ ja $b \in B$ korral.

GEOM. TÕLGENDUS, JOONIS!

Definitsioon 2.2. Alamhulga A *ortogonaalseks täiendiks* nimetatakse hulka

$$A^\perp := \big\{x \in H\colon\ x \perp A\big\}.$$

Järgnev lause võtab kokku lihtsamad ortogonaalsusega seotud omadused.

Lause 2.1. (1) $x \perp x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

(2) $x \perp y \quad \Longrightarrow \quad y \perp x$;

(3) $x \perp \{y_1, \dots, y_n\}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad x \perp \sum_{j=1}^n y_j$;

(4) $x \perp y \quad \Longrightarrow \quad x \perp \alpha y$ iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral;

(5) $x \perp y_j$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral, $y_j \to y \quad \Longrightarrow \quad x \perp y$;

(6) $x_j \perp y_j$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral, $x_j \to x$, $y_j \to y \quad \Longrightarrow \quad x \perp y$;

(7) $x \perp H \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

(8) $x \in A \cap A^\perp \quad \Longrightarrow \quad x = 0$;

(9) $x \perp A \quad \Longrightarrow \quad x \perp \operatorname{span} A$;

(10) $x \perp A \quad \Longrightarrow \quad x \perp \overline{A}$;

(11) $x \perp A \quad \Longrightarrow \quad x \perp \overline{\operatorname{span} A}$;

(12) $x \perp A$, kus A on põhihulk (s.t. $\overline{\operatorname{span} A} = H$) $\quad \Longrightarrow \quad x = 0$;

(13) $A^\perp = (\overline{\operatorname{span} A})^\perp$;

(14) $A^\perp$ on ruumi H kinnine alamruum.

TÕESTUS.

Ülesanne 2.1. Tõestada väited (1)–(14).

□

Teoreem 2.2 (Pythagorase teoreem)**.** *Olgu elemendid* $x_1, \ldots, x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ *paarikaupa ortogonaalsed, s.t.* $x_i \perp x_j$, *kui* $i \neq j$. *Siis*

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

TÕESTUS. Skalaarkorrutisega ruumi normi definitsiooni kohaselt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(x_j, \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_j, x_i).$$

Kuna $i \neq j$ korral $(x_j, x_i) = 0$, siis

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j, x_j) = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

□

Teoreem 2.3. *Olgu H Hilberti ruum. Paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida* $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ *ruumis H koondub parajasti siis, kui tema liikmete normide ruutude rida koondub, s.t.*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty.$$

Seejuures

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2.$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Kui rida $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ koondub, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j\Big\|^2 = \Big\|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^2.$$

Muuhulgas $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$.

Piisavus. Olgu $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 < \infty$. Kuna Hilberti ruum H on täielik, siis piisab rea $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ koonduvuseks ruumis H näidata, et tema osasummade jada on Cauchy jada, s.t. $m \geqslant n$ korral

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j\Big\| = \Big\|\sum_{j=n+1}^{m} x_j\Big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Veendume selles: kui $m \geqslant n$, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$\Big\|\sum_{j=n+1}^{m} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|^2 \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(sest koonduva arvrea $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ jääkliige koondub nulliks), aga siit järeldub, et ka $\Big\|\sum_{j=n+1}^{m} x_j\Big\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud. □

NB! Alates järgnevast paragrahvist sõnastame enamiku tulemustest ainult Hilberti ruumide jaoks, kuigi osa neist kehtib ka pre-Hilberti ruumide juhul.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 2.2. Olgu H reaalne skalaarkorrutisega ruum ning olgu $x, y \in H$. Tõestada, et

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2.$$

Kas see samaväärsus kehtib ka kompleksses ruumis?

Ülesanne 2.3. Olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu $x, y \in H$. Tõestada, et

(a) $x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x\| \leqslant \|x+\alpha y\|$ iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral;

(b) $x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x-\alpha y\| \leqslant \|x+\alpha y\|$ iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral.

Ülesanne 2.4. Kas rida $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ koondub ruumis ℓ_2, kui

(a) $x_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, 0, \ldots)$;

(b) $x_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, \tfrac{1}{k}}_{k}, 0, 0, \ldots)$;

(c) $x_k = (\underbrace{0, \ldots, 0, \tfrac{1}{\sqrt{k}}}_{k}, 0, 0, \ldots)$.

§ 3. Parima lähendi olemasolu Hilberti ruumi kinnises alamruumis

Kui X on normeeritud ruum ning $L \subset X$ ja $x \in X$, siis elemendi x kaugus hulgast L defineeritakse võrdusega

$$d(x, L) := \inf_{z \in L} \|x - z\|.$$

Seejuures

- üldjuhul (isegi siis, kui L on kinnine alamruum) ei tarvitse elemendil x eksisteerida alamhulgas L *parimat lähendit,* s.t. niisugust elementi $y \in L$, mille korral $d(x, L) = \|x - y\|$ (vt. ülesandeid 3.3 ja 3.4 ning teoreemi 3.4);
- üldjuhul ei tarvitse elemendi x parim lähend alamhulgast L (kui ta eksisteerib) olla üheselt määratud (vt. näit. ülesannet 3.5).

Järgnevas näeme, et kui L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum, siis mis tahes elemendil $x \in H$ on alamruumis L parim lähend olemas, kusjuures see lähend on ainus.

Teoreem 3.1. *Olgu L Hilberti ruumi H kinnine alamruum ning olgu $x \in H$. Siis leidub parajasti üks element $y \in L$ nii, et*

$$\|x - y\| = d(x, L).$$

TÕESTUS. Olgu $y_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et

$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x, L) =: d.$$

Elemendi x parima lähendi olemasoluks alamruumis L piisab näidata, et jada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub, sest sel juhul alamruumi L kinnisuse tõttu $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in L$, kusjuures

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d,$$

s.t. y on elemendi x parim lähend alamruumis L. Jada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ koonduvuseks piisab ruumi H täielikkuse tõttu näidata, et ta on Cauchy jada, s.t. $\|y_m - y_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$. Selleks paneme tähele, et mis tahes $m, n \in \mathbb{N}$ korral rööpküliku võrduse põhjal (JOONIS!)

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\big(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\big) - \|y_m + y_n - 2x\|^2.$$

Kuna

$$\|y_m + y_n - 2x\|^2 = 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\right\|^2 \geqslant 4d^2$$

(sest kuna L on alamruum, siis $\frac{y_m+y_n}{2} \in L$ ning järelikult $\left\|\frac{y_m+y_n}{2} - x\right\| \geqslant d$), siis

$$0 \leqslant \|y_m - y_n\|^2 \leqslant 2\big(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\big) - 4d^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

seega $\|y_m - y_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud.

Jääb veenduda parima lähendi ühesuses. Olgu $y_1, y_2 \in L$ sellised, et $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Peame näitama, et $y_1 = y_2$. Rööpküliku võrduse põhjal (JOONIS!)

$$2\big(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\big) = \|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 + y_2 - 2x\|^2,$$

millest

$$4d^2 = \|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \geqslant \|y_1 - y_2\|^2 + 4d^2$$

(kuna $\frac{y_1+y_2}{2} \in L$, siis $\left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\| \geqslant d$), mis on võimalik vaid siis, kui $y_1 = y_2$. □

Märkus 3.1. Teoreemi 3.1 väide jääb kehtima, kui seal asendada eeldus, et L on ruumi H kinnine alamruum, (nõrgema) eeldusega, et L on ruumi H kinnine kumer alamhulk. Seejuures jääb ka teoreemi tõestus peaaegu sõna-sõnalt samaks.

Teoreem 3.2. *Olgu L Hilberti ruumi H alamruum ning olgu $x \in H$ ja $y \in L$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *y on elemendi x parim lähend alamruumist L;*

(ii) *$x - y \perp L$.*

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Olgu y elemendi x parim lähend alamruumist L ning olgu $u \in L$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et $(x - y, u) = 0$, kusjuures üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|u\| = 1$. Selleks paneme tähele, et iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \min_{z\in L} \|x - z\|^2 \leqslant \|x - (y + \alpha u)\|^2 = \|(x - y) - \alpha u\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x - y, \alpha u) + \|\alpha u\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{\alpha}\,(x - y, u) + |\alpha|^2,\end{aligned}$$

järelikult iga $\alpha \in \mathbb{K}$ korral

$$2\operatorname{Re}\overline{\alpha}\,(x - y, u) \leqslant |\alpha|^2.$$

Võttes $\alpha = (x - y, u)$, saame viimasest võrratusest, et

$$2\,|(x - y, u)|^2 \leqslant |(x - y, u)|^2,$$

mis on võimalik vaid siis, kui $(x - y, u) = 0$.

(ii)⇒(i). Olgu $x - y \perp L$. Siis mis tahes $u \in Y$ korral

$$\|x - u\|^2 = \|(x - y) + (y - u)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - u\|^2$$

(viimane võrdus kehtib Pythagorase teoreemi põhjal, sest kuna $y - u \in L$, siis eelduse $x - y \perp L$ põhjal $x - y \perp y - u$); seega $\min_{u\in L} \|x - u\| = \|x - y\|$, s.t. y on elemendi x parim lähend alamruumis L. □

Ülesanne 3.1. Tõestada parima lähendi ühesus teoreemis 3.1 kasutades teoreemi 3.2 implikatsiooni (i)⇒(ii).

Teoreem 3.3. *Olgu K Hilberti ruumi H kumer alamhulk ning olgu $x \in H$ ja $y \in K$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *y on elemendi x parim lähend alamhulgas K;*

(ii) $\operatorname{Re}(x-y, v-y) \leqslant 0$ *iga $v \in K$ korral.*

TÕESTUS.

Ülesanne 3.2. Tõestada teoreem 3.3.

□

Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

Ülesanne 3.3. Olgu $L := \Big\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \colon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1}\, \xi_j = 0\Big\}$. Tõestada, et

(a) L on ruumi ℓ_1 kinnine alamruum;

(b) $d(e_1, L) = \frac{1}{2}$;

(c) iga $y \in L$ korral $\|e_1 - y\| > \frac{1}{2}$.

Ülesanne 3.4. Olgu $\alpha_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$ ning $L := \Big\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0 \colon \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \xi_j = 0\Big\}$. Tõestada, et

(a) L on ruumi c_0 kinnine alamruum;

(b) $d(e_1, L) = \alpha_1$;

(c) iga $y \in L$ korral $\|e_1 - y\| > \alpha_1$.

Märkus 3.2. Ülesannete 3.3 ja 3.4 taga peituvat fenomeni selgitab järgnev teoreem 3.4.

Teoreem 3.4. *Olgu X Banachi ruum ning olgu $f \in X^* \backslash \{0\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *leidub $z \in S_X$ nii, et $|f(z)| = \|f\|$;*

(ii) *iga $x \in X \backslash \ker f$ korral leidub $y \in \ker f$ nii, et $\|x - y\| = d(x, \ker f)$;*

(iii) *leidub $x \in X \backslash \ker f$, mille korral leidub $y \in \ker f$ nii, et $\|x - y\| = d(x, \ker f)$.*

TÕESTUS. Teoreemi tõestus toetub järgmisele tähelepanekule: mis tahes $x \in X \backslash \ker f$ korral $X = \operatorname{span}\{x\} \oplus \ker f$ (vt. ülesannet I.9.8), seega

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup_{z \in S_X} |f(z)| = \sup_{u \in X \backslash \ker f} \left| f\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right| = \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\} \\ v \in \ker f}} \left| f\left(\frac{\alpha x + v}{\|\alpha x + v\|}\right) \right| = \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\} \\ v \in \ker f}} \frac{|f(\alpha x + v)|}{\|\alpha x + v\|} \\
&= \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\} \\ v \in \ker f}} \frac{|\alpha|\, \left|f\left(x + \frac{1}{\alpha}\, v\right)\right|}{|\alpha|\, \left\|x + \frac{1}{\alpha}\, v\right\|} = \sup_{y \in \ker f} \frac{|f(x+y)|}{\|x+y\|} = \sup_{y \in \ker f} \frac{|f(x)|}{\|x+y\|} = \sup_{y \in \ker f} \frac{|f(x)|}{\|x-y\|} \\
&= \frac{|f(x)|}{\inf\limits_{y \in \ker f} \|x-y\|} = \frac{|f(x)|}{d(x, \ker f)}.
\end{aligned}$$

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i) ning olgu $x \in X \backslash \ker f$. Siis mingite $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ ja $v \in \ker f$ korral $z = \alpha x + v$, seega

$$\|f\| = |f(z)| = \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \frac{|f(\alpha x + v)|}{\|\alpha x + v\|} = \frac{\left|f\left(x + \frac{1}{\alpha}\, v\right)\right|}{\left\|x + \frac{1}{\alpha}\, v\right\|} = \frac{|f(x)|}{\left\|x + \frac{1}{\alpha}\, v\right\|} = \frac{|f(x)|}{\left\|x - \left(-\frac{1}{\alpha}\, v\right)\right\|},$$

millest valemi $\|f\| = \frac{|f(x)|}{d(x,\ker f)}$ põhjal

$$\left\| x - \left(-\tfrac{1}{\alpha}\, v\right) \right\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|} = d(x, \ker f).$$

(ii)⇒(iii) on ilmne.

(iii)⇒(i). Kehtigu (iii). Siis

$$\|f\| = \frac{|f(x)|}{d(x, \ker f)} = \frac{|f(x)|}{\|x-y\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|} = \left| f\left(\frac{x-y}{\|x-y\|} \right) \right|,$$

seega, $z := \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, kusjuures $|f(z)| = \|f\|$. □

Ülesanne 3.5. Leida elemendi $e = (1, 1, 1, \ldots)$ kaugus $d(e, c_0)$ alamruumist c_0 ruumis c. Leida $x_1, x_2 \in c_0$, $x_1 \neq x_2$, mille korral $\|e - x_1\| = \|e - x_2\| = d(e, c_0)$.

§ 4. Projektsioonide teoreem

4.1. Ortogonaalsumma. Projektsioonide teoreem

Definitsioon 4.1. Olgu H Hilberti ruum ning olgu L ja M ruumi H kinnised alamruumid. Kui $L \perp M$ ning iga $x \in H$ esitub kujul

$$x = y + z, \quad \text{kus } y \in L \text{ ja } z \in M,$$

siis öeldakse, et H on alamruumide L ja M *ortogonaalsumma* ja kirjutatakse

$$H = L \oplus M.$$

Ortogonaalsumma märkimiseks kasutatakse sama tähistust, mis otsesumma jaoks. Ortogonaalsumma ja otsesumma mõistete vahekorda selgitavad järgnev lause 4.1 ja märkus 4.1. Järgnevas reserveerime sümboli $\oplus$ ortogonaalsumma jaoks.

Lause 4.1. *Hilberti ruumi alamruumide ortogonaalsumma on otsesumma.*

TÕESTUS. Olgu Hilberti ruum H kinniste alamruumide L ja M ortogonaalsumma ning olgu $y+z = y'+z'$, kus $y, y' \in L$ ja $z, z' \in M$. Veendumaks, et ortogonaalsumma $L \oplus M$ on otsesumma, piisab näidata, et $y' = y$ ja $z' = z$. Selleks paneme tähele, et kuna L ja M on alamruumid, siis $L \ni y - y' = z' - z \in M \subset L^{\perp}$. Kuna $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, siis $y - y' = z' - z = 0$, s.t. $y' = y$ ja $z' = z$, nagu soovitud. □

Märkus 4.1. Hilberti ruumi kinniste alamruumide otsesumma ei tarvitse olla üldjuhul ortogonaalsumma: näiteks reaalne Hilberti ruum ℓ_2^2 on oma (kinniste) alamruumide

$$L := \{(\xi, 0) \colon \xi \in \mathbb{R}\} \quad \text{ja} \quad M := \{(\xi, \xi) \colon \xi \in \mathbb{R}\}$$

otsesumma, kuid mitte ortogonaalsumma, sest $L \not\perp M$.

Teoreem 4.2 (projektsioonide teoreem). *Olgu L Hilberti ruumi H kinnine alamruum. Siis iga $x \in H$ esitub üheselt kujul*

$$x = y + z, \quad \textit{kus } y \in L \textit{ ja } z \in L^{\perp}, \tag{4.1}$$

Niisiis $H = L \oplus L^{\perp}$. Seejuures element $y \in L$ esituses (4.1) *on elemendi x parim lähend alamruumist L.*

Definitsioon 4.2. Elementi y esitusest (4.1) (s.t. elemendi x parimat lähendit alamruumist L) nimetatakse elemendi x *ortogonaalseks projektsiooniks* alamruumile L.

PROJEKTSIOONIDE TEOREEMI 4.2 TÕESTUS. Olgu $x \in H$ ning olgu $y \in L$ elemendi x parim lähend alamruumist L. Teoreemi tõestuseks piisab (lause 4.1 põhjal) märkida, et teoreemi 3.2 põhjal $z := x - y \in L^{\perp}$, kusjuures $x = y + (x - y) = y + z$. □

Lause 4.3. *Olgu H Hilberti ruum ning olgu L ja M ruumi H kinnised alamruumid. Kui $H = L \oplus M$, siis $M = L^{\perp}$.*

Tõestus. Olgu $H = L \oplus M$. Siis $L \perp M$, seega $M \subset L^\perp$, niisiis jääb näidata, et $L^\perp \subset M$. Olgu $x \in L^\perp$. Peame näitama, et $x \in M$. Kuna $H = L \oplus M$, siis element x esitub kujul $x = y + z$, kus $y \in L$ ja $z \in M \subset L^\perp$. Kuna $y = x - z \in L^\perp$, siis $y = 0$ (sest $y \in L \cap L^\perp = \{0\}$), seega $x = z \in M$, nagu soovitud. □

Lause 4.4. *Olgu H Hilberti ruum ning olgu $A \subset H$. Siis $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span} A}$.*

Tõestus. Kuna $A^\perp = (\overline{\operatorname{span} A})^\perp$ (vt. lause 2.1), siis piisab näidata, et ruumi H kinninse alamruumi L korral $(L^\perp)^\perp = L$. Projektsioonide teoreemi põhjal liitmise kommutatiivsuse tõttu

$$H = L \oplus L^\perp = L^\perp \oplus L$$

Lause 4.3 põhjal $(L^\perp)^\perp = L$. □

4.2. Ortoprojektorid

Olgu H Hilberti ruum ning olgu L ruumi H kinnine alamruum. Projektsioonide teoreemist teame, et $H = L \oplus L^\perp$ (ortogonaalsumma). Teame, et iga ortogonaalsumma on otsesumma.

Definitsioon 4.3. Lineaarset projektorit $P\colon H \to H$, mille puhul $\operatorname{ran} P = L$ ja $\ker P = L^\perp$, nimetatakse *ortoprojektoriks* ((kinnisele) alamruumile L).

Lause 4.5. *Olgu P ortoprojektor Hilberti ruumi H kinnisele alamruumile L. Siis*

(a) *$P \in \mathcal{L}(H, H)$ (s.t. P on pidev ja lineaarne); seejuures, kui $L \neq \{0\}$, siis $\|P\| = 1$.*

(b) *P on sümmeetriline, s.t.*

$$(Px, y) = (x, Py) \quad \text{mis tahes } x, y \in H \text{ korral.}$$

Tõestus. (a). Olgu $x \in H$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $\|Px\| \leqslant \|x\|$.

Tõepoolest, niisugusel juhul on P tõkestatud ning seega pidev, kusjuures $\|P\| \leqslant 1$. Kuna pideva nullist erineva projektori norm on alati $\geqslant 1$, siis juhul $L \neq \{0\}$ kehtib $\|P\| = 1$).

Kuna $x = Px + (x - Px)$, kusjuures $Px \perp (x - Px)$ (sest $Px \in \operatorname{ran} P = L$ ja $x - Px \in \ker P = L^\perp$), siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2,$$

millest järeldubki, et $\|Px\| \leqslant \|x\|$.

(b). Olgu $x, y \in H$. Siis

$$\begin{aligned}(Px, y) &= (Px, y) - (Px, y - Py) = (Px, Py) = (x - Px, Py) + (Px, Py) \\ &= (x, Py).\end{aligned}$$

□

Piisavaid tingimusi selleks, et pidev lineaarne projektor Hilberti ruumis oleks ortoprojektor, annab ülesanne 4.2.

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 4.1. Olgu L Hilberti ruumi H kinnine pärisalamruum (s.t. $L \subsetneq H$). Tõestada, et leidub $x \in L^{\perp} \backslash \{0\}$.

NÄPUNÄIDE. Kasutada projektsioonide teoreemi.

Ülesanne 4.2. Olgu H Hilberti ruum ning olgu $P\colon H \to H$ pidev lineaarne projektor. Tõestada, et

(a) kui $\operatorname{ran} P \perp \ker P$, siis P on ortoprojektor (kinnisele alamruumile $\operatorname{ran} P$);

(b) kui $\|P\| = 1$, siis P on ortoprojektor (kinnisele alamruumile $\operatorname{ran} P$);

(c) kui P on sümmeetriline, siis P on ortoprojektor (kinnisele alamruumile $\operatorname{ran} P$).

NÄPUNÄIDE. Väite (b) tõestuseks näidata, et $\operatorname{ran} P \perp \ker P$. Selleks kasutada ülesannet 2.3, (a).

Märkus 4.2. Ülesande 4.2 väide (c) kehtib ka ilma eelduseta projektori P pidevuse ja lineaarsuse kohta, sest iga sümmeetriline operaator Hilberti ruumis on pidev ja lineaarne (vt. ülesannet 4.3).

Definitsioon 4.4. Olgu H skalaarkorrutisega ruum. Öeldakse, et operaator $A\colon H \to H$ on *sümmeetriline,* kui
$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{mis tahes } x, y \in H \text{ korral.}$$

Ülesanne 4.3. Olgu H skalaarkorrutisega ruum ning olgu $A\colon H \to H$ sümmeetriline operaator. Tõestada, et

(a) A on lineaarne;

(b) kui H on Hilberti ruum, siis A on pidev.

NÄPUNÄIDE. Võrduse $A(\alpha x + y) = \alpha Ax + Ay$ tõestuseks kasutada ülesannet 1.4, (a). Operaatori A pidevuse tõestuseks (ruumi H täielikkuse eeldusel) kasutada teoreemi kinnisest graafikust. Selleks, kui $x_n \to x$ ja $Ax_n \to y$ ruumis H, siis võrduse $Ax = y$ tõestuseks kasutada jällegi ülesannet 1.4, (a).

§ 5. Hilberti ruumi kaasruum

5.1. F. Rieszi teoreem pideva lineaarse funktsionaali üldkujust Hilberti ruumis

Olgu H Hilberti ruum ning olgu $y \in H$. Paneme tähele, et funktsionaal $f\colon H \to \mathbb{K}$,

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H, \tag{5.1}$$

on pidev ja lineaarne, kusjuures $\|f\| = \|y\|$.

Ülesanne 5.1. Tõestada, et $f \in H^*$, kusjuures $\|f\| = \|y\|$.

Järgnev teoreem ütleb, et iga $f \in H^*$ on esitatav ülaltoodud viisil.

Teoreem 5.1 (F. Rieszi teoreem pideva lineaarse funktsionaali üldkujust Hilberti ruumis)**.** *Olgu H Hilberti ruum ning olgu $f\colon H \to \mathbb{K}$. Siis $f \in H^*$ parajasti siis, kui leidub element $y \in H$ nii, et kehtib* (5.1)*. Seejuures $\|f\| = \|y\|$ ja element y on üheselt määratud.*

TÕESTUS. *Piisavus* ja võrdus $\|f\| = \|y\|$ on tõestatud ülesandes 5.1.

Tarvilikkus. Olgu $f \in H^*$. Leiame elemendi $y \in H$ nii, et kehtib (5.1). Kui $f = 0$, siis võime võtta $y = 0$. Niisiis jääb vaadelda juhtu, kus $f \neq 0$. Sellisel juhul $\ker f \neq H$, järelikult leidub $z \in (\ker f)^\perp \setminus \{0\}$.

Tõepoolest, kuna projektsioonide teoreemi põhjal $H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$, siis $(\ker f)^\perp \neq \{0\}$, sest vastasel korral oleks $H = \ker f$. Seega leidub $z \in (\ker f)^\perp \setminus \{0\}$.

Paneme tähele, et iga $x \in H$ korral

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z\right) = 0,$$

s.t. $x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z \in \ker f$, järelikult (arvestades, et $z \in (\ker f)^\perp$)

$$\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z, z\right) = 0,$$

millest

$$(x, z) = \frac{f(x)}{f(z)}\,(z, z) = \frac{f(x)}{f(z)}\,\|z\|^2,$$

järelikult

$$f(x) = \frac{f(z)}{\|z\|^2}\,(x, z) = \left(x, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}\, z\right).$$

Niisiis me võime võtta $y = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}\, z$.

Jääb tõestada elemendi y ühesus esituses (5.1). Olgu $y, y' \in H$ sellised, et iga $x \in H$ korral $f(x) = (x, y) = (x, y')$. Peame näitama, et $y = y'$. Kuna iga $x \in H$ korral $(x, y - y') = 0$, siis $y - y' \perp H$, järelikult $y - y' = 0$ ehk $y = y'$, nagu soovitud. $\square$

Paneme tähele, et kujutus $J\colon H \to H^*$,

$$(Jy)(x) = (x, y), \quad x \in H,\ y \in H, \tag{5.2}$$

on *kaaslineaarne,* s.t.

1° $J(y + z) = Jy + Jz$ kõikide $y, z \in H$ korral (s.t. J on aditiivne);

2° $J(\alpha y) = \overline{\alpha} Jy$ kõikide $y \in H$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ korral (s.t. J on *kaashomogeenne*).

Ülesanne 5.2. Tõestada, et J on kaaslineaarne.

Kui H on reaalne Hilberti ruum, siis J on lineaarne. F. Rieszi teoreemi 5.1 põhjal J on bijektsioon, kusjuures iga $y \in H$ korral $\|Jy\| = \|y\|$, s.t. J on isomeetriline.

Võrdusega (5.2) defineeritud kujutust $J\colon H \to H^*$ nimetatakse *kanooniliseks isomorfismiks* Hilberti ruumi H ja tema kaasruumi H^* vahel.

Ülesanne 5.3. Tõestada, et $J^{-1}\colon H^* \to H$ on kaaslineaarne.

Järeldus 5.2. *Olgu H Hilberti ruum. Siis iga $x \in H$ korral*

$$\|x\| = \sup_{y \in B_H} |(x, y)|. \tag{5.3}$$

TÕESTUS. Olgu $x \in H$ ning olgu $J\colon H \to H^*$ kanooniline isomorfism. Hahn–Banachi teoreemi järelduse I.10.5 põhjal

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{H^*}} |f(x)| = \sup_{y \in B_H} |(Jy)(x)| = \sup_{y \in B_H} |(x, y)|.$$

□

Märkus 5.1. Valem (5.3) on järeldatav ka Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratusest.

Ülesanne 5.4. Järeldada valem (5.3) Cauchy–Schwarz–Bunjakovski võrratusest.

Järeldus 5.3. *Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Siis*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in B_{H_1} \\ y \in B_{H_2}}} |(Ax, y)|.$$

TÕESTUS. Järelduse 5.2 põhjal

$$\|A\| = \sup_{x \in B_{H_1}} \|Ax\| = \sup_{x \in B_{H_1}} \sup_{y \in B_{H_2}} |(Ax, y)| = \sup_{\substack{x \in B_{H_1} \\ y \in B_{H_2}}} |(Ax, y)|.$$

□

5.2. Hilberti ruumi kaasruum kui Hilberti ruum

Teoreem 5.4. *Hilberti ruumi kaasruum on Hilberti ruum.*

Tõestus. Olgu H Hilberti ruum. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et norm ruumi H kaasruumis on indutseeritud skalaarkorrutise poolt, s.t. me saame defineerida skalaarkorrutise $(\cdot\,,\cdot\,)$ ruumis H^* nii, et

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad \text{iga } f \in H^* \text{ korral.}$$

Olgu $J\colon H \to H^*$ kanooniline isomorfism. Defineerime $f, g \in H^*$ korral

$$(f, g) = (J^{-1}g, J^{-1}f).$$

Siis $(\cdot\,,\cdot\,)$ on skalaarkorrutis.

Ülesanne 5.5. Veenduda, et $(\cdot\,,\cdot\,)$ rahuldab skalaarkorrutise aksioome.

Seejuures iga $f \in H^*$ korral

$$\|f\| = \|J^{-1}f\| = \sqrt{(J^{-1}f, J^{-1}f)} = \sqrt{(f, f)}.$$

□

5.3. Hilberti ruumi refleksiivsus

Teoreem 5.5. *Hilberti ruum on refleksiivne.*

Meenutame (vt. definitsioon I.10.1), et Banachi ruumi X nimetatakse *refleksiivseks,* kui tema kanooniline sisestus oma teise kaasruumi $j_X\colon X \to X^{**}$, kus

$$(j_X x)(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*,\, x \in X,$$

on sürjektsioon.

Teoreemi 5.5 tõestus. Olgu H Hilberti ruum ning olgu $F \in H^{**}$. Ruumi H refleksiivuseks piisab näidata, et leidub $x \in H$ nii, et $j_H x = F$, s.t. iga $f \in H^*$ korral

$$F(f) = (j_H x)(f) = f(x).$$

Olgu $J\colon H \to H^*$ kanooniline isomorfism. Kuna H^* on Hilberti ruum, siis F. Rieszi teoreemi 5.1 põhjal leidub $g \in H^*$ nii, et iga $f \in H^*$ korral

$$F(f) = (f, g) = (J^{-1}g, J^{-1}f) = f(J^{-1}g).$$

Niisiis me võime võtta $x = J^{-1}g \in H$. □

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 5.6. Ilma Hahn–Banachi teoreemi kasutamata tõestada järgmised väited.

(a) (Hahn-Banachi teoreem Hilberti ruumis.) Olgu L Hilberti ruumi H alamruum. Igal funktsionaalil $g \in L^*$ korral leidub parajasti üks jätk $f \in H^*$, mille korral $\|f\| = \|g\|$.

(b) Hilberti ruumi H mis tahes elemendi $x \neq 0$ jaoks leidub funktsionaal $f \in H^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$. Leida eeskiri sellise funktsionaali defineerimiseks.

(c) (Hilberti ruumi siledus.) Hilberti ruumi H mis tahes elemendi $x \neq 0$ jaoks leidub parajasti üks funktsionaal $f \in H^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$.

(d) Kui L on Hilberti ruumi H kinnine alamruum ja $x \in H \backslash L$, siis leidub $f \in H^*$ nii, et $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ iga $y \in L$ korral ning $\|f\| = \frac{1}{d(x,L)}$.

(e) Hilberti ruum on separaabel parajasti siis, kui tema kaasruum on separaabel.

§ 6. Ortonormeeritud süsteemid

6.1. Ortonormeeritud süsteemi mõiste

Definitsioon 6.1. Öeldakse, et Hilberti ruumi elementide süsteem $\mathcal{S}$ on *ortogonaalne,* kui tema elemendid on paarikaupa ortogonaalsed, s.t.

$$s, t \in \mathcal{S},\ s \neq t \quad \Longrightarrow \quad s \perp t \ \ (\text{s.t. } (s,t) = 0).$$

Öeldakse, et süsteem $\mathcal{S}$ on *ortonormaalne* (ehk *ortonormeeritud*), kui ta on ortogonaalne ja $\|s\| = 1$ iga $s \in \mathcal{S}$ korral, s.t.

$$(s,t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s = t, \\ 0, & \text{kui } s \neq t. \end{cases}$$

Ülesanne 6.1. Olgu $\mathcal{S}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H ning olgu $x, y \in \mathcal{S}$, $x \neq y$. Tõestada, et $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

Näide 6.1. Ruumis ℓ_2^n süsteem

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

on ortonormeeritud süsteem.

Näide 6.2. Ruumis ℓ_2 süsteem

$$e_1 = (1, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots, \quad e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots), \quad \ldots$$

on ortonormeeritud süsteem.

Näide 6.3. Ruumis $L_2(-\pi, \pi)$ trigonomeetriline süsteem

$$1, \quad \cos t, \quad \sin t, \quad \cos 2t, \quad \sin 2t, \quad \cos 3t, \quad \sin 3t, \quad \ldots$$

on ortogonaalne kuid mitte ortonormeeritud süsteem.

Ülesanne 6.2. Veenduda selles.

Trigonomeetriline süsteem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$

on ortonormeeritud süsteem ruumis $L_2(-\pi, \pi)$.

Ülesanne 6.3. Veenduda selles.

Näide 6.4. Kompleksses ruumis $L_2(0, 1)$ süsteem

$$e^{i2\pi nt}, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots$$

on ortonormeeritud süsteem.

Ülesanne 6.4. Veenduda selles.

Lause 6.1. *Kui ortogonaalne süsteem Hilberti ruumis ei sisalda nullelementi, siis ta on lineaarselt sõltumatu.*

Vahetult lausest 6.1 järeldub

Järeldus 6.2. *Ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis on lineaarselt sõltumatu.*

LAUSE 6.1 TÕESTUS. Olgu $\mathcal{S}$ ortogonaalne süsteem Hilberti ruumis H, mis ei sisalda nullelementi, ning olgu $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) sellised, et $\sum_{j=1}^n \alpha_j s_j = 0$. Süsteemi $\mathcal{S}$ lineaarseks sõltumatuseks piisab näidata, et $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Kuna elemendid $\alpha_1 s_1, \ldots, \alpha_n s_n \in \mathcal{S}$ on paarikaupa ortogonaalsed, siis Pythagorase teoreemi põhjal

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j s_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\alpha_j s_j\|^2 = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \|s_j\|^2.$$

Kuna $\|s_1\|, \ldots, \|s_n\| > 0$, siis $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, nagu soovitud. □

Teoreem 6.3. (a) *Lõplikumõõtmelises Hilberti ruumis $H \neq \{0\}$ eksisteerib ortonormeeritud baas.*

(b) *Kui $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) on ortonormeeritud baas Hilberti ruumis H, siis iga $x \in H$ korral*

$$x = \sum_{j=1}^n (x, e_j)\, e_j. \tag{6.1}$$

TÕESTUS. (b). Olgu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) ortonormeeritud baas Hilberti ruumis H ning olgu $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j\, e_j \in H$. Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$(x, e_j) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\, e_k,\, e_j \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k\, (e_k, e_j) = \alpha_j\, (e_j, e_j) = \alpha_j,$$

s.t. $\alpha_j = (x, e_j)$, niisiis võrdus (6.1) kehtib.

(a). Tõestame väite induktsiooniga lõplikumõõtmelise Hilberti ruumi mõõtme järgi.

Kõigepealt, igas ühemõõtmelises Hilberti ruumis on olemas ortonormeeritud baas, sest kui $\{b\}$ on sellise ruumi baas, siis $\left\{\frac{1}{\|b\|}\, b\right\}$ on ortonormeeritud baas.

Eeldame nüüd, et igas $(n-1)$-mõõtmelises Hilberti ruumis on olemas ortonormeeritud baas, ning olgu H n-mõõtmeline Hilberti ruum baasiga $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Tehtud eelduse põhjal leidub ortonormeeritud süsteem $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ ruumis H nii, et

$$\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$$

(sest tehtud eeldusel leidub $(n-1)$-mõõtmelisel Hilberti ruumil $\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ ortonormeeritud baas $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$). Väite tõestuseks jääb leida $c \in H \setminus \{0\}$ nii, et

$$c \perp \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$$

(sest n-elemendiline ortonormeeritud süsteem $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{\|c\|}\, c\}$ on järelduse 6.2 põhjal lineaarselt sõltumatu ning seega baas n-mõõtmelises Hilberti ruumis H).

Otsime elementi c kujul

$$c = b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, e_j, \quad \text{kus } \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}. \tag{6.2}$$

Märgime, et sel juhul $c \neq 0$, sest vastasel korral

$$b_n \in \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\},$$

mis on vastuolus süsteemi $\operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ lineaarse sõltumatusega.

Kui c on kujul (6.2), siis mis tahes $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral

$$c \perp e_k \quad \Longleftrightarrow \quad (c, e_k) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Bigl(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, e_j,\, e_k\Bigr) = 0$$

ehk, arvestades, et

$$\Bigl(b_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, e_j,\, e_k\Bigr) = (b_n, e_k) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j\, (e_j, e_k) = (b_n, e_k) + \alpha_k,$$

siis

$$c \perp e_k \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_k = -(b_n, e_k).$$

Niisiis, me võime võtta $c = b_n - \sum_{j=1}^{n-1} (b_n, e_j)\, e_j$. □

Märkus 6.1. Teoreemi 6.3 väite (a) tõestuses (implitsiitselt) esitatud algoritmi n-mõõtmelises Hilberti ruumis ortonormeeritud baasi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ konstrueerimiseks lähtudes etteantud baasist $\{b_1, \ldots, b_n\}$, kus $e_1 = \frac{1}{\|b_1\|}\, b_1$ ja $j \in \{2, \ldots, n\}$ korral

$$e_j = \frac{1}{\|c_j\|}\, c_j, \qquad \text{kus} \quad c_j = b_j - \sum_{i=1}^{j-1} (b_j, e_i)\, e_i,$$

nimetatakse *Gram-Schmidti algoritmiks.* Elemendi e_2 konstruktsiooni geomeetrilist tõlgendust on kujutatud alloleval JOONISEL.

6.2. Täielikud ortonormeeritud süsteemid

Lause 6.4. *Olgu $\mathcal{S}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\mathcal{S}$ *on* maksimaalne *(s.t. kui $\mathcal{T}$ on ortonormeeritud süsteem ruumis H, mille korral $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$, siis $\mathcal{T} = \mathcal{S}$);*

(ii) $\mathcal{S}$ *on totaalne (s.t. $\mathcal{S}$ on põhihulk ruumis, s.t. $\overline{\operatorname{span} \mathcal{S}} = H$);*

(iii) $x \in H,\ x \perp \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

Definitsioon 6.2. Ortonormeeritud süsteemi $\mathcal{S}$ Hilberti ruumis H, mis rahuldab ühte (ja seega kõiki) lause 6.4 samaväärsetest tingimustest (i)–(iii), nimetatakse *täielikuks ortonormeeritud süsteemiks* (ruumis H).

LAUSE 6.4 TÕESTUS. (i)⇒(ii). Olgu süsteem $\mathcal{S}$ maksimaalne. Oletame vastuväiteliselt, et $\mathcal{S}$ pole totaalne, s.t. $L := \overline{\operatorname{span}\mathcal{S}} \neq H$. Siis projektsioonide teoreemi põhjal leidub $x \in L^{\perp}\backslash\{0\}$ (vt. ülesannet 4.1). Aga nüüd $\frac{1}{\|x\|}x \perp \mathcal{S}$, seega $\mathcal{S} \cup \{\frac{1}{\|x\|}x\}$ on ortonormeeritud süsteem, mis on vastuolus süsteemi $\mathcal{S}$ maksimaalsusega.

(ii)⇒(iii). Olgu $\mathcal{S}$ totaalne ning olgu $x \in H$, $x \perp \mathcal{S}$. Siis (lause 2.1 põhjal) $x \perp \overline{\operatorname{span}\mathcal{S}} = H$, seega $x = 0$, nagu soovitud.

(iii)⇒(i). Kehtigu (iii) ning olgu $\mathcal{T}$ ortonormeeritud süsteem ruumis H, mille korral $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$. Kui leiduks $x \in \mathcal{T}\backslash\mathcal{S}$, siis $x \perp \mathcal{S}$, seega eelduse (iii) põhjal $x = 0$, mis pole võimalik. Seega $\mathcal{T} = \mathcal{S}$, nagu soovitud. □

Lause 6.5. *Igas Hilberti ruumis eksisteerib täielik ortonormeeritud süsteem.*

TÕESTUS. Olgu $\preccurlyeq$ loomulik osaline järjestus Hilberti ruumi H kõigi ortonormeeritud süsteemide hulgas $\mathfrak{O}$, s.t.

$$\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T} \quad :\Longleftrightarrow \quad S \subset T \qquad (S, T \in \mathfrak{O}).$$

Lause tõestuseks piisab (lause 6.4 põhjal) näidata, et hulgas $\mathfrak{O}$ eksisteerib maksimaalne element. See järeldub lihtsasti Zorni lemmast.

Ülesanne 6.5. Tõestada, et hulgas $\mathfrak{O}$ eksisteerib maksimaalne element.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Zorni lemmat.

□

Teoreem 6.6. *Täielik ortonormeeritud süsteem lõpmatumõõtmelises separaablis Hilberti ruumis on loenduv. Järelikult, igas lõpmatumõõtmelises separaablis Hilberti ruumis on olemas loenduv täielik ortonormeeritud süsteem.*

TÕESTUS. Olgu H lõpmatumõõtmeline separaabel Hilberti ruum ning olgu $\mathcal{S}$ täielik ortonormeeritud süsteem ruumis H. Olgu $\{a_j\colon j \in \mathbb{N}\}$ ruumi H kõikjal tihe loenduv alamhulk. Siis ilmselt $H = \bigcup_{j=1}^{\infty} B\left(a_j, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Igaüks keradest $B\left(a_j, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $j \in \mathbb{N}$, sisaldab ülimalt ühe süsteemi $\mathcal{S}$ elemendi, sest kui mingite $j \in \mathbb{N}$ ja $s, t \in \mathcal{S}$ korral $s, t \in B\left(a_j, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, siis

$$\|s - t\| \leqslant \|s - a_j\| + \|a_j - t\| < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

seega $s = t$ (sest $s \neq t$ korral oleks $\|s - t\| = \sqrt{2}$ (vt. ülesannet 6.1)); järelikult süsteem $\mathcal{S}$ on ülimalt loenduv. Süsteem $\mathcal{S}$ ei saa olla lõplik, sest niisugusel juhul süsteemi $\mathcal{S}$ täielikkuse tõttu $H = \overline{\operatorname{span}\mathcal{S}} = \operatorname{span}\mathcal{S}$ (sest kui $\mathcal{S}$ oleks lõplik, siis $\operatorname{span}\mathcal{S}$ oleks ruumi H lõplikumõõtmeline alamruum, seega ühtlasi kinnine alamruum), seega ruum H oleks lõplikumõõtmeline; järelikult $\mathcal{S}$ on loenduv.

Loenduva täieliku ortonormeeritud süsteemi olemasolu (lõpmatumõõtmelises separaablis Hilberti) ruumis H järeldub nüüd lausest 6.5. □

Märkus 6.2. Saab näidata, et kui $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{T}$ on täielikud ortonormeeritud süsteemid Hilberti ruumis H, siis $\operatorname{card}(\mathcal{S}) = \operatorname{card}(\mathcal{T})$.

§ 7. Fourier' read

7.1. Fourier' rida loenduva ortonormeeritud süsteemi järgi

Olgu H Hilberti ruum ning olgu $(e_k) = (e_k)_{k=1}^{\infty}$ ortonormeeritud süsteem ruumis H.

Ülesanne 7.1. Olgu $x \in H$ ning olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida arvud $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ nii, et

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|$$

oleks minimaalne.

LAHENDUS.

$$\begin{aligned}
\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\Big(x, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Big) + \Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Big\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}\overline{c_k}(x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \|c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}\overline{c_k}(x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} \big(|(x, e_k)|^2 - 2\operatorname{Re}\overline{c_k}(x, e_k) + |c_k|^2\big) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k) - c_k|^2.
\end{aligned}$$

Siit näeme, et uuritav norm on minimaalne, kui $c_k = (x, e_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

Definitsioon 7.1. Elemendi $x \in H$ *Fourier' kordajateks* (süsteemi (e_k) järgi) nimetatakse arvusid

$$(x, e_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$$

nimetatakse elemendi x *Fourier' reaks* (süsteemi (e_k) järgi).

Teoreem 7.1. *Olgu $x \in H$.*

(a) (Besseli võrratus) *Kehtib võrratus*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7.1}$$

(b) *Elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$ koondub elemendiks x parajasti siis, kui elemendi x jaoks kehtib* Parsevali võrdus

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2,$$

s.t. Besseli võrratuses (7.1) *leiab aset võrdus.*

(c) *Elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$ koondub elemendi x parimaks lähendiks alamruumist $\overline{\operatorname{span}\{e_k \colon k \in \mathbb{N}\}}$.*

Tõestus. (a). Besseli võrratuse (7.1) tõestuseks piisab näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2. \tag{7.2}$$

Veendume selles: olgu $n \in \mathbb{N}$; siis

$$\begin{aligned}
\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k\Big\|^2 &= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\Big(x, \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k\Big) + \Big\|\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k\Big\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \overline{(x, e_k)}(x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \|(x, e_k)\, e_k\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2.
\end{aligned}$$

(b) järeldub vahetult võrdusest (7.2).

(c). Elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$ on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida, mis (teoreemi 2.3 põhjal) koondub parajasti siis, kui tema liikmete normide ruutude rida koondub. Kuna Besseli võrratuse põhjal

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big\|(x, e_k)\, e_k\big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

siis elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$ koondub.

Jääb näidata, et Fourier' rea summa $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k$ on elemendi x parim lähend alamruumist $\overline{\mathrm{span}\{e_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}}$, milleks piisab näidata (vt. teoreemi 3.2), et

$$x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k \ \perp\ \overline{\mathrm{span}\{e_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}},$$

milleks omakorda piisab näidata, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k \ \perp\ e_j.$$

Veendume selles: mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\Big(x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k,\ e_j\Big) = (x, e_j) - \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\,(e_k, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0.$$

□

Järeldus 7.2. *Olgu $x \in H$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *elemendi x Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\,e_k$ koondub elemendiks x, s.t.*

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\,e_k;$$

(ii) *elemendi x jaoks kehtib Parsevali võrdus*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\|x\|^2; \tag{7.3}$$

(iii) $x\in\overline{\operatorname{span}\{e_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}}$.

TÕESTUS. (i)⇔(ii) on teoreem 7.1, (b).

(i)⇔(iii). Teoreemi 7.1, (c), põhjal

$$\begin{aligned} x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\,e_k \quad &\Longleftrightarrow \quad x \text{ on iseenda parim lähend alamruumist } \overline{\operatorname{span}\{e_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}}\\ &\Longleftrightarrow \quad x\in\overline{\operatorname{span}\{e_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}}. \end{aligned}$$

□

Järeldus 7.3. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\overline{\operatorname{span}\{e_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}}=H$ *(s.t süsteem $\{e_k\colon\ k\in\mathbb{N}\}$ on täielik);*

(ii) *iga elemendi $x\in H$ Fourier' rida $\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\,e_k$ koondub elemendiks x;*

(iii) *iga elemendi $x\in H$ jaoks kehtib Parsevali võrdus* (7.3)*;*

(iv) *mis tahes elementide $x,y\in H$ korral kehtib* Planchereli võrdus

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.$$

TÕESTUS. (i)⇔(ii)⇔(iii) järeldub vahetult järeldusest 7.2.

(ii)⇒(iv) ja (iv)⇒(iii).

Ülesanne 7.2. Tõestada implikatsioonid (ii)⇒(iv) ja (iv)⇒(iii).

□

Näide 7.1. Näites 6.3 veendusime, et trigonomeetriline süsteem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \dots$$

on ortonormeeritud süsteem ruumis $L_2(-\pi, \pi)$. Elemendi $x \in L_2(-\pi, \pi)$ Fourier' kordajad selle süsteemi järgi on

$$\begin{aligned} c_1 &:= \left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt, \\ c_2 &:= \left(x, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos t\, dt, \\ c_3 &:= \left(x, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t\, dt, \quad \ldots; \end{aligned}$$

tema Fourier' rida on

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos t\, dt \right) \cos t \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t\, dt \right) \sin t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right), \end{aligned}$$

kus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt\, dt \quad \text{ja} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt\, dt, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Saab näidata, et vaadeldav trigonomeetriline süsteem on täielik (vt. näiteks [?]). Seega iga elemendi $x \in L_2(-\pi, \pi)$ Fourier' rida (selle süsteemi järgi) koondub ruumis $L_2(-\pi, \pi)$ elemendiks x.

7.2. Fourier' rida mis tahes (võimalik, et loendumatu) ortonormeeritud süsteemi järgi

Olgu H Hilberti ruum, olgu $\mathcal{S}$ ortonormeeritud süsteem ruumis H ning olgu $x \in H$.

Definitsioon 7.2. Arvusid

$$(x, e), \quad e \in \mathcal{S},$$

nimetatakse elemendi x *Fourier' kordajateks* (süsteemi $\mathcal{S}$ järgi). Rida

$$\sum_{e \in \mathcal{S}} (x, e)\, e \tag{7.4}$$

nimetatakse elemendi x *Fourier' reaks* (süsteemi $\mathcal{S}$ järgi).

Eelneva definitsiooni valguses on loomulik küsida: kuidas tuleks mõista rea (7.4) koonduvust ja summat?

Esimene tähelepanek Fourier' rea (7.4) tõlgendamise suunas on, et elemendi x Fourier' kordajad rahuldavad *Besseli võrratust:* mis tahes $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7.5}$$

Besseli võrratus (7.5) järeldub vahetult võrdusest (7.2).

Besseli võrratusest (7.5) järeldub, et *elemendi x Fourier' kordajate hulgas on nullist erinevaid ülimalt loenduv arv.*

Tõepoolest, tähistades

$$\mathcal{S}_0 := \{e \in \mathcal{S} \colon\ (x, e) \neq 0\} \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{S}_m := \Big\{e \in \mathcal{S} \colon\ |(x, e)| \geqslant \frac{1}{m}\Big\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

ja pannes tähele, et $\mathcal{S}_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{S}_m$, piisab selle väite tõestuseks näidata, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral on hulk $\mathcal{S}_m$ lõplik. Olgu $m \in \mathbb{N}$. Mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{S}_m$ korral

$$\frac{n}{m^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Seega hulga $\mathcal{S}_m$ elementide arv ei ületa $m^2\|x\|^2$.

Kui hulk $\mathcal{S}_0$ on lõplik, siis rea (7.4) koonduvuse ja summa tõlgendamisega kaksipidimõistmist ei teki.

Vaatleme nüüd juhtu, kus hulk $\mathcal{S}_0$ on loenduv. Siis $\mathcal{S}_0 = \{e_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$ mingite $e_k \in H$, $k \in \mathbb{N}$, korral. Rea (7.4) all võime me nüüd mõista rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)\, e_k. \tag{7.6}$$

Siin tuleb välistada oht kaksipidimõistmiseks: nimelt, kas on võimalik, et rea (7.6) koonduvus või summa sõltub liidetavate järjekorrast? Osutub, et mitte, sest

- rida (7.6) koondub tingimatult (s.t. iga tema ümberjärjestus koondub)

  (sest rea (7.6) mis tahes ümberjärjestus $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_{\pi(k)})\, e_{\pi(k)}$ (siin $\pi \colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektsioon) on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida, mille liikmete normide ruutude rida

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \big\|(x, e_{\pi(k)})\, e_{\pi(k)}\big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \big|(x, e_{\pi(k)})\big|^2$$

  koondub Besseli võrratuse (7.5) põhjal);

- tingimatult koonduva rea kõik ümberjärjestused koonduvad üheks ja samaks summaks.

Ülesanne 7.3. Tõestada, et normeeritud ruumis tingimatult koonduva rea kõik ümberjärjestused koonduvad üheks ja samaks summaks.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Hahn–Banachi teoreemi järeldust 10.4 normeeritud ruumi punktide eraldamisest ja fakti, et tingimatult koonduva arvrea kõik ümberjärjestused koonduvad üheks ja samaks summaks.

Järgnevad teoreem 7.4 ja järeldused 7.5 ja 7.6 on vastavalt teoreemi 7.1 ja järelduste 7.2 ja 7.3 analoogid Fourier' rea kohta mis tahes (võimalik, et loendumatu) ortonormeeritud süsteemi järgi..

Teoreem 7.4. *Olgu* $x \in H$.

(a) (Besseli võrratus) *Kehtib võrratus*

$$\sum_{e \in \mathcal{S}} |(x,e)|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{7.7}$$

(b) *Elemendi* x *Fourier' rida* $\sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\, e$ *koondub elemendiks* x *parajasti siis, kui elemendi* x *jaoks kehtib* Parsevali võrdus

$$\sum_{e \in \mathcal{S}} |(x,e)|^2 = \|x\|^2, \tag{7.8}$$

s.t. Besseli võrratuses (7.7) *leiab aset võrdus.*

(c) *Elemendi* x *Fourier' rida* $\sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\, e$ *koondub elemendi* x *parimaks lähendiks alamruumist* $\overline{\operatorname{span} \mathcal{S}}$.

Järeldus 7.5. *Olgu* $x \in H$. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *elemendi* x *Fourier' rida* $\sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\, e$ *koondub elemendiks* x, *s.t.*

$$x = \sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\, e;$$

(ii) *elemendi* x *jaoks kehtib Parsevali võrdus* (7.8)*;*

(iii) $x \in \overline{\operatorname{span} \mathcal{S}}$.

Järeldus 7.6. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\overline{\operatorname{span} \mathcal{S}} = H$ *(s.t süsteem* $\mathcal{S}$ *on täielik);*

(ii) *iga elemendi* $x \in H$ *Fourier' rida* $\sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\, e$ *koondub elemendiks* x*;*

(iii) *iga elemendi* $x \in H$ *jaoks kehtib Parsevali võrdus* (7.8)*;*

(iv) *mis tahes elementide* $x, y \in H$ *korral kehtib* Planchereli võrdus

$$(x,y) = \sum_{e \in \mathcal{S}} (x,e)\overline{(y,e)}.$$

Täiendavaid ülesandeid

Ülesanne 7.4. Tõestada

Riemann–Lebesgue'i lemma. *Olgu* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis* H. *Siis mis tahes elemendi* $x \in H$ *Fourier' kordajate jada süsteemi* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ *järgi koondub nulliks:*

$$(x, e_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada Besseli võrratust.

§ 8. Separaablite Hilberti ruumide samastamine ruumiga ℓ_2

8.1. Riesz–Fischeri teoreem. Hilberti ruumide isomorfism

Kui H on Hilberti ruum ja $(e_k) = (e_k)_{k=1}^{\infty}$ on ortonormeeritud süsteem ruumis H, siis elemendi $x \in H$ Fourier' kordajad $\alpha_k := (x, e_k)$, $k \in \mathbb{N}$, rahuldavad (Besseli võrratuse põhjal) tingimust $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, s.t. $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$.

Teoreem 8.1 (Riesz–Fischeri teoreem)**.** *Olgu $(e_k) = (e_k)_{k=1}^{\infty}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H (üle korpuse $\mathbb{K}$) ning olgu arvud $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$, sellised, et $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$ (s.t. $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$). Siis rida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ koondub. Seejuures ainus element $x \in X$, mis rahuldab tingimusi*

(1) $(x, e_k) = \alpha_k$ *(s.t. elemendi x Fourier' kordajad on $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$);*

(2) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ *(s.t. $\|x\| = \|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\ell_2}$)*

on $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Tõestus. Rida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ koondub, sest ta on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida, mille liikmete normide ruutude rida koondub (vt. teoreemi 2.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Selle rea summa $z := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ Fourier' kordajad (süsteemi (e_k) järgi) on

$$(z, e_k) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, e_k \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (e_j, e_k) = \alpha_k, \quad k \in \mathbb{N};$$

niisiis Parsevali võrduse põhjal $\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$.

Lõpuks, kui $x \in H$ rahuldab tingimusi (1) ja (2), siis Parsevali võrduse põhjal $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. $\square$

Definitsioon 8.1. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid. Lineaarset bijektsiooni $\phi\colon H_1 \to H_2$, mis säilitab skalaarkorrutise, s.t.

$$\big(\phi(x), \phi(y)\big) = (x, y) \quad \text{mis tahes } x, y \in H_1 \text{ korral,}$$

nimetatakse (Hilberti ruumide) *isomorfismiks.* Seejuures öeldakse, et ruumid H_1 ja H_2 on (Hilberti ruumide mõttes) *isomorfsed* ja kirjutatakse $H_1 \cong H_2$.

Ülesanne 8.1. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid. Tõestada, et

(a) skalaarkorrutist säilitav kujutus $\psi\colon H_1 \to H_2$ on isomeetriline, s.t. $\|\psi(x)\| = \|x\|$;

(b) skalaarkorrutist säilitav sürjektsioon $\psi\colon H_1 \to H_2$ on lineaarne.

Näpunäide. Väites (b) võrduse $\phi(\alpha x + y) = \alpha\psi(x) + \psi(y)$ tõestuseks kasutada ülesannet 1.4, (a).

Eelnevast ülesandest järeldub muuhulgas, et

- Hilberti ruumide isomorfism on isomeetriline (niisiis ta on ka pidev);
- sürjektsioon $\phi\colon H_1 \to H_2$, mis säilitab skalaarkorrutise, on Hilberti ruumide isomorfism.

Teoreem 8.2. *Iga separaabel lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum üle $\mathbb{K}$ on isomorfne ruumiga ℓ_2 üle $\mathbb{K}$.*

TÕESTUS. Olgu H separaabel lõpmatumõõtmeline Hilberti ruum. Teoreemi 6.6 põhjal leidub ruumis H täielik ortonormeeritud süsteem $(e_k) = (e_k)_{k=1}^{\infty}$. Defineerime kujutuse

$$\phi\colon\ \ell_2 \ni (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in H.$$

See kujutus on korrektselt defineeritud. Tõepoolest, rida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ on paarikaupa ortogonaalsete liikmetega rida, mille liikmete normide ruutude rida koondub:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$$

(sest $(\alpha_k) \in \ell_2$), seega rida $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ koondub.

Ilmselt on ϕ lineaarne. Veendume, et ϕ on ka sürjektiivne. Fikseerime vabalt $x \in H$. Elemendi x Fourier' kordajad $\alpha_k := (x, e_k)$, $k \in \mathbb{N}$, rahuldavad Besseli võrratuse põhjal tingimust $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, s.t. $a := (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$. Süsteemi (e_k) täielikkuse tõttu $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$, niisiis $x = \phi(a)$. Seega on ϕ sürjektsioon.

Veendumaks, et ϕ on Hilberti ruumide isomorfism, jääb näidata, et ta säilitab skalaarkorrutise: mis tahes $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty}, b = (\beta_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ korral

$$\begin{aligned}\big(\phi(a), \phi(b)\big) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(e_k, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\beta_j}\,(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k} = (a, b).\end{aligned}$$

□

Järeldus 8.3. *Kõik reaalsed lõpmatumõõtmelised separaablid Hilberti ruumid on omavahel isomorfsed ning kõik kompleksed lõpmatumõõtmelised separaablid Hilberti ruumid on omavahel isomorfsed.*

Muuhulgas, reaalne ruum $L_2(a, b)$ on isomorfne reaalse ruumiga ℓ_2 ja kompleksne ruum $L_2(a, b)$ on isomorfne kompleksse ruumiga ℓ_2.

8.2. Hilberti ruumide samastamine ruumidega $\ell_2(\Gamma)$

Olgu $\Gamma \neq \varnothing$. Funktsiooni $f\colon\ \Gamma \to \mathbb{K}$ korral defineerime

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ x_1,\dots,x_n\in\Gamma}} \left(\sum_{j=1}^n |f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{kui } p \in [1,\infty),$$

ning

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Gamma} |f(x)|.$$

Mis tahes $p \in [1,\infty]$ korral on

$$\ell_p(\Gamma) := \big\{f\colon\ \Gamma \to \mathbb{K} \,\big|\, \|f\|_p < \infty\big\}$$

vektorruum loomulike tehete suhtes; veelgi enam, $\ell_p(\Gamma)$ *on Banachi ruum normi* $\|\cdot\|_p$ *suhtes.*

Esitame mõned tähelepanekud ruumide $\ell_p(\Gamma)$ kohta.

- Kui $f \in \ell_p(\Gamma)$, kus $p \in [1,\infty)$, siis hulk $\{x \in \Gamma\colon\ f(x) \neq 0\}$ on ülimalt loenduv.

Ülesanne 8.2. Veenduda selles.

- Mis tahes $p \in [1,\infty]$ korral $\ell_p(\Gamma) = L_p\big(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), c\big)$, kus c on loendamismõõt hulga Γ kõigi alamhulkade σ-algebral $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Siin võrdust $\ell_p(\Gamma) = L_p\big(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), c\big)$ tuleb mõista nii, et ruumid $\ell_p(\Gamma)$ ja $L_p\big(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), c\big)$ koosnevad ühtedest ja samadest funktsioonidest, kusjuures ka normid nendes ruumides ühtivad.

- Mis tahes $p \in [1,\infty]$ korral $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

Nimelt, arvjada $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ on funktsioon $f\colon\ \mathbb{N} \ni j \mapsto \alpha_j \in \mathbb{K}$.

- $\ell_2(\Gamma)$ on Hilberti ruum järgmise skalaarkorrutise suhtes:

$$(f,g) := \int_\Gamma f\overline{g}\, dc, \quad f,g \in \ell_2(\Gamma).$$

Märgime, et iga ruum $L_2(\mu)$ on Hilberti ruum skalaarkorrutise $(f,g) = \int f\overline{g}\, d\mu$ suhtes.

Sama skalaarkorrutise ruumis $\ell_2(\Gamma)$ võib sisse tuua ka seda fakti kasutamata valemiga

$$(f,g) := \sum_{x\in\Gamma} f(x)\,\overline{g(x)}, \quad f,g \in \ell_2(\Gamma). \tag{8.1}$$

Selles valemis summa $\sum_{x\in\Gamma} f(x)\,\overline{g(x)}$ tõlgendamiseks meenutame, et hulk $\Gamma_0 := \big\{x \in \Gamma\colon\ f(x)\,\overline{g(x)} \neq 0\big\}$ on ülimalt loenduv. Kui Γ_0 on lõplik, siis summa $\sum_{x\in\Gamma} f(x)\,\overline{g(x)}$ tõlgendamisel kaksipidimõistmist ei teki. Kui Γ_0 on loenduv, s.t. $\Gamma_0 = \{x_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ mingite $x_k \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, korral, võime selle summa all mõista rea

$$\sum_{k=1}^\infty f(x_k)\,\overline{g(x_k)} \tag{8.2}$$

summat. Siin kaksipidimõistmist ei tekkida ei saa—rida (8.2) koondub absoluutselt, sest Rogers–Hölderi võrratuse põhjal

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)\,\overline{g(x_k)}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2\,\|g\|_2 < \infty;$$

seega rea (8.2) kõik ümberjärjestused koonduvad üheks ja samaks summaks, niisiis rea (8.2) summa ei sõltu liidatavate järjekorrast.

Kehtib

Teoreem 8.4. *Olgu H Hilberti ruum ning olgu $\mathcal{S}$ täielik ortonormeeritud süsteem ruumis H. Siis kujutus*

$$\ell_2(\mathcal{S}) \ni f \longmapsto \sum_{e\in\mathcal{S}} f(e)\,e \in H$$

on Hilberti ruumide isomorfism. Niisiis, $H \cong \ell_2(\mathcal{S})$ (Hilberti ruumide mõttes).

Siin rea $\sum_{e\in\mathcal{S}} f(e)\,e$ summat tuleb mõista samal viisil kui Fourier' rea (7.4) summat.

§ 9. Kaasoperaator Hilberti ruumis

Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Lause 9.1. *Leidub parajasti üks operaator $A^*\colon H_2 \to H_1$ nii, et*

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \textit{mis tahes } x \in H_1 \textit{ ja } y \in H_2 \textit{ korral.} \tag{9.1}$$

Seejuures $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ (s.t. operaator A^* on pidev ja lineaarne) ning $\|A^*\| = \|A\|$.

Definitsioon 9.1. Operaatorit A^* lausest 9.1 nimetatakse operaatori A *kaasoperaatoriks.*

LAUSE 9.1 TÕESTUS. Veendumaks operaatori A^* olemasolus ja ühesuses, piisab näidata, et iga $y \in H_2$ korral leidub parajasti üks element $z_y \in H_1$ nii, et

$$(Ax, y) = (x, z_y) \quad \text{iga } x \in H_1 \text{ korral.}$$

Fikseerime vabalt $y \in H_2$. Paneme tähele, et

$$g_y\colon H_1 \ni x \longmapsto (Ax, y) \in \mathbb{K}$$

on pidev lineaarne funktsionaal.

Ülesanne 9.1. Tõestada, et g_y on pidev lineaarne funktsionaal, kusjuures $\|g_y\| \leqslant \|A\|\,\|y\|$.

Aga nüüd Rieszi teoreemi põhjal leidub üheselt määratud $z_y \in H_1$ nii, et

$$(x, z_y) = g_y(x) = (Ax, y) \quad \text{iga } x \in H_1 \text{ korral.}$$

Veendume nüüd, et tingimust (9.1) rahuldav operaator $A^*\colon H_2 \to H_1$ on lineaarne.

Ülesanne 9.2. Tõestada, et tingimust (9.1) rahuldav operaator $A^*\colon H_2 \to H_1$ on lineaarne.

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 1.4, (b).

Lõpuks, võrdusteahelast

$$\sup_{y \in B_{H_2}} \|A^*y\| = \sup_{y \in B_{H_2}} \sup_{x \in B_{H_1}} |(A^*y, x)| = \sup_{\substack{x \in B_{H_1} \\ y \in B_{H_2}}} |(x, A^*y)| = \sup_{\substack{x \in B_{H_1} \\ y \in B_{H_2}}} |(Ax, y)| = \|A\|$$

järeldub operaatori A^* tõkestatus ja võrdus $\|A^*\| = \|A\|$. □

Märkus 9.1. Meenutame (vt. § I.12), et kui X ja Y on normeeritud ruumid ja $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, siis operaatori A kaasoperaator $A^*\colon Y^* \to X^*$ defineeritakse võrdusega

$$(A^*y^*)(x) = y^*(Ax), \quad x \in X,\ y^* \in Y^*.$$

Seejuures $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, kusjuures $\|A^*\| = \|A\|$ (vt. lauset I.12.1).

Hilberti ruumid H_1 ja H_2 on ka normeeritud ruumid. Eristamaks operaatori $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ kaasoperaatorit normeeritud ruumide vahel tegutseva operaatori kaasoperaatori mõttes tema kaasoperaatorist definitsiooni 9.1 mõttes, tähistame järgnevas operaatori A kaasoperaatorit normeeritud ruumide vahel tegutseva operaatori kaasoperaatori mõttes sümboliga A'.

Loomulik on küsida: millises vahekorras on operaatori $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ kaasoperaatorid $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ ja $A' \in \mathcal{L}(H_2^*, H_1^*)$? Olgu $J_1\colon\ H_1 \to H_1^*$ ja $J_2\colon\ H_2 \to H_2^*$ loomulikud isomorfismid, siis mis tahes $x \in H_1$ ja $y \in H_2$ korral

$$(x, A^*y) = (Ax, y) = (J_2y)(Ax) = (A'J_2y)(x) = (x, J_1^{-1}A'J_2y);$$

niisiis

$$A^* = J_1^{-1}A'J_2 \quad \text{ja} \quad A' = J_1A^*J_2^{-1}.$$

Järgnev lause võtab kokku (Hilbert ruumide mõttes) kaasoperaatori olulisemad omadused.

Lause 9.2. *Olgu $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ning olgu H_3 Hilberti ruum ja $C \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Siis*

(a) $A^{**} := (A^*)^* = A$;

(b) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

(c) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$;

(d) $(CA)^* = A^*C^*$;

(e) *kui eksisteerib $A^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ (pöördoperaatori pidevus järeldub siin Banachi teoreemist pöördoperaatorist), siis eksisteerib ka $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, kusjuures $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$;*

(f) $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

Tõestus. (a)–(d). Fikseerime vabalt $x \in H_1$, $y \in H_2$ ja $z \in H_3$. Väidete (a)–(d) tõestuseks piisab näidata vastavalt, et

(a') $(A^*y, x) = (y, Ax)$;

(b') $\big((A + B)x, y\big) = \big(x, (A^* + B^*)y\big)$;

(c') $(\alpha Ax, y) = (x, \overline{\alpha}A^*y)$;

(d') $(CAx, z) = (x, A^*C^*z)$.

Ülesanne 9.3. Tõestada võrdused (a')–(d').

(e). Väite tõestuseks piisab näidata, et $A^*(A^{-1})^* = I_{H_1}$ ja $(A^{-1})^*A^* = I_{H_2}$, s.t. iga $x \in H_1$ korral $A^*(A^{-1})^*x = x$ ja iga $y \in H_2$ korral $(A^{-1})^*A^*y = y$, milleks piisab näidata, et mis tahes $u \in H_1$, $v \in H_2$ korral

$$\big(A^*(A^{-1})^*x, u\big) = (x, u) \quad \text{ja} \quad \big((A^{-1})^*A^*y, v\big) = (y, v).$$

Ülesanne 9.4. Tõestada need võrdused.

(f). Ühelt poolt, $\|AA^*\| \leqslant \|A\|\|A^*\| = \|A\|^2$. Teiselt poolt,

$$\begin{aligned}\|AA^*\| &= \sup_{y,v\in B_{H_2}} |(AA^*y,v)| \\ &\geqslant \sup_{y\in B_{H_2}} |(AA^*y,y)| = \sup_{y\in B_{H_2}} |(A^*y,A^*y)| = \sup_{y\in B_{H_2}} \|A^*y\|^2 = \|A^*\|^2 = \|A\|^2.\end{aligned}$$

□

Näide 9.1. Olgu $A \in \mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2^m)$ $(m,n \in \mathbb{N})$. Siis A ja tema kaasoperaator (Hilberti ruumide mõttes) $A^* \in \mathcal{L}(\ell_2^m, \ell_2^n)$ mõlemad esituvad arvmaatriksitena: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ ja $A^* = (b_{ji})_{j,i=1}^{n,m}$, kus

$$\begin{aligned} Ax &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right)_{i=1}^m, \quad x = (\xi_j)_{j=1}^n \in \ell_2^n, \\ A^*y &= \left(\sum_{i=1}^m b_{ji}\eta_i\right)_{j=1}^n, \quad y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \ell_2^m. \end{aligned}$$

Mis tahes $x = (\xi_j)_{j=1}^n \in \ell_2^n$, $y = (\eta_i)_{i=1}^m \in \ell_2^m$ korral $(Ax,y) = (x, A^*y)$, s.t.

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right)\overline{\eta_i} = \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\left(\sum_{i=1}^m b_{ji}\eta_i\right)}$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\overline{\eta_i} = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \overline{b_{ji}}\xi_j\overline{\eta_i},$$

millest, võttes $x = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{j},0\dots,0)$ ja $y = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{i},0\dots,0)$, saame, et

$$a_{ij} = \overline{b_{ji}} \quad \text{ehk} \quad b_{ji} = \overline{a_{ij}} \qquad \text{kõikide } i \in \{1,\dots,m\} \text{ ja } j \in \{1,\dots,n\} \text{ korral.}$$

Niisiis, operaatori A kaasoperaatorit A^* esitav maatriks on operaatorit A esitava maatriksi kaastransponeeritud maatriks.

Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

Definitsioon 9.2. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid. Öeldakse, et operaator $U \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ on *unitaaroperaator,* kui ta on pööratav, kusjuures $U^{-1} = U^*$.

Järgnev ülesanne ütleb, et unitaaroperaatorid on parajasti Hilberti ruumide isomorfismid (vt. § 8).

Ülesanne 9.5. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $U \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) U on unitaaroperaator;

(ii) U on sürjektsioon, mis säilitab skalaarkorrutise.

Ülesanne 9.6. Olgu $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$. Vahetult on kontrollitav, et *diagonaaloperaator* $T_\lambda\colon\ \ell_2 \to \ell_2$,

$$T_\lambda x = (\lambda_k \xi_k)_{k=1}^\infty, \quad x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2,$$

on pidev ja lineaarne, kusjuures $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$. Tõestada, et $T_\lambda^* = T_{\overline{\lambda}}$, kus $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda_k})_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$.

Ülesanne 9.7. Vahetult on kontrollitav, et *nihkeoperaatorid* $T_l, T_r\colon\ \ell_2 \to \ell_2$,

$$T_l x = (\xi_2, \xi_3, \dots), \quad T_r x = (0, \xi_1, \xi_1, \dots), \qquad x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2,$$

on pidevad ja lineaarsed, kusjuures $\|T_l\| = \|T_r\| = 1$. Tõestada, et $T_l^* = T_r$ ja $T_r^* = T_l$.

Ülesanne 9.8. Olgu $f \in C[a,b]$. Vahetult on kontrollitav, et *korrutisoperaator* $T_f\colon\ L_2(a,b) \to L_2(a,b)$,

$$(T_f x)(t) = f(t)\, x(t), \quad t \in (a,b), \quad x \in L_2(a,b),$$

on pidev ja lineaarne, kusjuures $\|T_f\| = \|f\|$. Tõestada, et $T_f^* = T_{\overline{f}}$, kus $\overline{f} \in C[a,b]$ on defineeritud võrdusega $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$, $t \in [a,b]$.

Ülesanne 9.9. Olgu $\{e_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H ning olgu $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ arvjada. Tõestada, et $P_a\colon\ H \to H$,

$$P_a x = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k (x, e_k)\, e_k, \quad x \in H,$$

on korrektselt defineeritud pidev lineaarne operaator parajasti siis, kui $\sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| < \infty$, s.t. $a \in \ell_\infty$; seejuures $\|P_a\| = \|a\|_\infty$. Tõestada, et $P_a^* = P_{\overline{a}}$, kus $\overline{a} = (\overline{\alpha_k})_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$.

Ülesanne 9.10. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Tõestada, et

(a) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$;

(b) $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$;

(c) $\overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T^*)^\perp$;

(d) $\overline{\operatorname{ran} T^*} = (\ker T)^\perp$.

Ülesanne 9.11. Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Tõestada, et

(a) $\ker T = \ker(T^*T)$;

(b) $\overline{\operatorname{ran} T^*} = \overline{\operatorname{ran}(T^*T)}$.

§ 10. Enesekaassed operaatorid

Kõikjal selles paragrahvis on H Hilberti ruum.

Definitsioon 10.1. Öeldakse, et operaator $A \in \mathcal{L}(H,H)$ on *enesekaasne,* kui $A^* = A$, s.t.

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{mis tahes } x, y \in H \text{ korral.}$$

Definitsioon 10.2. Öeldakse, et operaator $A\colon H \to H$ on *sümmeetriline,* kui

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{mis tahes } x, y \in H \text{ korral.}$$

Ülesanne 10.1. Tõestada, et sümmeetriline operaator on lineaarne.

Järgnev *Hellinger-Toeplitzi teoreem* ütleb, et *sümmeetriline operaator on pidev.* Niisiis, enesekaassed operaatorid Hilberti ruumis on parajasti sümmeetrilised operaatorid.

Teoreem 10.1 (Hellinger-Toeplitzi teoreem)**.** *Olgu operaator $A\colon H \to H$ sümmeetriline. Siis $A \in \mathcal{L}(H,H)$ (ning seega A on enesekaasne).*

Tõestus. Kuna sümmeetriline operaator A on lineaarne, siis võime tema pidevuse kontrolliks kasutada teoreemi kinnisest graafikust.

Olgu $x_n, x, y \in H$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \qquad \text{ja} \qquad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y.$$

Teoreemi põhjal kinnisest graafikust piisab operaatori A pidevuseks näidata, et $Ax = y$. Selleks piisab veenduda, et iga $z \in H$ korral $(Ax, z) = (y, z)$. Olgu $z \in H$. Siis

$$(Ax, z) = (x, Az) = \lim_{n\to\infty} (x_n, Az) = \lim_{n\to\infty} (Ax_n, z) = (y, z).$$

□

Teoreem 10.2. *Olgu H kompleksne Hilberti ruum ning olgu $A\colon H \to H$ lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *A on enesekaasne;*

(ii) *$(Ax, x) = (x, Ax)$ iga $x \in H$ korral;*

(iii) *$(Ax, x) \in \mathbb{R}$ iga $x \in H$ korral.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii) on ilmne; samuti ka (ii)$\Leftrightarrow$(iii), sest mis tahes $x \in H$ korral

$$(Ax, x) = (x, Ax) \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, x) = \overline{(Ax, x)} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Im}(Ax, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, x) \in \mathbb{R}.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii) ning olgu $x, y \in H$ suvalised. Operaatori enesekaassuseks piisab näidata, et $\alpha := (Ax, y) - (x, Ay) = 0$, s.t. $\operatorname{Im}\alpha = 0$ ja $\operatorname{Re}\alpha = 0$, milleks piisab näidata, et $\alpha = \overline{\alpha}$ ja $i\alpha = \overline{i\alpha}$. Veendume selles:

$$\begin{aligned}
\alpha &= (Ax, y) - (x, Ay) = \big(A(x-y), y\big) + (Ay, y) - (y, Ay) - (x-y, Ay) \\
&= \big(A(x-y), y\big) - (x-y, Ay) \\
&= -\big(A(x-y), x-y\big) + \big(A(x-y), x\big) - (x-y, Ax) + \big(x-y, A(x-y)\big)) \\
&= \big(A(x-y), x\big) - (x-y, Ax) = (Ax, x) - (Ay, x) - (x, Ax) + (y, Ax) \\
&= (y, Ax) - (Ay, x) = \overline{(Ax, y) - (x, Ay)} = \overline{\alpha};
\end{aligned}$$

seega ka

$$i\alpha = (Aix, y) - (ix, Ay) = \overline{(Aix, y) - (ix, Ay)} = \overline{i\alpha}.$$

□

Teoreem 10.3. *Olgu $A \in \mathcal{L}(H)$ enesekaasne operaator. Siis*

(a) $\|A\| = \sup\limits_{x \in S_H} |(Ax, x)| =: \mu$*;*

(b) $\|A\| = \max\{M, -m\}$*, kus* $M = \sup\limits_{x \in S_H} (Ax, x)$ *ja* $m = \inf\limits_{x \in S_H} (Ax, x)$*.*

Tõestus. (a). Ühelt poolt

$$\|A\| = \sup_{x,y \in B_H} |(Ax, y)| \geqslant \mu.$$

Teiselt poolt, olgu $x \in S_H$. Veendumaks, et $\|A\| \leqslant \mu$, piisab näidata, et $\|Ax\| \leqslant \mu$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $Ax \neq 0$. Tähistades $y := \frac{Ax}{\|Ax\|}$, saame

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \left(Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = (Ax, y) = \operatorname{Re}(Ax, y) \\
&= \frac{1}{4} \operatorname{Re}\Big(\big(A(x+y), x+y\big) - \big(A(x-y), x-y\big)\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{4} \Big(\big|\big(A(x+y), x+y\big)\big| + \big|\big(A(x-y), x-y\big)\big|\Big).
\end{aligned}$$

Suvalise $z \in H$ korral $|(Az, z)| \leqslant \mu \|z\|^2$.

Tõepoolest, kui $z = 0$, siis see võrratus kehtib triviaalselt. Kui aga $z \neq 0$, siis

$$|(Az, z)| = \left|\left(A\left(\frac{z}{\|z\|}\right), \frac{z}{\|z\|}\right)\right| \|z\|^2 \leqslant \mu \|z\|^2.$$

Seega rööpküliku võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &\leqslant \frac{1}{4}\Big(\mu\|x+y\|^2 + \mu\|x-y\|^2\Big) = \frac{\mu}{4}\Big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\Big) \\
&= \frac{\mu}{2}\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big) \leqslant \mu.
\end{aligned}$$

(b). Paneme tähele, et $-m = -\inf_{x\in S_H}(Ax,x) = \sup_{x\in S_H} -(Ax,x)$, seega väite (a) põhjal

$$\begin{aligned}\max\bigl\{M,-m\bigr\} &= \max\left\{\sup_{x\in S_H}(Ax,x),\ \sup_{x\in S_H} -(Ax,x)\right\} = \sup_{x\in S_H}\max\{(Ax,x),-(Ax,x)\}\\ &= \sup_{x\in S_H}\bigl|(Ax,x),-(Ax,x)\bigr| = \|A\|.\end{aligned}$$

□

Järeldus 10.4. *Olgu $A,B\colon H\to H$ lineaarsed operaatorid. Kui*

(1) *H on kompleksne ruum*

või

(2) *H on reaalne ruum ja operaatorid A ja B on sümmeetrilised,*

siis seosest

$$(Ax,x) = (Bx,x) \quad \textit{iga } x\in H \textit{ korral} \tag{10.1}$$

järeldub, et $A = B$.

TÕESTUS. Tingimuse (10.1) kehtides

$$\bigl((A-B)x,x\bigr) = 0 \quad \text{iga } x\in H \text{ korral.} \tag{10.2}$$

Selle tingimuse kehtides piisab võrduseks $A = B$ teoreemi 10.3 põhjal operaatori $A-B$ enesekaassusest. Eeldusel (1) järeldub operaatori $A-B$ enesekaassus teoreeemi 10.2 põhjal tingimusest (10.2); eeldusel (2) on operaatori $A-B$ enesekaassus ilmne, sest enesekaassete operaatorite vahe on enesekaasne. □

Täiendavaid märkusi ja ülesandeid

Kõikjal järgnevates ülesannetes on H, H_1 ja H_2 Hilberti ruumid.

Ülesanne 10.2. Olgu $T\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$. Tõestada, et korrutised T^*T ja TT^* on enesekaassed.

Ülesanne 10.3. Olgu $S,T\in\mathcal{L}(H,H)$ enesekaassed operaatorid. Tõestada, et korrutis ST on enesekaasne parajasti siis, kui operaatorid S ja T kommuteeruvad (s.t. $ST = TS$).

Definitsioon 10.3. Olgu $T\in\mathcal{L}(H,H)$. Öeldakse, et operaator T on *normaalne,* kui operaatorid T ja T^* kommuteeruvad (s.t. $T^*T = TT^*$).

Ülesanne 10.4. Tõestada, et enesekaasne operaator Hiberti ruumis on normaalne.

Ülesanne 10.5. Olgu $T\in\mathcal{L}(H,H)$. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) T on normaalne;

(ii) $\|Tx\| = \|T^*x\|$ iga $x\in H$ korral.

NÄPUNÄIDE. Implikatsioon (ii)⇒(i) tõestamisel kasutada järeldust 10.4.

Ülesanne 10.6. Olgu H kompleksne Hilberti ruum ning olgu $T\in\mathcal{L}(H,H)$. Tõestada, et leiduvad üheselt määratud enesekaassed operaatorid $R,S\in\mathcal{L}(H,H)$ nii, et $T = R+iS$.

NÄPUNÄIDE. Võtta $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ja $S = \frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{i}{2}(T^* - T)$.

Ülesanne 10.7. Olgu $T \in \mathcal{L}(H, H)$ enesekaasne injektsioon, mille kujutisruum $\operatorname{ran} T$ on kinnine. Tõestada, et T on pööratav.

NÄPUNÄIDE. Kasutada projektsioonide teoreemi.

Definitsioon 10.4. Öeldakse, et lineaarne operaator $A\colon H \to H$ on *positiivne*, ja kirjutatakse $A \geqslant 0$, kui $(Ax, x) \geqslant 0$ iga $x \in H$ korral.

Kompleksses ruumis H järeldub operaatori A positiivsusest tema enesekaassus, sest A positiivsuse korral iga $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ iga $x \in H$ korral.

Ülesanne 10.8. Tõestada, et ortoprojektor on positiivne enesekaasne operaator.

Ülesanne 10.9. Olgu $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Tõestada, et

(a) operaatorid TT^* ja T^*T on positiivsed;

(b) kui $\|T\| \leqslant 1$, siis operaator $I - T^*T$ on positiivne.

Ülesanne 10.10. Olgu $A \in \mathcal{L}(H, H)$ positiivne enesekaasne operaator. Siis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 10.3.

Ülesanne 10.11. Olgu $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ ning olgu

$$T_\lambda\colon\ \ell_2 \ni (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \longmapsto (\lambda_k \xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$$

diagonaaloperaator (vt. ülesannet 9.6). Tõestada, et

(a) T_λ on enesekaasne parajasti siis, kui $\lambda_k \in \mathbb{R}$ iga $k \in N$ korral;

(b) T_λ on positiivne parajasti siis, kui $\lambda_k \geqslant 0$ iga $k \in N$ korral.

Ülesanne 10.12. Olgu $\{e_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ ortonormeeritud süsteem Hilberti ruumis H ning olgu $a = (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Vaatleme ülesande 9.9 operaatorit $P_a\colon H \to H$,

$$P_a x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x, e_k)\, e_k, \quad x \in H,$$

Tõestada, et

(a) T_λ on enesekaasne parajasti siis, kui $\alpha_k \in \mathbb{R}$ iga $k \in N$ korral;

(b) T_λ on positiivne parajasti siis, kui $\alpha_k \geqslant 0$ iga $k \in N$ korral.

Ülesanne 10.13. Lineaarsete operaatorite $A, B\colon H \to H$ korral defineeritakse $A \geqslant B$, kui $A - B \geqslant 0$. Tõestada, et $\geqslant$ on osaline järjestus enesekaassete operaatorite $H \to H$ hulgas.

Ülesanne 10.14. Olgu L ja M ruumi H kinnised alamruumid ning olgu $P_L, P_M \in \mathcal{L}(H, H)$ ortoprojektorid vastavalt alamruumile L ja M. Tõestada, et $P_M \geqslant P_L$ parajasti siis, kui $M \supset L$.

III peatükk.
Kompaktsed operaatorid

§ 1. Kompaktse operaatori mõiste ja põhiomadused

1.1. Kompaktse operaatori mõiste

Definitsioon 1.1. Olgu X ja Y normeeritud ruumid.

Öeldakse, et lineaarne operaator $S\colon X \to Y$ on *kompaktne,* kui ta teisendab ruumi X kinnise ühikkera B_X suhteliselt kompaktseks hulgaks ruumis Y, s.t. $S(B_X)$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis Y.

Kõigi kompaktsete operaatorite $X \to Y$ hulka tähistatakse sümboliga $\mathcal{K}(X,Y)$.

Vahetult definitsioonist on selge, et iga kompaktne operaator on pidev (sest lineaarne operaator $X \to Y$ on pidev parajasti siis, kui ta teisendab ruumi X kinnise ühikkera B_X tõkestatud hulgaks (ruumis Y) ning iga suhteliselt kompaktne hulk on tõkestatud). Niisiis, $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

Vahetult on kontrollitav, et $\mathcal{K}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ vektoralamruum.

Lause 1.1. *Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $S\colon X \to Y$ lineaarne operaator. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *S on kompaktne;*

(ii) *S teisendab tõkestatud hulgad ruumis X suhteliselt kompaktseteks hulkadeks (ruumis Y);*

(iii) *iga ruumi X elementide tõkestatud jada (x_n) korral sisaldab ruumi Y elementide jada (Tx_n) koonduva osajada.*

Tõestus.

Ülesanne 1.1. Tõestada lause 1.1.

□

Näide 1.1. Olgu X ja Y normeeritud ruumid. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on *lõplikumõõtmeline,* kui tema kujutisruum $\operatorname{ran} T = \{Tx\colon\ x \in X\}$ on lõplikumõõtmeline (alamruum ruumis Y). Kõigi lõplikumõõtmeliste operaatorite $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ hulka tähistatakse sümboliga $\mathcal{F}(X,Y)$. Lihtne on näha, et $\mathcal{F}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ vektoralamruum. Paneme tähele, et $\mathcal{F}(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Y)$, s.t. iga lõplikumõõtmeline operaator on kompaktne. Tõepoolest, kui $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, siis $T(B_X)$ on lõplikumõõtmelise ruumi $\operatorname{ran} T$ tõkestatud alamhulk; kuna lõplikumõõtmelises ruumis on iga tõkestatud hulk suhteliselt kompaktne, siis $T(B_X)$ on suhteliselt kompaktne; niisiis $T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

Näide 1.2. Olgu X normeeritud ruum ning olgu $P \in \mathcal{L}(X,X)$ projektor. Kui $\operatorname{ran} P$ on lõpmatumõõtmeline, siis P ei ole kompaktne. Tõepoolest, vastasel korral oleks $B_{\operatorname{ran} P}$ kompaktne hulk (sest ta on hulga $P(B_X)$ kinnine alamhulk), kuid kinnine ühikkera on kompaktne parajasti lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis.

Eelnevast järeldub ka, et lõpmatumõõtmelise normeeritud ruumi ühikoperaator ei ole kompaktne.

Lause 1.2. *Olgu W, X, Y ja Z normeeritud ruumid ning olgu $R \in \mathcal{L}(W,X)$, $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ ja $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Siis $SR \in \mathcal{K}(W,Y)$, $TS \in \mathcal{K}(X,Z)$ ja $TSR \in \mathcal{K}(W,Z)$.*

Tõestus.

Ülesanne 1.2. Tõestada lause 1.2.

□

Järeldus 1.3. *Isomorfism lõpmatumõõtmelisete normeeritud ruumide vahel ei ole kompaktne.*

Tõestus. Kui isomorfism T lõpmatumõõtmelisete normeeritud ruumide X ja Y vahel oleks kompaktne, oleksid lause 1.2 põhjal ka nende ruumide ühikoperaatorid kompaktsed (sest $I_X = T^{-1}T$ ja $I_Y = TT^{-1}$), mis on vastuolus näites 1.2 saadud tulemusega. □

Teoreem 1.4. *Olgu X normeeritud ruum ja Y Banachi ruum. Siis $\mathcal{K}(X,Y)$ on ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ kinnine alamruum.*

Tõestus.

Ülesanne 1.3. (a) Olgu $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja $\varepsilon > 0$ sellised, et $\|T - S\| < \varepsilon$. Tõestada, et kui ruumi Y hulk $\mathcal{E}$ on hulga $S(B_X)$ ε-võrk, siis $\mathcal{E}$ on hulga $T(B_X)$ 2ε-võrk.

(b) Tõestada teoreem 1.4.

Näpunäide. Kasutada Hausdorffi teoreemi ja ülesande osa (a).

□

Järeldus 1.5. *Olgu X normeeritud ruum ja Y Banachi ruum. Siis $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ (s.t. lõplikumõõtmeliste operaatorite alamruumi sulund ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ sisaldub kompaktsete operaatorite alamruumis).*

1.2. Lõplikumõõtmelise operaatori üldkuju

Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$. Defineerime operaatori

$$x^* \otimes y \colon\ X \ni x \longmapsto x^*(x)\, y \in Y.$$

Siis $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Ülesanne 1.4. Tõestada, et $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X,Y)$, kusjuures $\|x^* \otimes y\| = \|x^*\|\,\|y\|$.

Kui $x^* \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis $\operatorname{ran} x^* \otimes y = \operatorname{span}\{y\}$ on ühemõõtmeline; kui aga $x^* = 0$ või $y = 0$, siis $\operatorname{ran} x^* \otimes y = \{0\}$; niisiis igal juhul $x^* \otimes y \in \mathcal{F}(X,Y)$.

Eelnevast järeldub, et kui $n \in \mathbb{N}$ ning $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ ja $y_1, \dots, y_n \in Y$, siis $\sum\limits_{j=1}^n x_j^* \otimes y_j \in \mathcal{F}(X,Y)$.

Teoreem 1.6. *Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $T\colon X \to Y$. Siis $T \in \mathcal{F}(X,Y)$ parajasti siis, kui*

$$T = \sum_{j=1}^n x_j^* \otimes y_j, \quad \text{kus } n \in \mathbb{N} \text{ ning } x_1^*, \dots, x_n^* \in X^* \text{ ja } y_1, \dots, y_n \in Y. \tag{1.1}$$

Tarvilikkuse tõestuseks teoreemis 1.6 on otstarbekas eelnevalt sõnastada järgnev lemma (mida me (sisuliselt) kasutame ka lemma 3.4 tõestuses), mis järeldub vahetult ülesandest I.9.12, mille kohaselt iga lineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel normeeritud ruumil on pidev.

Lemma 1.7. *Olgu Z lõplikumõõtmeline normeeritud ruum baasiga $\mathfrak{B} = \{z_1, \dots, z_n\}$. Siis* baasiga $\mathfrak{B}$ seotud koordinaatfunktsionaalid

$$z_k^*\colon\ Z \ni \sum_{j=1}^n \gamma_j\, z_j \longmapsto \gamma_k \in \mathbb{K}, \qquad k \in \{1, \dots, n\},$$

on pidevad ja lineaarsed, s.t. $z_1^*, \dots, z_n^* \in Z^*$.

Teoreemi 1.6 tõestus. *Piisavus* on tõestatud teoreemile eelnevas arutelus.

Tarvilikkus. Olgu $T \in \mathcal{F}(X,Y)$, olgu $\{z_1, \dots, z_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ kujutisruumi $\operatorname{ran} T$ baas ning olgu $z_1^*, \dots, z_n^* \in (\operatorname{ran} T)^*$ selle baasiga seotud koordinaatfunktsionaalid. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral funktsionaal $y_j^* \in Y^*$ nii, et $y_j^*|_{\operatorname{ran} T} = z_j^*$. Aga nüüd mis tahes $x \in X$ korral

$$Tx = \sum_{j=1}^n z_j^*(Tx)\, z_j = \sum_{j=1}^n y_j^*(Tx)\, z_j = \sum_{j=1}^n (T^* y_j^*)(x)\, z_j = \Bigl(\sum_{j=1}^n (T^* y_j^*) \otimes z_j\Bigr)(x),$$

s.t. $T = \sum\limits_{j=1}^n (T^* y_j^*) \otimes z_j$. □

1.3. Kompaktsed operaatorid Hilberti ruumides

Teoreem 1.8. *Olgu X Banachi ruum ja Y Hilberti ruum. Siis $\mathcal{K}(X,H) = \overline{\mathcal{F}(X,H)}$.*

Tõestus. Olgu $T \in \mathcal{K}(X,H)$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi tõestuseks piisab leida operaator $S \in \mathcal{F}(X,H)$ nii, et $\|S - T\| \leqslant \varepsilon$.

Arvestades, et $T(B_X)$ on suhteliselt kompaktne hulk ruumis H, saame Hausdorffi teoreemi põhjal leida talle lõpliku ε-võrgu $\mathcal{E}$. Siis ortoprojektor $P_L \in \mathcal{L}(H,H)$

ruumi H kinnisele alamruumile $L := \operatorname{span}\mathcal{E}$ on lõplikumõõtmeline operaator, seega $P_L T \in \mathcal{F}(X,H)$. Arvestades, et iga $y \in H$ korral on $P_L y$ elemendi y parim lähend alamruumist $L = \operatorname{span}\mathcal{E}$ ning $\mathcal{E}$ on hulga $T(B_X)$ ε-võrk, saame

$$\|P_L Tx - Tx\| = \sup_{x\in B_X}\|P_L Tx - Tx\| = \sup_{x\in B_X}\min_{z\in L}\|z - Tx\| \leqslant \sup_{x\in B_X}\min_{z\in\mathcal{E}}\|z - Tx\| \leqslant \varepsilon.$$

□

Teoreem 1.9 (E. Schmidt)**.** *Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $T \in \mathcal{K}(H_1,H_2)\backslash\{0\}$. Siis leiduvad*

(1) *ülimalt loenduv ortonormeeritud süsteem $\{e_1, e_2, \dots\} \subset H_1$;*

(2) *sama võimsusega ortonormeeritud süsteem $\{f_1, f_2, \dots\} \subset H_2$;*

(3) *sama võimusega positiivsete arvude järjend $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots$, kusjuures loenduva süsteemi korral $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,*

nii, et iga $x \in H_1$ korral

$$Tx = \sum_k s_k(x,e_k)f_k.$$

Tõestus. Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta! □

Kui X ja Y on Banachi ruumid ja $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ on kompaktne, siis vastavalt definitsioonile on $T(B_X)$ suhteliselt kompaktne hulk. Kui X ja Y on Hilberti ruumid, saame väita enamat.

Teoreem 1.10. *Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $T \in \mathcal{K}(H_1,H_2)$. Siis $T(B_{H_1})$ on kompaktne hulk.*

Tõestus. Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta! □

1.4. Hilbert–Schmidti operaatorid

Olgu H_1 ja H_2 Hilberti ruumid ning olgu $\mathcal{S}$ täielik ortonormeeritud süsteem ruumis H_1.

Definitsioon 1.2. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(H_1,H_2)$ on *Hilbert–Schmidti operaator,* kui

$$\sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2 < \infty.$$

Märgime, et see definitsioon on korrektne, s.t. ei sõltu täieliku ortonormeeritud süsteemi $\mathcal{S}$ valikust ruumis H_1. Selleks piisab näidata, et mis tahes täieliku ortonormeeritud süsteemi $\mathcal{S}'$ korral ruumis H_1

$$\sum_{f\in\mathcal{S}'}\|Tf\|^2 = \sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2. \tag{1.2}$$

Võrduse (1.2) kehtivuseks piisab näidata, et mis tahes täieliku ortonormeeritud süsteemi $\mathcal{S}''$ korral ruumis H_2

$$\sum_{f\in\mathcal{S}'}\|Tf\|^2 = \sum_{g\in\mathcal{S}''}\|T^*g\|^2. \tag{1.3}$$

Tõepoolest, sel juhul
$$\sum_{f\in\mathcal{S}'}\|Tf\|^2=\sum_{g\in\mathcal{S}''}\|T^*g\|^2=\sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2.$$

Tõestame võrduse (1.3): mis tahes täieliku ortonormeeritud süsteemi $\mathcal{S}''$ korral ruumis H_2 Parsevali võrduse põhjal
$$\begin{aligned}\sum_{f\in\mathcal{S}'}\|Tf\|^2&=\sum_{f\in\mathcal{S}'}\sum_{g\in\mathcal{S}''}\big|(Tf,g)\big|^2=\sum_{g\in\mathcal{S}''}\sum_{f\in\mathcal{S}'}\big|(Tf,g)\big|^2\\&=\sum_{g\in\mathcal{S}''}\sum_{f\in\mathcal{S}'}\big|(f,T^*g)\big|^2=\sum_{g\in\mathcal{S}''}\sum_{f\in\mathcal{S}'}\big|(T^*g,f)\big|^2=\sum_{g\in\mathcal{S}''}\|T^*g\|^2.\end{aligned}$$

Olgu $T\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$ Hilbert–Schmidti operaator. Kuna mis tahes $x\in X$ korral $x=\sum_{e\in\mathcal{S}}(x,e)e$, siis $Tx=\sum_{e\in\mathcal{S}}(x,e)Te$ ning järelikult Hölderi võrratuse ja Parsevali võrduse põhjal
$$\|Tx\|\leqslant\sum_{e\in\mathcal{S}}\big|(x,e)\big|\,\|Te\|\leqslant\Big(\sum_{e\in\mathcal{S}}\big|(x,e)\big|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2\Big)^{\frac12}=\Big(\sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2\Big)^{\frac12}\|x\|.\quad(1.4)$$

Niisiis, $\|T\|\leqslant\Big(\sum_{e\in\mathcal{S}}\|Te\|^2\Big)^{\frac12}$.

Teoreem 1.11. *Hilbert–Schmidti operaator on kompaktne.*

Tõestus. Olgu $T\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$ Hilbert–Schmidti operaator.

Tõestuse ideest paremaks arusaamiseks esitame ta juhu jaoks, kui H_1 on separaabel (üldisel juhul on tõestus põhimõtteliselt samasugune). Kõigepealt, kui H_1 on lõplikumõõtmeline, siis T on lõplikumõõtmeline operaator ja seega kompaktne, niisiis võime konkreetsuse mõttes eeldada, et H_1 on lõpmatumõõtmeline. Sel juhul leidub ruumis H_1 loenduv täielik ortonormeeritud süsteem $(e_k)=(e_k)_{k=1}^\infty$. Paneme tähele, et iga $x\in H_1$ korral $x=\sum_{k=1}^\infty(x,e_k)e_k$, seega $Tx=\sum_{k=1}^\infty(x,e_k)Te_k$. Defineerime iga $n\in\mathbb{N}$ korral operaatori $T_n\colon H_1\to H_2$,
$$T_nx=\sum_{k=1}^n(x,e_k)Te_k=\sum_{k=1}^n(Je_k)(x)Te_k,\quad x\in H_1,$$
kus $J\colon H_1\to H_1^*$ on kanooniline kujutus; siis $T_n=\sum_{k=1}^n(Je_k)\otimes Te_k$; niisiis $T_n\in\mathcal{F}(H_1,H_2)$. Operaatori T kompaktsuseks piisab seega näidata, et $\|T-T_n\|\to0$. Pannes tähele, et mis tahes $n\in\mathbb{N}$ ja $x\in H_1$ korral $(T-T_n)x=\sum_{k=n+1}^\infty(x,e_k)Te_k$, saame sarnaselt võrratuse (1.4) tõestusele, et
$$\|(T-T_n)x\|\leqslant\Big(\sum_{k=n+1}^\infty\|Te_k\|^2\Big)^{\frac12}\|x\|,$$
järelikult
$$\|T-T_n\|=\sup_{x\in B_{H_1}}\|(T-T_n)x\|\leqslant\Big(\sum_{k=n+1}^\infty\|Te_k\|\Big)^{\frac12}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$
(sest koonduva rea $\sum_{k=1}^\infty\|Te_k\|^2$ jääkliige koondub nulliks). $\square$

1.5. Kompaktse operaatori kaasoperaatori kompaktsus

Teoreem 1.12 (Schauderi teoreem)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Siis T on kompaktne parajasti siis, kui tema kaasoperaator T^* on kompaktne.*

TÕESTUS. Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta! □

1.6. Banachi ruumide aproksimatsiooniomadus

Järelduse 1.5 põhjal mis tahes Banachi ruumide X ja Y korral $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ (s.t. lõplikumõõtmeliste operaatorite alamruumi sulund ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ sisaldub kompaksete operaatorite alamruumis). Loomulik on küsida: millal kehtib siin võrdus, s.t. $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$? (Näiteks, kui Y on Hilberti ruum, siis teoreemi 1.8 põhjal see võrdus kehtib.) Sellega on motiveeritud järgnev definitsioon.

Definitsioon 1.3 (A. Grothendieck, 1955)**.** Öeldakse, et Banachi ruumil Y on aproksimatsiooniomadus, kui iga Banachi ruumi X korral $\overline{\mathcal{F}(X,Y)} = \mathcal{K}(X,Y)$.

Teoreem 1.8 väidab niisiis teisisõnu, et igal Hilberti ruumil on aproksimatsiooniomadus.

Pikka aega ei teatud, kas üldse leidub ilma aproksimatsiooniomaduseta Banachi ruume. Näiteks kõigil meile tuntud klassikalistel Banachi ruumidel – ℓ_p^n ($n \in \mathbb{N}$, $p \in [1,\infty]$), ℓ_p ($p \in [1,\infty]$), c_0, c, $L_p(a,b)$ ($p \in [1,\infty]$), $C[a,b]$ – on aproksimatsiooniomadus. Alles aastal 1972 tõestas P. Enflo, et leidub ruumi c_0 kinnine alamruum, millel ei ole aproksimatsiooniomadust. Aastal 1981 avaldatud artiklis tõestas A. Szankowski, et pidevate lineaarsete operaatorite ruumil $\mathcal{L}(\ell_2,\ell_2)$ ei ole aproksimatsiooniomadust.

§ 2. Integraaloperaatorid

2.1. Integraaloperaatorid $C[a,b] \to C[a,b]$

Olgu $k\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ pidev funktsioon.

Definitsioon 2.1. Operaatorit $K\colon\ C[a,b]\to C[a,b]$,

$$(Kx)(t)=\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds,\qquad t\in[a,b],\quad x\in C[a,b],$$

nimetatakse *Fredholmi integraaloperaatoriks.* Funktsiooni k nimetatakse operaatori K *tuumaks.*

Märgime, et operaator K on korrektselt defineeritud, s.t. $x\in C[a,b]$ korral on funktsioon $Kx\colon\ [a,b]\to\mathbb{C}$ tõepoolest pidev.

Tõepoolest, olgu $x\in C[a,b]$, $x\neq 0$. Funktsiooni Kx pidevuseks piisab näidata, et Kx on ühtlaselt pidev lõigus $[a,b]$, s.t. iga $\varepsilon>0$ korral leidub $\delta>0$ nii, et

$$t_1,t_2\in[a,b],\ |t_1-t_2|<\delta\quad\Longrightarrow\quad \bigl|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)\bigr|<\varepsilon.$$

Olgu $\varepsilon>0$. Mis tahes $t_1,t_2\in[a,b]$ korral

$$\begin{aligned}|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)|&=\left|\int_a^b\bigl(k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr)\,x(s)\,ds\right|\leqslant\int_a^b\bigl|k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr|\,\bigl|x(s)\bigr|\,ds\\&\leqslant\int_a^b\bigl|k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr|\,\|x\|\,ds=\|x\|\int_a^b\bigl|k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr|\,ds.\end{aligned}$$

Kinnises tõkestatud hulgas $[a,b]\times[a,b]$ pidev funktsioon k on ühtlaselt pidev selles hulgas, seega leidub $\delta>0$ nii, et $t_1,s_1,t_2,s_2\in[a,b]$ korral

$$d\bigl((t_1,s_1),(t_2,s_2)\bigr)=\sqrt{|t_1-t_2|^2+|s_1-s_2|^2}<\delta\quad\Longrightarrow\quad\bigl|k(t_1,s_1)-k(t_2,s_2)\bigr|<\frac{\varepsilon}{\|x\|\,(b-a)}.$$

Kui nüüd $t_1,t_2\in[a,b]$, $|t_1-t_2|<\delta$, siis mis tahes $s\in[a,b]$ korral

$$\bigl|k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr|<\frac{\varepsilon}{\|x\|\,(b-a)}$$

ning seega

$$\bigl|(Kx)(t_1)-(Kx)(t_2)\bigr|\leqslant\|x\|\int_a^b\bigl|k(t_1,s)-k(t_2,s)\bigr|\,ds\leqslant\|x\|\frac{\varepsilon}{\|x\|\,(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$

Vahetult on kontrollitav, et K on lineaarne. Operaatori K tõkestatuseks märgime, et

$$\begin{aligned}\sup_{x\in B_{C[a,b]}}\|Kx\|&=\sup_{x\in B_{C[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]}\bigl|(Kx)(t)\bigr|=\sup_{x\in B_{C[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds\right|\\&=\sup_{t\in[a,b]}\sup_{x\in B_{C[a,b]}}\left|\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds\right|\overset{(1)}{=}\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b\bigl|k(t,s)\bigr|\,ds.\end{aligned}$$

(Siin vajab põhjendamist võrdus (1).) Eelnevast võrdusteahelast järeldub, et $K \in \mathcal{L}\big(C[a,b], C[a,b]\big)$, kusjuures

$$\|K\| = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b \big|k(t,s)\big|\, ds.$$

Võrdus (1) järeldub järgnevast lemmast.

Lemma 2.1. *Olgu $z \in C[a,b]$. Siis funktsionaal $f\colon\ C[a,b] \to \mathbb{K}$,*

$$f(x) = \int_a^b z(s)\, x(s)\, ds, \quad x \in C[a,b],$$

on pidev ja lineaarne, s.t. $f \in C[a,b]^*$. Seejuures

$$\|f\| = \int_a^b |z(s)|\, ds.$$

TÕESTUS. Vahetult on kontrollitav, et f on lineaarne. Mis tahes $x \in C[a,b]$ korral

$$|f(x)| = \left|\int_a^b z(s)\, x(s)\, ds\right| \leqslant \int_a^b |z(s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant \int_a^b |z(s)|\, \|x\|\, ds = \int_a^b |z(s)|\, ds\, \|x\|,$$

seega f on ka tõkestatud, kusjuures $\|f\| \leqslant \int_a^b |z(s)|\, ds$.

Teiselt poolt, fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$ ja defineerime $x(t) := \frac{\overline{z(t)}}{|z(t)|+\varepsilon}$, $t \in [a,b]$. Siis $x \in B_{C[a,b]}$, kusjuures

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \int_a^b \frac{z(t)\, \overline{z(t)}}{|z(t)|+\varepsilon}\, ds = \int_a^b \frac{|z(t)|^2}{|z(t)|+\varepsilon}\, ds \\ &\geqslant \int_a^b \frac{|z(t)|^2 - \varepsilon^2}{|z(t)|+\varepsilon}\, ds = \int_a^b \big(|z(t)| - \varepsilon\big)\, ds = \int_a^b |z(s)|\, ds - \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Protsessis $\varepsilon \to 0$ järeldub siit, et $\|f\| \geqslant \int_a^b |z(s)|\, ds$. □

Teoreem 2.2. $K \in \mathcal{K}\big(C[a,b], C[a,b]\big)$.

TÕESTUS.

Ülesanne 2.1. Tõestada teoreem 2.2.

NÄPUNÄIDE. Kasutada Arzelà–Ascoli teoreemi.

□

Tähistame $\Delta := \{(t,s)\colon\ t \in [a,b],\ a \leqslant s \leqslant t\}$. Olgu $k\colon\ \Delta \to \mathbb{K}$ pidev funktsioon. Saab näidata, et operaator $K\colon\ C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Kx)(t) = \int_a^t k(t,s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [a,b], \quad x \in C[a,b],$$

on korrektselt defineeritud, kusjuures $K \in \mathcal{K}\big(C[a,b], C[a,b]\big)$. Operaatorit K nimetatakse *Volterra integraaloperaatoriks.* Funktsiooni k nimetatakse operaatori K *tuumaks.*

2.2. Integraaloperaatorid $L_2(a,b) \to L_2(a,b)$

Kõikjal selles punktis tähistame $\Omega := (a,b) \times (a,b)$. Sümbol λ tähistab Lebesgue'i mõõtu ruudus Ω.

Definitsioon 2.2. Olgu $k \in L_2(\Omega)$. Operaatorit $K\colon\ L_2(a,b) \to L_2(a,b)$,

$$Kx = \int_a^b k(\cdot,s)\,x(s)\,ds, \quad x \in L_2(a,b),$$

nimetatakse *Fredholmi integraaloperaatoriks.* Funktsiooni k nimetatakse operaatori K *tuumaks.*

Märgime, et operaator K on korrektselt defineeritud, s.t. $x \in L_2(a,b)$ korral tõepoolest $Kx \in L_2(a,b)$.

Tõepoolest, olgu $x \in L_2(a,b)$. Funktsioon $\Omega \ni (t,s) \longmapsto x(s)$ kuulub klassi $L_2(\Omega)$, seega funktsioon $\Omega \ni (t,s) \longmapsto k(t,s)\,x(s)$ kuulub klassi $L_1(\Omega)$, järelikult Fubini teoreemi põhjal

$$Kx = \int_a^b k(\cdot,s)\,x(s)\,ds \in L_1(a,b).$$

Veendumaks, et $Kx \in L_2(a,b)$, jääb seega näidata, et $\|Kx\|_2 < \infty$:

$$\begin{aligned}\|Kx\|_2^2 &= \int_a^b \big|(Kx)(t)\big|^2\,dt = \int_a^b \left|\int_a^b k(t,s)\,x(s)\,ds\right|^2 dt \leqslant \int_a^b \left(\int_a^b \big|k(t,s)\big|\,\big|x(s)\big|\,ds\right)^2 dt \\ &\leqslant \int_a^b \left(\int_a^b \big|k(t,s)\big|^2\,ds\right)\left(\int_a^b \big|x(s)\big|^2\,ds\right) dt = \|x\|^2 \int_a^b \left(\int_a^b \big|k(t,s)\big|^2\,ds\right) dt \\ &= \|x\|^2 \int_\Omega \big|k(t,s)\big|^2\,d\lambda(t,s) = \|k\|_{L_2(\Omega)}^2\,\|x\|^2.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Vahetult on kontrollitav, et K on lineaarne. Võrratusteahelast (2.1) järeldub, et K on tõkestatud, niisiis $K \in \mathcal{L}\big(L_2(a,b), L_2(a,b)\big)$; seejuures

$$\|K\| \leqslant \|k\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Teoreem 2.3. $K \in \mathcal{K}\big(L_2(a,b), L_2(a,b)\big)$.

Teoreem 2.3 järeldub vahetult järgnevast teoreemist, sest teoreemi 1.11 põhjal on Hilbert–Schmidti operaator kompaktne.

Teoreem 2.4. *Fredholmi integraaloperaator $K\colon\ L_2(a,b) \to L_2(a,b)$ on Hilbert–Schmidti operaator.*

TÕESTUS. Olgu $(u_j) = (u_j)_{j=1}^\infty$ täielik ortonormeeritud süsteem ruumis $L_2(a,b)$. Siis $(\overline{u_j}) = (\overline{u_j})_{j=1}^\infty$ on samuti täielik ortonormeeritud süsteem ruumis $L_2(a,b)$.

Ülesanne 2.2. Tõestada, et $(\overline{u_j})$ on täielik ortonormeeritud süsteem ruumis $L_2(a,b)$.

Veendumaks, et K on Hilbert–Schmidti operaator, tuleb näidata, et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Ku_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b \left| \int_a^b k(t,s)\, u_j(s)\, ds \right|^2 dt < \infty.$$

Fubini teoreemi põhjal peaaegu kõikide $t \in (a,b)$ korral $k(t,\cdot) \in L_2(a,b)$, seega Parsevali võrduse põhjal

$$\|k(t,\cdot)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(t)|^2,$$

kus

$$\alpha_j(t) := \int_a^b k(t,s)\, u_j(s)\, ds, \quad k \in \mathbb{N},$$

on elemendi $k(t,\cdot)$ Fourier' kordajad süsteemi $(\overline{u_j})$ järgi. Nüüd

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|Ku_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b |\alpha_j(t)|^2\, dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(t)|^2\, dt = \int_a^b \|k(t,\cdot)\|_2^2\, dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)|^2\, ds \right) dt = \int_\Omega |k(t,s)|^2\, d\lambda(t,s) = \|k\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

Tähistame $\Delta := \{(t,s)\colon\ t \in (a,b),\ a < s < t\}$. Olgu $k \in L_2(\Delta)$ (siin vaatleme kolmnurka Δ varustatuna Lebesgue'i mõõduga). Saab näidata, et operaator $K\colon\ L_2(a,b) \to L_2(a,b)$,

$$Kx(t) = \int_a^t k(t,s)\, x(s)\, ds, \quad t \in (a,b), \quad x \in L_2(a,b),$$

on korrektselt defineeritud, kusjuures $K \in \mathcal{K}\big(L_2(a,b), L_2(a,b)\big)$. Operaatorit K nimetatakse *Volterra integraaloperaatoriks.* Funktsiooni k nimetatakse operaatori K *tuumaks.*

2.3. Integraalvõrrandite klassifikatsioonist

Sagedamini rakendustes esinevad integraalvõrrandid on järgmised:

$$u(t) = \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds, \tag{2.3}$$

$$x(t) = u(t) + \int_a^b k(t,s)\, x(s)\, ds, \tag{2.4}$$

kus $k \in C([a,b] \times [a,b])$ ja $u \in C[a,b]$ on etteantud funktsioonid ning $x \in C[a,b]$ on otsitav tundmatu (või $k \in L_2\big((a,b) \times (a,b)\big)$ ja $u \in L_2(a,b)$ on etteantud funktsioonid ning $x \in L_2(a,b)$ on otsitav tundmatu). Võrrandeid (2.3) ja (2.4) nimetatakse vastavalt *esimest ja teist liiki Fredholmi integraalvõrranditeks.* Kui võrrandites (2.3) ja (2.4) $u = 0$, siis neid võrrandeid nimetatakse vastavalt *esimest ja teist liiki homogeenseteks Fredholmi integraalvõrranditeks.*

Operaatorkujul võib võrrandid (2.3) ja (2.4) panna kirja vastavalt kujul

$$u = Kx, \tag{2.5}$$

$$x = u + Kx, \tag{2.6}$$

kus K on vastav Fredholmi integraaloperaator. Kui võrrandites (2.5) ja (2.6) K on Volterra integraaloperaator, siis neid võrrandeid nimetatakse vastavalt *esimest ja teist liiki Volterra integraalvõrranditeks.* Esimest ja teist liiki Volterra integraalvõrrandid on niisiis vastavalt võrrandid kujul

$$u(t) = \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{2.7}$$

$$x(t) = u(t) + \int_a^t k(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{2.8}$$

Kui võrrandites (2.7) ja (2.8) $u = 0$, siis neid võrrandeid nimetatakse vastavalt *esimest ja teist liiki homogeenseteks Volterra integraalvõrranditeks.*

§ 3. Fredholmi alternatiiv

Teoreem 3.1 (Fredholmi alternatiiv)**.** *Olgu X Banachi ruum ning olgu $K \in \mathcal{K}(X,X)$. Siis operaator $I-K$ on sürjektsioon parajasti siis, kui ta on injektsioon.*

Teoreem 3.1 on operaatorvõrrandite keeles sõnastatav järgmiselt: *teist liiki mittehomogeensel operaatorvõrrandil $x - Kx = y$ eksisteerib iga $y \in X$ korral lahend parajasti siis, kui vastava homogeense võrrandi $x - Kx = 0$ ainus lahend on $x = 0$; seejuures võrrandi $x - Kx = y$ lahend on iga $y \in X$ korral ühene.* Teisisõnu, kehtib parajasti üks järgmistest kahest teineteist välistavast väitest:

- teist liiki mittehomogeensel operaatorvõrrandil $x - Kx = y$ eksisteerib iga $y \in X$ korral lahend (kusjuures see lahend on ühene);
- homogeensel võrrandil $x - Kx = 0$ eksisteerib mittetriviaalne lahend.

Teoreemi 3.1 tõestus toetub järgmisele lemmale, mille me tõestame hiljem.

Lemma 3.2. *Olgu X Banachi ruum ning olgu $K \in \mathcal{K}(X,X)$. Siis* $\operatorname{ran}(I-K)$ *on kinnine.*

Teoreemi 3.1 tõestus. Tähistame $S := I - K$.

Tarvilikkus. Olgu S sürjektsioon. Oletame vastuväiteliselt, et S ei ole injektsioon. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $Z_n := \ker S^n$. Siis

$$\{0\} =: Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset Z_3 \subset \cdots . \tag{3.1}$$

Veendume, et sisalduvused (3.1) on ranged. Kuna S pole injektsioon, siis $Z_0 = \{0\} \subsetneqq \ker S = Z_1$. Eeldame nüüd, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral $Z_{n-1} \subsetneqq Z_n$, s.t. leidub $z \in Z_n \backslash Z_{n-1} = \ker S^n \backslash \ker S^{n-1}$. Kuna S on sürjektsioon, siis $z = Sx$ mingi $x \in X$ korral. Sisalduvuse $Z_n \subset Z_{n+1}$ (ning seega ka kõigi sisalduvuste (3.1)) ranguseks piisab nüüd näidata, et $x \in Z_{n+1} \backslash Z_n = \ker S^{n+1} \backslash \ker S^n$. Ühelt poolt, $S^{n+1}x = S^n(Sx) = S^n z = 0$ (sest $z \in \ker S^n$); seega $x \in \ker S^{n+1}$. Teiselt poolt, $S^n x = S^{n-1}(Sx) = S^{n-1}z \neq 0$ (sest $z \notin \ker S^{n-1}$); seega $x \notin \ker S^n$. Niisiis, $x \in \ker S^{n+1} \backslash \ker S^n$, nagu soovitud.

Mis tahes $n \in \mathbb{N}$ korral on Z_{n-1} ruumi Z_n kinnine pärisalamruum, seega Rieszi lemma põhjal "peaaegu perpendikulaarist" leidub $x_n \in S_{Z_n}$ nii, et $\rho(x_n, Z_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Aga nüüd mis tahes $n, p \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\|Kx_{n+p} - Kx_n\| &= \|x_{n+p} - Sx_{n+p} - (x_n - Sx_n)\| = \|x_{n+p} - (Sx_{n+p} + x_n - Sx_n)\| \\ &\geqslant d(x_{n+p}, Z_{n+p-1}) \geqslant \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(sest $Sx_{n+p}+x_n-Sx_n \in \ker S^{n+p-1} = Z_{n+p-1}$), seega jadal $(Kx_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole koonduvat osajada, mis on vastuolus operaatori K kompaktsusega.

Piisavus. Olgu S injektsioon. Oletame vastuväiteliselt, et S ei ole sürjektsioon. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $X_n := \operatorname{ran} S^n$. Siis

$$X =: X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots . \tag{3.2}$$

Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral X_n on ruumi X_{n-1} kinnine alamruum. Tõepoolest, $X_1 = \operatorname{ran} S$ on ruumi $X_0 = X$ kinnine alamruum lemma 3.2 põhjal. Eeldame nüüd, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral X_n on kinnine; siis X_n on ka täielik. Vaatleme operaatoreid

$$S_n, K_n\colon\ X_n \to X_n, \quad S_n x = Sx, \quad K_n x = Kx, \quad x \in X_n.$$

(märgime, et $S[X_n] = X_{n+1} \subset X_n$, $I[X_n] = X_n$, seega $K[X_n] = (I-S)[X_n] \subset X_n$). Nüüd $S_n = I_{X_n} - K_n$, kusjuures K_n on kompaktne; seega $X_{n+1} = S[X_n] = \operatorname{ran} S_n$ on kinnine lemma 3.2 põhjal.

Veendume, et sisalduvused $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \cdots$ on ranged. Kuna S pole sürjektsioon, siis leidub $x \in X \backslash X_1$. Aga nüüd $Sx \in X_1 \backslash X_2$, sest kui kehtiks $Sx \in X_2 = \operatorname{ran} S^2$, siis $Sx = S(Sz)$ mingi $z \in X$ korral, millest operaatori S injektiivsuse tõttu $x = Sz \in X_1$, vastuolu. Analoogiliselt arutledes saame, et $S^2 x = S(Sx) \in X_2 \backslash X_1$ jne.—üldiselt $S^n x \in X_n \backslash X_{n+1}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Rieszi lemma põhjal (peaaegu perpendikulaarist) saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral valida $x_n \in S_{X_n}$ nii, et $\rho(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. Aga nüüd mis tahes $n, p \in \mathbb{N}$ korral

$$\|Kx_n - Kx_{n+p}\| = \|x_n - Sx_n - x_{n+p} + Sx_{n+p}\| \geqslant d(x_n, X_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2},$$

seega jadal $(Kx_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole koonduvat osajada, mis on vastuolus operaatori K kompaktsusega. □

Lemma 3.2 tõestuseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgmised lemmad.

Lemma 3.3. *Olgu X Banachi ruum ning olgu $K \in \mathcal{K}(X, X)$. Siis* $\ker(I-K)$ *on lõplikumõõtmeline.*

TÕESTUS. Tuuma $\ker(I-K)$ on lõplikumõõtmelisuseks piisab näidata, et tema kinnine ühikkera $B_{\ker(I-K)}$ on suhteliselt kompaktne (sest normeeritud ruum on lõplikumõõtmeline parajasti siis, kui tema ühikkera on suhteliselt kompaktne). Selleks märgime, et $B_{\ker(I-K)} = K[B_{\ker(I-K)}]$. □

Lemma 3.4. *Olgu X Banachi ruum ning olgu Y ruumi X lõplikumõõtmeline alamruum. Siis leidub pidev lineaarne projektor $P\colon\ X \to X$ nii, et* $\operatorname{ran} P = Y$.

TÕESTUS. Olgu $\{y_1, \dots, y_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ baas ruumis Y. Selle baasiga seotud koordinaatfunktsionaalid $y_k^*\colon\ Y \ni \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j y_j \longmapsto \beta_k \in \mathbb{K}$ on lineaarsed, järelikult ka pidevad, s.t. $y_k^* \in Y^*$, $k \in \{1, \dots, n\}$ (sest lõplikumõõtmelises normeeritud ruumis on iga lineaarne funktsionaal pidev—vt. ülesannet I.9.12). Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral $x_j^* \in X^*$ nii, et $x_j^*|_Y = y_j^*$. Aga nüüd $P = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^* \otimes y_j \in \mathcal{L}(X, X)$ on projektor, kusjuures $\operatorname{ran} P = Y$.

Ülesanne 3.1. Veenduda, et P on projektor, kusjuures $\operatorname{ran} P = Y$.

□

Lemma 3.2 toestus. Tähistame $S = I - K$. Lemmade 3.3 ja 3.4 põhjal leidub ruumi X kinnine alamruum Z nii, et $\ker S \oplus Z$. Seejuures $\operatorname{ran} S = S(Z)$. Operaator

$$\tilde{S}\colon\ Z \longrightarrow S(Z), \qquad \tilde{S}x = Sx, \quad x \in Z,$$

on pidev lineaarne bijektsioon.

Operaatori $\tilde{S}$ injektiivsuseks märgime, et kui mingite $x_1, x_2 \in Z$ korral $\tilde{S}x_1 = \tilde{S}x_2$, siis $x_1 - x_2 \in Z \cap \ker S = \{0\}$, niisiis $x_1 = x_2$.

Kujutisruumi $\operatorname{ran} S = S(Z)$ kinnisuseks piisab seega näidata, et $\tilde{S}$ on isomorfism, s.t, $\tilde{S}^{-1}$ on pidev.

Oletame vastuväiteliselt, et $\tilde{S}^{-1}$ ei ole pidev. Siis leiduvad $u_n \in Z$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $Su_n \to 0$, kuid $u_n \not\to 0$. Osajadale üle minnes võime üldisust kitsendamata eeldada, et mingi $\delta > 0$ korral $\|u_n\| \geqslant \delta$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tähistades nüüd $z_n := \frac{u_n}{\|u_n\|} \in S_Z$, $n \in \mathbb{N}$, kehtib $Sz_n \to 0$, s.t. $z_n - Kz_n \to 0$. Operaatori K kompaktsuse tõttu võime osajadale üle minnes üldisust kitsendamata eeldada, et $Kz_n \to z$ mingi $z \in X$ korral. Kuna $z_n - Kz_n \to 0$, siis ka $z_n \to z$, seega $z \in S_Z$. Teiselt poolt,

$$Sz = \lim_{n\to\infty} Sz_n = \lim_{n\to\infty} \bigl(z_n - Kz_n\bigr) = z - z = 0;$$

niisiis $z \in \ker S \cap Z = \{0\}$, s.t. $z = 0$, vastuolu. $\square$