

Diskreetne matemaatika

Ülesanne 1

Antud on tabel, mis on 10×10 ruudustik. Igasse ruutu kirjutatakse „+1”, „−1” või „0”. Tõestage, et kui liita igas reas, igas veerus ja mõlemal diagonaalil olevad arvud, siis leiduvad kaks summat, mis on võrdsed.

Ülesanne 2

Seitseist täisarvu on kirjutatud ritta. Tõestage, et on võimalik valida mingid järjestatud arvud (võib ka ainult üks arv) nii, et nende summa jagub arvuga 17.

Ülesanne 3

Tõestage, et kahevärvilises 6-tipulises graafis leidub vähemalt kaks ühevärvilist kolmnurka.

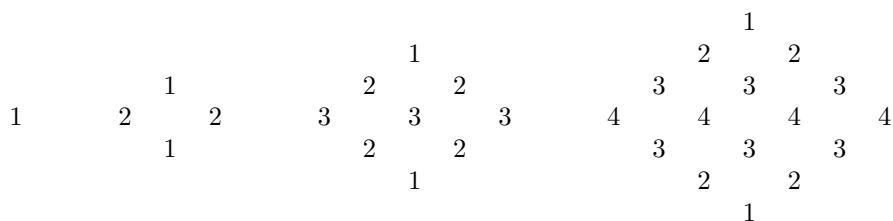
Ülesanne 4

Tõestada, et suvaliste 13 reaalarvu seast saab leida kaks arvu x ja y , mille korral

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

Ülesanne 5

Naturaalarvudest koostatakse rombid küljepikkusega $1, 2, 3, \dots$ allnäidatud viisil. Leida n -nda rombi arude summa ja tõestada saadud valemi õigsus induktiooniga.



Ülesanne 6

Leida viga järgmises tõestuses.

Kõik linnud on ühte värvi.

Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k+1$ lindu $L_1, \dots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \dots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu näeme, et ka linnud $L_2, \dots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \dots, L_k$, seega on kõik $k+1$ lindu ühte värvi.

Ülesanne 7

Mitmel viisil saab sõnas MATEMAATIKA tähti ümber paigutada nii, et kaks A-tähte poleks kuskil kõrvuti?

Ülesanne 8

Malelaua vasakul alumisel ruudul $a1$ asub kuningas, millel lubatakse ühe käiguga liikuda ainult kas sammu paremale või sammu üles. Mitu võimalikku teekonda saab kuningas valida, et jõuda laua paremale ülemisele ruudule $h8$? Mitu erinevat teekond on siis, kui malelaua mõõtmed on $k \times l$?

Ülesanne 9

Maagiline geomeetria on valdkond, milles püütakse mitmesuguste kujundit tükkideks lõikamise ja seejärel tükkide kokkupanemise teel näidata, et materia jäävuse seadus on ilmselt väär. All olev joonis jäteks tõestab, et $64 = 65$. Milles on viga? Millisel eespool toodud võrdusel "maagia" põhineb? Pannes tähele, et kujundite küljepikkused on Fibonacci arvud, leida viis niisuguse konstruktsiooni üldistamiseks.

