H. KEERUTAJA
K. KRUSE
L. TARTES

Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX-XI klassile

H. KEERUTAJA, K. KRUSE, L. TARTES

MATERJALI KLASSIVÄLISEKS TÖÖKS MATEMAATIKAST

IX—XI kl.

TALLINN «VALGUS» 1983

Kaane kujundanud T. Aru.
Retsenseerinud A. Levin.

Autorid tänavad käsikirja kohta esitatud märkuste eest kõiki retsensente, eriti aga TPedI matemaatikakateedri vanemõpetajat Aleksander Levinit, kelle juhtnööridest oli palju kasu.

Keerutaja, H., Kruse, K., Tartes, L.

K23 Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX—XI klassile. — Tallinn: Valgus, 1983 — 144 lk., 25 ill.

Raamat kujutab endast elementaarmatemaatika teooriale toetuvat praktiliste juhtnööride ja lahendustega varustatud ülesannete kogu. Selles on toodud üle 400 ülesande arvuteooriast, algebralistest teisendustest, võrrandite ja võrratuste lahendamisest. Kolmandik ülesannetest on lahendatud näidisülesannetena.
Ülesannete kogu on eelkõige mõeldud kasutamiseks keskkooli vanemate klasside õpilastele ja matemaatika õpetajatele klassivälises töös matemaatika ringides ja matemaatika olümpiaadideks valmistumisel.

22.1

K $\frac{4306020400-113}{M902(15)-83}$ TL—12—14—82

I PEATÜKK

ARVUTEOORIA PÕHIMÕISTED.

§ 1. NATURAALARVUD. MATEMAATILINE INDUKTSIOON.

Naturaalarvude hulk N on esitatav lõpmatu jadana 0, 1, 2, 3, ..., n, ... Kui mingi hulga M ja hulga N elementide vahel saab korraldada üksühese vastavuse, siis on ka hulk M esitatav jadana ja teda nimetatakse loenduvaks hulgaks.

Loenduvateks hulkadeks on näiteks paarisarvude hulk 2, 4, 6, ..., $2n$, ...; mingi naturaalarvuga k jaguvate naturaalarvude hulk k, $2k$, $3k$, ..., nk, ...; täisarvude hulk 0, ± 1, ± 2 ..., $\pm n$, ...; lineaarfunktsiooni $y=3x+1$ väärtuste hulk, kui $x \in N$; hulk, mille elementideks on kumera n-nurga sisenurkade summad π, 2π, ..., $(n-2)\pi$, ... jne.

Loenduvate hulkade omaduste tõestamiseks kasutatakse **matemaatilise induktsiooni meetodit**, mille olemus on lühidalt väljendatav järgmiselt:

Kui mingi väide, mis on esitatav sõltuvuses naturaalarvude jadast 1, 2, 3, ..., n, ..., *on õige naturaalarvu* $n=n_0$ *korral ja selle väite õigsusest naturaalarvu* $n=k$ $(k>n_0)$ *korral järeldub sama väite õigsus ka naturaalarvu* $n=k+1$ *korral, siis on see väide õige iga naturaalarvu* $n \geqslant n_0$ *korral.*

Näide 1. Tõestame, et $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Tõestamiseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit:

1. Valem kehtib $n=1$ korral: $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$

2. Oletame, et valem kehtib $n=k$ korral:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[k\,\frac{(k+1)}{2}\right]^2$$

3. Tõestame, et sel tingimusel kehtib valem ka $n=k+1$ korral.

Selleks liidame k liikme summale $k+1$, liidetava $(k+1)$ ja näitame, et ka sel juhul on summaks liidetavate arvu ja sellest ühe võrra suurema arvu korrutise poolruut:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]=(k+1)^2\cdot\frac{k^2+4k+4}{4}=$$

$$=(k+1)^2\cdot\frac{(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Järelikult on väide õige iga naturaalarvu $n\geqslant 1$ korral.

Matemaatilise induktsiooni meetodi rakendamisega mitmesuguste ülesannete lahendamisel tutvume edaspidi lähemalt vastavates peatükkides.

§ 2. TÄISARVUD. ARVU ABSOLUUTVÄÄRTUS. TÄISARVUDE JAGUVUS.

Anname arvu mõiste sümbolile $-n$, kus n on suvaline nullist erinev naturaalarv. Niiviisi saadud arvuhulga ühendit naturaalarvude hulgaga nimetatakse **täisarvude hulgaks** Z.

$$Z=\{0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots\}.$$

Täisarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu a ennast, kui $a\geqslant 0$ või tema vastandarvu $-a$, kui $a<0$.

Sümbolites:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{kui } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{kui } a<0.\end{cases}$$

Näide 2. $|c-2|=c-2$, kui $c-2\geqslant 0$ ehk $c\geqslant 2$, aga

$$|c-2|=2-c, \text{ kui } c-2<0 \text{ ehk } c<2.$$

Kui a ja b $(b\neq 0)$ on niisugused täisarvud, et nende jagatis on samuti mingi täisarv q, siis öeldakse, et **arv a jagub arvuga b**. Jaguvuse tähistamiseks kasutatakse sümbolit «$\vdots$».

Niisiis $a \vdots b$, kui $a:b=q$, kus $a, b, q\in Z$ ja $b\neq 0$.

Täisarvude jaguvuse kohta kehtivad järgmised teoreemid koos järeldustega:

Teoreem 1.1. *Kui summa* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *kõik liidetavad jaguvad arvuga* m, *siis jagub arvuga* m *ka nende summa* s_n.

Järeldus: Kui summa jagub arvuga m ja summa kõigi liidetavate kohta peale ühe on teada, et nad jaguvad arvuga m, siis ka see üks liidetav jagub arvuga m.

Teoreem 1.2. *Kui arv* a *jagub arvuga* m *ja arv* b *jagub arvuga* n, *siis korrutis* ab *jagub arvuga* mn.

Järeldus 1. Kui arv a jagub arvuga m, siis arv a^n $(n \in N)$ jagub arvuga m^n.

Järeldus 2. Kui korrutise üks teguritest jagub arvuga m, siis jagub ka korrutis arvuga m.

Järeldus 3. Kui arv a jagub arvuga b, ja arv b jagub arvuga c, siis ka arv a jagub arvuga c.

Järeldus 4. Kui arv a jagub arvuga m ja arvuga k, kusjuures m ja k on ühistegurita arvud, siis arv a jagub korrutisega mk.

Järeldus 5. Kui korrutis ab jagub arvuga m ja a ning m on ühistegurita arvud, siis arv b jagub arvuga m.

Teoreem 1.3. *Kui* $a \,\vdots\, b$, *siis* $\pm a \,\vdots\, (\pm b)$.

See teoreem võimaldab täisarvude omaduste käsitlemisel piirduda mittenegatiivsete täisarvudega.

Teoreem 1.4. n *järjestikusest naturaalarvust üks ja ainult üks jagub arvuga* n.

Teoreemid 1.1., 1.2., ja 1.3. on lihtsalt tõestatavad kahe arvu jaguvuse mõistet kasutades, teoreem 1.4. aga lähtudes sellest, et naturaalarvu jagamisel arvuga n võib tekkida üldse n erinevat jääki, milledeks on 0, 1, 2, 3, ..., $n-2$, $n-1$.

Vaatleme mõningaid näiteid nende jaguvuse omaduste rakendamisest ülesannete lahendamisel.

Näide 3. Tõestame, et kahest järjestikusest paarisarvust üks ja ainult üks jagub 4-ga.

1. Olgu antud kaks järjestikust paarisarvu $2n$ ja $2n+2$, kus $n \in N$. Nende paarisarvude jagamisel kahega saame kaks järjestikust naturaalarvu n ja $n+1$, milledest üks teoreemi 1.4. põhjal jagub kahega. Teoreemi 1.2. põhjal jagub siis kas $2n$ või $2(n+1)$ neljaga.

2. Kui üks kahest järjestikusest paarisarvust $2n$ ja $2n+2$ jagub neljaga, siis jagub kahega ainult üks kahest järjestikusest naturaalarvust n ja $n+1$ (vt. teoreem 1.4.) ja järelikult neljaga jagub ainult üks antud paarisarvudest.

Teoreem 1.3. lubab aga tõestuse laiendada ka negatiivsetele täisarvudele.

N ä i d e 4. Tõestame, et p^2-1 jagub 24-ga, kui p on algarv ja $p\geqslant 5$.

Arvudest $p-1$, p ja $p+1$ on $p-1$ ja $p+1$ kaks järjestikust paarisarvu, milledest üks jagub 2-ga ja üks 4-ga (vt. näide 3.); nende korrutis $(p-1)(p+1)=p^2-1$ jagub aga teoreemi 1.2. põhjal 8-ga. Teoreemi 1.4. järgi peab üks arvudest $p-1$, p, $p+1$ jaguma 3-ga. Et selleks ei saa olla arv p kui kolmest suurem algarv, siis jagub 3-ga kas $p-1$ või $p+1$ ja ka nende korrutis p^2-1. Seega p^2-1 jagub ühistegurita arvudega 8 ja 3 ja vastavalt teoreemi 1.2. järeldusele 4 ka nende korrutisega 24.

Arvude jaguvuse tõestamisel on sageli sobiv kasutada matemaatilist induktsiooni.

N ä i d e 5. Tõestame, et $5\cdot 7^{2n}+2^{3(n-1)}$ jagub 41-ga, kui $n\in N_1$.

Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit:

1. Kui $n=1$, siis $5\cdot 7^2+2^0=246=6\cdot 41$
2. Oletame, et $n=k$ korral $A_k=5\cdot 7^{2k}+2^{3(k-1)}$ jagub 41-ga.
3. Tõestame, et siis ka $n=k+1$ korral antud avaldis jagub 41-ga.

Olgu

$$A_k=5\cdot 7^{2k}+2^{3(k-1)}=41N,$$

$$\text{siis}\quad 5\cdot 7^{2k}=41N-2^{3(k-1)}=41N-8^{k-1}$$

$$A_{k+1}=5\cdot 7^{2(k+1)}+2^{3k}=5\cdot 7^{2k}\cdot 49+8^k=$$

$$=(41N-8^{k-1})\cdot 49+8\cdot 8^{k-1}=$$

$$=41\cdot 49N-49\cdot 8^{k-1}+8\cdot 8^{k-1}=41\cdot 49N-41\cdot 8^{k-1},$$

millest on näha, et A_{k+1} tõepoolest jagub 41-ga.

§ 3. KONGRUENTS.

Kui täisarvude a ja b jagamisel naturaalarvuga m tekib üks ja seesama jääk, siis öeldakse, et arvud a ja b on k o n g r u e n t s e d m o o d u l i m j ä r g i. Tähistus $a\equiv b \pmod{m}$.

Viimast seost nimetatakse **kongruentsiks** ja loetakse: arv a on kongruentne arvuga b modulo m (ehk mooduli m järgi).

Näiteks $13 \equiv 18 \pmod 5$, sest nii 13 kui ka 18 annavad 5-ga jagamisel sama jäägi 3. Sama tõde väljendavad ka kongruentsid $13 \equiv 3 \pmod 5$ ja $18 \equiv 3 \pmod 5$.

Kui arv a jagub arvuga m, siis $a \equiv 0 \pmod m$.

Kongruentside tähtsamad omadused on põhjendatavad järgmise teoreemi abil:

Teoreem 1.5. *Täisarvud a ja b on kongruentsed mooduli m järgi siis ja ainult siis, kui $a-b$ jagub mooduliga m.*

Tõestus.

1. Kui $a-b$ jagub mooduliga m, siis $a-b=km$, kus $k \in Z$. Olgu arvu b jagamisel mooduliga m tekkiv jääk r, siis $b=mq+r$, kus $q, r \in Z$ ja $0 \leqslant r < m$. Liites võrdused $a-b=km$ ja $b=mq+r$, saame $a=(k+q)\cdot m+r$, millest on näha, et arvu a jagamisel mooduliga m tekib sama jääk, mis b jagamisel, s. t. $a \equiv b \pmod m$.

2. Kui $a \equiv b \pmod m$, siis $a=mq_1+r$ ja $b=mq_2+r$, kus $q_1, q_2, r \in Z$. Siit $a-b=m(q_1-q_2)$, s. t. $a-b$ jagub mooduliga m.

Järgnevalt esitame kongruentsi tähtsamad omadused.

Teoreem 1.6. *Sama mooduliga kongruentse võib liikmeti liita: kui $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod m$, siis $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \equiv b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n \pmod m$.*

Tõestus.

Eelduse ja teoreemi 1.5. põhjal $a_1-b_1=mq_1$, $a_2-b_2=mq_2$, ..., $a_n-b_n=mq_n$, kus $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Z$.

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame $(a_1+a_2+\ldots+a_n)-(b_1+b_2+\ldots+b_n)=m(q_1+q_2+\ldots+q_n)$, millest järeldubki, et $a_1+a_2+\ldots+a_n \equiv b_1+b_2+\ldots+b_n \pmod m$.

Järeldus 1. Kongruentsis võib liikmed, nende märki vastupidiseks muutes, ühelt poolelt teisele üle kanda.

$$a+b \equiv c \pmod m \Leftrightarrow a \equiv c-b \pmod m.$$

Järeldus 2. Kongruentsi mistahes poolele võib liita mooduli täisarvkordse.

$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow a+km \equiv b \pmod m, \text{ kui } k \in Z.$$

Nii nende järelduste kui järgnevate teoreemide põhjendamine jäägu lugeja enda hooleks.

Teoreem 1.7. *Sama mooduliga kongruentse võib liikmeti korrutada.*

Kui $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, siis $a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \pmod{m}$.

Järeldus 1. Kongruentsi mõlemaid pooli võib astendada ühe ja sama naturaalarvuga.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}, \text{ kui } n \in N.$$

Järeldus 2. Kongruentsi mõlemaid pooli võib korrutada ühe ja sama täisarvuga.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m}, \text{ kui } k \in Z.$$

Järeldus 3. Kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis täisarvuliste kordajatega hulkliikme $k_0 x^n + k_1 x^{n-1} + \ldots + k_{n-1} x + k_n$ väärtused $x = a$ ja $x = b$ korral on samuti kongruentsed mooduli m suhtes:

$$k_0 a^n + k_1 a^{n-1} + \ldots + k_{n-1} a + k_n \equiv$$
$$\equiv k_0 b^n + k_1 b^{n-1} + \ldots + k_{n-1} b + k_n \pmod{m}.$$

Teoreem 1.8. *Kongruentsi mõlemaid pooli ja moodulit võib korrutada ühe ja sama naturaalarvuga.*

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{mk}, \text{ kui } k \in N,\ k \neq 0.$$

Järeldus. Kongruentsi mõlemaid pooli ja moodulit võib jagada nende ühise naturaalarvulise teguriga.

Teoreem 1.9. *Kui kongruents kehtib mooduli m suhtes, siis kehtib ta ka iga täisarvulise mooduli c suhtes, mis on mooduli m teguriks.*

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{c}, \text{ kui } m = cd \text{ ja } c, d \in Z.$$

Teoreem 1.10. *Kongruentsi mõlemaid pooli võib jagada nende ühisteguriga, kui see on mooduliga ühistegurita.*

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{m},$$

$$\text{kui } a \,\vdots\, c,\ b\ c \text{ ja } (m, c) = 1.$$

Näide 6. Kongruentsi $30 \equiv 42 \pmod 4$ mõlemaid pooli võib küll jagada nende ühisteguriga 3, sest $(3, 4) = 1$, kuid mitte ühisteguriga 6, sest $(6, 4) = 2$. Esimesel juhul saame kongruentsi $10 \equiv 14 \pmod 4$, mis on tõene, teisel juhul on aga tulemus $5 \equiv 7 \pmod 4$ väär.

Kongruentse saab edukalt kasutada arvude jaguvusega seotud ülesannete lahendamisel.

Näide 7. Tõestame, et kahe naturaalarvu korrutis annab kolmega jagamisel jäägiks 1, kui mõlema teguri jagamisel kolmega on jääk 1.

$a \equiv 1 \pmod 3$, $b \equiv 1 \pmod 3$. Teoreemi 1.7. põhjal $ab \equiv \equiv 1 \pmod 3$.

Näide 8. Tõestame, et $4^{2m} - 1$ jagub 15-ga, kui $m \in N$. $4^2 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (4^2)^m \equiv 1^m \pmod{15} \Rightarrow 4^{2m} - 1 \equiv 0 \pmod{15}$.

Näide 9. Tuletame 11-ga jaguvuse tunnuse.

Esitame arvu $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_1}$ kümne astmete abil:

$$N = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1.$$

Et $10 \equiv -1 \pmod{11}$, siis $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$ ja $N = = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1 \equiv a_n \cdot (-1)^{n-1} + + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot (-1)^2 + a_2 \cdot (-1) + a_1 \pmod{11}$ (vt. teoreem 1.7. järeldus 3). Järelikult $N \equiv (a_1 + a_3 + \ldots) - (a_2 + + a_4 + \ldots) \pmod{11}$.

Seega jagub arv 11-ga siis, kui arvu kirjutises paarituarvulistel kohtadel olevate numbrite summa ja paarisarvulistel kohtadel olevate numbrite summa vahel jagub 11-ga.

Näide 10. Tõestame, et murd $\frac{34a+5}{51a+8}$ on taandumatu mis tahes naturaalarvulise a korral.

Kasutame vastuväitelist tõestusviisi. Oletame, et leidub niisugune $a \in N$, mille korral antud murru lugeja ja nimetaja jaguvad naturaalarvuga $n \neq 1$. Siis $34a + 5 \equiv 0 \pmod n$ ja $51a + 8 \equiv \equiv 0 \pmod n$. Korrutame esimest kongruentsi 3-ga, teist 2-ga :

$$102a + 15 \equiv 0 \pmod n,$$

$$102a + 16 \equiv 0 \pmod n.$$

Lahutades teisest kongruentsist esimese, saame $1 \equiv 0 \pmod n$, mis on vastuolus meie oletusega $n \neq 1$. Järelikult on see oletus väär ja ei leidu naturaalarvulist a väärtust, mille puhul murd oleks taanduv.

N ä i d e 11. Tõestame, et täisarvu N ja tema ristsumma jagamisel 9-ga tekkinud jäägid on võrdsed.

$$N=a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1.$$

Et $10\equiv 1 \pmod 9$, $10^2\equiv 1 \pmod 9$, $\ldots$, $10^{n-1}\equiv 1 \pmod 9$,

siis $N\equiv a_n+a_{n-1}+\ldots+a_3+a_2+a_1 \pmod 9$.

N ä i d e 12. Missuguste n täisarvuliste väärtuste korral $3n^2+3n-1$ jagub 5-ga?

Tuleb lahendada kongruents $3n^2+3n-1\equiv 0 \pmod 5$. Liidame selle kongruentsiga kongruentsi $-5\equiv 0 \pmod 5$: $3n^2+3n-6\equiv \equiv 0 \pmod 5$.

Et arvud 3 ja 5 on ühistegurita, siis teoreemi 1.10. põhjal $n^2+n-2\equiv 0 \pmod 5$. Et $n^2+n-2=(n-1)(n+2)$ ja 5 on algarv, siis kas $n-1\equiv 0 \pmod 5$ või $n+2\equiv 0 \pmod 5$. Esimesel juhul $n\equiv 1 \pmod 5$, teisel juhul $n\equiv -2 \pmod 5\equiv 3 \pmod 5$.

Järelikult $3n^2+3n-1$ jagub 5-ga, kui n annab 5-ga jagamisel kas jäägi 1 või 3.

§ 4. DIOFANTILISED VÕRRANDID.

Diofantilisteks võrranditeks nimetatakse täisarvuliste kordajatega mitme muutujaga algebralisi võrrandeid, milledele otsitakse ainult t ä i s a r v u l i s i l a h e n d e i d.

Kahe muutujaga lineaarseks diofantiliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul $ax+by=c$, kus $a, b, c\in Z$ ja ka $x, y\in Z$.

Et võrrand $ax+by=c$ oleks üldse täisarvudes lahenduv, selleks peab c jaguma a ja b suurima ühisteguriga (vt. teoreem 1.1.). Sellest lähtudes võime väita, et ei leidu täisarvude paari, mis oleks näiteks võrrandi $4x+6y=11$ lahendiks.

Lineaarse diofantilise võrrandi lahendamiseks kasutatakse sageli E u l e r i r e d u k t s i o o n i m e e t o d i t, mille olemuse selgitamiseks lahendame sellel meetodil järgmises näites toodud võrrandi.

N ä i d e 13. Leiame võrrandi $17x-38y=43$ täisarvulised lahendid. Selleks avaldame võrrandist ühe muutuja (soovitatav vähima absoluutväärtusega kordajaga muutuja):

$x=\frac{38y+43}{17}$. Seejärel eraldame jagatise täisosa:

$$x=2y+2+\frac{4y+9}{17}.$$

Et x peab olema täisarv (samuti nagu y), siis $4y+9$ peab jaguma 17-ga ehk $4y+9=17t$, kus ka $t\in Z$. Nüüd avaldame y-i: $y=\frac{17t-9}{4}=4t-2+\frac{t-1}{4}$. Siit $t-1=4u$ ja $t=4u+1$, kus $u\in Z$. Nüüd jääb üle väljendada y ja x u kaudu: $\begin{cases} x=38u+7, \\ y=17u+2. \end{cases}$

Saadud muutujate paari nimetatakse võrrandi üldlahendiks. Kui arvule u anda täisarvulisi väärtusi, siis saame võrrandi erilahendid. Näiteks $u=0$ korral $x=7$ ja $y=2$, $u=-1$ korral $x=-31$ ja $y=-15$.

Kuid diofantilist võrrandit võib lahendada ka kongruentse kasutades.

N ä i d e 14. Leiame võrrandi $32x+12y=80$ täisarvulised lahendid.

Pärast 4-ga taandamist saame $8x+3y=20$. Kui x ja y on selle võrrandi täisarvuliseks lahendiks, siis võrrandi poolte võrdsusest järeldub, et $8x+3y\equiv 20 \pmod{m}$, kus m on mis tahes nullist erinev naturaalarv. Valime mooduliks muutujate kordajatest selle, mille absoluutväärtus on vähim, antud juhul siis 3.

Et $8x+3y\equiv 2x \pmod 3$ ja $20\equiv 2 \pmod 3$, siis $2x\equiv 2 \pmod 3$ ja teoreem 1.10. põhjal $x\equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow x=3t+1$, kus $t\in Z$.

Võrrandist $8x+3y=20$ avaldame y-i:

$$y=\frac{20-8x}{3}=\frac{20-8(3t+1)}{3}=-8t+4.$$

Seega on antud võrrandi üldlahendiks

$$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=-8t+4. \end{cases}$$

Erilahendid leiame, andes t-le täisarvulisi väärtusi. Näiteks:

kui $t=0$, siis $x=1$ ja $y=4$,

kui $t=1$, siis $x=4$ ja $y=-4$, jne.

N ä i d e 15. Lahendame täisarvudes veel võrrandi $7x+5y=6$. $7x+5y\equiv 2x \pmod 5$ ja $6\equiv 1 \pmod 5$, järelikult $2x\equiv 1 \pmod 5$.

Et 1 ei jagu 2-ga, siis asendame saadud kongruentsi kongruentsiga $2x \equiv 6 \pmod 5$, millest $x \equiv 3 \pmod 5$. Üldlahend on seega

$$\begin{cases} x = 5t + 3, \\ y = -7t - 3. \end{cases}$$

Kongruentsid on rakendatavad ka rohkem kui kahe muutujaga lineaarse diofantilise võrrandi ja mõnel juhul isegi teise astme diofantilise võrrandi lahendamisel nagu näeme alljärgnevatest näidetest.

Näide 16. Leiame võrrandi $2x + 3y - 5z = 28$ kõik täisarvulised lahendid, mis rahuldavad tingimust $0 < x, y, z < 10$

$$2x + 3y - 5z \equiv y - z \pmod 2 \text{ ja } 28 \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow y - z \equiv$$
$$\equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow y \equiv z \pmod 2 \Rightarrow y = z + 2k.$$

Asendanud võrrandis y-i saadud avaldisega, avaldame x-i: $x = 14 + z - 3k$. Võrrandi üldlahend on

$$\begin{cases} x = 14 + z - 3k, \\ y = z + 2k, \\ z \in Z, \\ k \in Z. \end{cases}$$

Võrrandi lahendite leidmiseks antud vahemikust koostame ülesande tingimuste kohase võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} 0 < 14 + z - 3k < 10, \\ 0 < z + 2k < 10, \\ 0 < z < 10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z+4}{3} < k < \frac{z+14}{3}, \\ -\frac{z}{2} < k < \frac{10-z}{2}, \\ 0 < z < 10. \end{cases}$$

Et tingimusel $z > 0$ on $\frac{10-z}{2} < \frac{z+14}{3}$, siis $z < 4{,}4$ ja $\frac{z+4}{3} < k < \frac{10-z}{2}$.

1. Kui $z = 1$, siis $\frac{5}{3} < k < 4{,}5$ s. t. $k = 2, 3, 4$.

a) $k = 2 \Rightarrow y = 5$ ja $x = 9$,

b) $k=3 \Rightarrow y=7$ ja $x=6$,

c) $k=4 \Rightarrow y=9$ ja $x=3$.

2. Kui $z=2$, siis $2<k<4$, s. t. $k=3 \Rightarrow y=8$ ja $x=7$.

3. Kui $z=3$, siis $2\frac{1}{3}<k<3{,}5$, s. t. $k=3 \Rightarrow y=9$ ja $x=8$.

4. Kui $z=4$, siis $2\frac{2}{3}<k<3$ ja lahend puudub.

Otsitavad täisarvulised lahendid on (3; 9; 1), (6; 7; 1); (7; 8; 2), (8; 9; 3) ja (9; 5; 1).

N ä i d e 17. Leiame võrrandi $4xy-9x-7y+15=0$ täisarvulised lahendid.

$$4xy-9x-7y+15=0 \Leftrightarrow y(4x-7)-2(4x-7)-(x-1)=$$
$$=0 \Leftrightarrow (4x-7)(y-2)=x-1 \Rightarrow x-1\equiv 0 \pmod{(4x-7)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1=k(4x-7) \Rightarrow k=\frac{x-1}{4x-7}.$$

Et k saaks üldse olla täisarv, siis peab $|x-1|\geqslant|4x-7|$ või $x-1=0$. Viimasel juhul on lahendiks $x=1$ ja $y=2$. Võrratuse täisarvuliseks lahendiks on ainult $x=2$, sest kui $x>2$, või kui $x\leqslant 0$, siis ilmselt $|4x-7|>|x-1|$.

Seega teine lahend on $x=2$ ja $y=3$.

ÜLESANDED.

1-1. Milliste p algarvuliste väärtuste korral $3p+4=a^2$ ja milline peab olema arvu a väärtus, kui $a\in N$?

1-2. Tõestage, et $3n^2-1$ ei ole täisarvu ruut, kui $n\in Z$.

1-3. Tõestage, et arvu $121n-3$, kus $n\in Z$, ei ole võimalik väljendada kahe järjestikuse naturaalarvu korrutisena.

1-4. Millistel n naturaalarvulistel väärtustel 4^n-3^n jagub 7-ga?

1-5. Tuletage seitsmega jaguvuse tunnus.

1-6. Tõestage, et $17^{11}\cdot 11^{17}-1$ ei ole ühegi täisarvu ruut.

1-7. Millise numbriga lõpeb arv $3^{\overbrace{333\ldots3}^{n \text{ numbrit}}}$, kui $n>1$?

1-8. Leidke arvu $z=3^{55}-7^{33}$ kaks viimast numbrit.

1-9. Tõestage, et $448^n+57\cdot332^n$ jagub 29-ga iga naturaalarvu n korral.

1-10. Tõestage, et $2345^{1980}-1$ jagub 11-ga.

1-11. Tõestage, et $11^{n+2}+12^{2n+1}$ jagub 133-ga, kui $n\in N$.

1-12. Millistel n täisarvulistel väärtustel $3n^2-6n-2$ jagub 7-ga?

1-13. Tõestage, et $\sum\limits_{k=1}^{20} k^5$ jagub 21-ga.

1-14. Tõestage, et $4^{1978}-3^{1976}$ jagub 5-ga.

1-15. Tõestage, et $3^{1980}+5^{1986}$ jagub 13-ga.

1-16. Tõestage, et $2^{3^n}+1$ jagub arvuga 3^{n+1} iga naturaalarvu n korral.

1-17. Tõestage, et a_1a_2+1 jagub 36-ga, kui a_1 ja a_2 on kaks algarvu ($a_1, a_2>3$), millede vahe on 2.

1-18. Leidke arvude p ja q kõik algarvulised väärtused, mis rahuldavad võrdust $p^2-2q^2=1$.

1-19. Leidke arvu a kõik algarvulised väärtused, mille korral $2a^2+1$ on algarv.

1-20. $a=31046n-1$. Leidke vähim a, mis jagub 31-ga, kui $n\in N$.

1-21. Leidke arvu n kõik niisugused naturaalarvulised väärtused, et $n<60$ ja $n^2+4n-21$ jagub 17-ga.

1-22. Tõestage, et p^4-20p^2+64 jagub 45-ga, kui p on algarv ja $p\geqslant7$.

1-23. Tõestage, et $1^n+2^n+3^n+4^n$ jagub viiega ainult siis, kui n ei jagu neljaga, $n\in N$.

1-24. Kas kolme naturaalarvu kuupide summa võib jaguda 7-ga, kui ükski kolmest arvust ei jagu 7-ga?

1-25. Leidke suurim arv, mis jagub 11-ga ja mille kirjutises esinevad kõik numbrid ainult üks kord.

1-26. Leidke kõik naturaalarvud, mis jaguvad nii 7, 11 ja 13-ga, ning lõpevad kolme numbriga, mis moodustavad etteantud kolmekohalise naturaalarvu.

1-27. On antud täisarvude jadad (x_n) ja (y_n) nii, et
$x_0=1$, $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ ja
$y_0=1$, $y_1=7$, $y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}$, $n=1, 2, 3, \ldots$.
Seega on nende jadade kuus esimest liiget vastavalt 1, 1, 3, 5, 11, 21 ja 1, 7, 55, 161, 487. Tõestage, et nendes jadades ei ole rohkem võrdseid liikmeid kui x_0, x_1 ja y_0.

1-28. m, n, p ja q on täisarvud, kusjuures $m-p\neq 0$. Tõestage, et $mq+np$ jagub $(m-p)$-ga siis ja ainult siis, kui $mn+pq$ jagub $(m-p)$-ga.

1-29. Tõestage, et murd $\frac{78z+7}{52z+5}$ ei ole taanduv, kui $z\in N_1$.

1-30. Leidke sellised $a\in N$ väärtused, mille korral murd $\frac{48a+5}{69a+4}$ on taanduv.

1-31. Leidke viis vähimat mitteühekohalist järjestikust positiivset täisarvu x_k (kus $k=1, 2, 3, 4, 5$) nii, et x_k jagub arvuga $k+4$ ja lõpeb arvuga $k+4$.

1-32. Nimetame algarvude paariks kaht järjestikust algarvu, mille vahe on 2 ja algarvude kolmikuks kolme järjestikust algarvu, mille vahe on 2. Nii näiteks on algarvude paar 11 ja 13 ning kolmik 3, 5 ja 7. Tõestage, et rohkem algarvude kolmikuid ei leidu.

1-33. Leidke kõik naturaalarvud, mis võrduvad oma ristsumma ruuduga.

1-34. Tõestage, et naturaalarvu viies aste lõpeb sama numbriga, millisega lõpeb naturaalarv ise.

1-35. Tõestage, et ei leidu sellist algarvudest koosnevat aritmeetilist jada, mille liikmete vahe on 1000.

1-36. Leidke kõik positiivsed kahekohalised täisarvud, mille numbrite kuupide summa on numbrite summast 57 korda suurem.

1-37. Leidke kõik kolmekohalised arvud A, millel on järgmine omadus: kõigi nende arvude, mis saadakse arvust A numbrite ümberpaigutamisel, aritmeetiline keskmine on A.

1-38. Kontrollimata hoiukassast väljamakstud rahasummat, leidis hoiustaja, et pärast 26 rbl. 66 kop. ostu oli tal raha kaks korda rohkem kui ta hoiukassast pidi saama. Kontrollimisel selgus, et raha väljamaksmisel oli kassiir kogemata rublad ja kopikad ära vahetanud. Kui palju raha pidi hoiustaja tegelikult saama?

1-39. Tõestage, et võrrand $3x^2-4y^2=19$ ei ole täisarvudes lahenduv.

1-40. Tõestage, et võrrandil $x^2-2y^2+8z=3$ puudub täisarvuline lahend.

1-41. Leidke võrrandi $2x^2-xy+11x-5y-1=0$ täisarvulised lahendid.

1-42. Leidke võrrandi $x^4+4y^4=2(z^4+4u^4)$ täisarvulised lahendid.

1-43. Leidke võrrandi $2^x-3^y=1$ kõik naturaalarvulised lahendid.

1-44. Tõestage, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} x^2+6y^2=z^2, \\ 6x^2+y^2=t^2, \end{cases}$$

ei ole nullist erinevaid naturaalarvulisi lahendeid.

II PEATÜKK.

ALGEBRALISED TEISENDUSED. ARVUJADAD.

§ 1. RATSIONAALAVALDISED.

Avaldiste lihtsustamisel ja samasuste tõestamisel kasutatakse tihti nn. abivalemeid. 6. klassis õpitud valemid on siintoodute erijuhtudeks.

1. $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n.$
2. $(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + $ $+ (-1)^n C_n^n b^n.$
3. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$
4. $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - b^{n-1})$, kui n on paarisarv.
5. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$, kui n on paaritu arv.
6. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 +$ $+ 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$
7. $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c) =$ $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc.$

Võrdest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ järelduvad nn. tuletatud võrded saame leida kasutades valemeid

$$\frac{m_1a + n_1b}{m_2a + n_2b} = \frac{m_1c + n_1d}{m_2c + n_2d} \quad \text{ja} \quad \frac{m_1a + n_1c}{m_2a + n_2c} = \frac{m_1b + n_1d}{m_2b + n_2d};$$

võrretest $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ järelduvad võrded

$$\frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_nb_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}, \text{ kus}$$

n_1, n_2 ja $m_1, m_2, \ldots, m_n$ on mis tahes reaalarvud, mis ei muuda nimetajat nulliks.

Algebraliste avaldiste lihtsustamisel on väga tähtis osata hulkliiget tegureiks lahutada. Lisaks koolikursusest tuntud võtetele vaatleme siin veel paari erivõtet.

Liidetava lahutamine kahe liidetava summaks (vaheks).

Näide 1. Lahutame tegureiks

$A=ab(c+d)(a-b)+bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)$.

Kuna $(a-b)+(b-c)=a-c$, siis

$$ac(b+d)(a-c)=ac(b+d)(a-b)+ac(b+d)(b-c) \quad \text{ja}$$

$$A=ab(c+d)(a-b)+bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-b)-$$
$$-ac(b+d)(b-c)=a(a-b)[b(c+d)-c(b+d)]+$$
$$+c(b-c)[b(a+d)-a(b+d)]=a(a-b)(bc+bd-bc-$$
$$-cd)+c(b-c)(ab+bd-ab-ad)=ad(a-b)(b-c)+$$
$$+cd(b-c)(b-a)=d(a-b)(b-c)(a-c).$$

Näide 2. Lahutame tegureiks $A=2x^4+x^3+10x^2+3x+12$. Kuna $10x^2=4x^2+6x^2$, siis

$$A=2x^4+x^3+4x^2+6x^2+3x+12=x^2(2x^2+x+4)+$$
$$+3(2x^2+x+4)=(2x^2+x+4)(x^2+3).$$

Mõne ülesande lahendamisel tuleb kasutada nn. määramata kordajate meetodit.

Näide 3. Leiame kordajad A, B, C ja D nii, et hulkliige $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+4x+4$ oleks hulkliikme $g(x)=x^2+Cx+D$ täisruut.

$$g^2(x)=(x^2+Cx+D)^2=x^4+2Cx^3+(C^2+2D)x^2+2CDx+D^2.$$

Et hulkliikmed $f(x)$ ja $g^2(x)$ oleksid võrdsed, peavad võrdsed olema vastavad kordajad. A, B, C ja D määramiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} 2C=A, \\ 2D+C^2=B, \\ 2CD=4, \\ D^2=4, \end{cases}$$

millest $D=2$, $C=1$, $B=5$, $A=2$ või $D=-2$, $C=-1$, $B=-3$, $A=-2$.

Sageli on võimalik hulkliiget tegureiks lahutada, leides eelnevalt selle hulkliikme nullkohad. Kui nullkohtadeks on $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siis Bezout' teoreemi põhjal (vt. teoreem 3.7., järeldus 2.) hulkliige $f(x)$ jagub kaksliikmetega $x-x_1$, $x-x_2$, $\ldots$, $x-x_n$.

Koolikursusest on teada samasuste tõestamise võte: võetakse võrduse üks pool ja teisendatakse seda seni, kuni saadakse võrduse teine pool või teisendatakse algul võrduse üht poolt ja siis teist poolt, kuni saadakse sama tulemus. Vahel on otstarbekas kasutada järgmist teoreemi.

Teoreem 2.1. *Kui kahe n-nda astme hulkliikme $f(x)$ ja $g(x)$ väärtused on võrdsed $n+1$ erineval x väärtusel, siis need hulkliikmed on samaselt võrdsed.*

Järeldus. Kui n-nda astme hulkliikme $f(x)$ väärtused $n+1$ erineval x väärtusel on võrdsed nulliga, siis on tegemist 0-hulkliikmega (hulkliige on samaselt võrdne nulliga).

Näide 4. Tõestame, et

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1,$$

kui $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$.

Lahendus. I viis. Murdude ühiseks nimetajaks on $(a-b)(a-c)(b-c)$. Viinud vasaku poole ühisele nimetajale, saame lugejaks $(b-c)[x^2-(b+c)x+bc]-(a-c)[x^2-(a+c)x+ac]+(a-b)[x^2-(a+b)x+ab]$. Pärast koondamist (kõik tähte x sisaldavad liikmed koonduvad) ja tegureiks lahutamist saame ka lugejaks $(a-b)(a-c)(b-c)$.

II viis. Võrduse vasak pool on ülimalt 2. astme hulkliige. Hakkab silma, et kui $x=a$, $x=b$ või $x=c$, siis selle hulkliikme väärtus on 1. Kui aga 2. astme hulkliikme väärtus kolmel erineval x väärtusel on 1, siis teoreemi 2.1. põhjal see hulkliige on samaselt võrdne 1-ga.

Mõnikord samasus kehtib teataval tingimusel. Järgmises näites vaatleme niisuguse samasuse tõestamist.

Näide 5. Tõestame, et $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$, kui

$$a+b+c=0 \text{ ja } a^2+b^2+c^2=1.$$

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=1-2(a^2b^2+$ $+a^2c^2+b^2c^2)$. Kuna $a+b+c=0$, siis ruutu võttes saame, et a^2+ $+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$, millest $ab+ac+bc=-\frac{1}{2}$. Viimase võrduse pooli ruutu võttes saame, et $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+$ $+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$, millest $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{4}$ ja a^4+ $+b^4+c^4=1-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Murdavaldiste summa leidmiseks on sageli kasulik murd avaldada kahe või mitme lihtsama murru summana (vahena).

Näiteks summa $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$ saame leida kergesti peast, kui märkame, et $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-$ $-\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$. Kõik liikmed peale esimese ja viimase koonduvad. Summaks on $\frac{99}{100}$.

N ä i d e 6. Leiame summa

$$S=\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}+\frac{x_3}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}+$$
$$+\ldots+\frac{x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(x_1+x_2+\ldots+x_n)}.$$

Paneme tähele, et $\frac{x_2}{x_1(x_1+x_2)}=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+x_2}$,

$$\frac{x_3}{(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)}=\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_1+x_2+x_3}, \ldots,$$

$$\frac{x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(x_1+x_2+\ldots+x_n)}=$$

$$=\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}-\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Seega $S=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}=\frac{x_2+x_3+\ldots+x_n}{x_1(x_1+x_2+\ldots+x_n)}$

§ 2. IRRATSIONAALAVALDISED

Definitsioon 1. Arvu b nimetatakse n-nda astme ($n \in N$, $n \geqslant 2$) **juureks** arvust a, kui $b^n = a$; sümbolites: $b = \sqrt[n]{a}$.

Definitsioon 2. Mittenegatiivset arvu b, mis on n-nda astme ($n \in N$, $n \geqslant 2$) juureks mittenegatiivsest arvust a, nimetatakse n-nda astme **aritmeetiliseks juureks** arvust a.

Aritmeetilisel juurel on vaid üks kindel väärtus. On kokku lepitud, et arvutamisel reaalarvude hulgas sümbol $\sqrt[n]{a}$, $n \in N$, $n \geqslant 2$, $a \geqslant 0$ tähistab aritmeetilist juurt.

Kui $a < 0$ ja n on paarisarv, siis $\sqrt[n]{a}$ ei eksisteeri; kui $a < 0$ ja n on paaritu arv, siis $\sqrt[n]{a}$ on negatiivne, aritmeetilise juure $\sqrt[n]{|a|}$ vastandarv.

Näide 7. $\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|$ ehk $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Näide 8. $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a} = \dfrac{|a|}{a} = \begin{cases} 1, & \text{kui } a > 0, \\ -1, & \text{kui } a < 0, \\ \text{ei ole määratud,} & \text{kui } a = 0. \end{cases}$

Näide 9. $a + \sqrt{(a-1)^2} = \begin{cases} 2a - 1, & \text{kui } a > 1, \\ 1, & \text{kui } a \leqslant 1, \end{cases}$ sest

$$\sqrt{(a-1)^2} = \begin{cases} a - 1, & \text{kui } a > 1, \\ 1 - a, & \text{kui } a < 1, \\ 0, & \text{kui } a = 1. \end{cases}$$

Koolikursusest tuntud eeskirjad juurimise kohta on tuletatud eeldusel, et juuritavad on kõik mittenegatiivsed. Arvutamisel juurtega on vaja väga tähelepanelikult jälgida, kas kasutatud teisenduse tulemusena saadud avaldis on ikka samaselt võrdne esialgsega.

Näide 10. $\sqrt[8]{(-3)^6} \neq \sqrt[4]{(-3)^3}$, vaid $\sqrt[8]{(-3)^6} = \sqrt[8]{|-3|^6} = \sqrt[4]{3^3}$.

Näide 11. $\sqrt[4]{(x-1)^2} \neq \sqrt{x-1}$, vaid $\sqrt[4]{(x-1)^2} = \sqrt[4]{|x-1|^2} =$

$$= \sqrt{|x-1|} = \begin{cases} \sqrt{x-1}, \text{ kui } x \geqslant 1, \\ \sqrt{1-x}, \text{ kui } x < 1. \end{cases}$$

Näide 12. Kui $a<0$, siis $a\sqrt{\frac{a-3}{a}} \neq \sqrt{\frac{a^2(a-3)}{a}}$, vaid

$$a\sqrt{\frac{a-3}{a}} = -\sqrt{\frac{a^2(a-3)}{a}} = -\sqrt{a(a-3)}.$$

Kui avaldises esineb **liitradikaal** kujul $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ või $\sqrt{A-\sqrt{B}}$, siis juhul, kui A^2-B on täisruut, saame liitradikaalist vabaneda kasutades valemeid

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

ja $\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$, kui $A>0$, $B>0$, $A^2>B$.

Tõestage nende valemite õigsus võrduse mõlema poole ruutu võtmise teel!

Näide 13. Vabaneme liitradikaalist avaldises $\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$. Siin $A=3\sqrt{3}$, $B=24$.

$$\sqrt{3\sqrt{3}-2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{27-24}}{2}} - \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{27-24}}{2}} =$$

$$= \sqrt{2\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{3}.$$

Näide 14. Lihtsustame avaldise

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}, \quad \text{kui } x \geqslant 1.$$

$$A=x, \ B=4(x-1).$$

$$\sqrt{A^2-B}=\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{kui } x\geqslant 2,\\ 2-x, & \text{kui } x<2.\end{cases}$$

Seega $$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}+\sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}+\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}=2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}=\begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{kui } x\geqslant 2,\\ 2, & \text{kui } 1\leqslant x<2.\end{cases}$$

Juuravaldiste teisendamisel on tihti vaja vabaneda irratsionaalsusest murru nimetajas (lugejas).

Olgu irratsionaalavaldise tähiseks A. Tegur, millega seda avaldist tuleb korrutada juurtest vabanemiseks, olgu B.

Sagedamini kasutatakse järgmisi teisendusi.

1. Kui $A=\sqrt[n]{x^p y^q \ldots z^r}$ ja $B=\sqrt[n]{x^{n-p} y^{n-q} \ldots z^{n-r}}$, siis $A\cdot B=$ $=xy\ldots z$.

2. Kui $A=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}$ ja $B=\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+$ $+\ldots+\sqrt[n]{y^{n-1}}$, siis $A\cdot B=x-y$.

2a. Erijuhul, kui $n=2$, $A=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ja $B=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. $A\cdot B=$ $=x-y$.

2b. Erijuhul, kui $n=3$, $A=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$ ja $B=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$. $A\cdot B=x-y$.

3. Kui $A=\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}$ ja $B=\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}-$ $-\ldots-(-1)^n\sqrt[n]{y^{n-1}}$, siis $A\cdot B=x+y$.

3a. Erijuhul, kui $n=2$, $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ja $B=\sqrt{x}-\sqrt{y}$. $A\cdot B=$ $=x-y$.

3b. Erijuhul, kui $n=3$, $A=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ ja $B=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$. $A\cdot B=x+y$.

4. Kui $A=\sqrt{x}\pm\sqrt[3]{y}$, ja $B=(\sqrt{x}\mp\sqrt[3]{y})\,(x^2+x\sqrt[3]{y^2}+y\sqrt[3]{y})$, siis $A\cdot B=x^3-y^2$.

5. Kui $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$ ja $B=(\sqrt{x}+\sqrt{y}\mp\sqrt{z})\,(x+y-z-2\sqrt{xy})$, siis $A\cdot B=(x+y-z)^2-4xy$.

Näide 15. Vabaneme irratsionaalsusest nimetajas.

a) $$\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=\frac{\sqrt[4]{3}-1}{\sqrt[4]{3}[(\sqrt[4]{3})^4-1]}=\frac{\sqrt[4]{27}(\sqrt[4]{3}-1)}{6}.$$

Kasutasime geomeetrilise jada summa valemit.

b) $$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

c) $$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10}=$$
$$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{6}+1)}{5}.$$

d) $$\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}.$$

Lihtsustame murru nimetajat. Olgu $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=u$, siis $u^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\times$ $\times\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=4-3u$. Seega $u^3+3u-4=0$. $u^3+3u-4=$ $=u^3-u+4u-4=(u-1)(u^2+u+4)=0 \Rightarrow u=1$. Murru väärtuseks on 1.

Irratsionaalavaldiste lihtsustamiseks on mõnikord otstarbekohane kasutada asendusvõtet, mille abil avaldis teisendatakse ratsionaalseks.

Näide 16. Lihtsustame avaldise

$$A=\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}-\sqrt[6]{x}.$$

Olgu $\sqrt[6]{a}=m$ ja $\sqrt[6]{x}=n$, siis

$$A=\frac{\frac{m^6+n^6}{m^4-n^4}+\frac{mn^4-m^4n^2}{m^4-2m^2n^2+n^4}}{m-n}-n,$$ millest pärast lihtsustamist saame tulemuseks m. Seega $A=\sqrt[6]{a}$, kui $a\geqslant 0$, $x\geqslant 0$, $a\neq x$.

§ 3. ARVUJADAD.

Kui igale arvule $n\in N_1$ on seatud vastavusse mingi arv a_n, siis öeldakse, et on antud **arvujada** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Valemit, mille järgi saab arvutada jada mis tahes liiget, nimetatakse üldliikme valemiks.

Jada nimetatakse koonduvaks, kui tal leidub lõplik piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, kus $a\in R$; vastasel juhul hajuvaks. Koonduva jada summaks nimetatakse tema n esimese liikme summa piirväärtust, kui n tõkestamatult kasvab, s. t. $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Aritmeetiliseks jadaks nimetatakse jada, milles $a_{n+1}=a_n+d$ iga $n\in N_1$ korral.

$$a_n=a_1+(n-1)d.\quad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n.$$

Geomeetriliseks jadaks nimetatakse jada, milles $a_{n+1}=a_nq$ iga $n\in N_1$ korral $\wedge\ a_1\neq 0$.

$$a_n=a_1q^{n-1};\quad S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_nq-a_1}{q-1}.$$

Geomeetrilise jada $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ summa $S=\frac{a}{1-q}$, kui $|q|<1$.

Näide 17. Aritmeetilises jadas $a_{m+n}=A$ ja $a_{m-n}=B$. Leiame a_m ja a_n.

Kuna $a_{m+n}=a_m+nd=A$ ja $a_{m-n}=a_m-nd=B$, siis liites ja lahutades võrduste vastavad pooled, saame

$$2a_m=A+B\Rightarrow a_m=\frac{A+B}{2}\quad \text{ja}\quad 2nd=A-B\Rightarrow d=\frac{A-B}{2n}.$$

Kuna $a_n - a_m = (n-m)d$, siis $a_n = a_m + (n-m)d = \frac{A+B}{2} +$
$+ \frac{(n-m)(A-B)}{2n} = A - \frac{m(A-B)}{2n}$.

N ä i d e 18. Leiame summa $S = 3+33+333+\ldots+33\ldots3$, kus viimases liidetavas on n kolme.

$$S = \frac{1}{3}(9+99+999+\ldots+99\ldots9) =$$

$$= \frac{1}{3}[(10^1-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^n-1)] =$$

$$= \frac{1}{3}(10^1+10^2+10^3+\ldots+10^n-n) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right).$$

M ä r k u s. Analoogilist teisendust kasutades on võimalik leida summad, mille liidetavates esinevad vaid ühesugused numbrid 1, 2, 3, ..., 9. Näiteks $S = 8+88+\ldots+88\ldots8$ jt.

N ä i d e 19. Leiame summa $S = a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+na^n$. Korrutame võrduse pooled a-ga. $Sa = a^2+2a^3+3a^4+$ $+\ldots+na^{n+1}$. Lahutame võrduste vastavad pooled: $S - Sa =$ $= a+a^2+a^3+\ldots+a^n-na^{n+1}$, millest $S = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{na^{n+1}}{1-a}$.

N ä i d e 20. Leiame summa $S = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

Kuna $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$, siis

$$2^3 = 1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1,$$

$$3^3 = 2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1.$$

Liites võrduste vastavad pooled, saame

$$(n+1)^3 = 1+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+n =$$

$$= (n+1)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}, \text{ millest}$$

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2) = (n+1)^3-(n+1)-3\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Näide 21. Leiame summa $S=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$.

Kuna $1=2-1$, $2=3-1$, $\ldots$, $n=n+1-1$, siis

$$S=2^2-2+3^2-3+\ldots+(n+1)^2-(n+1)=$$
$$=2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2-[2+3+\ldots+(n+1)]=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n^2+2n-\frac{2+n+1}{2}n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

ÜLESANDED.

Lahutage tegureiks (2-1 ... 2-14).

2-1. $ab(a-b)-ac(a+c)+bc(2a+c-b)$.

2-2. $2a^4+3a^3+17a^2+15a+35$.

2-3. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

2-4. $6x^2-xy-7x-2y^2+7y-3$.

2-5. $x^2+xy-2y^2-x+4y-2$.

2-6. $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$.

2-7. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

2-8. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

2-9. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

2-10. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$.

2-11. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

2-12. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$.

2-13. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

2-14. $(x+y)^5-(x^5+y^5)$.

2-15. Taandage murd $\dfrac{x^{12}+a^{12}}{x^5+ax^4+a^4x+a^5}$.

2-16. Leidke A ja B nii, et hulkliige $x^4+x^3+2x^2+Ax+B$ oleks täisruut.

2-17. Leidke, missugustel tingimustel hulkliige ax^3+bx^2+cx+d on esimese astme kaksliikme kuup.

2-18. Missuguse m väärtuse korral avaldis $x(x+a)(x+b)\cdot(x+ +a+b)+m$ on täisruut?

2-19. Tõestage, et hulkliige $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ on esitatav ruutkolmliikme ruuduna.

Tõestage samasused (2-20 ... 2-26).

2-20. $$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+$$
$$+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$$

2-21. $$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+$$
$$+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

2-22. $$\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}=\frac{a+b}{a+(a-b)}.$$

2-23. $$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}+$$
$$+\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}=\frac{2}{x-y}+\frac{2}{y-z}+\frac{2}{z-x}.$$

2-24. $$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2a(b-a)}{a^2b^2+3},\ \text{kui}\ a+b=1.$$

2-25. $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$, kui $a+b+c=0$.

2-26. $x^3+y^3+z^3=3xyz$, kui $x+y+z=0$.

Lihtsustage avaldised (2-27 ... 2-32).

2-27. $$\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

2-28. $$\frac{a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

2-29. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$,

$a\neq -b,\ b\neq -c,\ a\neq -c.$

2-30. $\dfrac{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}$, kui $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

2-31. $\dfrac{abcd\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)}{ab+cd}$, kui $a+b=c+d$.

2-32. $A=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\ldots(x^{2n}+y^{2n})$.

2-33. Tõestage, et kui $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_k}{b_k}$, siis

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{la_1^n+ma_2^n+pa_3^n+\ldots+sa_k^n}{lb_1^n+mb_2^n+pb_3^n+\ldots+sb_k^n}.$$

Vabanege irratsionaalsusest murru nimetajas (2-34 ... 2-37).

2-34. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}$.

2-35. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

2-36. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

2-37. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$, kui $a>0,\ b>0,\ a>b$.

Lihtsustage avaldised (2-38 ... 2-48).

2-38. $\left(1-\dfrac{1+xy}{1+\sqrt[3]{xy}}\right):\left[\sqrt{xy}\left(1-\sqrt[3]{xy}\right)-\dfrac{(1-xy)\left(\sqrt[3]{xy}-1\right)}{1+\sqrt{xy}}\right]$.

2-39. $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}+\dfrac{n}{m-\sqrt{mn}}-\dfrac{m}{\sqrt{mn}+n}\right)$.

2-40. $$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x^{-1}}}\right)(\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})}{x+y-(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1}}.$$

2-41. $$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),\quad 0<|x|<1.$$

2-42. $$\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}+\left[\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

kui $x=2a^{\frac{1}{2}}(1+a)^{-1}$ ja $a>1$.

2-43. $\sqrt{y^2-6y+9}+|y-9|+2$.

2-44. $\sqrt{x^2+4xy+4y^2}-\sqrt{x^2-4xy+4y^2},\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$.

2-45. $A=\sqrt{a-10\sqrt{a-25}}+\sqrt{a+10\sqrt{a-25}},\quad a\geqslant 25$.

2-46. $\sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}$.

2-47. $$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2.$$

2-48. $\sqrt{5-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Tõestage samasused (2-49 ... 2-52).

2-49. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$, $a \geqslant 2$.

2-50. $b\sqrt{2}\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}=\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$, $a>b>0$.

2-51. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

2-52. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

2-53. Tõestage, et kui $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, $a \geqslant 0$, siis $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

2-54. Tõestage, et kui $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$, siis

$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}\times$

$\times\sqrt{(b_1+b_2+\ldots+b_n)}$, kus $a_k>0$, $b_k>0$,

$k=1, 2, 3, \ldots, n$.

2-55. Geomeetrilises jadas $a_{m+n}=A$ ja $a_{m-n}=B$. Leidke a_m ja a_n.

2-56. Aritmeetilises jadas $a_p=q$ ja $a_q=p$. Leidke a_m.

2-57. Leidke geomeetriline jada, kui tema esimese 7 liikme summa on $444\frac{1}{2}$ ja see suhtub teise kuni kaheksanda liikme summasse nagu 1:2.

2-58. Leidke aritmeetiline jada, mille n esimese liikme summa on n^2.

2-59. Leidke geomeetrilise jada $a_1; a_2; \ldots; a_n$ kõigi liikmete korrutis, kui $S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ ja $S_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$.

2-60. Kas arvud 1; $\sqrt{3}$; 3 saavad olla aritmeetilise jada liikmed?

2-61. Leidke aritmeetiline jada, milles $S_n = 3n^2 + 4n$.

2-62. Leidke aritmeetilise jada n-es liige, kui $S_n = pn + qn^2$.

2-63. Jada 3; 5; 9; 15; ... liikmete vahed moodustavad aritmeetilise jada. Leida jada n-es liige.

2-64. Tõestage, et jadas 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... (nn. Fibonacci jada: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$) iga neljas liige jagub 3-ga.

Leidke summa (2-65 ... 2-67).

2-65. $S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + (n-1)n^2$.

2-66. $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$.

2-67. $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

Tõestage samasused (2-68 ... 2-70).

2-68. $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 =$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

2-69. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

2-70. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

III PEATÜKK.

VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID.

§ 1. VÕRRAND. VÕRRANDITE SAMAVÄÄRSUS. VÕRRANDITE KONJUNKTSIOON JA DISJUNKTSIOON. LAHENDITE KAOTSIMINEK JA VÕÕRLAHENDITE TEKE.

Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ mingid funktsioonid. Võrdust $f(x)=g(x)$ nimetatakse ühe muutujaga võrrandiks, kui ülesandeks on leida need x väärtused, mille korral funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ väärtused on võrdsed.

Funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ määramispiirkondade ühisosa nimetatakse võrrandi $f(x)=g(x)$ määramispiirkonnaks.

Võrrandi lahendeiks nimetatakse neid muutuja x väärtusi, mis muudavad seose $f(x)=g(x)$ tõeseks arvvõrduseks.

Lahendada võrrand tähendab leida lahendihulk $L=\{x_1; x_2, \ldots, x_n\}$ või tõestada, et võrrandil lahend puudub, s. t. $L=\emptyset$.

Võrrandit $f_1(x)=g_1(x)$ nimetatakse võrrandi $f(x)=g(x)$ **järelduseks**, kui teise võrrandi iga lahend on ka esimese võrrandi lahendiks.

Tähistus: $f(x)=g(x) \Rightarrow f_1(x)=g_1(x)$.

Kaht võrrandit $f(x)=g(x)$ ja $f_1(x)=g_1(x)$ nimetatakse **samaväärseiks**, kui esimese võrrandi iga lahend on teise võrrandi lahendiks ja vastupidi, teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.

Tähistus: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f_1(x)=g_1(x)$.

Võrrandite samaväärsus sõltub ka vaadeldavast arvuhulgast. Näiteks võrrandid $x^2-4=0$ ja $x-2=0$ on samaväärsed hulgas R^+, kuid ei ole samaväärsed hulgas R.

Olgu antud võrrandid $f_1(x)=g_1(x)$ ja $f_2(x)=g_2(x)$, mille lahendihulgad on vastavalt $L_1=\{x_1; x_2\}$ ja $L_2=\{x_2; x_3\}$. Andes nendes võrrandites muutujale x näiteks erinevad reaalarvulised väärtused x_1, x_2, x_3 ja x_4, saame kas tõesed või väärad arvvõrdused. $x=x_4$ korral saame mõlemast võrrandist väärad arvvõrdused, $x=x_1$ ja $x=x_3$ korral on üks võrdustest tõene ja teine väär, $x=x_2$ korral on aga mõlemad võrdused tõesed.

Kui on ülesandeks leida muutuja need väärtused, mis muudavad mõlemad antud võrrandid tõesteks arvvõrdusteks (x-i väärtused, mis on võrrandi $f_1(x)=g_1(x)$ ja $f_2(x)=g_2(x)$ lahendeiks), siis öeldakse, et tuleb lahendada võrrandite $f_1(x)=g_1(x)$ ja $f_2(x)=g_2(x)$ **konjunktsioon** ehk **süsteem**.

Tähistus: $\{f_1(x)=g_1(x) \wedge f_2(x)=g_2(x)\}$ või

$$\begin{cases} f_1(x)=g_1(x), \\ f_2(x)=g_2(x). \end{cases}$$

Võrrandite konjunktsiooni lahendiks on temasse kuuluvate võrrandite lahendihulkade ühisosa: $L=L_1 \cap L_2=\{x_1;\ x_2\} \cap \{x_2;\ x_3\}=\{x_2\}$.

Kui ülesandeks on leida need muutuja väärtused, mis muudavad vähemalt ühe antud võrrandeist tõeseks arvvõrduseks (x-i väärtused, mis on võrrandi $f_1(x)=g_1(x)$ **või** $f_2(x)=g_2(x)$ lahendeiks), siis öeldakse, et tuleb lahendada võrrandite $f_1(x)=g_1(x)$ ja $f_2(x)=g_2(x)$ **disjunktsioon**.

Tähistus: $\{f_1(x)=g_1(x) \vee f_2(x)=g_2(x)\}$ või

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=g_1(x), \\ f_2(x)=g_2(x). \end{array} \right.$$

Võrrandite disjunktsiooni lahendiks on temasse kuuluvate võrrandite lahendihulkade ühend: $L=L_1 \cup L_2=\{x_1;\ x_2\} \cup \{x_2;\ x_3\}=\{x_1;\ x_2;\ x_3\}$.

Võrrandit $f(x)=g(x)$ (1) nimetatakse samaväärseks võrrandite disjunktsiooniga $\{f_1(x)=g_1(x) \vee f_2(x)=g_2(x) \vee \ldots \vee f_n(x)=g_n(x)\}$ (2), kui võrrandi (1) iga lahend on lahendiks vähemalt ühele võrranditest (2) ja võrrandite (2) iga lahend on lahendiks ka võrrandile (1). Seega, kui L on võrrandi (1) lahendihulk ja $L_1, L_2, \ldots, L_n$ on vastavalt võrrandite (2) lahendihulgad, siis $L=L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$.

Tähistus: $\{f(x)=g(x)\} \Leftrightarrow \{f_1(x)=g_1(x) \vee f_2(x)=g_2(x) \vee \ldots \vee f_n(x)=g_n(x)\}$.*

Võrrandi lahendamisel asendame antud võrrandi järk-järgult

* Lepime kokku, et edaspidi kirjutame võrrandite disjunktsiooni loogelisi sulgusid kasutamata.

lihtsamate võrranditega. Pole kindlaid eeskirju, missuguseid teisendusi igal konkreetsel juhul on otstarbekas kasutada. Esiteks on vaja jälgida, et ei kasutataks teisendusi, mis võivad põhjustada l a h e n d i t e   k a o t s i m i n e k u t, sest võrrandi lahendamine tähendab tema kõigi lahendite leidmist. Teiseks, küll väiksemaks ohuks on v õ õ r l a h e n d i t e   t e k e. Tuleb silmas pidada, et kui kas või kordki kasutati teisendust, mis võis põhjustada võõrlahendite teket, siis pärast lahendamist on tingimata vaja kontrollida, kas leitud lahendid rahuldavad ka lähtevõrrandit. K o n t r o l l i võib jätta tegemata (kontroll ei ole võrrandi lahenduse koostisosaks), kui oleme näidanud, et teostatud teisenduste abil saime alati eelmistega samaväärsed võrrandid.

Võrrandite lahendamisel sagedamini kasutatavad teisendused põhinevad alljärgnevatel teoreemidel.

Teoreem 3.1. *Võrrandid $f(x)=g(x)$ ja $f(x)+h(x)=g(x)+$ $+h(x)$ on samaväärsed, kui funktsioonil $h(x)$ on olemas väärtus võrrandi $f(x)=g(x)$ määramispiirkonna igas punktis.*

T õ e s t u s. Olgu arv x_0 võrrandi $f(x)=g(x)$ lahendiks, siis $f(x_0)=g(x_0)$ on tõene arvvõrdus. Kuna funktsiooni $h(x)$ väärtus kohal x_0 on $h(x_0)$, siis liites võrduse $f(x_0)=g(x_0)$ mõlemale poolele sama arvu $h(x_0)$, saame tõese arvvõrduse $f(x_0)+h(x_0)=$ $=g(x_0)+h(x_0)$. Seega x_0 on ka võrrandi $f(x)+h(x)=g(x)+$ $+h(x)$ lahendiks.

Oleme näidanud, et esimese võrrandi iga lahend on ka teise võrrandi lahendiks. Analoogiliselt näidatakse, et teise võrrandi iga lahend on ka esimese võrrandi lahendiks. Tehke seda.

N ä i d e 1. Võrrandid $x+\frac{7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+1$ ja $x=1$ pole samaväärsed, sest funktsioonil $h(x)=\frac{7}{x-1}$ puudub väärtus, kui $x=1$. Võrrand $x=1$ on võrrandi $x+\frac{7}{x-1}=\frac{7}{x-1}+1$ järelduseks.

N ä i d e 2. $x^4+5x-1=3x^2+5x-1 \Leftrightarrow x^4=3x^2$, sest funktsioonil $h(x)=5x-1$ on olemas väärtus võrrandi $x^4=3x^2$ määramispiirkonna igas punktis.

Teoreem 3.2. *Võrrandid $f(x)=g(x)$ ja $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ on samaväärsed, kui funktsioonil $h(x)$ on olemas nullist erinev väärtus võrrandi määramispiirkonna igas punktis.*

Tõestage see lause teoreemi 3.1 eeskujul.

Näide 3. Võrrandid $x^2-1=2(x+1)$ ja $x-1=2$ pole samaväärsed, sest esimest võrrandit on korrutatud avaldisega $h(x)=\frac{1}{x+1}$, millel puudub väärtus võrrandi $x^2-1=2(x+1)$ määramispiirkonda kuuluvas punktis $x=-1$.

Teisiti: võrrandit $x-1=2$ on korrutatud avaldisega $h(x)=$ $=x+1$, mis muutub nulliks, kui $x=-1$.

Näide 4. $x(x^2+1)=x^2(x^2+1) \Leftrightarrow x=x^2$. Miks?

Teoreem 3.3. *Võrrand $[f(x)]^n=[g(x)]^n$ on võrrandi $f(x)=$ $=g(x)$ järelduseks.*

Need võrrandid on samaväärsed, kui $n=2k+1$; kus $k\in N$. Kui $n=2k$, kus $k\in N_1$, siis on võrrand $[f(x)]^n=[g(x)]^n$ samaväärne võrrandiga $|f(x)|=|g(x)|$, see aga võrrandite disjunktsiooniga

$$f(x)=g(x) \vee f(x)=-g(x).$$

Kui $n=2k$, siis on võrrandid $[f(x)]^n=[g(x)]^n$ ja $f(x)=g(x)$ samaväärsed piirkondades, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on samamärgilised.

Näide 5. $\sqrt[3]{2x+21}=x \Leftrightarrow 2x+21=x^3$. Miks?

Näide 6. $\sqrt{2x+21}=x \Rightarrow 2x+21=x^2$, kuid $\sqrt{2x+21}=x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x+21=x^2$, kui $x>0$. Miks?

Näide 7. Lahendame võrrandi $(x^2-6x+8)^2=(x-3)^2$.

$$(x^2-6x+8)^2=(x-3)^2 \Leftrightarrow |x^2-6x+8|=|x-3| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=x-3 \vee x^2-6x+8=-(x-3).$$

Vastus: $L=\left\{\frac{7\pm\sqrt{5}}{2};\ \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Teoreem 3.3. on teoreemi 3.4. erijuhuks.

Teoreem 3.4. *Võrrand $\varphi[f(x)]=\varphi[g(x)]$ on võrrandi $f(x)=$ $=g(x)$ järelduseks, kui funktsioon φ on määratud funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ kõikvõimalike väärtuste korral.*

Kui peale selle veel funktsioon φ on monotoonne, siis need võrrandid on samaväärsed.

N ä i d e 8. Võrrandi $x^4=-x^2$ lahendiks on 0. Võrrandil $\log(x^4)=\log(-x^2)$ aga lahend puudub, sest logaritmfunktsioon pole määratud funktsiooni $-x^2$ muutumispiirkonnas.

N ä i d e 9. Võrrand $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi-x)$ on võrrandi $2x-\frac{\pi}{2}=\pi-x$ järelduseks. Miks?

N ä i d e 10. $x^4+5=x^2+1 \Leftrightarrow \log(x^4+5)=\log(x^2+1)$. Miks?

Teoreem 3.5. *Kui võrrandi $f(x)=g(x)$ määramispiirkond X esitada mitme hulga ühendina*

$$X=X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$$

ja antud võrrand lahendada igas osahulgas eraldi, siis nii saadud lahendid määravad võrrandi $f(x)=g(x)$ lahendihulga.

Seda omadust kasutatakse sageli muutuja absoluutväärtust sisaldavate võrrandite lahendamisel.

N ä i d e 11. Lahendame võrrandi $\sqrt{|x^2-3x-4|}=x+5$.

Võrrandil puudub lahend, kui $x<-5$.
Kui $x\geqslant-5$, siis ruutu võttes saame esialgsega samaväärse võrrandi $|x^2-3x-4|=(x+5)^2$. Kuna kolmliikme x^2-3x-4 nullkohad on -1 ja 4, siis lahendame võrrandi eraldi vahemikes a) $-5\leqslant x<-1$, b) $-1\leqslant x<4$, c) $x\geqslant4$.
Seega tuleb meil leida võrrandi $x^2-3x-4=(x+5)^2$ lahendid, mis asuvad vahemikus $-5\leqslant x<-1$ ja $x\geqslant4$ (neil x-i väärtustel on ruutkolmliige mittenegatiivne) ja võrrandi $-(x^2-3x-4)=$ $=(x+5)^2$ lahendid, mis asuvad vahemikus $-1\leqslant x<4$.

Vastus: $L=\left\{-\frac{29}{13}\right\}$.

Teoreem 3.6. *Kui funktsioonid $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ on kõik määratud hulgas M, siis selles hulgas on võrrand $f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots$ $\ldots f_n(x)=0$ samaväärne võrrandite disjunktsiooniga $f_1(x)=$ $=0 \vee f_2(x)=0 \vee\ldots\vee f_n(x)=0$.*

Üleminekut lihtsamate võrrandite disjunktsioonile kasutatakse võrrandite lahendamisel sageli.

N ä i d e 12. Lahendame võrrandi $x^4+3x^3-x^2-3x=0$. $x^4+3x^3-x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee$ $\vee\ x-1=0 \vee x+1=0 \vee x+3=0$.

Vastus: $L=\{-3;\ -1;\ 0;\ 1\}$.

N ä i d e 13. Võrrandil $\frac{3}{2+x}=0$ lahend puudub. Võrrandi $x^2-4=0$ lahenditeks on ± 2. Võrrandil $(x^2-4)\frac{3}{2+x}=0$ on aga vaid üks lahend $x=2$. Seega võrrand $(x^2-4)\frac{3}{2+x}=0$ ei ole samaväärne võrrandite disjunktsiooniga $\frac{3}{2+x}=0 \vee x^2-4=$ $=0$, sest $x=-2$ korral $\frac{3}{2+x}$ pole määratud.

Võrrandi lahendite kaotsiminekut või võõrlahendite teket põhjustab sageli tinglike samasuste kasutamine võrrandi teisendamisel.

Absoluutseks samasuseks nimetatakse võrdust, mille kummagi poole määramispiirkonnad langevad ühte ning mis on tõene selle ühise määramispiirkonna kõikides punktides.

Absoluutsed samasused on näiteks $[f(x)\cdot g(x)]^n=f^n(x)\times$ $\times g^n(x)$, kus $n\in Z$, $[f(x)+g(x)]\cdot[f(x)-g(x)]=f^2(x)-g^2(x)$; $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\sqrt{x^2}=|x|$ jt.

Tinglikuks samasuseks nimetatakse võrdust, mille kummagi poole määramispiirkonnad on erinevad ning mis on tõene nende määramispiirkondade ühisosa kõikides punktides.

Tinglikud samasused on näiteks $\tan x=\frac{1}{\cot x}$, $\log x^2=2\log x$, $\sqrt[2n]{f(x)\cdot g(x)}=\sqrt[2n]{f(x)}\cdot\sqrt[2n]{g(x)}$, $\sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}}=f(x)$ jt.

Kui teostatud teisenduste tulemusena võrrandi määramispiirkond l a i e n e s, siis võivad tekkida võõrlahendid, määramispiirkonna k i t s e n e m i s e korral aga lahendid kaotsi minna.

N ä i d e 14. $2\log x=4 \Rightarrow \log x^2=4 \Rightarrow x^2=10^4 \Rightarrow x_1=100$; $x_2=-100$ (võõrlahend). Võrrandi määramispiirkond laienes.

Kui lahendame aga võrrandi $(x-1)^2=4$ logaritmimise teel: $2\log_2(x-1)=2$; $x-1=2 \Leftrightarrow x=3$, siis kaotame lahendi $x=-1$, sest võrrandi määramispiirkond kitsenes.

Jätame meelde, et sagedamini tekivad võõrlahendid võrrandi muutujaid sisaldavate liikmete koondamisel ja taandamisel, võrrandi korrutamisel muutujat sisaldava täisavaldisega, võrrandi poolte astendamisel paarisarvulise astendajaga, potentseerimisel ja tinglike samasuste kasutamisel; lahendid võivad kaotsi minna võrrandi jagamisel muutujat sisaldava täisavaldisega, logaritmimisel ja tinglike samasuste kasutamisel.

§ 2. HULKLIIGE. BEZOUT' TEOREEM. HORNERI SKEEM.

n-astme hulkliikmeks muutuja x suhtes nimetatakse algebralist avaldist kujul

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

kus $n \in N$ ja $a_0, a_1, \ldots, a_n$ on mis tahes reaalarvud, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ kaks hulkliiget. Kui leidub niisugune hulkliige $q(x)$, et $f(x)=g(x)\cdot q(x)$, siis öeldakse, et hulkliige $f(x)$ *jagub* hulkliikmega $g(x)$.

Kui $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, siis öeldakse, et hulkliikme $f(x)$ jagamisel hulkliikmega $g(x)$ on *jagatiseks* $q(x)$ ja *jäägiks* $r(x)$. Hulkliikmete jäägiga jagamine on alati teostatav, kusjuures jagatis $q(x)$ ja jääk $r(x)$ on määratud üheselt (kui jäägi $r(x)$ aste on madalam jagaja $g(x)$ astmest).

Näide 15. Leiame hulkliikmete $x^5-3x^3+2x^2-5x+4$ ja x^3+2x^2-1 jagatise.

Jagamise teostame järgmise skeemi kohaselt:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 \qquad\quad -3x^3+2x^2-5x+4 & x^3+2x^2-1 \\
-\;\underline{x^5+2x^4 \qquad\quad -x^2 \qquad\qquad} & \overline{x^2-2x+1} \\
-2x^4-3x^3+3x^2-5x+4 & \\
-\;\underline{-2x^4-4x^3 \qquad\quad +2x \quad} & \\
x^3+3x^2-7x+4 & \\
-\;\underline{x^3+2x^2 \qquad\quad -1} & \\
x^2-7x+5 &
\end{array}$$

Seega $x^5-3x^3+2x^2-5x+4=(x^3+2x^2-1)(x^2-2x+1)+x^2-7x+5.$

Teoreem 3.7. (Bezout' teoreem). *Hulkliikme $f(x)$ jagamisel kaksliikmega $x-a$ tekkiv jääk on $f(a)$ (s. t. on võrdne hulkliikme väärtusega, kui $x=a$).*

Järeldus 1. Hulkliige $f(x)$ jagub kaksliikmega $x-a$ siis ja ainult siis, kui arv a on hulkliikme nullkohaks.

Järeldus 2. Kui $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ on hulkliikme $f(x)$ erinevad nullkohad, siis $f(x) \vdots (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

Näide 16. Leiame hulkliikme $f(x)=x^3+2x^2+7x-1$ jagamisel kaksliikmega $x-1$ tekkiva jäägi.

$$r=f(1)=1^3+2\cdot 1^2+7\cdot 1-1=9.$$

Näide 17. Kas hulkliige $f(x)=x^4+2x^2+12x$ jagub $(x+2)$-ga?

$$r=f(-2)=(-2)^4+2(-2)^2+12(-2)=0.$$

Vastus: jagub.

Näide 18. Leiame hulkliikme $(x^2-2x+2)(x^3-x-1)^{17}+$ $+(x^4-x^3+2x^2-x+5)(x^3-4x+2)+10$ kordajate summa.

Kanoonilisel kujul esitatud hulkliikme $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$ kordajate summa $\sum_{i=0}^{n} a_i=f(1)$. On selge, et hulkliikme kordajate summa ei olene sellest, kas hulkliige on esitatud kanoonilisel kujul või mitte. Seega ka antud juhul saame leida kordajate summa, võttes avaldises $x=1$.

$$f(1)=1\cdot(-1)^{17}+6\cdot(-1)+10=3.$$

Näide 19. Mingi hulkliikme jagamisel kaksliikmetega $x+1$; $x-2$ ja $x-3$ tekkisid vastavalt jäägid 3; 1 ja -1. Missugune jääk tekib selle hulkliikme jagamisel korrutisega $(x+1)(x-2)\times$ $\times(x-3)$?

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)\cdot q(x)+r(x)$, kus $r(x)=ax^2+$ $+bx+c$. Kordajate a, b ja c määramiseks leiame $f(-1)$, $f(2)$ ja $f(3)$, mis Bezout' teoreemi põhjal on võrdsed vastavate jääkidega.

$$f(-1)=a-b+c=3,\quad f(2)=4a+2b+c=1;$$
$$f(3)=9a+3b+c=-1.$$

Lahendanud võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a-b+c=3, \\ 4a+2b+c=1, \\ 9a+3b+c=-1; \end{cases}$$

leiame, et $a=b=-\frac{1}{3}$; $c=3$.

Vastus: $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+3$.

Sageli on võimalik kasutada Bezout' teoreemi hulkliikmete tegureiks lahutamisel ja arvude jaguvuse tõestamisel.

Näide 20. Lahutame tegureiks hulkliikme

$$A=ab(c+d)(a-b)+bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)$$

(vt. ka II ptk. näide 1).

On kerge näha, et kui $a=b$, $a=c$ või $b=c$, siis $A=0$. Seega A jagub avaldisega $(a-b)(a-c)(b-c)$. Et tegemist on d suhtes esimese astme hulkliikmega, siis

$$A=(a-b)(a-c)(b-c)(Kd+M).$$

Kordajad K ja M leiame määramata kordajate meetodil. Anname muutujaile a, b, c ja d suvalisi väärtusi ($a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$); saame $a=-1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$ korral, et $0=-2M \Rightarrow M=0$ ja $a=-2$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$ korral, et $-2K=-2 \Rightarrow K=1$. Seega $A=(a-b)(a-c)(b-c)d$.

Näide 21. Tõestame, et $3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{4n}$ jagub 40-ga, kui $n\in N_1$.

Kasutame geomeetrilise jada summa valemit.

$$3^1+3^2+3^3+\ldots+3^{4n}=\frac{3(3^{4n}-1)}{3-1}=\frac{3(81^n-1)}{2}.$$

Bezout' teoreemi põhjal 81^n-1 jagub vahega $81-1=80$. Seega avaldis jagub 40-ga.

Bezout' teoreem võimaldab leida hulkliikme $f(x)$ jagamisel kaksliikmega $x-a$ tekkivat jääki, kuid mitte jagatist.

Meetod, mis kannab **Horneri skeemi** nime, võimaldab kergesti leida nii jagatise kui ka jäägi.

Näide 22. Leiame hulkliikme $f(x)=x^5-7x^3+6x^2-6x+20$ jagamisel kaksliikmega $x+3$ tekkiva jagatise ja jäägi.

Lahendamiseks kasutame Horneri skeemi. Kirjutame ülemisse ritta jagatava hulkliikme $f(x)$ kordajad (ka kordajad 0). Alumisse ritta märgime pealiikme kordaja a_0 (antud näites 1) alla veel kord selle kordaja ja temast vasakule arvu a (antud juhul —3), mille eraldame püstkriipsuga. Iga järgmise alumise rea arvu saame, kui korrutame temale eelneva arvu a-ga ja liidame ülemise rea vastava kordaja. Antud näites $1 \cdot (-3) + 0 = -3$; $(-3) \cdot (-3) + (-7) = 2$ jne. Nii täidetud alumises reas on viimane arv jäägiks, eelmised aga jagatise kordajateks.

	1	0	−7	6	−6	20
−3	1	−3	2	0	−6	38

Vastus: jagatis on $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6$ ja jääk 38.

Horneri skeemi saab edukalt kasutada ka hulkliikme väärtuste leidmiseks antud argumendi väärtustel.

Eelmise näite puhul $f(-3) = 38$.

§ 3. ALGEBRALINE VÕRRAND. PÖÖRDVÕRRAND.

Algebralise võrrandi kanoonoline kuju on

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Kui on teada algebralise võrrandi $f(x) = 0$ üks lahend $x_1 = a$, siis Bezout' teoreemi põhjal $f(x) = (x - a)g(x)$ ja selle võrrandi ülejäänud lahendite leidmiseks tuleb lahendada võrrand $g(x) = 0$, mille aste on ühe võrra madalam.

Teoreem 3.8. (Algebra põhiteoreem). *Kompleksarvude hulgas on igal n-astme algebralisel võrrandil n lahendit, arvestades ka lahendite kordsust.*

Teoreem 3.9. (Viète'i teoreem). *Kui $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ on taandatud algebralise võrrandi $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ lahendid, siis $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$,*

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

1., 2., 3. ja 4. astme algebraliste võrrandite lahendamiseks on olemas lahendivalemid. On tõestatud, et 5. ja kõrgema astme võrrandite lahendamiseks üldist lahendivalemit ei ole.

Teoreem 3.10. *Kui täisarvuliste kordajatega algebralisel võrrandil* $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ *on ratsionaalarvuline lahend* $\frac{p}{q}$ *(p ja q on ühistegurita), siis* a_n *jagub p-ga ja* a_0 *jagub q-ga.*

Järeldus 1. Kui täisarvuliste kordajatega algebralisel võrrandil on täisarvuline lahend, siis see on vabaliikme a_n jagajaks.

Järeldus 2. Kui täisarvuliste kordajatega algebralise võrrandi pealiikme kordaja $a_0=1$, siis selle võrrandi ratsionaalarvuliseks lahendiks saab olla vaid täisarv.

Näide 23. Leiame võrrandi $x^3-4x^2+4x-3=0$ ratsionaalarvulised lahendid.

Kui sellel võrrandil on ratsionaalarvulisi lahendeid, siis on nad täisarvud. Täisarvulised lahendid on aga vabaliikme -3 jagajaiks. Seega on vaja kontrollida, kas arvude ±1, ±3 hulgas on võrrandi lahendeid. Kontroll näitab, et ainsaks ratsionaalarvuliseks lahendiks on $x=3$.

Kui vabaliikmel on palju jagajaid, on otsene kontrollimine liiga suurt tööd nõudev. Katsetuste arvu võimaldab vähendada järgmine teoreem.

Teoreem 3.11. *Kui a on hulkliikme* $f(x)$ *nullkoht, siis* $f(k)$ *jagub arvuga* $k-a$, *kus* $k\in Z$.

Tõestage teoreem 3.11.

Erijuhul, kui $k=\pm1$, $f(1)=(1-a)n_1$ ja $f(-1)=(1+a)n_2$, kus n_1, $n_2\in Z$. Järelikult kontrollida on vaja vaid neid vabaliikme jagajaid, mille puhul jagatised $\frac{f(1)}{a-1}$ ja $\frac{f(-1)}{a+1}$ on täisarvud.

Näide 24. Leiame võrrandi $x^4+2x^3-3x^2-4x-12=0$ täisarvulised lahendid.

Vabaliikme -12 jagajad on ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Kuna $f(1)=-16$ ja $f(-1)=-12$, siis ±1 ei ole võrrandi lahendiks. Leiame suhted $\frac{f(1)}{a-1}$ ja $\frac{f(-1)}{a+1}$. Kui a on ±2, ±3, on suhted täisarvud. Seega ±2 ja ±3 võivad olla võrrandi lahendeiks.

Kontroll näitab, et lahenditeks on 2 ja -3.

Näide 25. Leiame võrrandi $16x^3-8x^2-7x+6=0$ ratsionaalarvulised lahendid.

Kui võrrandi lahendiks on $x_1=\frac{p}{q}$, siis p ja q võimalikud väärtused on $p=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ ja $q=\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$. Nende väärtuste proovimise teel lahendi leidmine on äärmiselt tülikas. Seepärast toimime teisiti. Korrutame antud võrrandi 4-ga. Saame esialgsega samaväärse võrrandi

$$(4x)^3-2(4x)^2-7(4x)+24=0.$$

Olgu $4x=u$, siis $u^3-2u^2-7u+24=0$. Selle võrrandi ratsionaalarvulised lahendid on aga täisarvud. Leiame need. Vabaliikme jagajad on $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24$.

$$f(1)=16,$$

$$f(-1)=28.$$

Jagatised $\frac{f(1)}{a-1}$ ja $\frac{f(-1)}{a+1}$ osutuvad täisarvudeks vaid $a=\pm3$ korral.

$$f(3)\neq0,\ f(-3)=0.$$

Seega üks lahenditest on -3. Jagame $u^3-2u^2-7u+24$ kaksliikmega $u+3$.

$$u^3-2u^2-7u+24=(u+3)(u^2-5u+8).$$

Võrrandil $u^2-5u+8=0$ ratsionaalarvulisi lahendeid pole. Seega võrrandi $16x^3-8x^2-7x+6=0$ ainsaks ratsionaalarvuliseks lahendiks on $x=\frac{u}{4}=\frac{-3}{4}$.

Võrrandit $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ nimetatakse **pöördvõrrandiks**, kui $a_0=a_n$, $a_1=a_{n-1}$, $a_2=a_{n-2}$, ... Pöördvõrranditeks on näiteks võrrandid

$$x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0,$$

$$2x^7-5x^5+x^4+x^3-5x^2+2=0$$

ja

$$x^n+1=0.$$

Teoreem 3.12. *Paarituastmelise pöördvõrrandi üheks lahendiks on $x=-1$.*

Teoreem 3.13. *Kui pöördvõrrandi lahendiks on* $x_1=\alpha$, *siis on tema lahendiks ka* $x_2=\frac{1}{\alpha}$.

Tõestage teoreemid 3.12. ja 3.13.

Teoreem 3.14. *Paarisastmeline pöördvõrrand taandub asendusega* $x+\frac{1}{x}=y$ *võrrandiks, mille aste on kaks korda madalam.*

Teoreem 3.15. *Paarituastmelise pöördvõrrandi jagamisel kaksliikmega* $x+1$ *saame paarisastmelise pöördvõrrandi.*

Näide 26. Lahendame võrrandi $x^4-10x^3-26x^2-10x+$ $+1=0$.

Jagame võrrandi x^2-ga ($x=0$ pole pöördvõrrandi lahendiks), rühmitame:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0.$$

Olgu $x+\frac{1}{x}=y$, siis $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$.

$$y^2-10y+24=0 \Rightarrow y_1=4,\ y_2=6.$$

Lahendades nüüd võrrandid $x+\frac{1}{x}=4$ ja $x+\frac{1}{x}=6$, saame, et

$$L=\{2\pm\sqrt{3};\ 3\pm2\sqrt{2}\}.$$

Näide 27. Lahendame võrrandi

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0.$$

Teoreemi 3.12. põhjal on võrrandi üheks lahendiks $x_1=-1$. Jagame võrrandi kaksliikmega $x+1$ kasutades Horneri skeemi.

$$\begin{array}{r|cccccc} & 2 & 5 & -13 & -13 & 5 & 2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -16 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Võrrandi ülejäänud lahendite leidmiseks tuleb lahendada paarisastmeline pöördvõrrand

$$x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0.$$

Näite 26 eeskujul lahendades saame, et $L=\left\{-2\pm\sqrt{3};\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$.

Märkus. Kui võrrandi $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ kordajad rahuldavad seost $a:e=b^2:d^2$, siis selle võrrandi võib lahendada pöördvõrrandite lahendamisel kasutatud võttega $\left(\text{asendus } x+\frac{d}{bx}=u\right)$. Selle võrrandi erikujuks on nn. teist järku pöördvõrrand, kus $a=e$ ja $b=-d$.

Näide 28. Lahendame võrrandi $x^4-2x^3-23x^2+8x+16=0$.

Siin $a:e=b^2:d^2=\frac{1}{16}$. Jagame võrrandi x^2-ga, rühmitame. $\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{4}{x}\right)-23=0$. Olgu $x-\frac{4}{x}=u$, siis $x^2+\frac{16}{x^2}=u^2+8$. $u^2-2u-15=0 \Rightarrow u_1=5$, $u_2=-3$ ja $x_1=-4$, $x_2=1$, $x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

Vastus: $L=\left\{-4;\ 1;\ \frac{5\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$.

§ 4. PARAMEETRIT SISALDAVAD VÕRRANDID.

Kui võrrandis esineb parameeter (tähistatakse tavaliselt tähtedega a, b, c, ...), siis niisuguse võrrandi lahendamine on küllaltki tülikas. Tuleb leida, missugused on võrrandi lahendid kõigi temas esineva parameetri väärtuste korral.

Näiteks, kui lahendame võrrandi $(a-1)^2=(a^2+2a-3)x$ järgmiselt:

$x=\frac{(a-1)^2}{a^2+2a-3}=\frac{(a-1)^2}{(a-1)(a+3)}=\frac{a-1}{a+3}$, siis vastus $x=\frac{a-1}{a+3}$ on vale, sest vastusest ilmneb, et kui $a=1$, siis $x=0$; esialgsest võrrandist saame aga $a=1$ korral $0=0\cdot x$. Seega x on mis tahes reaalarv. Kui $a=-3$, siis võrrandil lahend puudub; seepärast mis tahes a väärtuse puhul $x\neq\frac{a-1}{a+3}$.

Me jagasime võrrandi avaldisega a^2+2a-3. See on aga võrdne nulliga, kui $a=1$ või $a=-3$. Nendel a väärtustel on vaja võrrandi lahendit eraldi uurida.

Õige vastus on: kui $a=-3$, siis $L=\varnothing$; kui $a=1$; siis $L=R$; kui $a\neq 1$ ja $a\neq 3$, siis $L=\left\{\frac{a-1}{a+3}\right\}$.

Ühe muutujaga üht parameetrit sisaldava võrrandi üldkuju on $f(x, a)=0$.

Sellel võrrandil võivad erinevate a väärtuste korral olla erinevad lahendid. Võrrandi lahendamisel ja vastuse vormistamisel on vaja uurida lahendi olenevust kõikvõimalikest a väärtustest. Seepärast on otstarbekas võrrandi $f(x, a)=0$ määramispiirkonnana mõista kõigi arvupaaride (x, a) hulka, mille puhul funktsioon $f(x, a)$ on määratud. Parameetrit sisaldava võrrandi lahendamisel on kasulik leida algul võrrandi määramispiirkond ja hiljem lahenduse käigus seda võimaluse korral kitsendada.

Näide 29. Lahendame võrrandi $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

Võrrandi määramispiirkond on määratud võrratustega $x\geqslant 0$, $x+a\geqslant 0$. Kuna võrrandi vasak pool on mittenegatiivne, siis $a\geqslant\sqrt{x}\Rightarrow a\geqslant 0$ (lahendit on vaja otsida piirkonnas $x\geqslant 0$, $a\geqslant 0$). Kui $a\geqslant\sqrt{x}$, siis võrrandit ruutu võttes saame esialgsega samaväärse võrrandi $a^2-a=2a\sqrt{x}$. Kui $a=0$, siis $x=0$. Kui $a\neq 0$, siis $a-1=2\sqrt{x}$ (ka tingimus $a\geqslant\sqrt{x}$ on täidetud, sest $a=2\sqrt{x}+1$). Kuna võrrandi parem pool on mittenegatiivne, siis peab olema $a\geqslant 1$ (lahendit on vaja otsida piirkonnas $x\geqslant 0$, $a\geqslant 1$). Neil tingimustel saame ruutu võttes eelmisega samaväärse võrrandi $(a-1)^2=4x$, kust $x=\frac{(a-1)^2}{4}$.

Vastus: kui $a<0$ või $0<a<1$, siis $L=\varnothing$;

kui $a=0$, siis $L=\{0\}$;

kui $a\geqslant 1$, siis $L=\left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$.

Näide 30. Lahendame võrrandi $\sqrt{|x|}+a=\sqrt{|x|+2}$.

Võrrandi määramispiirkond $X=R$. $a>0$, sest $\sqrt{|x|+2}>\sqrt{|x|}$.

Kuna võrrandi mõlemad pooled on mittenegatiivsed, siis ruutu võttes saame samaväärse võrrandi

$$2a\sqrt{|x|}=2-a^2 \Leftrightarrow \sqrt{|x|}=\frac{2-a^2}{2a}, \text{ sest } a\neq 0.$$

Kuna võrrandi vasak pool on mittenegatiivne, siis

$$\frac{2-a^2}{2a}\geqslant 0 \Rightarrow 0<a\leqslant\sqrt{2} \quad \text{(kitsendasime määramispiirkonda).}$$

Ruutu võttes saame $|x|=\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}$; kust $x=\pm\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}$.

Vastus: kui $0<a\leqslant\sqrt{2}$, siis $L=\left\{\pm\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}\right\}$;

kui $a\leqslant 0$ või $a>\sqrt{2}$, siis $L=\varnothing$.

Kui me oleksime võrrandi lahendanud määramispiirkonda järk-järgult kitsendamata ja veendumata, et teostatud teisenduste tulemusena saime esialgsega samaväärse võrrandi, tulnuks teha kontroll, mis osutub küllaltki tülikaks.

Lahendus. $\sqrt{|x|}+a=\sqrt{|x|+2} \Rightarrow 2a\sqrt{|x|}=2-a^2 \Rightarrow \sqrt{|x|}=$
$=\frac{2-a^2}{2a}$; $a\neq 0 \Rightarrow |x|=\frac{(2-a^2)^2}{4a^2} \Rightarrow x=\pm\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}$.

Kontroll: kui $x=\pm\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}$, siis $\sqrt{|x|+2}-\sqrt{|x|}=$

$$=\sqrt{\frac{(2-a^2)^2+8a^2}{4a^2}}-\sqrt{\frac{(2-a^2)^2}{4a^2}}=\frac{2+a^2}{2|a|}-\frac{|2-a^2|}{2|a|}=$$

$$=\frac{2+a^2-|(\sqrt{2}+a)(\sqrt{2}-a)|}{2|a|}.$$

Selle avaldise väärtuse leidmiseks tuleb vaadelda nelja juhtu: 1) $a<-\sqrt{2}$, 2) $-\sqrt{2}\leqslant a<0$, 3) $0\leqslant a<\sqrt{2}$, 4) $a\geqslant\sqrt{2}$.

Viige kontroll lõpuni!

Vaadeldud näidetest ilmneb, et parameetrit sisaldava võrrandi lahendamisel on ikka kasulik leida võrrandi määramispiirkond, võimaluse korral kitsendada seda lahenduse käigus ja teisendada antud võrrand temaga samaväärseteks võrranditeks, et vältida kontrolli või muuta see lihtsamaks.

K a h t e p a r a m e e t r i t sisaldav võrrand kujutab tegelikult lõpmatut hulka võrrandeid, millest igaüks on määratud järjestatud arvupaariga (a, b). Võrrandi üldkuju $f(x, a, b)=0$.

N ä i d e 31. Lahendame võrrandi $a^2-\frac{a^2-b^2}{2x-x^2}=\frac{b^2(x+2)}{x-2}$.

Võrrandi määramispiirkonnaks on $x\neq 2$, $x\neq 0$. Kui need tingimused on täidetud, siis korrutades $(2x-x^2)$-ga saame esialgsega samaväärse võrrandi $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$.

a) kui $D=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2\geqslant 0$ (võrratus on tõene kõigi a ja b väärtuste korral) ja $a^2-b^2\neq 0 \Rightarrow a\neq\pm b$ (miks?), siis $x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{4a^2b^2}}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2\pm 2ab}{a^2-b^2}$ ($\sqrt{4a^2b^2}=2ab$, kui a ja b on samamärgilised või vähemalt üks neist on võrdne nulliga ja $\sqrt{4a^2b^2}=-2ab$, kui a ja b on erimärgilised). $x_1=$ $=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a+b}{a-b}$; $x_2=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b}$ (kuna $a\neq\pm b$; võime taandada avaldistega $a+b$ ja $a-b$). Selleks, et need x väärtused sobiksid lahenditena, ei tohi kumbki neist olla võrdne keelatud x-i väärtustega 0 ja 2. Kuna $a\neq\pm b$, siis $x_{1,2}$ ei saa võrduda 0-ga. $\frac{a+b}{a-b}=2$, kui $a=3b$ ja $\frac{a-b}{a+b}=2$, kui $a=-3b$. Seega, kui $a\neq\pm b$, ja $a\neq\pm 3b$, siis on võrrandi lahenditeks $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$.

b) leiame võrrandi lahendi, kui $a=\pm b$.
Saame, et $0\cdot x^2-4a^2x+0=0$. Kui $a=\pm b=0$, siis x on mis tahes reaalarv, välja arvatud 0 ja 2. Kui $a=\pm b\neq 0$, siis lahend puudub.

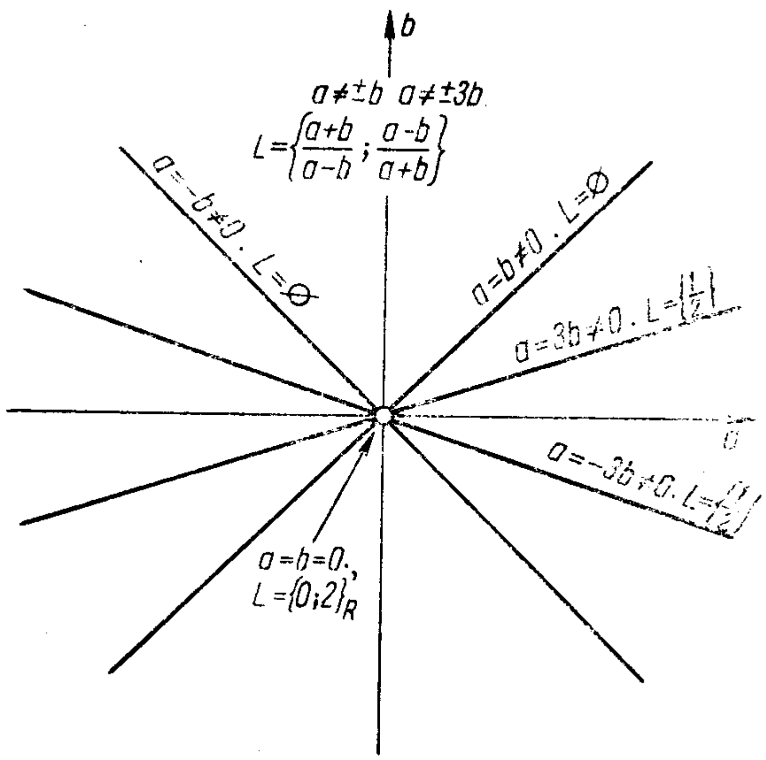
c) leiame võrrandi lahendi, kui $a=\pm 3b\neq 0$.
Kui $a=3b$, siis $x_1=\frac{1}{2}$ ja kui $a=-3b$, siis $x_2=\frac{1}{2}$.

Vastus: kui $a=b=0$, siis $L=\{0;\ 2\}'_R$;

kui $a=\pm b\neq 0$, siis $L=\varnothing$;

kui $a=\pm 3b\neq 0$, siis $L=\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

kui $a\neq\pm b$ ja $a\neq\pm 3b$, siis $L=\left\{\frac{a+b}{a-b};\ \frac{a-b}{a+b}\right\}$.



Joon. 3-1

Esitame veel tulemused graafiliselt (joonis 3—1).

Kuna iga järjestatud arvupaar (a, b) määrab ühe võrrandi, siis tasandi $a0b$ (nn. parameetrite tasandi) igale punktile vastab üks võrrand ja vastupidi — igale võrrandile vastab üks tasandi $a0b$ punkt. Sirgete $b=\pm a$ punktidele (välja arvatud punkt $(0; 0)$) vastavatel võrranditel lahendid puuduvad, sirgete $a=\pm 3b$ punktidele (välja arvatud $(0; 0)$) vastavate võrrandite lahenditeks on $\frac{1}{2}$, punktile $(0; 0)$ vastava võrrandi lahendiks on $\{0; 2\}'_R$, kõigi teiste tasandi punktidele vastavatel võrranditel on kaks lahendit $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$.

§ 5. VÕRRANDISÜSTEEMID.

Kahe muutujaga 2 võrrandi süsteemi üldkuju on

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y); \\ f_2(x, y)=g_2(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Süsteemi (1) **lahendiks** nimetatakse arvupaari $(x_0; y_0)$, kui arvude x_0 ja y_0 asendamisel kumbagi võrrandisse vastavalt x ja y asemele mõlemad süsteemi (1) võrrandid osutuvad tõesteks arvvõrdusteks.

Võrrandisüsteemide **samaväärsus**, **järelduvus** ja **disjunktsioon** defineeritakse analoogiliselt vastavate seostega võrrandite hulgas.

Kui süsteemi (1) iga lahend rahuldab võrrandit $F(x, y) = G(x, y)$, siis nimetatakse ka seda võrrandit süsteemi (1) järelduseks.

Samaväärsuse ja järelduse definitsioonidest tuleneb, et võrrandisüsteemile võib lisada võrrandi, mis on selle süsteemi järelduseks, süsteemi lahendite hulk sellest ei muutu.

Kui võrrand $F(x; y) = G(x; y)$ on süsteemi (1) järelduseks, siis süsteem (1) on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y); \\ f_2(x, y) = g_2(x, y); \\ F(x, y) = G(x, y). \end{cases}$$

Vaatleme mõningaid võrrandisüsteemide lahendamisel kasutatavaid võtteid.

1. Süsteemi asendamine lihtsamate süsteemide disjunktsiooniga.

Teoreem 3.16. *Võrrandisüsteem*

$$\begin{cases} f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \ldots f_n(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

on samaväärne võrrandisüsteemide disjunktsiooniga

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \vee \ldots \vee \begin{cases} f_n(x, y) = 0; \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Näiteks on võrrandisüsteem

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 2) = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

samaväärne disjunktsiooniga

$$\begin{cases} x - y = 0; \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y - 2 = 0; \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$$

2. Lineaarteisenduse meetod.

Süsteemi

$$\begin{cases} a_1f_1(x, y)+a_2f_2(x, y)=0, \\ b_1f_1(x, y)+b_2f_2(x, y)=0, \end{cases} \tag{4}$$

kus a_1, a_2, b_1, b_2 on antud arvud, nimetatakse süsteemi

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_2(x, y)=0 \end{cases}$$

lineaarseks teisenduseks.

Teoreem 3.17. *Kui* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, *siis*

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_2(x, y)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1f_1(x, y)+a_2f_2(x, y)=0, \\ b_1f_1(x, y)+b_2f_2(x, y)=0. \end{cases}$$

Erijuhul, kui süsteemi ühele võrrandile liita mis tahes arvuga korrutatud süsteemi teine võrrand, teine võrrand aga jätta muutmata, siis saadakse süsteem, mis on samaväärne esialgsega.

Lineaarteisenduse meetodit kasutatakse süsteemide lahendamisel väga sageli.

Näide 32. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x^3-y^3=-19, \\ xy^2-x^2y=6. \end{cases}$$

Antud juhul pole otstarbekas üht muutujat teise kaudu avaldada, kuna saaksime küllalt keerulise irratsionaalse võrrandi.

Liidame esimesele võrrandile 3-ga korrutatud teise võrrandi:

$$\begin{cases} (x-y)^3=-1, \\ xy(y-x)=6. \end{cases}$$

Saadud süsteem on samaväärne esialgsega ja ka süsteemiga

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ xy(y-x)=6; \end{cases}$$

sest $(x-y)^3=-1 \Leftrightarrow x-y=-1$.

Avaldades esimesest võrrandist ühe muutuja ja asendades teise võrrandisse, saame süsteemi lahendi $L=\{(2; 3); (-3; -2)\}$.

3. Abimuutuja meetod.

Paljude süsteemide ja võrrandite lahendamisel on kasulik võrrandeis esinevate muutujate asemele valida uued. Üldist reeglit uute muutujate valikuks pole, mõnel juhul (näiteks homogeensete või sümmeetriliste võrrandite lahendamisel) on võimalik ette öelda sobivad asendused.

N ä i d e 33.

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2-y+2x=2, \\ 4y^2+4xy+x^2-4y-2x=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2-(y-2x)=2, \\ (2y+x)^2-2(2y+x)=3. \end{cases}$$

Olgu $y-2x=u$ ja $2y+x=v$, siis

$$u^2-u=2 \Rightarrow u_1=-1;\ u_2=2,$$

$$v^2-2v=3 \Rightarrow v_1=-1;\ v_2=3.$$

x ja y leidmiseks tuleb lahendada nelja süsteemi disjunktsioon.

$$\begin{cases} y-2x=-1, \\ 2y+x=-1, \end{cases} \vee \begin{cases} y-2x=-1, \\ 2y+x=3, \end{cases} \vee \begin{cases} y-2x=2, \\ 2y+x=-1, \end{cases} \vee \begin{cases} y-2x=2; \\ 2y+x=3. \end{cases}$$

$$\textit{Vastus}:\ L=\left\{(-1,\ 0),\ \left(-\frac{1}{5};\ 1\frac{3}{5}\right),\ \left(\frac{1}{5};\ -\frac{3}{5}\right),\ (1;\ 1)\right\}.$$

N ä i d e 34. Lahendame võrrandi

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$$

Olgu $\sqrt[3]{x-2}=u$ ja $\sqrt{x+1}=v$, kus $v\geqslant 0$. Saame süsteemi

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^3=x-2, \\ v^2=x+1. \end{cases}$$

Lahutades kolmandast võrrandist teise ja asendades saadud võrrandis esimesest võrrandist v, saame $(u-1)(u^2+6)=0$, kust $u=1$. Edasi leiame, et $x=3$.

4. Homogeensete võrrandite süsteemid.

Hulkliiget nimetatakse **homogeenseks** x ja y suhtes, kui tema kõigis liikmetes x ja y astendajate summad on võrdsed.

Näiteks $5x^2-6xy+y^2$ ja $x^3+2xy^2-4y^3$ on vastavalt 2. ja 3. astme homogeensed hulkliikmed x ja y suhtes.

Võrrandit $f(x, y)=0$, kus $f(x, y)$ on x ja y suhtes homogeenne hulkliige, nimetatakse **homogeenseks võrrandiks**.

Kui võrrandisüsteemi üks võrrand on homogeenne x ja y suhtes, siis taandub süsteemi lahendamine kahe võrrandi lahendamisele, millest kumbki sisaldab vaid üht muutujat.

N ä i d e 35. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=0, \\ x^2+4y^2=5. \end{cases}$$

Kontrollime, kas on lahendit, milles $x=0$. Esimesest võrrandist: kui $x=0$, siis $y=0$. Arvupaar $(0; 0)$ ei ole aga teise võrrandi lahendiks. Seega süsteemil pole lahendit, milles $x=0$. Seepärast võime esimese võrrandi x^3-ga läbi jagada (üldiselt jagame x^n-ga, kus n on võrrandi aste).

$$1+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^3}{x^3}=0.$$

Olgu $y=tx$. Saame süsteemi

$$\begin{cases} t^3+t^2+t+1=0, \\ x^2(1+4t^2)=5. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist leiame, et $(t^2+1)(t+1)=0$, kust $t=-1$. Asendades leitud t väärtuse teise võrrandisse, leiame, et $x=\pm 1$. Kuna $y=tx$, siis esialgse süsteemi lahend on $L=\{(1; -1), (-1; 1)\}$.

Kui võrrandisüsteem on kujul

$$\begin{cases} f(x, y)=a, \\ g(x, y)=b, \end{cases}$$

kus $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ on sama astme homogeensed hulkliikmed, a ja b antud arvud, siis ta teisendub lihtsalt süsteemiks, milles üks võrrand on homogeenne. Korrutades süsteemi esimese võrrandi b-ga ja teise a-ga ning lahutades võrrandite vastavad pooled, saame $bf(x, y)-ag(x, y)=0$. Olgu $bf(x, y)-ag(x, y)=F(x, y)$.

$$\begin{cases} F(x, y)=0, \\ f(x, y)=a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y)=a; \\ g(x, y)=b. \end{cases}$$

Näide 36. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=12, \\ x^2+6xy-3y^2=-23. \end{cases}$$

Korrutades esimese võrrandi 23-ga ja teise 12-ga, ning liites, saame eelmisega samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=12, \\ 58x^2+3xy-3y^2=0, \end{cases}$$

mis lahendatakse analoogiliselt eelmise näitega.

Näide 37. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x^3-7x^2y+3xy^2=0, \\ 8x^2+y^2=9. \end{cases}$$

Sellel süsteemil on lahend, milles $x=0$. Kui $x=0$, siis esimene võrrand muutub võrduseks $0=0$, aga teine saab kuju $y^2=9$, kust $y=\pm 3$. Seega oleme süsteemi kaks lahendit leidnud: $(0;\ 3)$ ja $(0;\ -3)$. Ülejäänud lahendid leiame analoogiliselt näitega 34. Jagame esimese võrrandi pooled x^3-ga. Kuna juhtu, kui $x=0$ oleme juba vaadelnud, siis nüüd võime eeldada, et $x\neq 0$. Võtame $y=tx$ jne.

Vastus: $L=\Big\{(0;\ 3),\ (0;\ -3),\ (1;\ 1),\ (-1;\ -1),$

$$\left(\frac{9\sqrt{22}}{44};\ \frac{3\sqrt{22}}{11}\right),\ \left(-\frac{9\sqrt{22}}{44};\ -\frac{3\sqrt{22}}{11}\right)\Big\}.$$

5. Kahe muutujaga sümmeetriliste võrrandite süsteemid.

Hulkliiget $f(x,\ y)$ nimetatakse **sümmeetriliseks** x ja y suhtes, kui ta ei muutu x ja y asendamisel vastavalt y-ga ja x-ga.

Olgu süsteemis

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0, \\ g(x,\ y)=0 \end{cases}$$

$f(x,\ y)$ ja $g(x,\ y)$ sümmeetrilised hulkliikmed x ja y suhtes.

Lihtsaimad x ja y suhtes sümmeetrilised hulkliikmed on $x+y$ ja xy. Et iga sümmeetrilist hulkliiget $f(x,\ y)$ saab avaldada sümmeetriliste hulkliikmete $x+y$ ja xy kaudu, siis on soovitav sümmeetrilistest võrranditest koosnevate süsteemide lahendamisel kasutadagi uusi muutujaid $u=x+y$ ja $v=xy$. Üldreeglina niisuguse asendusega süsteem lihtsustub, hulkliikmete aste väheneb.

Praktiliselt osutub küllaldaseks, kui oskame u ja v kaudu avaldada astmesummasid $S_n=x^n+y^n$.

Astmesummad, kui $n=1, 2, 3, 4, 5$, avalduvad u ja v kaudu järgmiselt:

$$S_1=x+y=u,$$

$$S_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$

$$S_3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv,$$

$$S_4=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(u^2-2v)^2-2v^2=$$
$$=u^4-4u^2v+2v^2,$$

$$S_5=x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2=$$
$$=(u^2-2v)(u^3-3uv)-v^2u=u^5-5u^3v+5uv^2.$$

Näitame, et astmesumma S_k on avaldatav madalamat järku astmesummade kaudu järgmiselt:

$$S_k=uS_{k-1}-vS_{k-2}.$$

Tõepoolest, $uS_{k-1}-vS_{k-2}=(x+y)(x^{k-1}+y^{k-1})-$

$$-xy(x^{k-2}+y^{k-2})=x^k+y^k+xy^{k-1}+yx^{k-1}-yx^{k-1}-xy^{k-1}=$$
$$=x^k+y^k=S_k.$$

Näide 38. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=1153, \\ x^2-xy+y^2=33. \end{cases}$$

Olgu $x+y=u$ ja $xy=v$. Kasutades astmesummasid S_2 ja S_4, saame u ja v määramiseks süsteemi:

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+v^2=1153, \\ u^2-3v=33. \end{cases}$$

Avaldanud teisest võrrandist u^2 ja asendanud esimesse võrrandisse, saame pärast lihtsustamist

$$v^2-33v+32=0,$$

kust $v_1=1$, $v_2=32$ ja $u_{1,2}=\pm 6$, $u_{3,4}=\pm\sqrt{129}$. Muutujate x ja y leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteemide disjunktsioon

$$\begin{cases} x+y=6, \\ xy=1, \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=1, \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=\sqrt{129}, \\ xy=32, \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-\sqrt{129}, \\ xy=32. \end{cases}$$

Kuna sümmeetriliste võrrandite süsteemide lahendamine taandub sageli süsteemi

$$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v \end{cases}$$

lahendamisele, siis leiame selle süsteemi lahendi:

$$x=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4v}}{2}, \quad y=\frac{u\mp\sqrt{u^2-4v}}{2}.$$

Vastus: $L=\Big\{(3+2\sqrt{2};\ 3-2\sqrt{2}),\ (3-2\sqrt{2};\ 3+2\sqrt{2}),\ (-3+2\sqrt{2};\ -3-2\sqrt{2}),\ (-3-2\sqrt{2};\ -3+2\sqrt{2}),\ \left(\frac{\sqrt{129}+1}{2};\ \frac{\sqrt{129}-1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{129}-1}{2};\ \frac{\sqrt{129}+1}{2}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{129}+1}{2};\ \frac{-\sqrt{129}-1}{2}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{129}-1}{2};\ \frac{-\sqrt{129}+1}{2}\right)\Big\}.$

Vastuse võib kirjutada lühemal kujul

$$L=\left\{(3\varepsilon+2\sqrt{2}\varepsilon';\ 3\varepsilon-2\sqrt{2}\varepsilon'),\ \left(\frac{\varepsilon\sqrt{129}+\varepsilon'}{2};\ \frac{\varepsilon\sqrt{129}-\varepsilon'}{2}\right)\right\},$$

kus ε ja ε' omandavad teineteisest sõltumatult väärtusi $+1$ ja -1.

6. Mõnede irratsionaalsete võrrandite lahendamine sümmeetriliste võrrandite süsteemi abil.

Kui võrrand on kujus

$$\sqrt[n]{a-f(x)}+\sqrt[n]{b+f(x)}=c,$$

siis tema lahendamiseks on sobiv tähistada

$$\sqrt[n]{a-f(x)}=u \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{b+f(x)}=v.$$

u ja v määramiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} u+v=c, \\ u^n+v^n=a+b. \end{cases}$$

Näide 39. Lahendame võrrandi

$$\sqrt[4]{3t+4}+\sqrt[4]{93-3t}=5.$$

Olgu $\sqrt[4]{3t+4}=x$ ja $\sqrt[4]{93-3t}=y$, siis

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$$

Kasutades astmesummasid S_1 ja S_4, saame

$$\begin{cases} u=5, \\ u^4-4u^2v+2v^2=97. \end{cases}$$

Seega $u=x+y=5$ ja $v=xy=6$, millest $x=2$, $y=3$ ja $t=4$.

7. Kolme muutujaga sümmeetriliste võrrandite süsteemid.

Kolme muutujaga hulkliiget $f(x, y, z)$ nimetatakse sümmeetriliseks x, y, z suhtes, kui vahetades mis tahes kolmest muutujast (näiteks x y-ga ja y x-ga) hulkliige ei muutu.

Olgu $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ ja $h(x, y, z)$ sümmeetrilised hulkliikmed. Sümmeetriliste võrrandite süsteem on siis

$$\begin{cases} f(x, y, z)=0, \\ g(x, y, z)=0, \\ h(x, y, z)=0. \end{cases}$$

Sel juhul on kasulik võtta uuteks muutujateks

$$x+y+z=u, \quad xy+xz+yz=v, \quad xyz=w.$$

Lihtsaimaks kolme muutujaga sümmeetriliste võrrandite süsteemiks on

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+xz=b; \\ xyz=c. \end{cases} \tag{5}$$

Viète'i teoreemi põhjal on x, y ja z kuupvõrrandi $t^3-at^2+bt-c=0$ lahendeiks.

N ä i d e 40. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6. \end{cases}$$

Sellele süsteemile on võimalik anda süsteemi (5) kuju järgmise teisendusega:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz).$$

Seega

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+xz=11, \\ xyz=6. \end{cases}$$

Leiame võrrandi $t^3-6t^2+11t-6=0$ lahendid. Kuna $t^3-6t^2+11t-6=(t-1)(t-2)(t-3)$, siis $t_1=1$, $t_2=2$ ja $t_3=3$ ning esialgse süsteemi lahend $L=\{(1;\ 2;\ 3),\ (1;\ 3;\ 2),\ (2;\ 1;\ 3),\ (2;\ 3;\ 1),\ (3;\ 1;\ 2),\ (3;\ 2;\ 1)\}$.

Süsteemi (5) kuju andmiseks saab peale eelmises näites vaadeldud teisenduste kasutada veel teisendust

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+xz)-3xyz.$$

N ä i d e 41. Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=26, \\ xy+yz+xz=-13, \\ x^3+y^3+z^3=36. \end{cases}$$

Olgu $x+y+z=u$, $xy+yz+xz=v$ ja $xyz=w$, siis $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)=u^2-2v=u^2+26$ ja $u=x+y+z=0$.
$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+xz)+3xyz=$ $=0-0+3w \Rightarrow w=xyz=12.$

Saame süsteemi

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz+xz=-13, \\ xyz=12. \end{cases}$$

Lahendame kuupvõrrandi $t^3-13t-12=0$.
Kuna $t^3-13t-12=t^3-t-12t-12=t(t^2-1)-12(t+1)=$ $=(t+1)(t^2-t-12)=(t+1)(t+3)(t-4)$, siis võrrandi lahendeiks on $t_1=-1$, $t_2=-3$ ja $t_3=4$.

Vastus: $L=\{(-1; -3; 4), (-1; 4; -3); (-3; -1; 4); (-3; 4; -1), (4; -1; -3), (4; -3; -1)\}$.

§ 6. MÕNED VÕRRANDITE JA VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMISEL KASUTATAVAD ERIVÕTTED.

Näide 42. Missuguste a väärtuste korral on võrrandil

$$(3a-1)x^2-2ax+1=0$$

üks lahend suurem ja teine väiksem kui -1?

Tähistame võrrandi vasaku poole $f(x)$-ga. Kui $3a-1>0$, siis selleks, et üks lahend oleks suurem ja teine väiksem kui -1, on tarvilik ja piisav, et $f(-1)<0$. (Joonis 3-2).

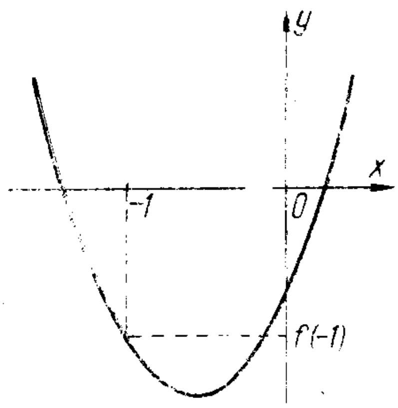
$$f(-1)=3a-1+2a+1=5a.$$

Saame võrratusesüsteemi

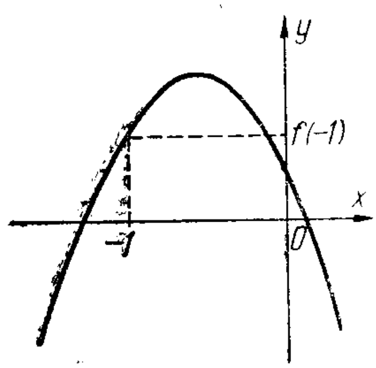
$$\begin{cases} 3a-1>0, \\ 5a<0, \end{cases}$$

millel puudub lahend.

Kui $3a-1<0$, siis selleks, et ülesande tingimused oleksid täidetud, on tarvilik ja piisav, et $f(-1)>0$. (Joonis 3-3).



Joon. 3-2



Joon. 3-3

$$\begin{cases} 3a-1<0; \\ 5a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<\frac{1}{3}, \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{3}.$$

Kui $3a-1=0$, siis võrrandil on vaid 1 lahend.

Vastus: $0<a<\frac{1}{3}$.

Võrdluseks püüame lahendada seda ülesannet nn. «traditsioonilisel» teel.

Võrrandil on 2 erinevat reaalarvulist lahendit, kui $D=a^2-3a+1>0$. Sel juhul $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}$, $x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}$. Kui $3a-1>0$, siis $x_2>x_1$.

Tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} \frac{a+\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}>-1; \\ \frac{a-\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}<-1. \end{cases}$$

Kui $3a-1<0$, siis $x_1>x_2$. Tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} \frac{a-\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}>-1; \\ \frac{a+\sqrt{a^2-3a+1}}{3a-1}<-1. \end{cases}$$

Nende võrratusesüsteemide lahendamine on küllaltki tülikas.

Näide 43. Lahendame võrrandi

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Olgu $\sqrt{x-1}=y$, kus $y\geqslant 0$ ja $x\geqslant 1$, siis $x=y^2+1$ ja võrrand omandab kuju $\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{y^2-6y+9}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1 \Leftrightarrow |y-2|+|y-3|=1$. Lahendame saadud absoluutväärtusi sisaldava võrrandi, jaotades võrrandi määramispiirkonna kolmeks osapiirkonnaks:

a) kui $0 \leqslant y < 2$, siis $-y+2-y+3=1$;
b) kui $y>3$, siis $y-2+y-3=1$;
c) kui $2 \leqslant y \leqslant 3$, siis $y-2-y+3=1$.

Juhtudel a) ja b) lahendid puuduvad, juhul c) on lahenditeks $2 \leqslant y \leqslant 3$. Seega $2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3 \Leftrightarrow 4 \leqslant x-1 \leqslant 9 \Leftrightarrow 5 \leqslant x \leqslant 10$.

Vastus: $L=\{x \mid 5 \leqslant x \leqslant 10\}$.

Paneme tähele, et sel võrrandil on lõpmata palju lahendeid.

M ä r k u s. Asendades esialgses võrrandis x-i mingi arvuga lõigust $[5;\ 10]$, saate koostada rea järgmist tüüpi ülesandeid:

«Tõestada, et $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}=1$.»

(Antud näites $x=7$).

Koostage ise veel paar analoogilist ülesannet ja tõestage saadud samasused!

N ä i d e 44. Lahendame võrrandi $\sqrt[6]{2x-7}+\sqrt{2x+1}=2$.

Kuna $2x-7 \geqslant 0$, siis $x \geqslant 3{,}5$ ja $2x+1 \geqslant 8$, seepärast $\sqrt{2x+1} > 2$ ja võrrandil lahend puudub.

N ä i d e 45. Lahendame võrrandi

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

Võrrandi määramispiirkonnaks on $x \geqslant 1$. Võrrandi parem pool $4-2x \leqslant 2$, vasak pool aga pole väiksem kahest, sest $\sqrt{x+3} \geqslant 2$. Seega, kui võrrandil on olemas lahend, siis saab see olla ainult $x=1$. Kontrollinud, veendume, et $x=1$ on võrrandi lahendiks.

N ä i d e 46. On esitatud 3 väidet:

a) ruutkolmliige $-x^2+5x-a$ on kõigi x väärtuste korral negatiivne.

b) kehtib võrdus $\sqrt{100-20a+a^2}=10-a$;

c) süsteemil $\begin{cases} x+|y|=1, \\ x^4+y^4=a \end{cases}$

on vaid 1 lahend.

Missuguste a väärtuste korral on 2 esitatud väidetest õiged, aga 1 vale?

L a h e n d u s. Esimene väide on õige, kui $D=25-4a<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a>6{,}25$. Teine väide on õige, kui $10-a\geqslant 0 \Rightarrow a\leqslant 10$.

Kui antud võrrandisüsteemi lahendiks on $(x_0;\ y_0)$, siis on ta lahendiks ka $(x_0;\ -y_0)$. Miks? Et süsteemil oleks vaid 1 lahend, peab $y=0$. Seega kolmas väide on õige, kui $a=1$.

Vastus: $a=1$ või $6{,}25<a\leqslant 10$.

N ä i d e 47. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\dfrac{x_3}{a_3}=\ldots=\dfrac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=a. \end{cases}$$

Süsteemis on n võrrandit ja n muutujat $x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n$. Kasutades võrdsete suhete omadust, saame:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n},\ \text{millest}$$

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{a}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\Rightarrow x_1=\frac{a_1a}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Analoogiliselt leiame, et $x_2=\dfrac{a_2a}{a_1+a_2+\ldots+a_n};\ \ldots;$

$$x_n=\frac{a_na}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

N ä i d e 48. Lahendame võrrandi $(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+$ $+(x+x^{-1})=6$.

Arvu a ja tema pöördarvu a^{-1} summa pole väiksem kahest, kui $a>0$. Summa on võrdne kahega vaid $a=1$ korral. Seega positiivne lahend saab olla vaid $x=1$. Lahend ei saa olla negatiivne, sest $|x^3+x^{-3}|>x^2+x^{-2}$, võrrandi parem pool on aga positiivne. Tõestage võrratus $|x^3+x^{-3}|>x^2+x^{-2}$.

Vastus: $L=\{1\}$.

N ä i d e 49. Tõestame järgmise lause. Selleks, et võrrandi $x^3+ax^2+bx+c=0$, $b<0$ kaks lahendit oleksid teineteise vastandarvud, on tarvilik ja piisav, et $ab=c$.

T a r v i l i k k u s. Kui $x_2=-x_1$, siis $x^3+ax^2+bx+c=$ $=(x-x_1)(x+x_1)(x-x_3) \Rightarrow x^3+ax^2+bx+c=x^3-x_3x^2-x_1^2x+$ $+x_1^2x_3 \Rightarrow a=-x_3,\ b=-x_1^2;\ c=x_1^2x_3$. Seega $c=ab$.

P i i s a v u s. Kui $c=ab$, siis antud võrrand omandab kuju $x^3+ax^2+bx+ab=0 \Rightarrow x^2(x+a)+b(x+a)=0 \Rightarrow (x^2+b)(x+a)=$ $=0$. $x_{1,2}=\pm\sqrt{-b}$. Kaks lahendit on teineteise vastandarvud.

M ä r k u s. Olgu A mingi matemaatiline lause. Iga lauset B, millest A järeldub, nimetatakse **piisavaks tingimuseks** A jaoks $(B \Rightarrow A)$. Iga lauset B, mis järeldub lausest A, nimetatakse **tarvilikuks tingimuseks** A jaoks $(A \Rightarrow B)$.

ÜLESANDED.

3-1. On antud võrrandid $f(x)=0$ ja $f(x) \cdot g(x)=0$. Tuua näiteid, missuguste $f(x)$ ja $g(x)$ korral võrrandid

a) on samaväärsed;

b) pole samaväärsed, aga teine võrrand on esimese järelduseks;

c) pole samaväärsed, aga esimene võrrand on teise järelduseks.

3-2. Kumb võrranditest on teise järelduseks? Missugusel tingimusel on võrrandid samaväärsed?

a) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{f_3(x)}{f_4(x)}$ ja $f_1(x)\cdot f_4(x)=f_2(x)\cdot f_3(x)$;

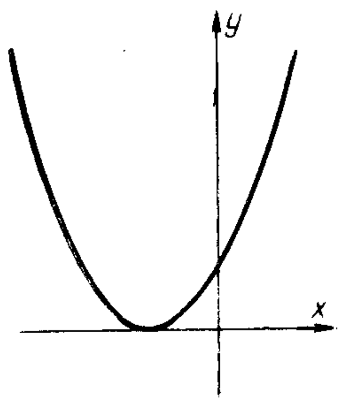
b) $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=a$ ja $\sqrt{f(x)g(x)}=a$;

c) $f(x)\cdot g(x)=a$ ja $f(x)=\dfrac{a}{g(x)}$;

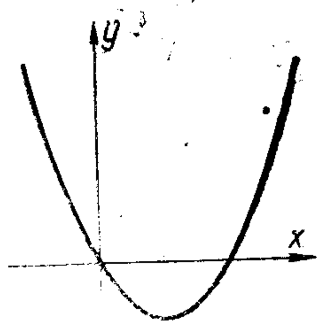
d) $f(x)=g(x)$ ja $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{g(x)}$.

3-3. Leidke võrrand, mis oleks suvalise võrrandi järelduseks.

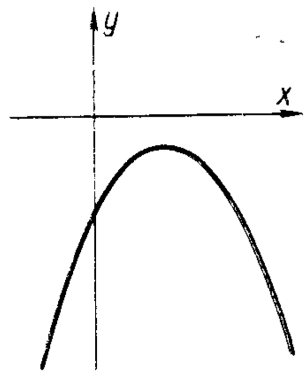
3-4. Leidke võrrand, mille järelduseks oleks iga võrrand.



Joon. 3-4



Joon. 3-5



Joon. 3-6

3-5. Joonistel 3-4, 3-5 ja 3-6 on antud funktsiooni $y=ax^2+bx+c$ graafik. Määrake kordajate a, b ja c märgid kõigil kolmel juhul arvestades parabooli asendit telgede suhtes.

3-6. Tõestage, et kui x_1, x_2 ja x_3 on võrrandi $x^3+ax^2+bx+c=0$ lahendid, siis $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$, $x_1x_2x_3=-c$. (Viète'i valemid kuupvõrrandi jaoks).

3-7. Mingi hulkliikme jagamisel kaksliikmetega $x-1$ ja $x-2$ tekkisid vastavalt jäägid 3 ja 4. Missugune jääk tekib selle hulkliikme jagamisel korrutisega $(x-1)(x-2)$?

3-8. Leidke hulkliikme $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$ kordajad a, b, ja c, kui hulkliige $f(x)$ jagub hulkliikmega x^3-2x^2-5x+6.

3-9. Kas hulkliige $x^{12}-3x+2$ jagub kaksliikmega $x+1$?

3-10. Võrrandi $3x^3+ax^2+bx+9=0$ kaks lahendit on $x_1=-1$ ja $x_2=1$. Leidke kolmas lahend.

3-11. Tõestage, et mistahes hulkliikme jagamisel hulkliikmetega $g(x)$ ja $cg(x)$, kus $c\neq 0$, saadakse võrdsed jäägid.

3-12. Tõestage, et Horneri skeemi alumises reas olevad arvud on hulkliikme $f(x)$ jagamisel kaksliikmega $x-a$ saadud jagatise kordajateks ja jäägiks.

3-13. Võrrandi $x^3-6x^2+9x+m=0$ lahendid moodustavad aritmeetilise jada. Leidke m ja lahendage võrrand.

3-14. Tõestage, et $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$, kui x_1, x_2 ja x_3 on võrrandi $x^3+px+q=0$ lahendid.

3-15. Tõestage, et kui üks arvudest c või d asub arvsirgel a ja b vahel, siis võrrandil $(x-a)(x-b)+m(x-c)\cdot(x-d)=0$ on $m>-1$ korral reaalarvulised lahendid.

Lahendage võrrandid (3-16 . . . 3-20).

3-16. $x^3-7x^2+13x-3=0.$

3-17. $x^4+3x^3-6x-4=0.$

3-18. $x^4-3x^3-x^2+9x-6=0.$

3-19. $x^4+x^3-15x^2+7x+6=0.$

3-20. $x^4-3x^3-14x^2+48x-32=0.$

3-21. Leidke võrrandi $4x^3-12x^2+13x-6=0$ ratsionaalarvulised lahendid.

3-22. Tõestage, et kuuenda astme pöördvõrrandist ax^6+bx^5+ $+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$ saame asendusega $x+\frac{1}{x}=y$ kolmanda astme pöördvõrrandi vaid siis, kui $2a-b=$ $=c-d$.

Lahendage võrrandid (3-23 . . . 3-29).

3-23. $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0.$

3-24. $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0.$

3-25. $3x^3-5x^2-5x+3=0.$

3-26. $2x^3+7x^2+7x+2=0.$

3-27. $6x^5-29x^4+27x^3+27x^2-29x+6=0.$

3-28. $12x^4-8x^3-39x^2+8x+12=0.$

3-29. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0.$

3-30. Missuguste a väärtuste korral võrrandid

$$\frac{a^2+2x}{x-a}=\frac{x-a}{x+a} \quad \text{ja} \quad (a^2+2x)(x+a)=(x-a)^2$$

ei ole samaväärsed? Lahendage esimene võrrand.

3-31. Missuguste a, b ja c väärtuste korral võrrandid

$$\frac{(x+a)(x+a+b)}{(x+c)(x+c+b)}=\frac{(x-a)(x-a-b)}{(x-c)(x-c-b)} \quad \text{ja}$$

$$(x+a)(x+a+b)(x-c)(x-c-b)=$$
$$=(x-a)(x-a-b)(x+c)(x+c+b)$$ on samaväärsed?

Lahendage võrrandid (3-32 . . . 3-51).

3-32. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$

3-33. $a(1-ax)=4b-2ax.$

3-34. $(ab+2)x+a=2b+(b+2a)x.$

3-35. $b-ax^2=(a-b)x.$

3-36. $a(a+2)x^2+2x-a^2+1=0.$

3-37. $bx^2-(a-b)x-a=0.$

3-38. $\dfrac{5}{3x-a}=\dfrac{3}{ax-4}.$

3-39. $\dfrac{ax-1}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}.$

3-40. $\dfrac{x+b}{a+b}-\dfrac{a-b}{x-b}=\dfrac{x+c}{a+c}-\dfrac{a-c}{x-c},\ a\neq-b,\ a\neq-c.$

3-41. $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{2a-x}{a-b}-\dfrac{a+b}{x}=1,\ a\neq\pm b.$

3-42. $\dfrac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2.$

3-43. $\dfrac{a^2-1}{ax-1}+\dfrac{a-x}{a}=1.$

3-44. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

3-45. $\sqrt{x(2a-x)}=1-x,\ a>0.$

3-46. $\sqrt[7]{(ax-b)^3}-\sqrt[7]{(b-ax)^3}=\dfrac{63}{8},\ a\neq0.$

3-47. $\sqrt{x-3a}-\sqrt{x-a}=3.$

3-48. $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}.$

3-49. $\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}=2\sqrt[8]{a^2-x^2}.$

3-50. $\dfrac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=\dfrac{a-b}{a+b-2x}.$

3-51. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}.$

Lahendage võrrandisüsteemid (3-52 ... 3-58).

3-52. $\begin{cases} x^2+y^2=3+xy, \\ x^3+y^3=4xy+1. \end{cases}$

3-53. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$

3-54. $\begin{cases} \sqrt[4]{x^3-11}+\sqrt{y}=2, \\ x^3+y^2=27. \end{cases}$

3-55. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=4, \\ x+y+z=6, \\ x^2+y^2+z^2=18. \end{cases}$

3-56. $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=36, \\ (y+z)(x+y+z)=81, \\ (x+z)(x+y+z)=45. \end{cases}$

3-57. $\begin{cases} x^2-xy+ay=0, \\ y^2-xy-4ax=0. \end{cases}$

3-58. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=a, \\ x+y=b. \end{cases}$

3-59. Missuguste a väärtuste korral funktsioonide $y=2ax+1$ ja $y=(a-6)x^2-2$ graafikud ei lõiku?

3-60. Missuguste a väärtuste korral asuvad arvud 1 ja a arvude x_1 ja y_1 vahel, kus $(x_1; y_1)$ on süsteemi

$$\begin{cases} x+y-1=2a, \\ 2xy=a^2-a \end{cases}$$

lahend.

3-61. Leidke kõik a väärtused, mille puhul võrrandi $x^2+x+a=0$ lahendid on suuremad kui a.

3-62. Leidke m väärtused, mille puhul võrrandi $x^2-2(m-1)x+$ $+2m+1=0$ lahendid on erimärgilised ja kumbki on absoluutväärtuselt väiksem kui 4.

IV PEATÜKK.

VÕRRATUSED.

§ 1. VÕRRATUSED JA NENDE TEISENDAMINE.

Võrratuse moodustavad omavahel märkidega $>$, $\geqslant$, $<$ või $\leqslant$ seotud arvud või arvudest ja tähtedest koosnevad matemaatilised avaldised, milledel on kindel arvuline väärtus nendes esinevate tähtede asendamisel arvudega. Selliseid avaldisi nimetatakse ka termideks (tähiseks on T).

Võrratustega võime teostada järgmisi teisendusi:

1. $T_1 < T_2 \Rightarrow T_1 + T < T_2 + T$,

2a. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 T < T_2 T$, *kui* $T > 0$,

2b. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1 T > T_2 T$, *kui* $T < 0$,

3. $0 < T_1 < T_2 \Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2}$,

4a. $T_1 < T_2$ ja $T_3 < T_4 \Rightarrow T_1 + T_3 < T_2 + T_4$,

4b. $T_1 < T_2$ ja $T_3 > T_4 \Rightarrow T_1 - T_3 < T_2 - T_4$,

5. $T_1 < T_2$ ja $T_3 < T_4 \Rightarrow T_1 T_3 < T_2 T_4$, kui $T_3, T_4 > 0$,

6. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow -T_1 > -T_2$,

7a. $0 < T_1 < T_2 \Rightarrow T_1^n < T_2^n$, *kui* $n \in N_1$,

7b. $T_1 < T_2 < 0 \Rightarrow T_1^n > T_2^n$, *kui n on paarisarv*,

7c. $T_1 < T_2 < 0 \Rightarrow T_1^n < T_2^n$, *kui n on paaritu arv*,

8a. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow \sqrt[m]{T_1} < \sqrt[m]{T_2}$, *kui m on paaritu arv*,

8b. $0 < T_1 < T_2 \Leftrightarrow \sqrt[m]{T_1} < \sqrt[m]{T_2}$, *kui m on paarisarv*,

9a. $0 < T_1 < T_2 \Leftrightarrow \log_a T_1 < \log_a T_2$, *kui* $a > 1$,

9b. $0 < T_1 < T_2 \Leftrightarrow \log_a T_1 > \log_a T_2$, *kui* $0 < a < 1$,

10a. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow a^{T_1} < a^{T_2}$, *kui* $a > 1$,

10b. $T_1 < T_2 \Leftrightarrow a^{T_1} > a^{T_2}$, *kui* $0 < a < 1$.

Võrratustega seotud ülesannetest käsitleme eraldi võrratuste tõestamist ja võrratuste lahendamist nõudvaid ülesandeid.

§ 2. VÕRRATUSTE TÕESTAMINE.

Võrratuste tõestamisel tuleb näidata, kas antud võrratus on tõene või väär. Sagedamini esinevad võtted võrratuste tõestamisel on järgmised:

1. Ilmselt tõese või varem tõestatud võrratuse teisendamine nii, et saadakse antud võrratus.

Näide 1. Võrratuse $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$ tõestamiseks lähtume ilmselt tõestest võrratustest $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(a-c)^2 \geqslant 0$ ja $(b-c)^2 \geqslant 0$, millede vastavate poolte liitmisel (vt. teisendus 4a) saame $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0$, millest edasi järeldubki, et $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$, kus a, b ja c võivad olla mis tahes reaalarvud ja võrdusmärk esineb juhul, kui $a=b=c$.

2. Eelmisele vastupidine võte on antud võrratuse teisendamine nii, et saadakse ilmselt tõene võrratus.

Näide 2. Võrratuse $a^2+b^2 \geqslant 2(a+b-1)$ tõestamiseks anname talle kuju $(a-1)^2+(b-1)^2 \geqslant 0$, mille tõesus on ilmne a ja b kõigi reaalarvuliste väärtuste korral ja võrdusmärk kehtib juhul, kui $a=b=1$. Kuid on loogiliselt väär järeldada viimase võrratuse tõesusest lähtevõrratuse tõesust, sest väär eeldus ei pruugi takistada tõese järelduse saamist. Küll saame antud võrratuse korrektse tõestuse kui ilmselt tõesest võrratusest $(a-1)^2+$ $+(b-1)^2 \geqslant 0$ jõuame samaväärsete teisenduste kaudu võrratuseni $a^2+b^2 \geqslant 2(a+b-1)$, s. t. kasutame esimest võtet. Seega võib antud võrratuse teisendamist ilmselt tõeseks võrratuseks kasutada lahenduskäigu ühe etapina — ülesande analüüsina.

3. Mõne üldtuntud võrratuse kasutamine.

Sellisteks õpikutes ja teatmikes sagedamini esinevateks võrratusteks on järgmised:

a) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, kus $a_i \geqslant 0$ ja võrdusmärk esineb siis, kui $a_1=a_2=\ldots=a_n$. See nn. Cauchy võrratus on hõlpsasti sõnastatav: mittenegatiivsete arvude aritmeetiline keskmine ei ole väiksem samade arvude geomeetrilisest keskmisest.

b) peale arvude aritmeetilise keskmise (AK) ja geomeetrilise keskmise (GK) kasutatakse matemaatikas veel arvude ruutude keskmise (RK) ja harmoonilise keskmise (HK) mõisteid:

$$RK=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n},$$

$$HK=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Samade arvude korral kehtib seos $RK\geqslant AK\geqslant GK\geqslant HK$.

c) $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\times$ $\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$, kui $a_i, b_i\in R$. See võrratus on tuntud Bunjakovski-Cauchy võrratuse nime all.

d) $(1+T)^n\geqslant 1+nT$, kus $T\geqslant 0$, $n\in N$ (Bernoulli võrratus).

Näide 3. Võrratuse $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$, kus a, b, $c>0$, tõestamisel saab kasutada seost $AK\geqslant GK$:

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}$ ja $\frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}$; teisenduse 5 põhjal

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\geqslant abc\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

Näide 4. Ka Bernoulli võrratuse tõestamisel võime lähtuda Cauchy võrratusest võttes $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=1$ ja $a_n=1+nT$.

Siis $\frac{n-1+1+nT}{n}\geqslant\sqrt[n]{1+nT}\Rightarrow\frac{(n+nT)^n}{n^n}\geqslant 1+nT$ teisenduse 7a põhjal ning seega $(1+T)^n\geqslant 1+nT$.

4. Võrratuste ühe poole asendamine temast suurema või väiksema avaldisega.

Näide 5. Tõestame võrratuse $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$.

Võrratus $\frac{2}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$ (tõestage see!) on esitatav kujul $\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)$. Järelikult $\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}<$ $<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{5^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$, ... ja $\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{2}\times$ $\times\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$.

Summa $s=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4}<\frac{1}{4}$. Et tõestatava võrratuse vasakut poolt moodustava summa liidetavad on väiksemad summa s vastavatest liidetavatest, siis on antud võrratus tõene.

5. Matemaatilise induktsiooni rakendamine.

Näide 6. Tõestame võrratuse $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>$ $>\sqrt{n}$, kus $n\in N_1$ ja $n>1$.

1) Võrratus on tõene, kui $n=2$, sest $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$.

2) Oletame, et võrratus kehtib ka mingi $n=k>2$ korral:

$$S_k=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}.$$

3) Näitame, et sel eeldusel võrratus kehtib ka $n=k+1$ korral: liidame võrratuse $S_k=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$ mõlemale poolele $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Saame $S_k+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Võrratuse vasakul poolel on meil nüüd summa S_{k+1}, paremal poolel olev avaldis $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ on aga suurem kui $\sqrt{k+1}$, sest $\left(\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-$

$-\sqrt{k+1}=\dfrac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1-k-1}{\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}}>0.$ Järelikult ka $S_{k+1}>\sqrt{k+1}$.

§ 3. VÕRRATUSTE LAHENDAMINE.

Enne kui asume käsitlema võrratuse lahendamise üldisi põhimõtteid, tutvume võrratuse määramispiirkonna, võrratuse lahendi ja võrratuste samaväärsuse mõistetega.

Võrratuse $f(x)>g(x)$ **määramispiirkonnaks** nimetatakse võrratuse mõlemal poolel esinevate funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ määramispiirkondade ühisosa.

Näiteks võrratuse $\dfrac{x+1}{x-1}>\sqrt{2x-1}$ mõlemal poolel esinevate funktsioonide määramispiirkonnad on vastavalt $X_1=\{x|x\neq 1\}$ ja $X_2=\left\{x|x\geqslant\dfrac{1}{2}\right\}$, võrratuse määramispiirkond $X=X_1\cap X_2=$ $=\left\{x|x\geqslant\dfrac{1}{2}\wedge x\neq 1\right\}$.

Muutuja väärtuste hulka, mis kuulub võrratuse määramispiirkonda ja muudab võrratuse tõeseks, nimetatakse võrratuse **lahendiks**.

Näiteks $x=2$ kuulub võrratuse $\dfrac{x+1}{x-1}>\sqrt{2x-1}$ määramispiirkonda ja muudab selle võrratuse tõeseks võrratuseks $3>\sqrt{3}$, järelikult kuulub $x=2$ ka selle võrratuse lahendite hulka. $x=5$ kuulub sama võrratuse määramispiirkonda, kuid ei muuda võrratust tõeseks: $1{,}5>3$ on väär ja järelikult ei kuulu $x=5$ võrratuse lahendite hulka.

Kaht võrratust nimetatakse **samaväärseteks**, kui nende võrratuste lahendite hulgad on võrdsed.

Võrratuse lahendamisel asendame antud võrratuse järk-järgult lihtsamatega, kuid samaväärsetega, kuni jõuame võrratuse lahendini. Niisugusteks teisendusteks, mis võimaldavad üht võrratust asendada teisega, on käesoleva peatüki alguses toodud teisendused. Tuleb aga silmas pidada, et nende teisenduste rakendamisel võib muutuda võrratuse määramispiirkond ja siis ei pruugi lähtevõrratus teisendatud võrratusega enam samaväärne olla.

Näiteks võrratus $x+\sqrt{x-1}<2+\sqrt{x-1}$ on küll samaväärne temast teisenduse 1 abil saadud võrratusega $x+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}<2$, kuid viimasest peale koondamist saadud võrratuse $x<2$ määramispiirkond $X_1=R$ on esialgse võrratuse määramispiirkonnaga $X=\{x\in R|x\geqslant 1\}$ võrreldes laienenud ja need võrratused ei ole samaväärsed: võrratust $x<2$ rahuldab näiteks $x=0$, mis aga lähtevõrratuse lahendite hulka ei kuulu.

Teisenduse 2*a* rakendamine võrratusele $\frac{2-x}{x+1}>0$ annab võrratuse $2-x>0$, mis samuti ei ole lähtevõrratusega samaväärne, sest $x=-2$ on küll võrratuse $2-x>0$ lahendiks, kuid ei ole seda lähtevõrratusele.

Määramispiirkonna laienemine toimub ka võrratuselt $\sqrt{2x-1}<x$ üleminekul võrratusele $2x-1<x^2$ kasutades teisendust 7a.

Järgnevalt vaatleme mõningaid sagedamini kasutatavaid **võrratuste lahendamisvõtteid.**

1. Intervallmeetod.

Oletame, et võrratus $f(x)>0$ on teisendatav kujule $a(x-x_1)\times\times(x-x_2)\ldots(x-x_n)>0$, kus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on funktsiooni $f(x)$ nullkohad ja $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n$, $a\in R$ ning $a>0$. Märgime arvteljel nullkohtade asukohad (vt. joon. 4-1). Et x_n on suurim nullkoht, siis $f(x)>0$, kui $x>x_n$. Kui aga $x_{n-1}<x<x_n$, siis $f(x)<0$, sest tegur $x-x_n$ on nüüd negatiivne, ülejäänud tegurid ja nende korrutis aga ikka positiivsed. Kui $x_{n-2}<x<x_{n-1}$, siis $f(x)>0$, sest tegurid $(x-x_n)$ ja $(x-x_{n-1})$ on nüüd negatiivsed, ülejäänud aga positiivsed. Näeme, et antud juhul on nullkohad ühtlasi kohtadeks, kus muutub funktsiooni märk. Piltlikult võib seda kujutada arvteljele märgitud nullkohtade abil nii nagu näidatud joonisel 4-1.

Joon. 4-1

Kui nullkohtade arv n on paarisarv, siis on võrratuse $f(x)>0$ lahendiks

$$L=\{x \mid x>x_n \vee x_{n-2}<x<x_{n-1} \vee \ldots \vee x_2<x<x_3 \vee x<x_1\},$$

kui aga n on paaritu, siis

$$L=\{x \mid x>x_n \vee x_{n-2}<x<x_{n-1} \vee \ldots \vee x_1<x<x_2\}.$$

Kui $f(x)$ sisaldab peale tegureiks lahutamist lineaartegurite naturaalarvuliste astendajatega astmeid, siis rakendame võrratuse lihtsustamiseks järgmisi seoseid:

1. $(x-x_1)^{2n}\cdot g(x)>0 \Leftrightarrow g(x)>0 \wedge x-x_1\neq 0;$
2. $(x-x_1)^{2n+1}\cdot g(x)>0 \Leftrightarrow (x-x_1)g(x)>0 \wedge x-x_1\neq 0.$

N ä i d e 7. Lahendame võrratuse

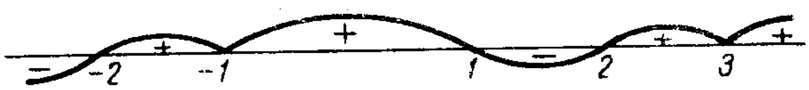
$$(x-3)^4(x-2)^3(x-1)(x+1)^2(x+2)^5>0.$$

Eeltoodud seoseid kasutades muudame võrratuse süsteemiks

$$\begin{cases} (x-2)(x-1)(x+2)>0, \\ x\neq 3, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

Kohtadel $x=3$ ja $x=-1$ funktsioon $f(x)$ oma märki ei muuda, sest nii $(x-3)^4$ kui ka $(x+1)^2$ on alati positiivsed, kui $x\neq 3$ ja $x\neq -1$. Vastavalt joonisele 4-2 võime võrratuse lahendite hulga välja kirjutada:

$$L=\{x \mid x>3 \vee 2<x<3 \vee -1<x<1 \vee -2<x<-1\}.$$



Joon. 4-2

N ä i d e 8. Lahendame võrratuse $\dfrac{(x^2-4)(x^2-1)(x^3+1)}{8-x^3}\geqslant 0.$

Kasutame siin kõigepealt samaväärset teisendust $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)g(x)\geqslant 0 \wedge g(x)\neq 0$, mille põhjal saame antud võrratusest võrratusesüsteemi

$$\begin{cases}(x^2-4)(x^2-1)(x^3+1)(8-x^3)\geqslant 0,\\ 8-x^3\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)(x+1)(x^2-x+1)(x-2)\times\\ \times(x^2+2x+4)\leqslant 0,\\ (2-x)(4+2x+x^2)\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

Joon. 4-3

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2(x-1)(x+1)^2(x+2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)\leqslant 0,\\ (2-x)(4+2x+x^2)\neq 0.\end{cases}$$

Et x^2-x+1 ja x^2+2x+4 on iga $x\in R$ korral positiivsed, siis saame

$$\begin{cases}(x-1)(x+2)\leqslant 0,\\ x\neq 2,\end{cases}$$

mida võime arvteljel kujutada järgmiselt (vt. joon. 4-3): järelikult $L=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. Juurvõrratuste lahendamine.

Juurvõrratuste lahendamisel tuleb silmas pidada, et paarisarvulise juurijaga juure korral on nii juuritava kui ka juure enda kohta kehtiv mittenegatiivsuse nõue.

Vaatlemegi juurvõrratusi, mis sisaldavad paarisarvulise juurijaga juuri. Nende võrratuste lahendamisel võib kasutada järgmisi samaväärseid teisendusi:

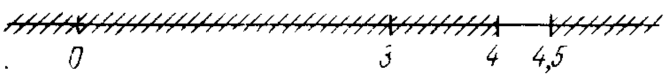
1. $\sqrt[2k]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^{2k}(x).\end{cases}$

2. $\sqrt[2k]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^{2k}(x),\end{cases} \vee \begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$

3. $\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Näide 9. Lahendame võrratuse $\sqrt{x^2-4x} < x-3$.

$$\sqrt{x^2-4x} < x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x \geqslant 0, \\ x-3 > 0, \\ x^2-4x < (x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \geqslant 0, \\ x-3 > 0, \\ 2(x-4{,}5) < 0. \end{cases}$$



Joon. 4-4

Viimase süsteemi lahendamiseks kasutame järgmist võtet: märkinud arvteljel nullkohtade asukohad nagu intervallmeetodi korralgi, kõrvaldame need x väärtused, mis ei rahulda esimest võrratust, s. t. $0 < x < 4$, edasi kõrvaldame need x väärtused, mis ei rahulda teist võrratust: $x \leqslant 3$ ja seejärel need, mis ei rahulda kolmandat võrratust: $x > 4{,}5$. Kõrvaldamata x väärtused ongi otsitavaiks: $L = \{x \mid 4 \leqslant x < 4{,}5\}$ (vt. joon. 4-4.).

Näide 10. Lahendame võrratuse $\sqrt{x^3+3x+4} > -2$.

Et $-2 < 0$ ja $\sqrt{x^3+3x+4} \geqslant 0$, siis on antud võrratus rahuldatud, kui $x^3+3x+4 \geqslant 0$.
$x^3+3x+4 = x^3-x+4x+4 = x(x^2-1)+4(x+1) = (x+1) \times$ $\times (x^2-x+4)$. Seega tuleb lahendada võrratus $(x+1)(x^2-x+$ $+4) \geqslant 0 \Rightarrow x+1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$, sest $x^2-x+4 > 0$ igal x reaalarvulisel väärtusel.

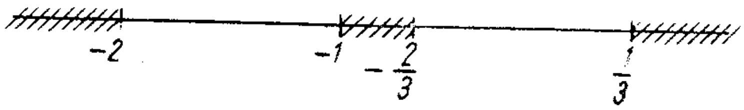
$$L = \{x \mid x \geqslant -1\}.$$

Näide 11. Lahendame võrratuse

$$\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$$

Kasutame asendust $3x^2+5x+2 = y$. Siis $\sqrt{y+5} > 1+\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y+5 > (1+\sqrt{y})^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ \sqrt{y} < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y < 4. \end{cases}$$



Joon. 4-5

Arvestades tehtud asendust, saame:

$$\begin{cases} 3x^2+5x+2\geqslant 0, \\ 3x^2+5x-2<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)\geqslant 0, \\ 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0. \end{cases}$$

$$L=\left\{x \mid -2<x\leqslant -1 \vee -\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{1}{3}\right\} \quad \text{(vt. joon. 4-5).}$$

Paarituarvulise juurijaga juurest vabanemiseks võib kasutada teisendust:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f^{2k+1}(x)>g^{2k+1}(x), \text{ kui } k\in N.$$

Näide 12. Lahendame võrratuse $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}>\sqrt[3]{2x-5}$.

$$\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}>\sqrt[3]{2x-5} \Leftrightarrow x-2+3\sqrt[3]{(x-2)^2}\sqrt[3]{x-3}+$$

$$+3\sqrt[3]{(x-2)}\sqrt[3]{(x-3)^2}+x-3>2x-5 \Leftrightarrow$$

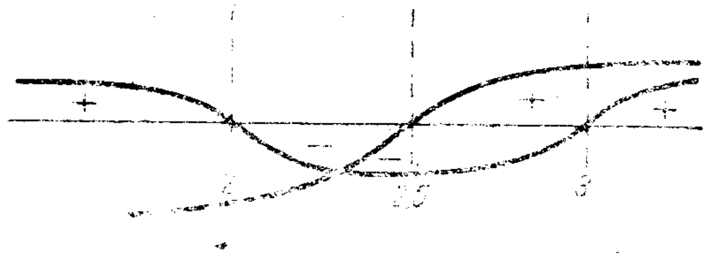
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)>0, \\ \sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}>0, \end{cases} \vee \begin{cases} (x-2)(x-3)<0, \\ \sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}<0. \end{cases}$$

Esimese süsteemi lahendus:

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)>0, \\ (\sqrt[3]{x-2})^3>(-\sqrt[3]{x-3})^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)>0, \\ x-2>-x+3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)>0, \\ 2(x-2{,}5)>0, \end{cases} \Rightarrow L_1=\{x \mid x>3\} \text{ (vt. joon. 4-6).}$$



Joon. 4-6

Teise süsteemi lahend on leitav samalt jooniselt:

$$L_2=\{x \mid 2<x<2{,}5\}.$$

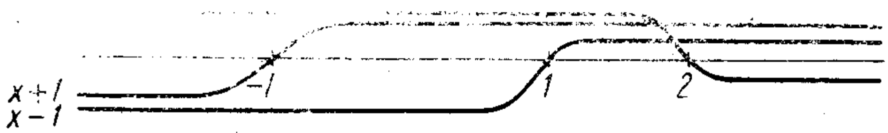
Kokkuvõttes $L=\{x \mid 2<x<2{,}5 \vee x>3\}$.

3. Absoluutväärtustega võrratuste lahendamine.

Ka muutuja absoluutväärtust sisaldavaid võrratusi võime edukalt lahendada intervallmeetodil.

Näide 13. Lahendame võrratuse $|2-x|+2|x-1|>$ $>3|x+1|-1$.

Leiame absoluutväärtuse märkide vahel olevate funktsioonide nullkohad ja kanname need arvteljele (joon. 4-7). Märkinud joonisel nende funktsioonide positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, näeme, et igas nullkohtadega määratud vahemikus tuleb meil lahendada omaette võrratus.



Joon. 4-7

1. Kui $x<-1$, siis $2-x>0$, $x-1<0$ ja $x+1<0$; absoluutväärtuse definitsiooni rakendades saame võrratuse

$$(2-x)+2(1-x)>3(-x-1)-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-x+2-2x>-3x-3-1 \Rightarrow 0>-8.$$

Viimase võrratuse tõesusest järeldub, et võrratus on rahuldatud kõigi x väärtuste korral, mis rahuldavad eeltingimust $x<-1$. Järelikult $L_1=\{x \mid x<-1\}$.

2. Kui $-1 \leqslant x < 1$, siis saame võrratuse $(2-x)+2(1-x) > 3(x+1)-1 \Leftrightarrow 2-x+2-2x > 3x+3-1 \Leftrightarrow 6x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$. Järelikult $L_2 = \left\{x \mid -1 \leqslant x < \frac{1}{3}\right\}$.

3. Kui $1 \leqslant x < 2$, siis $(2-x)+2(x-1) > 3(x+1)-1 \Leftrightarrow 2-x+2x-2 > 3x+3-1 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$. Et tulemus on eeltingimusega vastuolus, siis selles vahemikus lahend puudub.

4. Kui $x \geqslant 2$, siis $(x-2)+2(x-1) > 3(x+1)-1 \Leftrightarrow x-2+2x-2 > 3x+3-1 \Rightarrow 0 > 6$, mis on väär ja seega puudub ka selles vahemikus lahend.

Vastus: $L = \left\{x \mid x < \frac{1}{3}\right\}$.

Näide 14. Lahendame võrratuse $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}} < \sqrt{x^2}-2$.

Et $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ ja $\sqrt{x^2} = |x|$, siis saame võrratuse $\frac{x-2}{|x-2|} < |x|-2$.

1. Kui $x < 0$, siis $\frac{x-2}{2-x} < -x-2$, mille lahendamisel saame $L_1 = \{x \mid x < -1\}$.

2. Kui $0 \leqslant x < 2$, siis $\frac{x-2}{2-x} < x-2$, mille lahendamisel saame $L_2 = \{x \mid 1 < x < 2\}$.

3. Kui $x > 2$ ($x=2$ ei kuulu võrratuse määramispiirkonda), siis $\frac{x-2}{x-2} < x-2$ ja $L_3 = \{x \mid x > 3\}$.

Vastus: $L = \{x \mid x < -1 \vee 1 < x < 2 \vee x > 3\}$.

4. Parameetreid sisaldavate võrratuste lahendamine.

Parameetreid sisaldava võrratuse lahendamisel tuleb nagu parameetrilise võrrandi korralgi peale võrratuse ja tema määramispiirkonna poolt esitatud tingimuste veel võtta arvesse parameetri (või parameetrite) kõigi lubatud väärtuste hulk.

Näiteks võrratuses $ax > 3$ võib parameeter a olla mis tahes reaalarv. Kui $a=0$, siis võrratusel lahend puudub. Kui $a \neq 0$, siis võrratuse lahendamiseks jagame võrratust arvuga a. Kui $a>0$, siis $x>\frac{3}{a}$; kui $a<0$, siis $x<\frac{3}{a}$.

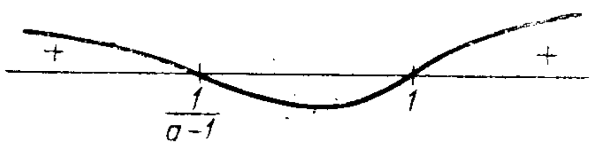
N ä i d e 15. Lahendame võrratuse $(a-1)x^2-ax+1>0$.

1. Kui $a=1$, siis $-x+1>0 \Leftrightarrow x<1$. Järelikult $L=\{x \mid x<1\}$.

2. Kui $a \neq 1$, siis võrratuse vasaku poole nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi $(a-1)x^2-ax+1=0$.

$x=\frac{a \pm \sqrt{a^2-4(a-1)}}{2(a-1)}=\frac{a \pm |a-2|}{2(a-1)}$. Siit selgub, et võrratus tuleb lahendada eraldi igas arvuhulgas, milleks parameetri väärtused $a=1$ ja $a=2$ reaalarvude hulga jaotavad.

a) Kui $a \geqslant 2$, siis $x=\frac{a \pm (a-2)}{2(a-1)} \Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{1}{a-1}$. Et $a \geqslant 2$, siis $\frac{1}{a-1} \leqslant 1$. Märgime nullkohtade asukohad arvteljel ja kasutame võrratuse lahendi leidmiseks intervallmeetodit (vt. joon. 4-8) $L=\left\{x \mid x<\frac{1}{a-1} \vee x>1\right\}$.

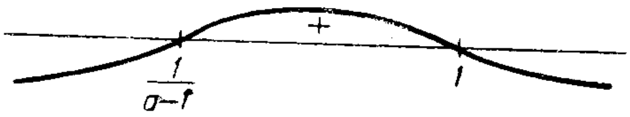


Joon. 4-8

b) Kui $1<a<2$, siis $x=\frac{a \pm (2-a)}{2(a-1)} \Leftrightarrow x=\frac{1}{a-1} \vee x=1$.

Nüüd on $\frac{1}{a-1}>1$ ja võrratuse lahend $L=\left\{x \mid x<1 \vee x>\frac{1}{a-1}\right\}$ (vt. joon. 4-9).

Joon. 4-9



Joon. 4-10

c) Kui $a<1$, siis nullkoht $x=\frac{1}{a-1}<0$ (teine nullkoht on endiselt $x=1$) ja x^2 kordaja $a-1$ negatiivsuse tõttu saame lahendiks (vt. joon. 4-10) $L=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{a-1}<x<1\right\}$.

Vastus: kui $a<1$, siis $L=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{a-1}<x<1\right\}$,

kui $a=1$, siis $L=\{x|x<1\}$,

kui $1<a<2$, siis $L=\left\{x|x<1 \vee x>\frac{1}{a-1}\right\}$,

kui $a\geqslant 2$, siis $L=\left\{x|x<\frac{1}{a-1} \vee x>1\right\}$.

Näide 16. Lahendame võrratuse $\frac{x}{a+b}-\frac{a}{a-b}>\frac{x}{a-b}-\frac{b}{a+b}$. Kahe parameetri a ja b vahelist seost on antud juhul kõige otstarbekam väljendada nende parameetrite absoluutväärtusi kasutades: kas $|a|>|b|$ või $|a|<|b|$, sest $|a|=|b|$ on välistatud.

Vaatleme neid kahte võimalust eraldi:

1. $|a|>|b|$. Et nüüd on $a^2-b^2>0$, siis algvõrratust selle positiivse avaldisega korrutades jääb võrratusemärk samapidiseks ja

peale elementaarseid lihtsustusi esineb võrratus kujul $2bx < -(a^2+b^2)$. Edasine lahendus sõltub juba b väärtusest.

$a)$ $b>0 \Rightarrow x<-\dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

$b)$ $b<0 \Rightarrow x>-\dfrac{a^2+b^2}{2b}$.

$c)$ $b=0 \Rightarrow 0<-a^2$, mis on väär parameetri a mis tahes reaalarvulise väärtuse korral.

2. $|a|<|b|$. Et nüüd on $a^2-b^2<0$, siis algvõrratuse korrutamisel selle avaldisega ja edasisel lihtsustamisel saame võrratuse $2bx>-(a^2+b^2)$.

$a)$ $b>0 \Rightarrow x>-\dfrac{a^2+b^2}{2b}$,

$b)$ $b<0 \Rightarrow x<-\dfrac{a^2+b^2}{2b}$,

$c)$ $b\neq 0$ (miks?).

Vastus: kui $|a|>|b|$ ja $b>0$ või $|a|<|b|$ ja $b<0$, siis

$$L=\left\{x \mid x<-\frac{a^2+b^2}{2b}\right\};$$

kui $|a|>|b|$ ja $b<0$ või $|a|<|b|$ ja $b>0$, siis

$$L=\left\{x \mid x>-\frac{a^2+b^2}{2b}\right\};$$

kui $|a|=|b|$ või $b=0$, siis $L=\varnothing$.

ÜLESANDED.

Tõestage võrratused.

4-1. $a^4+1\geqslant 2a(a^2-a+1)$.

4-2. $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$.

4-3. $m^6-m^5+m^4+m^2-m+1>0$.

4-4. $a^8+b^8\geqslant\dfrac{1}{128}$, kui $a+b=1$.

4-5. $k(n-(k-1))\geqslant n$, kui $1\leqslant k\leqslant n$.

4-6. $(n!)^2 \geqslant n^n$, kui $n \in N$.

4-7. $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \dfrac{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2}{n}$.

4-8. $m+\dfrac{1}{m} \geqslant 2$, kui $m>0$.

4-9. $\left|\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right| \geqslant 2$, kus $a, b \neq 0$.

4-10. $|a+b| \leqslant 2$, kui $a^2+b^2 \leqslant 2$.

4-11. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, kui $a, b>0$.

4-12. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$, kui $a, b, c>0$.

4-13. $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geqslant 2$.

4-14. $\dfrac{a^2+5}{\sqrt{a^2+4}}>2$.

4-15. $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant \dfrac{ab+ac+bc}{3}$.

4-16. $\sqrt{a}+1 \leqslant a+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, kui $a>0$.

4-17. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}>2$.

4-18. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}>\dfrac{3}{a+b+c}$, kui $a, b, c>0$.

4-19. $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$, kui $a, b, c>0$ ja $a+b+c=1$.

4-20. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$, kui $a, b, c>0$.

4-21. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, kui $a, b, c, d>0$.

4-22. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a+b)^2$, kui $a, b>0$.

4-23. $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$, kui $a_i>0$ ja $n \in N_1$.

4-24. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$, kui $n \in N_1$.

4-25. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant\frac{2n-1}{n}$, kui $n\in N_1$.

4-26. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2{,}75$, kui $n\in N_1$.

4-27. $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)^3$.

4-28. $1{,}001^n>1000$, kui $n>999\,000$.

4-29. $\sqrt[4]{n^2-1}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\leqslant 1$.

4-30. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000}<0{,}001$.

4-31. $2^{\frac{1}{1974}}+2^{-\frac{1}{1974}}>2$.

4-32. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2{,}75$.

4-33. $\sqrt[n]{n!}>\frac{n}{3}$, kui $n\in N_1$.

4-34. Kumb on suurem, kas 1980^{1981} või 1981^{1980}?

4-35. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}\geqslant 2$.

4-36. $\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{a}}<2\sqrt[3]{a}$, kui $a>0$.

Lahendage võrratused.

4-37. $(x-1)^2(x+5)^3(3-x)(2-x)\leqslant 0$.

4-38. $\frac{x^3-3x-2}{x^2-9}\leqslant 0$.

4-39. $\frac{x^3+3x^2-8x-30}{x^2(0{,}5-x)}<0$.

4-40. $\frac{x^2-2x}{x^2-1}\leqslant\frac{2-x}{x^3-x}$.

4-41. $|x-1|-|x+2|<2$.

4-42. $|2-x|-|x-3|+|x+1|<0$.

4-43. $|x^2-3x|+x-2<0$.

4-44. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4-45. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

4-46. $\sqrt{x^2-3x+2}-x-3>0.$

4-47. $\sqrt{x-3}+x-5\geqslant\sqrt{2(x-5)^2+2x-6}.$

4-48. $\sqrt{3x^2-5x-8}>3x+2.$

4-49. $\sqrt{(x-5)(7-x)}+1>\sqrt{7-x}-\sqrt{x-5}.$

4-50. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{x}{2}.$

4-51. $\frac{1-\sqrt{1-2x^2}}{x}\leqslant 1.$

4-52. $\frac{1}{x+1+\sqrt{2}}+\frac{1}{x+1-\sqrt{2}}\leqslant 2.$

4-53. $\frac{|x+2|-x}{\sqrt{4-x^3}}>0.$

4-54. $ax^2-(a-2)x-2<0.$

4-55. $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2.$

4-56. $\sqrt{2(x-\sqrt{x^2-a^2})}>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}.$

4-57. $\sqrt{x+2a}+\sqrt{x+2b}<2\sqrt{x+a+b}.$

4-58. $\frac{x-a}{a}-\frac{x+b}{b}<\frac{x+a}{b}-\frac{x-b}{a}.$

4-59. Leidke võrratuse $\sqrt{y-1}<\sqrt[4]{4-y}$ täisarvulised lahendid.

4-60. Tõestage, et võrrand $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=2$ ei ole naturaalarvuhulgas lahenduv.

4-61. Leidke võrrandi $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=4$ naturaalarvulised lahendid.

V PEATÜKK.

EKSPONENT- JA LOGARITMVÕRRANDID. EKSPONENT- JA LOGARITMVÕRRATUSED.

§ 1. EKSPONENT- JA LOGARITMFUNKTSIOON.

Eksponent- ja logaritmfunktsioonid on teineteise pöördfunktsioonid, mis võimaldab üht neist teise kaudu defineerida. Järgnevas käsitluses põhineme keskkooli õpikutes esitatud eksponent- ja logaritmfunktsioonide definitsioonidele ja omadustele lisades ainult järgmist:

1. Funktsiooni $y=a^x$ võib esitada ka kujul $y=\exp_a x$.
2. Pöördfunktsioonide $y=\exp_a x$ ja $y=\log_a x$ graafikute kõik vastastikused asendid sõltuvalt a väärtusest on esitatud joonistel 5-1 kuni 5-5.
3. Korrutise, jagatise ja astme logaritmimise valemid on õigem esitada kujul

$$\log_a x_1x_2=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,$$

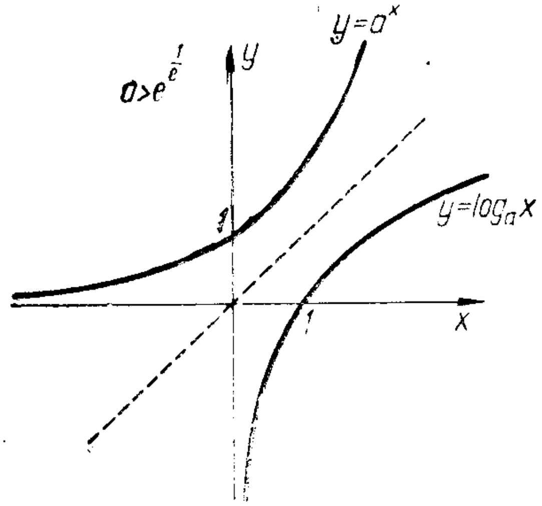
$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|,$$

$$\log_a x^z=z\log_a|x|, \text{ kui } z=2n.$$

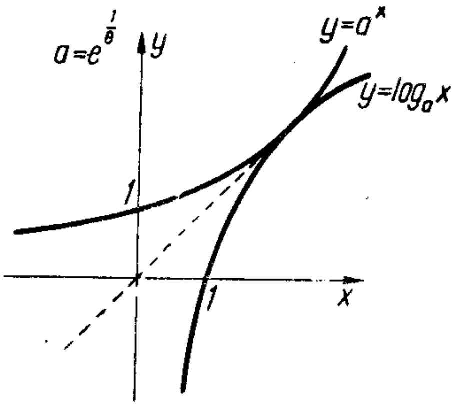
Sellega me väldime näiteks lahendite kaotsiminekut logaritmvõrrandite lahendamisel. Kui võrrandi $\log x^2=2$ lahendamisel kasutada valemit $\log_a x^z=z\log_a x$, siis saame $2\log x=2 \Leftrightarrow \log x=1 \Leftrightarrow x=10$. Ilmselt rahuldab antud võrrandit ka $x=-10$, mille me ka leiame võrrandi korrektsel lahendamisel: $\log x^2=2 \Leftrightarrow 2\log|x|=2 \Leftrightarrow \log|x|=1 \Leftrightarrow |x|=10 \Leftrightarrow x=10 \vee \vee x=-10$.

Logaritme sisaldavate avaldiste teisendamisel leiavad kõige rohkem kasutamist logaritmi definitsioon $a^{\log_a b}=b$ $(a, b>0$ ja $a\neq 1)$ ning ühelt aluselt teisele ülemineku valem

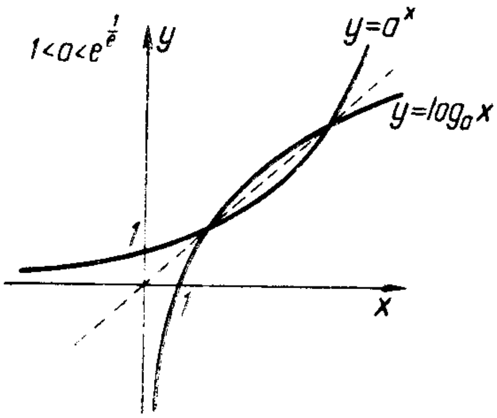
$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$



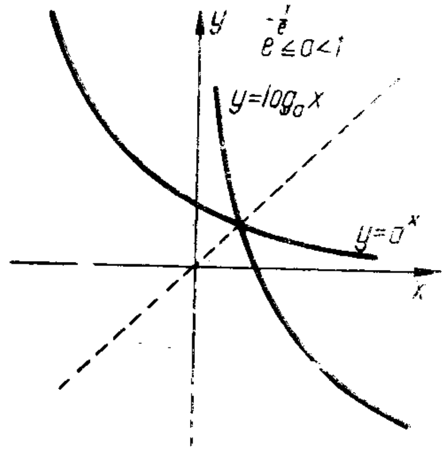
Joon. 5-1



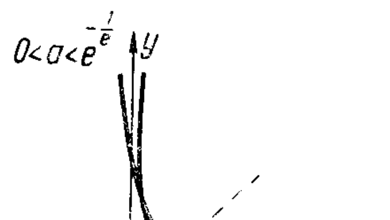
Joon. 5-2



Joon. 5-3



Joon. 5-4



Joon. 5-5

N ä i d e 1. Tõestame, et $a)$ $\log_a b \cdot \log_b a = 1$,

$b)$ $\log_{a^k} b = \dfrac{\log_a b}{k}$,

$c)$ $\log_{na} b = \dfrac{\log_a b}{1+\log_a n}$.

$a)$ $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$,

$b)$ $\log_{a^k} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a a^k} = \dfrac{\log_a b}{k}$,

$c)$ $\log_{na} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a (na)} = \dfrac{\log_a b}{\log_a n+1} = \dfrac{\log_a b}{1+\log_a n}$.

N ä i d e 2. Arvutame $a)$ $\log_2 3 \cdot \log_9 16$;

$b)$ $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_9 10$;

$c)$ $\dfrac{4^{\log 12}}{12^{\log 4}}$.

$a)$ $\log_2 3 \cdot \log_9 16 = \dfrac{1}{\log_3 2} \cdot \dfrac{\log_3 16}{2} = \dfrac{4 \log_3 2}{2 \log_3 2} = 2$;

$b)$ $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_9 10 =$

$$= \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \ldots \frac{\log 10}{\log 9} = \frac{1}{\log 2} \approx 3{,}32,$$

$c)$ $\dfrac{4^{\log 12}}{12^{\log 4}} = \dfrac{(10^{\log 4})^{\log 12}}{(10^{\log 12})^{\log 4}} = 1$.

N ä i d e 3. Tõestame, et $n^2 = (kn)^{\log_k m}$, kui $\log_k x$, $\log_m x$ ja $\log_n x$ moodustavad aritmeetilise jada.

Aritmeetilise jada omaduse põhjal $\log_k x + \log_n x = 2 \log_m x$. Viime kõik need logaritmid alusele k:

$$\log_k x + \frac{\log_k x}{\log_k n} - \frac{2 \log_k x}{\log_k m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_k x \left(1 + \frac{1}{\log_k n} - \frac{2}{\log_k m}\right) = 0.$$

Et $\log_k x \neq 0$, siis $1+\frac{1}{\log_k n}-\frac{2}{\log_k m}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_k n \cdot \log_k m+\log_k m-2\log_k n}{\log_k n \cdot \log_k m}=0 \Leftrightarrow \log_k n \cdot \log_k m=$$

$$=2\log_k n-\log_k m \Leftrightarrow \log_k (n^{\log_k m})=\log_k \frac{n^2}{m} \Leftrightarrow n^{\log_k m}=\frac{n^2}{m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2=mn^{\log_k m} \Leftrightarrow n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

N ä i d e 4. Avaldame *a*) $\log_9 32$, kui $\log_{18} 2=m$;

b) $\log_{abc} m$, kui $\log_a m=p$, $\log_b m=q$ ja $\log_c m=r$.

a) $\log_9 32=5\log_9 2=\frac{5\log_{18} 2}{\log_{18} 9}=\frac{5\log_{18} 2}{\log_{18}\frac{18}{2}}=$

$$=\frac{5\log_{18} 2}{1-\log_{18} 2}=\frac{5m}{1-m}.$$

b) Et $\log_m abc=\log_m a+\log_m b+\log_m c=$

$$=\frac{1}{\log_a m}+\frac{1}{\log_b m}+\frac{1}{\log_c m}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=$$

$$=\frac{pq+qr+pr}{pqr}, \text{ siis } \log_{abc} m=\frac{pqr}{pq+qr+pr}.$$

§ 2. EKSPONENT- JA LOGARITMVÕRRAND.

Täisarvuliste kordajatega algebralise võrrandi lahenditeks olevaid arve nimetatakse **algebralisteks arvudeks**. Peale ratsionaalarvude kuulub algebraliste arvude hulka ka osa irratsionaalarve. Irratsionaalarve, mis pole algebralised, nimetatakse **transtsendentseteks**. Sellisteks arvudeks on näiteks π; e; 0,525225222... jt. Võrrandeid, mille lahendite hulka võivad kuuluda ka transtsendentsed arvud, nimetatakse transtsendentseteks võrranditeks. Eksponent- ja logaritmvõrrandid kuuluvad transtsendentsete võrrandite hulka. Üldjuhul transtsendentsed võrrandid pole lahendatavad elementaarmatemaatika meetoditega (näiteks võrrand $3^x=9x$). Koolikursuses (samuti käesolevas peatükis) vaadeldakse vaid nende võrrandite mõningate erijuhtude lahendamist.

Kõige sagedamini püütakse lahendamisel antud võrrand teisendada lihtsaimaks eksponentvõrrandiks $a^x=b,\ 0<a\neq 1 \Rightarrow x=$ $=\log_a b,\ b>0$ või
lihtsaimaks logaritmvõrrandiks

$$\log_a x=b,\ 0<a\neq 1 \Rightarrow x=a^b.$$

Võrrandite teisendamisel kasutatakse logaritmimist, potentseerimist, logaritmilist põhisamasust, üleminekut uuele logaritmi alusele ning korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi omadusi. Kuna nimetatud teisenduste tulemusena võib võrrandi määramispiirkond muutuda, siis tuleb lahendamisel olla eriti tähelepanelik, et lahendid ei läheks kaotsi ega tekiks võõrlahendeid. Kui võrrandi määramispiirkond kitseneb (näiteks logaritmimisel), siis on vaja selgitada, kas need muutuja väärtused, mis ei kuulu enam tuletatud võrrandi määramispiirkonda, pole esialgse võrrandi lahendeiks; määramispiirkonna laienemise korral (näit. potentseerimisel) on aga tingimata vaja leitud lahendeid kontrollida, et eraldada võõrlahendid.

Eksponent- ja logaritmvõrrandite lahendamisel kasutatakse sagedamini allpool esitatud teisendusi.

1. Kui $0<a\neq 1$, siis võrrand $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ on samaväärne võrrandiga $f(x)=g(x)$.

Näide 5. Lahendame võrrandi $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.
Läheme üle alusele 2:

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}}=2^{\frac{7(x+17)}{x-3}-2} \Leftrightarrow \frac{5(x+5)}{x-7}=\frac{7(x+17)}{x-3}-2.$$

Vastus: $L=\{10\}$.

2. Kui $0<g(x)\neq 1$, siis võrrand $[g(x)]^{f(x)}=[g(x)]^{\varphi(x)}$ on samaväärne võrrandiga $f(x)=\varphi(x)$.

Näide 6. Lahendame võrrandi $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$.

$$x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}}=x^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{x}{2},\ 0<x\neq 1.$$

Vastus: $L=\{4\}$.

Kuigi võrdus $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$ on tõene ka $x=1$ korral, ei loe me arvu 1 võrrandi lahendiks, sest eksponentfunktsioon on defineeritud tingimusel, et alus ei oleks võrdne ühega.

3. Võrrand $[g_1(x)]^{f(x)}=[g_2(x)]^{f(x)}$ on samaväärne disjunktsiooniga

$$\begin{cases} g_1(x)=g_2(x), \\ 0<g_1(x)\neq 1, \\ 0<g_2(x)\neq 1, \\ f(x)\in R, \end{cases} \vee \begin{cases} f(x)=0, \\ 0<g_1(x)\neq 1, \\ 0<g_2(x)\neq 1. \end{cases}$$

Näide 7. Lahendame võrrandi $(3x-5)^{\sqrt{x^2-3}}=$

$=(x^2-3x+3)^{\sqrt{x^2-3}}$.

Antud võrrand on samaväärne disjunktsiooniga

$$\begin{cases} 3x-5=x^2-3x+3, \\ 0<3x-5\neq 1, \\ 0<x^2-3x+3\neq 1, \\ x^2-3\geqslant 0, \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x^2-3}=0, \\ 0<3x-5\neq 1, \\ 0<x^2-3x+3\neq 1. \end{cases}$$

Vastus: $L=\{\sqrt{3};\ 4\}$.

4. Kui $0<a\neq 1$ ja $f(x)>0$, $g(x)>0$, siis võrrand $f(x)=g(x)$ on samaväärne võrrandiga $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Näide 8. Lahendame võrrandi $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\sqrt[x]{0{,}125}}}=4\sqrt[3]{2}$.

Logaritmime alusel kaks. Kuna kõik käesolevas punktis esitatud tingimused on täidetud (lisaks nõuame veel, et $x\in N\wedge$ $\wedge\, x\geqslant 2$), siis saame esialgsega samaväärse võrrandi $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-$ $-\frac{1}{2x}=2+\frac{1}{3}\Rightarrow L=\{3\}$.

5. Võrrand $\log_{g(x)} f_1(x) = \log_{g(x)} f_2(x)$ on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x), \\ f_1(x) > 0, \\ f_2(x) > 0, \\ 0 < g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Näide 9. Lahendame võrrandi $\log_x \sqrt{5x} = -\log_x 5$.

$$\log_x \sqrt{5x} = -\log_x 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x} = \frac{1}{5}, \\ \sqrt{5x} > 0, \\ 0 < x \neq 1. \end{cases}$$

Vastus: $L = \left\{\frac{1}{125}\right\}$.

6. Võrrand $g(x)^{\log_{g(x)} f(x)} = \varphi(x)$ on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \\ 0 < g(x) \neq 1. \end{cases}$$

Näide 10. Lahendame võrrandi $(0{,}1)^{-[\log(x+2)+2-\log 20]} = 2(x+6)$.

Antud võrrandi esitame kujul

$$10^{\log 5(x+2)} = 2(x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+2) = 2(x+6), \\ 5(x+2) > 0. \end{cases}$$

Vastus: $L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Vaatleme veel mõnede eksponent- ja logaritmvõrrandite lahendamisel kasutatavaid võtteid.

Näide 11. Lahendame võrrandi $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Jagame võrrandi pooled 2^x-ga, saame:

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Paneme tähele, et $0<\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{2}<1$ ja $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2}.$$ Seega leidub niisugune nurk α, et

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ja $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Saame võrrandi

$(\sin\alpha)^x+(\cos\alpha)^x=1$. Viimane võrdus kehtib vaid juhul, kui $x=2$, sest kui $x>2$, siis $(\sin\alpha)^x<\sin^2\alpha$ ja $(\cos\alpha)^x<\cos^2\alpha$ ning kui $x<2$, siis $(\sin\alpha)^x>\sin^2\alpha$ ja $(\cos\alpha)^x>\cos^2\alpha$. Eksponentfunktsioonid $(\sin\alpha)^x$ ja $(\cos\alpha)^x$ on kahanevad funktsioonid.

Näide 12. Lahendame võrrandi $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Kuigi võrrand on eelmisega kujult sarnane, ei lahendu ta näites 11 kasutatud võttega. Selle võrrandi lahendamiseks paneme tähele, et $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$. $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ja $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ on teineteise pöördarvud. Olgu $\sqrt{2-\sqrt{3}}=u$, siis $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{u}$.

$u^x+\left(\frac{1}{u}\right)^x=4 \Leftrightarrow u^{2x}-4u^x+1=0 \Leftrightarrow u^x=2\pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1=-2$, $x_2=2$. $L=\{-2;\ 2\}$.

Näide 13. Lahendame võrrandi $5^{\log x}=50-x^{\log 5}$.

Seose $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ põhjal $5^{\log x}=x^{\log 5}$. Saame võrrandi $2\cdot 5^{\log x}=50 \Leftrightarrow \log x=2 \Leftrightarrow x=100$. $L=\{100\}$.

Näide 14. Lahendame võrrandi $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$.

Logaritmime võrrandi pooli alusel $|x-3|$. Arvestame, et $(x-3)^2=|x-3|^2$.

$\log_{|x-3|}|x-3|^{x^2-x}=\log_{|x-3|}|x-3|^2$, millest $x^2-x=2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=2$. Kuna alus $|x-3|\neq 1$, siis $L=\{-1\}$.

N ä i d e 15. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} xy=a^2, \\ \log^2 x+\log^2 y=2{,}5\log^2(a^2), \quad a<0. \end{cases}$$

Võrrandite määramispiirkonnaks on $x>0$, $y>0$. Logaritmime esimese võrrandi pooled: $\log x+\log y=\log(a^2)$. Olgu $\log x=u$, $\log y=v$ ja $\log a^2=m$, siis

$$\begin{cases} u+v=m, \\ u^2+v^2=2{,}5m^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\frac{3}{2}m, \\ v=-\frac{1}{2}m, \end{cases} \vee \begin{cases} u=-\frac{1}{2}m, \\ v=\frac{3}{2}m, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x=3\log(-a), \\ \log y=-\log(-a), \end{cases} \vee \begin{cases} \log x=-\log(-a), \\ \log y=3\log(-a). \end{cases}$$

Vastus: $L=\left\{\left(-a^3;\ -\frac{1}{a}\right);\ \left(-\frac{1}{a};\ -a^3\right)\right\}$.

§ 3. EKSPONENT- JA LOGARITMVÕRRATUS.

Eksponentvõrratuste lahendamisel tuleb sageli võrratuse erinevaid pooli logaritmida. Seejuures võib kasutada järgmisi teisendusi:

1) Kui $f(x)>0$ ja $\varphi(x)>0$, siis $f(x)>\varphi(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ \log_a f(x)>\log_a \varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} 0<a<1, \\ \log_a f(x)<\log_a \varphi(x). \end{cases}$$

2) Kui $f(x)<0$ ja $\varphi(x)<0$, siis $f(x)>\varphi(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>1, \\ \log_a(-f(x))<\log_a(-\varphi(x)), \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} 0<a<1, \\ \log_a(-f(x))>\log_a(-\varphi(x)). \end{cases}$$

3) Kui $f(x)\geqslant 0$ ja $\varphi(x)<0$ või $f(x)>0$ ja $\varphi(x)=0$, siis $f(x)>$ $>\varphi(x)$ on tõene kogu võrratuse määramispiirkonnas.

4) Kui $f(x)\leqslant 0$ ja $\varphi(x)\geqslant 0$, siis $f(x)>\varphi(x)$ on väär kogu võrratuse määramispiirkonnas.

Näide 16. Lahendame võrratuse $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25$.

Et $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 0$ ja $25 > 0$, siis $\log_5 0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > \log_5 25 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x^2-1} > 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x^2-1} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow 3x^2(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) < 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Vastus: $L = \{x \mid -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$.

Näide 17. Lahendame võrratuse $(4^x - 4 \cdot 2^x - 5)(2{,}5^x - 25)^2 < 0$.

Antud võrratus on samaväärne võrratusesüsteemiga

$$\begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 < 0, \\ 2 \cdot 5^x - 25 \neq 0. \end{cases}$$

Võrratuse $2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 < 0$ vasakut poolt võib vaadelda ruutfunktsioonina $y^2 - 4y - 5$, kus $y = 2^x$, ja seejärel lahutada tegureiks $(y-5)(y+1)$. Niisiis $2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 < 0 \Leftrightarrow (2^x - 5) \times \times (2^x + 1) < 0 \Leftrightarrow 2^x - 5 < 0$, sest $2^x + 1 > 0$. Võrratuse $2^x < 5$ mõlemad pooled on positiivsed ja seetõttu $\log_2 2^x < \log_2 5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x < \log_2 5$. Teisest tingimusest $2 \cdot 5^x - 25 \neq 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x \neq 5^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_5(2 \cdot 5^x) \neq \log_5(5^2) \Leftrightarrow \log_5 2 + x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 2 - \log_5 2$. Et $\log_2 5 > 2 - \log_5 2$ (miks?), siis antud võrratuse lahend $L = \{x \mid x < \log_2 5 \wedge x \neq 2 - \log_5 2\}$.

Võrratuse $[f(x)]^{g(x)} > [f(x)]^{\varphi(x)}$ lahendamiseks asendame ta kahe võrratusesüsteemi disjunktsiooniga

$$\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > \varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) < \varphi(x). \end{cases}$$

Näide 18. Lahendame võrratuse $(x-3)^{2x-5} < 1$.

$$(x-3)^{2x-5} < 1 \Leftrightarrow (x-3)^{2x-5} < (x-3)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 1, \\ 2x-5 < 0, \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} 0 < x-3 < 1, \\ 2x-5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < 2{,}5, \end{cases} \vee \begin{cases} 3 < x < 4, \\ x > 2{,}5. \end{cases}$$

Et esimene süsteem on vastuoluline, siis lahendi saame teisest süsteemist.

Vastus: $L=\{x|3<x<4\}$.

Logaritmvõrratuse lahendamisel tuleb võrratuse erinevaid pooli potentseerida, milleks saab kasutada järgmist teisendust:

$$\log_{g(x)} f(x) > \log_{g(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ g(x)>1, \\ f(x)>\varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ 0<g(x)<1, \\ f(x)<\varphi(x). \end{cases}$$

N ä i d e 19. Lahendame võrratuse $\log_{x^2}(3-2x)<1$.

$$\log_{x^2}(3-2x)<1 \Leftrightarrow \log_{x^2}(3-2x)<\log_{x^2} x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x>0, \\ x^2>1, \\ 3-2x<x^2, \end{cases} \vee \begin{cases} 3-2x>0, \\ 0<x^2<1, \\ 3-2x>x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3-2x>0, \\ x^2>1, \\ 3-2x<x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1,5<0, \\ (x-1)(x+1)>0, \\ (x-1)(x+3)>0. \end{cases}$$

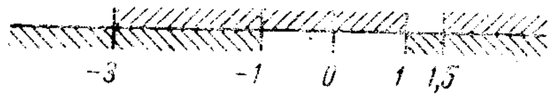
$L_1=\{x|x<-3 \vee 1<x<1,5\}$.

$$\begin{cases} 3-2x>0, \\ 0<x^2<1, \\ 3-2x>x^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1,5<0, \\ x^2-1<0, \\ x\neq 0, \\ (x-1)(x+3)<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1,5<0, \\ (x-1)(x+1)<0, \\ x\neq 0, \\ (x-1)(x+3)<0. \end{cases}$$

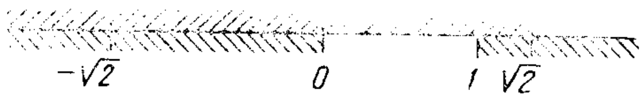
$L_2=\{x|-1<x<0 \vee 0<x<1\}$.

Vastus: $L=L_1 \cup L_2=\{x|x<-3 \vee -1<x<0 \vee 0<x<1 \vee$ $\vee 1<x<1,5\}$.

Joonisel 5-6 on arvteljest ülalpool kujutatud esimese süsteemi ja allpool teise süsteemi lahend. Nende lahendite ühendi saame, kui kõrvaldame need hulgad, mis on kahepoolselt viirutatud.



Joon. 5-6



Joon. 5-7

N ä i d e 20. Lahendame võrratuse $\log_x|x^2-1|>0$.

Et $\log_x 1=0$, siis võib võrratuse esitada kujul $\log_x|x^2-1|>$ $>\log_x 1$.

$$1.\ \begin{cases} x>1, \\ |x^2-1|>1, \\ x^2-1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2-1>1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})>0. \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} 0<x<1, \\ |x^2-1|<1, \\ x^2-1<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ 1-x^2<1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1, \\ x^2>0, \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$$

Vastuse leiame jooniselt 5-7. $L=\{x|0<x<1 \vee x>\sqrt{2}\}$.

ÜLESANDED.

5-1. Tõestage, et $\log_p a\cdot\log_q a+\log_q a\cdot\log_r a+\log_r a\cdot\log_p a=$
$$=\frac{\log_p a\cdot\log_q a\cdot\log_r a}{\log_{pqr} a}.$$

5-2. Teades, et $\log_a n=b$, leidke $\log_{a^{k+1}} na^k$.

5-3. Teades, et $\log_a k=c$, leidke
$$\frac{1}{\log_k a}+\frac{1}{\log_{k^2} a}+\frac{1}{\log_{k^3} a}+\ldots+\frac{1}{\log_{k^n} a}.$$

5-4. Tõestage, et $\frac{1}{1+\log_{1977!}1978}=1-\log_{1978!}1978$.

5-5. Leidke suuruste x ja y kõik positiivsed reaalarvulised väärtused, mis rahuldavad võrdust

$$\frac{\log_2 y \cdot \log_x y}{(\log_{2x} y)^2} = 4{,}5.$$

5-6. Tõestage, et $\log_{a^n} b^n = log_a b$.

5-7. Leidke $\log_{14} 8$, kui $\log_{49} 16 = m$.

5-8. Arvutage $\log_3 8 \cdot \log_{16} 3$.

5-9. Kumb on suurem, kas $\log_{\frac{1}{27}} 343$ või $\log_3 \frac{1}{7}$?

5-10. Leidke $\log_9 20$, kui $\log_4 15 = a$ ja $\log_2 3\sqrt{5} = b$.

5-11. Leidke $\log_{35} 28$, kui $\log_{14} 7 = a$ ja $\log_{14} 5 = b$.

5-12. Mitu lahendit on võrrandil $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$? Leidke need.

5-13. Kas võrrandid on samaväärsed reaalarvude hulgas?

a) $f(x) = 0$ ja $f(x) \cdot a^{g(x)} = 0$,

b) $\log x^2 = 0$ ja $2 \log x = 0$,

c) $\log x^2 = 0$ ja $2 \log |x| = 0$,

d) $\log x^5 = 0$ ja $5 \log x = 0$,

e) $\log \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ja $\log f(x) - \log g(x) = 0$.

Lahendage võrrandid.

5-14. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = (2\sqrt{2})^x$.

5-15. $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 62$.

5-16. $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

5-17. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

5-18. $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

5-19. $|x-1|^{\log^2 x-\log x^2}=|x-1|^3.$

5-20. $\sqrt{\log_5 x}+\sqrt[3]{\log_5 x}=2.$

5-21. $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\ldots\log_n(n+1)=10.$

5-22. $\log_{x+3}(3-\sqrt{1-2x+x^2})=\frac{1}{2}.$

5-23. $\log_2\log_3(x^2-16)-\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-16}=2.$

5-24. $\log_2(2a-x)+\log_2\sqrt{x}=\log_2(a^2-1).$

5-25. $\log_{\sqrt{x}} a\log_{a^2}\frac{a^2-4}{2a-x}=1.$

5-26. $a^{\frac{2}{x}}+b^{\frac{2}{x}}=m(ab)^{\frac{1}{x}},\ ab>0,\ a\neq b.$

5-27. $\log 2x+\log(2-x)=\log\log p.$

5-28. Leidke võrrandi $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=8\log_{x+12}x$ täisarvulised lahendid.

Lahendage võrrandisüsteemid.

5-29. $\begin{cases}\log_5 x+\log_{25} x=1,\\ 7^{\log_7\sqrt{y}}+x^2=10.\end{cases}$

5-30. $\begin{cases}x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^{\frac{8}{3}},\\ y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=x^{\frac{2}{3}}.\end{cases}$

5-31. $\begin{cases}x^b=y^c,\\ \log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}.\end{cases}$

Tõestage võrratused.

5-32. $\log(n+1)>\frac{\log 1+\log 2+\ldots+\log n}{n}$, kui $n\in N_1$.

5-33. $\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4>5.$

5-34. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}+\frac{1}{\log_{10}\pi}>4.$

5-35. $\frac{1}{m}\log(1+a^m)<\frac{1}{n}\log(1+a^n)$, kui $m>n>0$, $m, n\in N_1$ ja $a>0$.

Lahendage võrratused.

5-36. $2^{\frac{x^2-1}{x+2}}<0{,}5$.

5-37. $0{,}25^{|x-3|}>0{,}125^{|x+1|}$.

5-38. $(0{,}5x)^{x^2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^x>\frac{x^2}{4}$.

5-39. $|x|^{3+5x-2x^2}<1$.

5-40. $|x-1|^x>|x-1|^{x^2}$.

5-41. $\log_{1-x}x>1$.

5-42. $\sqrt{1-\log_3(x^2-4x+5)}<1+\log_3(x^2-4x+5)$.

5-43. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot(\log_2^2 x+\log_2^2 0{,}5)>1$.

5-44. $\frac{\log_2(x^2-3x-4)}{\log_2(x+17)}\leqslant 1$.

5-45. $\log_a x>\sqrt{(1+2\log_x a)\log_a x}$.

VI PEATÜKK.

VASTUSED, NÄPUNÄITED JA LAHENDUSED.

1-1. $3p+4=a^2 \Leftrightarrow 3p=(a+2)(a-2) \Rightarrow a+2=3 \vee a-2=3$. Antud juhul $a-2=3$ (miks?).

Vastus: $a=5$, $p=7$.

1-2. Tõestage esmalt, et iga täisarvu ruut annab 4-ga jagamisel jäägiks kas 0 või 1. Siis $n^2\equiv 0 \pmod 4$ või $n^2\equiv 1 \pmod 4$. Järelikult $3n^2\equiv 0 \pmod 4$ või $3n^2\equiv 3 \pmod 4$ ja $3n^2-1\equiv$ $\equiv -1 \pmod 4$ või $3n^2-1\equiv 2 \pmod 4$. Et $3n^2-1$ jagamisel 4-ga ei ole jääk ei 0 ega 1, siis $3n^2-1$ ei ole täisarvu ruut.

1-3. Oletame, et leidub $x\in N$ nii, et $x(x+1)=121n-3$, millest $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+484n-12}}{2}$. $484n-11=11(44n-1)$ peab olema täisarvu ruut, s. t. $44n-1=11t^2 \Leftrightarrow n=\dfrac{11t^2+1}{44}$.
Et n on täisarv, siis peab $11t^2+1 \vdots 44$, milleks on vajalik, et t oleks paaritu arv $t=2k+1$, siis aga $n=k^2+k+\dfrac{3}{11}$, mis on vastuolus eeldusega.

1-4. Kasutades kongruentsi $4\equiv -3 \pmod 7$ ja teoreemi 1.7. järeldust 1 saab tõestada, et n peab olema paarisarv.

1-5. $10\equiv 3 \pmod 7$, $10^2\equiv 2 \pmod 7$, $10^3\equiv -1 \pmod 7$, $10^4\equiv$ $\equiv -3 \pmod 7$, $10^5\equiv -2 \pmod 7$, $10^6\equiv 1 \pmod 7$. Järgnevad jäägid korduvad 3-st alates. Järelikult näiteks 37 443 jagub 7-ga, sest $3\cdot(-3)+7\cdot(-1)+4\cdot 2+4\cdot 3+3=-7\equiv$ $\equiv 0 \pmod 7$. Seitsmekohaline arv $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ jagub 7-ga, kui $a_6-2a_5-3a_4-a_3+2a_2+3a_1+a_0\equiv 0 \pmod 7$.

1-6. Piisab, kui näitate, et $17^{11}\cdot 11^{17}-1\equiv 8 \pmod{10}$, sest ühegi täisarvu ruut ei lõpe 8-ga.

1-7. Et $3^{4k+1}\equiv 3 \pmod{10}$, siis antud astme väärtuseks olev arv lõpeb 3-ga.

1-8. Lähtuge kongruentsidest $3^5\equiv 43 \pmod{100}$ ja $7^3\equiv$ $\equiv 43 \pmod{100}$.

1-10. $2345\equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 2345^{10}\equiv 2^{10}\equiv 1 \pmod{11}$ jne.

1-11. Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit.

1) Väide on õige, kui $n=0$ (kontrollige!).

2) Oletame, et väide on õige ka siis, kui $n=k>0$, s.t. $11^{k+2}+12^{2k+1}$ jagub 133-ga.

3) Näitame, et väide on siis õige ka $n=k+1$ korral: $11^{k+3}+$ $+12^{2k+3}=11\cdot 11^{k+2}+144\cdot 12^{2k+1}=11\cdot(11^{k+2}+12^{2k+1})+$ $+133\cdot 12^{2k+1}$. Et siin mõlemad liidetavad jaguvad 133-ga, siis ka summa jagub sama arvuga.

Kongruentse kasutades on lahendus veelgi lihtsam: $11^{n+2}+12^{2n+1}=11^{n+2}+144^n\cdot 11+144^n\equiv 11^{n+2}+11^{n+1}+$ $+11^n \pmod{133}\equiv 11^n\cdot 133\equiv 0 \pmod{133}$.

1-12. *Vastus:* $n\equiv 3 \pmod 7$ või $n\equiv -1 \pmod 7$.

1-13. $1^5\equiv 1 \pmod{21}$, $2^5\equiv 2^5 \pmod{21}$, ..., $10^5\equiv 10^5 \pmod{21}$, $11^5\equiv(-10)^5\equiv -10^5 \pmod{21}$, ..., $19^5\equiv -2^5 \pmod{21}$, $20^5\equiv -1^5 \pmod{21}$. Seega $\sum_{k=1}^{20} k^5\equiv 0 \pmod{21}$.

1-14. Lähtuge kongruentsidest $4^2\equiv 1 \pmod 5$ ja $3^4\equiv 1 \pmod 5$.

1-16. Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit.

1) Väide on õige, kui $n=0$ (kontrollige!).

2) Oletame, et $2^{3^n}+1$ jagub arvuga 3^{n+1} mingi kindla $n=k-1>0$ korral: $2^{3^{k-1}} \vdots\, 3^k$.

3) Tõestame, et siis ka $2^{3^k} \vdots\, 3^{k+1}$:

$2^{3^k}+1=(2^{3^{k-1}})^3+1=(2^{3^{k-1}}+1)(4^{3^{k-1}}-2^{3^{k-1}}+1)$.

Eelduse kohaselt esimene tegur jagub arvuga 3^k. Teise teguri jaguvust arvuga 3 näidake kongruentse kasutades.

1-17. Kasutage asjaolu, et mooduli 6 suhtes on need algarvud kongruentsed kas 1 või -1-ga.

1-18. *Vastus:* $p=3$, $q=2$.

1-19. Kui $a=3$, siis $2a^2+1=19$, mis on algarv. Kui $a\neq 3$ ja on algarv, siis $a\equiv\pm 1 \pmod 3 \Rightarrow a^2\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2a^2+1\equiv$ $\equiv 0 \pmod 3$. Järelikult $a=3$ on ainuke algarv, mille korral $2a^2+1$ on algarv.

Vastus: $a=3$.

1-20. $a\equiv 15n-1 \pmod{31}$. Kui $a \vdots 31$, siis $15n-1\equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow$ $\Rightarrow n\equiv 29 \pmod{31}$. a on vähim, kui n on vähim naturaalarv, mis jagamisel 31-ga annab jäägi 29.
Vastus: $n=29$, $a=900\,333$.

1-21. $n^2+4n-21\equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow n^2+4n+4\equiv 25 \pmod{17} \Rightarrow n+$ $+2\equiv\pm 5 \pmod{17} \Rightarrow n=17k+3 \vee n=17k-7$.

Vastus: $\{3;\ 10;\ 20;\ 27;\ 37;\ 44;\ 54\}$.

1-22. Lahutage antud avaldis tegureiks ja näidake, et kui $p\neq 3$, siis avaldis jagub 9-ga. Samuti saate näidata, et see avaldis jagub 5-ga, kui $p\neq 5$.

1-23. $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1^n+2^n+(-2)^n+(-1)^n \pmod 5$.
Vaadake kaht juhtu: 1) $n=4k$, $(k\in N)$ ja 2) $n=4k+m$, kus $m=1;\ 2;\ 3$.

1-24. Lähtuge sellest, et $a^3\equiv 0;\ 1;\ -1 \pmod 7$.

1-25. Olgu otsitava arvu kirjutises paarisarvulistel kohtadel olevate numbrite summa x ja paarituarvulistel kohtadel olevate numbrite summa y, siis

$$\begin{cases} x+y=45, \\ x-y=11k,\ k\in Z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{45+11k}{2}, \\ y=\dfrac{45-11k}{2}, \end{cases}$$

järelikult $k=\pm 1$, ± 3 (miks?). Edasine arutelu jätab ainult ühe võimaluse: $x=28$, $y=17$. Suurima arvu saame siis, kui numbrid mõlemas rühmas kahanevad ja paarisarvulistel kohtadel olevate numbrite viisikus on võimalikult palju paarituid numbreid (miks?).

Vastus: otsitav arv on 9 876 524 130.

1-26. Et $7\cdot 11\cdot 13=1001$ ja otsitavad arvud on esitatavad kujul $z=1000x+q$, kus $x\in N$ ja q on etteantud kolmekohaline arv siis $1000x+q\equiv 0 \pmod{1001}$, millest $x\equiv q \pmod{1001}$ ja järelikult $x=1001n+q$, kus $n=0, 1, 2, \ldots$. Seega $z= =1001\cdot(1000n+q)=1001q+1\,001\,000n$. Siit on näha, et otsitavad arvud moodustavad aritmeetilise jada, mille esimene liige on $1001q$ ja vahe 1 001 000. Kui näiteks $q=312$, siis $z_0=312\,312$, $z_1=1\,313\,312$, $z_2=2\,314\,312, \ldots$.

1-27. Seosest $x_{n+1}=x_n+2x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n+1}-x_{n-1}=x_n+x_{n-1}$. Nüüd tõestage matemaatilise induktsiooni meetodit kasutades, et $x_{n+1}-x_{n-1}=2^n$. Et alates vahest $x_4-x_2=2^3$ kõik vahed $x_{n+1}-x_{n-1}$ jaguvad 8-ga, siis $x_{n+1}\equiv x_{n-1} \pmod 8$. Et $x_2=3$, siis kõik paarisarvuliste indeksitega liikmed annavad 8-ga jagamisel jäägi 3. Et $x_3=5$, siis paarituarvuliste indeksitega liikmed annavad 8-ga jagamisel jäägi 5.
Leidke, millised jäägid annavad arvujada (y_n) liikmed 8-ga jagamisel! Mis sellest järeldub?

1-28. Lähtuge kongruentsist $m-p\equiv 0 \pmod{(m-p)}$.

1-30. Oletame, et murd on taandatav arvuga n. Siis $48a+5\equiv \equiv 0 \pmod n$ ja $69a+4\equiv 0 \pmod n$. Võrdsustame mõlemas kongruentsis a kordajad korrutades mõlemaid kongruentse sobivalt valitud täisarvudega ja lahutame seejärel esimesest kongruentsist teise. Tulemusest $51\equiv 0 \pmod n$ järeldub, et mooduli n võimalikud väärtused on 3, 17 ja 51. Edasine analüüs näitab, et $n=17$ ja $a=17k-4$, kus $k\in N_1$.

Vastus: $a=17k-4$, kus $k\in N_1$.

1-31. Kui $x_k=10a+k+4$, siis $10a+5=5b$, $10a+6=6c$, $\ldots$, $10a+9=9f$. Avaldades viimastest võrdustest a, leiate milliste arvudega peab a jaguma. Nende vähima ühiskordse abil saate vastuse.

Vastus: 2525, 2526, 2527, 2528 ja 2529.

1-32. Tõestage, et kolmest järjestikusest paaritust arvust üks jagub kolmega.

1-33. Kui s on otsitava naturaalarvu x ristsumma, siis $x=s^2$. Et täisarvu ja tema ristsumma jagamisel 9-ga tekkinud jäägid on võrdsed (näide 11), siis $s^2\equiv s \pmod 9 \Rightarrow \Rightarrow s(s-1)\equiv 0 \pmod 9$, millest $s\equiv 0 \pmod 9 \vee s\equiv$

$\equiv 1 \pmod 9$ (1). Ühekohalistest s väärtustest vastavad ülesande tingimustele ainult 1 ja 9. Kui ristsumma s on n-kohaline ($n \geqslant 2$), s. t. $10^{n-1} \leqslant s < 10^n$ (2), siis $x = s^2$ on kas $2n-1$ või $2n$ kohaline. Niisuguse arvu ristsumma on maksimaalselt $9 \cdot 2n = 18n$. Niisiis $s \leqslant 18n$ (3). Võrratuste (2) ja (3) põhjal $10^{n-1} \leqslant 18n$. See võrratus kehtib naturaalarvude hulgas ainult $n=1$ ja $n=2$ korral, sest juba $n=3$ korral $10^2 > 18 \cdot 3$. Järelikult tuleb sobivaid s väärtusi otsida veel ainult kahekohaliste naturaalarvude hulgast, mis täidavad tingimusi (1) ja (3).

s	10	18	19	27	28	36
s^2	100	324	361	729	784	1296

Et tabelis sobivaid s väärtusi ei leidu, siis jäävad vastuseks ainult arvud 1 ja 81.

Vastus: otsitavad arvud on 1 ja 81.

1-34. Tõestage kongruentside $a \equiv \pm 1 \pmod 5$ ja $a \equiv \pm 2 \pmod 5$ abil, et $a^5 - a$ jagub 5-ga. Et $a^5 - a$ jagub ka kahega (miks?), siis $a^5 - a \equiv 0 \pmod{10}$ ja $a^5 \equiv a \pmod{10}$, mida oligi vaja tõestada.

1-35. Olgu $a_1 = p$, $a_2 = p + 1000$, $a_3 = p + 2000$, kus p on algarv. $p \neq 3$, sest muidu $a_2 = 1003 = 17 \cdot 59$ oleks kordarv. Järelikult $a_1 = p \equiv \pm 1 \pmod 3$ ja vastavalt $a_2 = p + 1000 \equiv$ $\equiv 0 \pmod 3$ või $a_2 = p + 1000 \equiv 2 \pmod 3$ ning $a_3 = p +$ $+ 2000 \equiv 1 \pmod 3$ või $a_3 = p + 2000 \equiv 0 \pmod 3$. Seega on igal juhul selle jada kas teine või kolmas liige kolmega jaguv arv.

1-36. Kui otsitava arvu numbrid on x ja y, siis $x^3 + y^3 =$ $= 57(x+y) \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 57 \Rightarrow y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 57)}}{2} =$ $= \frac{x \pm \sqrt{3(76 - x^2)}}{2}$; $76 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -2\sqrt{19} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{19}$. Et $x \in N_1$, siis $0 < x \leqslant 8$. Arvestades avaldiste $x^3 + y^3$ ja $x + y$ sümmeetrilisust võib seda võrratust veelgi piirata: $0 < x \leqslant 7$. Et $3(76 - x^2)$ peab olema täisruut, siis $76 - x^2 \equiv$ $\equiv 0 \pmod 3) \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 3) \Rightarrow (x+1)(x-1) \equiv 0 \pmod 3) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \equiv -1 \pmod 3) \vee x \equiv 1 \pmod 3) \Rightarrow x = 3k - 1 \vee x = 3k + 1$. Seega $0 \leqslant 3k + 1 \leqslant 7 \Rightarrow 0 \leqslant k \leqslant 2$ või $0 < 3k - 1 \leqslant 7 \Rightarrow 0 <$

$<k\leqslant 2$. Kui $k=0$, siis $x=1$ ja $y=8$. Lahendi annab $k=2$ korral ka $x=7$ ja $y=8$.

Vastus: otsitavad kahekohalised arvud on 18, 78, 81, 87.

1-37. Olgu otsitav arv $A=100a+10b+c$. Kõigi nende arvude summa, mis saadakse numbrite a, b ja c ümberpaigutamisel (niisuguseid arve on 6), on $222a+222b+222c$. $A=$

$$=\frac{222a+222b+222c}{6}=100a+10b+c \Leftrightarrow 37(a+b+c)=$$

$$=100a+10b+c \Leftrightarrow 7a-3b-4c=0. \quad \text{Et} \quad 7a-3b-4c\equiv$$

$$\equiv a-c \pmod 3), \quad \text{siis} \quad a-c\equiv 0 \pmod 3) \Rightarrow a\equiv c \pmod 3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a=3k+c$ ja $b=7k+c$. Süsteemist

$$\begin{cases} 0<c\leqslant 9, \\ 0\leqslant 3k+c\leqslant 9, \\ 0\leqslant 7k+c\leqslant 9, \end{cases} \Rightarrow k=0 \vee k=1.$$

1. Kui $k=0$, siis võib c olla mistahes number vahemikus $0<c\leqslant 9$. Sel juhul $a=b=c$ ja saadud arvud on 111, 222, ..., 999.
2. Kui $k=1$, siis esineb kaks võimalust: 481 ja 592.

Vastus: 111, 222, ..., 999, 481 ja 592.

1-38. *Vastus:* 26 rbl. 80 kop.

1-39. Näidake, et $3x^2-4y^2\not\equiv 1 \pmod 3)$.

1-40. $x^2=2y^2-8z+3$ on moodul 8 suhtes kongruentne kas kolme või viiega sõltuvalt sellest kas y on paarisarv või paaritu arv (näidake seda!). Selgitage, milline vastuolu tuleneb eeltoodust ja asjaolust, et x on paaritu arv.

1-41. Kasutage Euleri reduktsioonimeetodit, mille põhjal leiate, et $x+5=\pm 1$, ± 2, ± 3, ± 6.

Vastus: $L=\{(-11; -20), (-8; -13), (-7; -10), (-4; -13), (-3; -8), (-2; -5), (1; 2)\}$.

1-42. Võrrandi parema poole jaguvusest 2-ga järeldub, et x^4+ $+4y^4\equiv 0 \pmod 2) \Rightarrow x^4\equiv 0 \pmod 2) \Rightarrow x=2k \Rightarrow x^4=16k^4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 16k^4+4y^4\equiv 0 \pmod 4) \Rightarrow 2(z^4+4u^4)\equiv 0 \pmod 4) \Rightarrow z^4+$

$+4u^4 \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow z^4 = 0 \pmod 2 \Rightarrow z = 2l \Rightarrow z^4 = 16l^4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2(16l^4 + 4u^4) = 8(4l^4 + u^4) \Rightarrow x^4 + 4y^4 = 16k^4 + 4y^4 \equiv$ $\equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow y = 2m \Rightarrow y^4 = 16m^4 \Rightarrow 16k^4 + 4 \cdot 16m^4 \equiv$ $\equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow 2(z^4 + 4u^4) = 2(16l^4 + 4u^4) \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow$ $\Rightarrow u = 2n$. Võrrand on nüüd kirjutatav kujul $16k^4 + 4 \cdot 16m^4 = 2(16l^4 + 4 \cdot 16n^4)$, millest saame $k^4 + 4m^4 = 2(l^4 + 4n^4)$, mis on antud võrrandiga kujult samasugune ja mille muutujad peavad eelneva tõestuse põhjal olema taas paarisarvud jne. Tekkinud ilmse vastuolu tõttu on võrrandil ainult üks lahend $x = y = z = u = 0$.

1-43. $2^x - 3^y = 1 \Leftrightarrow 2^x = 3^y + 1$. Näitame, et $3^y + 1$ ei jagu 8-ga ($8 = 2^3$), kui $y \geqslant 2$; $3^2 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 3^{2k} \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3^{2k} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 \pmod 8 \Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 8$. Seega $3^{2k} + 1 \equiv$ $\equiv 2 \pmod 8$ ja $3^{2k+1} \equiv 4 \pmod 8$, millest järeldubki, et $3^y + 1$ ei jagu 8-ga kui $y \geqslant 2$. Järelikult $0 \leqslant x < 2$.

Vastus: $L = \{(1;\ 0)\}$.

1-44. Süsteemi kuuluvate võrrandite vastavate poolte liitmisel saame võrrandi $7x^2 + 7y^2 = z^2 + t^2$, millest järeldub, et $z^2 + t^2$ jagub 7-ga. Kui z ja t ei jagu 7-ga, siis nende ruudud annavad 7-ga jagamisel jäägiks kas 1, 2 või 4 ning ruutude summa ei saa jaguda 7-ga. Järelikult $z \vdots 7$ ja $t \vdots 7$, millest omakorda järeldub, et $z^2 + t^2$ jagub 49-ga. Siis aga peab $x^2 + y^2$ jaguma 7-ga ja samuti jaguvad 7-ga ka x ning y. Edasine lahenduse käik on analoogiline ülesande 1-42. lahendusega.

2-1. Kujutage $2a + c - b$ summana $(a - b) + (a + c)$.

Vastus: $(a - b)(a + c)(b - c)$.

2-2. $17a^2 = 7a^2 + 10a^2$.

Vastus: $(2a^2 + 3a + 7)(a^2 + 5)$.

2-3. I viis. Kuna $(b - c) + (a - b) = -(c - a)$, siis tuleb asendada $c - a$ avaldisega $-(b - c) - (a - b)$.

II viis. Hulkliige võrdub nulliga, kui $a = b$, $b = c$ ja $c = a$, seepärast ta jagub kaksliikmetega $a - b$, $b - c$ ja $c - a$. $(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 = A(a - b)(b - c)(c - a)$, kus A on konstant, sest hulkliikmete kõik liikmed on kolmandas astmes. A leidmiseks andke suurustele a, b ja c vabalt mingid väärtused, mis ei muuda hulkliikmeid võrdseks nulliga. Olgu näiteks $a=-1$, $b=1$, $c=0$, siis $-2A=-6$ ja $A=3$.

Vastus: $3(a-b)(b-c)(c-a)$.

2-4. I v i i s. Kasutage määramata kordajate meetodit. Võrdsustage antud kahe muutujaga teise astme hulkliige korrutisega $(Ax+By+C)(Dx+Ey+F)$, avage sulud ja võrdsustage vastavad kordajad.

II v i i s. Vaadelge antud hulkliiget kui ruutkolmliiget tähe x suhtes. Leidke nullkohad (avaldage x y-i kaudu).

Vastus: $(3x-2y+1)(2x+y-3)$.

2-5. Vt. juhist ülesandele nr. 2-4.

Vastus: $(x-y+1)(x+2y-2)$.

2-6. Kujutage $x-y$ vahena $(a-y)-(a-x)$.

Vastus: $(a-x)(a-y)(x-y)(a+x+y)$.

2-7. $a^2-b^2=-(b^2-c^2)-(c^2-a^2)$.

Vastus: $(a-b)(b-c)(c-a)$.

2-8. Kuna $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+2xyz)$, siis $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3[(x^2+y^2+2xy)z+(x+y)z^2+(x+y)xy]=3(x+y)[z^2+(x+y)z+xy]=3(x+y)(x+z)(y+z)$.

Vastus: $3(x+y)(x+z)(y+z)$.

2-9. Kuna $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3xy(x+y+z)+3xz(x+y+z)+3yz(x+y+z)-3xyz$, siis $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)-3(xy+xz+yz)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

Vastus: $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

2-10. Olgu $a+b=x$, $a+c=y$ ja $b+c=z$, siis $x+y+z=2(a+b+c)$ ja $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3=(x+y+$

$+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$. Vt. ülesanne nr. 2-8. Asendage $x+y=2a+b+c$, $x+z=a+2b+c$ ja $y+z=a+b+2c$.

Vastus: $(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

2-11. Kui $x=y$, $y=z$ või $z=x$, siis hulkliige on võrdne nulliga. Seega $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=K(x-y)(y-z)\times$ $\times(z-x)$, kus K on konstant. K leidmiseks võtke näiteks $x=0$, $y=1$, $z=-1$, $K=-1$.

Vastus: $(x-y)(x-z)(y-z)$.

2-12. Analoogiliselt ülesande nr. 2-11. lahendusega leiate, et $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)=(x-y)(z-x)(y-z)\times$ $\times(Ax+By+Cz+D)$. Andes muutujaile x, y ja z näiteks väärtused (1; 0; 2), (1; 2; 0), (2; 1; 0), (0; 1; -1), saate A, B, C ja D määramiseks süsteemi

$$\begin{cases} A+2B+D=-3, \\ A+2C+D=-3, \\ 2A+B+D=-3, \\ B-C+D=0, \end{cases}$$

millest $D=0$, $A=B=C=-1$.

Vastus: $(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$.

2-13. Antud hulkliige jagub kaksliikmetega $y\pm z$, $z\pm x$ ja $x\pm y$. Seega $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)=K(x+y)\times$ $\times(x-y)(y+z)(y-z)(z+x)(z-x)$. Andes muutujaile vabalt väärtused, leiate, et $K=-1$.

Vastus: $(x+y)(x-y)(x+z)(x-z)(y+z)(y-z)$.

2-14. Kasutage Newtoni binoomvalemit.

Vastus: $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

2-15. Lahutage lugeja ja nimetaja teguriteks, arvestades, et $x^{12}+a^{12}=(x^4)^3+(a^4)^3$.

Vastus: $\dfrac{x^8+a^4x^4+a^8}{x+a}$.

2-16. Kasutage määramata kordajate meetodit. $x^4+x^3+2x^2+Ax+$ $+B=(x^2+Cx+D)^2$.

Vastus: $A=\frac{7}{8}$, $B=\frac{49}{64}$.

2-17. Kasutades määramata kordajate meetodit, saate: $A^3=a$, $B^3=d$, $3A^2B=b$, $3AB^2=c$.

Vastus: $b=3\sqrt[3]{a^2d}$, $c=3\sqrt[3]{ad^2}$.

2-18. Korrutage esimene ja neljas ning teine ja kolmas tegur. $x(x+a)(x+b)(x+a+b)=[x^2+(a+b)x]\cdot[x^2+(a+b)x+$ $+ab]=[x^2+(a+b)x]^2+ab[x^2+(a+b)x]$. Kaksliikme täisruudu saamiseks tuleb sellele avaldisele liita $\frac{a^2b^2}{4}$.

Vastus: $m=\frac{a^2b^2}{4}$.

2-19. Tõestage analoogiliselt ülesandega 2-18.

Vastus: $(x^2+5x+5)^2$.

2-20. Vt. näide 4.

2-21. Vt. näide 4.

2-22. Lahutage võrduse vasakul poolel oleva murru lugeja ja nimetaja tegureiks.

2-23. $\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}=\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-z}$. Analoogilised võrdused saate välja kirjutada ka teiste murdude kohta.

2-24. Kuna $a=1-b$ ja $b=1-a$, siis võrduse vasakul poolel saate pärast leitud a ja b väärtuste asendamist lugejasse ja taandamist $\frac{1}{a^2+a+1}-\frac{1}{b^2+b+1}$. Kuna $a^2-2a+1=$ $=b^2$, siis $a^2+a+1=b^2+3a$. Analoogiliselt leiate, et b^2+b+ $+1=a^2+3b$. Ühine nimetaja $(b^2+3a)(a^2+3b)=a^2b^2+$ $+3(a^3+b^3+3ab)=a^2b^2+3$, sest $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+$ $+b)=a^3+b^3+3ab=1$.

2-25. $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. Kuna $a+b+$ $+c=0$, siis $(a+b+c)^2=0$, millest $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+$ $+bc)$. Uuesti ruutu võttes saate: $a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+$ $+b^2c^2)=4[a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)]$, millest a^4+ $+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. Esimest võrdust arvestades saategi nõutud tulemuse.

2-26. $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz$.

2-27. Vt. ülesandeid nr. 2-11. ja 2-12.

Vastus: $a+b+c$.

2-28. Vt. ülesandeid nr. 2-11. ja 2-13.

Vastus: $(a+b)(a+c)(b+c)$.

2-29. Avaldis on ülimalt teise astme hulkliige temas esinevate tähtede suhtes. Kuna selle hulkliikme väärtus $a=b$, $a=c$ ja $b=c$ korral on 0, siis hulkliige on samaselt võrdne nulliga.
Lahendage ülesanne ka teisel viisil, viies murrud ühisele nimetajale.

2-30. Korrutage omavahel esimene ja teine ning kolmas ja neljas tegur. Asendage $ab=cd$; võtke a ja b sulgude ette.

Vastus: ab.

2-31. Sulgudes olevad murrud liitke paariti ja korrutage teguriga $abcd$. Asendage $c+d$.

Vastus: $a+b$.

2-32. Korrutage ja jagage avaldis kaksliikmega $x-y$.

Vastus: $\dfrac{x^{4n}-y^{4n}}{x-y}$.

2-33. Tingimusest $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_k}{b_k}$ järeldub, et ka $\dfrac{a_1^n}{b_1^n}=\dfrac{a_2^n}{b_2^n}=\ldots=\dfrac{a_k^n}{b_k^n}$. Kasutades võrdsete suhete omadust, saategi nõutava seose.

2-34. Pärast juurte lihtsustamist ja koondamist saate nimetajaks $3\sqrt{10}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$.

Vastus: $\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)$.

2-35. Vt. näide 15-*a*.

Vastus: $\dfrac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$.

2-36. *Vastus:* $(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)$.

2-37. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{a-b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$.

2-38. Teinud asenduse $\sqrt[6]{xy}=a$, saate ratsionaalavaldise.

Vastus: $\sqrt[3]{xy}$, $xy\geqslant 0$, $xy\neq 1$.

2-39. Tehke asendus $\sqrt{m}=a$, $\sqrt{n}=b$.

Vastus: $\sqrt{m}-\sqrt{n}$; $m>0$, $n>0$, $m\neq n$.

2-40. Tehke asendus $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{y}=b$.

Vastus: 1; $x>0$, $y\geqslant 0$, $x\neq y$.

2-41. Kuna $x<1$, siis $1-x=(\sqrt{1-x})^2$. Teist murdu taandage avaldisega $\sqrt{1-x}$.

Vastus: -1.

2-42. Kuna $a>1$, siis $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{a+1}{a-1}$.

Vastus: $\sqrt{a-1}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

2-43. Pärast juurimist saate avaldise $|y-3|+|y-9|+2$.

Vastus: $14-2y$, kui $y<3$; 8, kui $3\leqslant y<9$; $2y-10$, kui $y\geqslant 9$.

2-44. Pärast juurimist saate avaldise $x+2y-|x-2y|$.

Vastus: $4y$, kui $x\geqslant 2y$; $2x$, kui $x<2y$.

2-45. I viis. Kujutage juuritavad kahe arvu summa (vahe) ruuduna:

$$\sqrt{a\pm 10\sqrt{a-25}}=\sqrt{a-25\pm 2\cdot 5\sqrt{a-25}+25}=$$
$$=|\sqrt{a-25}\pm 5|.$$

II viis. Leidke algul A^2.

III viis. Vabanege liitradikaalist.

Vastus: $2\sqrt{a-25}$, kui $a\geqslant 50$; 10, kui $25\leqslant a\leqslant 50$.

2-46. $2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}=x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}+x^2=(\sqrt{x^2-1}+x)^2$.

Vastus: $x+\sqrt{x^2-1}$, kui $x\geqslant 1$; $-x-\sqrt{x^2-1}$, kui $x\leqslant -1$.

2-47. Vabanege nimetajas liitradikaalist.

Vastus: 2.

2-48. Vabanege järk-järgult liitradikaalidest.

Vastus: 1.

2-49. Vabanege liitradikaalist.

2-50. Pärast liitradikaalist ja irratsionaalsusest vabanemist nimetajas saate vasakul poolel $(2a+\sqrt{a^2-b^2})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$. Esimene tegur kujutage juurte $\sqrt{a+b}$ ja $\sqrt{a-b}$ summa mittetäieliku ruuduna: $2a+\sqrt{a^2-b^2}=a+b+\sqrt{(a+b)(a-b)}+$ $+a-b$.

2-51. Tähistage võrduse vasak pool näiteks tähega A, leidke A^3 ja lahendage võrrand $A^3+3A-14=0$. $(3A=-4A+$ $+7A)$.

Vt. näide 15-*d*.

2-52. Vt. ülesanne nr. 2-51. ja näide 15-*d*.

2-53. Olgu $x^{\frac{2}{3}}=u$ ja $y^{\frac{2}{3}}=v$. $\sqrt{u^3+u^2v}+\sqrt{v^3+uv^2}=u\sqrt{u+v}+$ $+v\sqrt{u+v}=(u+v)\sqrt{u+v}=(u+v)^{\frac{3}{2}}$.

$$(u+v)^{\frac{3}{2}}=a \Rightarrow u+v=a^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

2-54. Võrdsete suhete omaduse põhjal

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}}{\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_n}}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$$

Kuna ka $\frac{a_1b_1}{b_1^2}=\frac{a_2b_2}{b_2^2}=\ldots=\frac{a_nb_n}{b_n^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a_1b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_2b_2}}{b_2}=$

$=\ldots=\frac{\sqrt{a_nb_n}}{b_n}$, siis $\frac{\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=$

$=\frac{\sqrt{a_1b_1}}{b_1}=\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}.$

Nendest võrdustest saategi vajaliku seose.

2-55. $a_{m+n}=a_mq^n=A$, $a_{m-n}=a_mq^{-n}=B$. Korrutage ja jagage võrduste pooled, saate: $a_m^2=AB \Rightarrow a_m=\sqrt{AB}\ q^{2n}=\frac{A}{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow q=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2n}}.$

$A=a_{m+n}=a_1q^{m+n-1} \Rightarrow a_1=Aq^{-m-n+1}$, $\quad a_n=a_1q^{n-1}=$

$=Aq^{-m-n+1}\cdot q^{n-1}=Aq^{-m}=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}.$

Vastus: $a_m=\sqrt{AB}$, $a_n=A\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{2n}}$.

2-56. $a_p-a_q=q-p$; $\quad a_p-a_q=a_1(p-1)d-a_1-(q-1)d=$ $=(p-q)d$. Seega $d=-1$ ja $a_m=a_p+(m-p)d=$ $=q-m+p$.

Vastus: $a_m=q-m+p$.

2-57. Teise kuni kaheksanda liikme summa saate, korrutades S_7 teguriga q. Seega $q=2$.

Vastus: $\frac{7}{2}$; 7; 14; ...

2-58. $n^2=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n \Rightarrow 2n=2a_1+nd-d \Rightarrow n(d-2)=$ $=d-2a_1$. Kuna n on mis tahes positiivne naturaalarv, siis võrdus kehtib vaid juhul, kui $d=2$ ja $d=2a_1 \Rightarrow a_1=1$.

Vastus: 1; 3; 5; ... .

2-59. Igas geomeetrilises jadas $(a_1a_2\ldots a_n)^2=(a_1a_n)^n$. Tõestage see samasus, kasutades tõsiasja, et geomeetrilise jada algusest ja lõpust võrdsel kaugusel asuvate liikmete korrutis on võrdne äärmiste liikmete korrutisega. Edasi on vaja näha, et $S=a_1a_nS_1$.

Vastus: $a_1a_2\ldots a_n=\left(\frac{S}{S_1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

2-60. Leidugu aritmeetiline jada, milles $a_m=1$, $a_n=\sqrt{3}$ ja $a_p=3$, siis $1=a_1+(m-1)d$, $\sqrt{3}=a_1+(n-1)d$ ja $3=a_1+$ $+(p-1)d$, millest $\sqrt{3}-1=(n-m)d$ ja $3-1=(p-m)d$ ehk $\frac{\sqrt{3}-1}{n-m}=\frac{2}{p-m} \Rightarrow \frac{n-m}{p-m}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Viimane võrdus on aga võimatu, sest ratsionaalarv ja irratsionaalarv ei saa olla võrdsed.

2-61. $a_1=S_1=7$, $S_2=20 \Rightarrow a_2=S_2-S_1=13$.

Vastus: 7; 13; 19; ... .

2-62. $a_1=S_1=p+q$, $S_2=2p+4q \Rightarrow a_2=p+3q \Rightarrow d=2q$.

Vastus: $2qn+p-q$.

2-63. Vahed on 2, 4, 6, ..., $2(n-1)$. Et leida a_n, tuleb arvule 3 liita vahede summa $\frac{4+2(n-2)}{2}(n-1)$.

Vastus: n^2-n+3.

2-64. Moodustame neljandatest liikmetest jada a_4; a_8; a_{12}; ...; a_{4n}; ... . Et $a_4=3$ ja $a_8=21$, siis n väärtuste 1 ja 2 korral on väide õige. Oletame, et väide on õige $n=k$ korral; see tähendab, et $a_{4k} \vdots 3$. Tõestame, et sellest järeldub väite õigsus $n=k+1$ korral. $a_{4k+4}=a_{4k+3}+a_{4k+2}=(a_{4k+1}+a_{4k+2})+$

$+a_{4k+2}=2a_{4k+2}+a_{4k+1}=2(a_{4k}+a_{4k+1})+a_{4k+1}=3a_{4k+1}+2a_{4k}$.

Selle summa mõlemad liidetavad jaguvad kolmega, seega $a_{4n} \vdots 3$ iga $n \in N_1$ korral.

2-65. Lahendage näite 21 eeskujul.

Vastus: $S=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

2-66. I viis. Liitke ja lahutage $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=$ $=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$; $S=1^2+2^2+\ldots+(2n)^2-4(1^2+$ $+2^2+\ldots+n^2)$.

II viis. Kuna $(2k-1)^2=4k^2-4k+1$, siis $1^2=4\cdot1^2-$ $-4\cdot1+1$, $3^2=4\cdot2^2-4\cdot2+1$, ..., $(2n-1)^2=4n^2-4n+1$.

Vastus: $S=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

2-67. $1\cdot1!=2!-1!$, $2\cdot2!=3!-2!$, ..., $n\cdot n!=(n+1)!-n!$. $S=[2!+3!+\ldots+(n+1)!]-(1!+2!+\ldots+n!)=$ $=(n+1)!-1$.

2-68. I viis. Kasutage matemaatilise induktsiooni meetodit.

II viis. $S=(1+1)1^2+(2+1)2^2+(3+1)3^2+\ldots+$ $+(n+1)n^2=1^3+2^3+\ldots+n^3-(1^2+2^2+\ldots+n^2)$.

2-69. I viis. Kasutage matemaatilise induktsiooni meetodit.

II viis. Kuna $\dfrac{k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}(k^2+k)$, siis

$S=\dfrac{1}{2}[(1^2+2^2+\ldots n^2)+(1+2+\ldots+n)]$.

2-70. I viis. Kasutage matemaatilise induktsiooni meetodit.

II viis. Kuna $n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$, siis $S=(1^3+$ $+2^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+2(1+2+\ldots+n)$.

3-1. Näiteks *a*) $f(x)=x^2-2x-8$, $g(x)=x-4$;

b) $f(x)=x^2-2x-8$, $g(x)=x+1$;

c) $f(x)=x^2-2x-8$, $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$.

3-2. *a*) Teine on esimese järelduseks. Võrrandid on samaväärsed, kui teise võrrandi lahendid ei ole lahenditeks võrranditele $f_2(x)=0$ ja $f_4(x)=0$.

b) Teine on esimese järelduseks. Võrrandid on samaväärsed, kui $f(x) \geqslant 0$ ja $g(x) \geqslant 0$.
c) Esimene on teise järelduseks. Võrrandid on samaväärsed, kui $a \neq 0$ või kui $a=0$ ja võrrandil $g(x)=0$ lahendid puuduvad.
d) Esimene on teise järelduseks. Võrrandid on samaväärsed, kui võrrandite $f(x)=0$ ja $g(x)=0$ lahendid ei ole esimese võrrandi lahenditeks.

3-3. Võrrand, mille lahendite hulk $L=R$. Näiteks
$\sqrt{x^2}=|x|$ või $2+3x=-x+x\sqrt{16}+1,(9)$.

3-4. Võrrand, mille lahendite hulk $L=\varnothing$. Näiteks $|x^3|=-1$.

3-5. Joonise 3-4. põhjal $a>0$, $b>0$, $c>0$;
joonise 3-5. põhjal $a>0$, $b<0$, $c=0$;
joonise 3-6. põhjal $a<0$, $b>0$, $c<0$.

3-6. Kui k on hulkliikme $f(x)$ nullkohaks, siis hulkliige jagub kaksliikmega $x-k$. Seega $x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)\times$ $\times(x-x_2)(x-x_3)$. Võrdus kehtib vaid siis, kui vastavate liikmete kordajad on võrdsed.

3-7. Lahendage näite 3-19. eeskujul.

Vastus: $x+2$.

3-8. Kuna $x^3-2x^2-5x+6=(x+2)(x-1)(x-3)$, siis $f(-2)=0$, $f(1)=0$ ja $f(3)=0$. Tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 24+4a-2b+c=0, \\ a+b+c=0, \\ 54+9a+3b+c=0. \end{cases}$$

Vastus: $a=-7$, $b=1$, $c=6$.

3-9. Ei, sest $f(-1)\neq 0$.

3-10. Viète'i teoreemi põhjal lahendite korrutis on -3, seega $x_3=3$.

3-11. Kui jagamisel hulkliikmega $g(x)$ on jagatiseks $q(x)$, siis jagamisel hulkliikmega $cg(x)$ on jagatiseks $\frac{1}{c}q(x)$. Jääk ei muutu.

3-12. Võrduses $f(x)=(x-a)q(x)+r$ on $q(x)$ aste ühe võrra madalam $f(x)$ astmest. Kirjutage $f(x)$ ja $q(x)$ välja kanoonilisel kujul, avage sulud, korrastage. Kaks hulkliiget $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ ja $g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+ +\ldots+b_m$ on võrdsed, kui nende kanoonilised esitused on ühesugused. $f(x)=g(x)$ siis ja ainult siis, kui $m=n$ ja $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\ldots$, $a_n=b_n$.

3-13. Viète'i teoreemi põhjal $x_1+x_2+x_3=6$. Kuna $x_1+x_3=2x_2$, siis $x_2=2$. $f(2)=0 \Rightarrow m=-2$.

Vastus: $L=\{2;\ 2\pm\sqrt{3}\}$.

3-14. Kuna x_1, x_2 ja x_3 on võrrandi lahendid, siis $x_1^3+px_1+q=0$, $x_2^3+px_2+q=0$, $x_3^3+px_3+q=0$. Liites võrduste vastavad pooled, saate $x_1^3+x_2^3+x_3^3+p(x_1+x_2+x_3)+3q=0$. Antud võrrandi puhul $x_1+x_2+x_3=0$ ja $x_1x_2x_3=-q$ (Viète'i teoreem), järelikult $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

3-15. Funktsiooni $f(x)=(x-a)(x-b)+m(x-c)(x-d)$ graafikuks on parabool, mis avaneb üles, kui $m>-1$. Parabool lõikab x-telge (võrrandil on reaalsed lahendid), kui $f(x)$ väärtus mingil muutuja x väärtusel on negatiivne. Olgu $a<c<b$. $f(c)=(c-a)(c-b)+m(c-c)(c-d)<0$, sest $c-a>0$ ja $c-b<0$.

Ülesanded 3-16 kuni 3-21 lahendage näidete 3-23, 3-24 ja 3-25 eeskujul.

3-16. *Vastus:* $L=\{3;\ 2\pm\sqrt{3}\}$.

3-17. *Vastus:* $L=\{-2;\ -1;\ \pm\sqrt{2}\}$.

3-18. *Vastus:* $L=\{1;\ 2;\ \pm\sqrt{3}\}$.

3-19. *Vastus:* $L=\{1;\ 3;\ -2{,}5\pm0{,}5\sqrt{17}\}$.

3-20. *Vastus:* $L=\{1;\ 2;\ \pm4\}$.

3-21. *Vastus:* $L=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3-22. Saate kolmanda astme võrrandi $ay^3+by^2+(c-3a)y+ +d-2b=0$. See võrrand osutub pöördvõrrandiks vaid siis, kui $a=d-2b$ ja $b=c-3a$, millest $2a-b=c-d$.

Võrrandid 3-23 kuni 3-27 lahendage näidete 3-26 ja 3-27 eeskujul.

3-23. *Vastus:* $L=\left\{-2;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 3\right\}$.

3-24. *Vastus:* $L=\{0{,}5;\ 2;\ -1{,}5\pm 0{,}5\sqrt{5}\}$.

3-25. *Vastus:* $L=\left\{-1;\ \frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\right\}$.

3-26. *Vastus:* $L=\left\{-2;\ -1;\ -\frac{1}{2}\right\}$.

3-27. *Vastus:* $L=\left\{-1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3\right\}$.

3-28. Lahendage näite 3-28. eeskujul.

Vastus: $L=\left\{-\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 2\right\}$.

3-29. Lahendage näite 3-28. eeskujul.

Vastus: $L=\{1;\ 2;\ 2{,}5;\ 5\}$.

3-30. Võrrandid ei ole samaväärsed, kui $\pm a$ on teise võrrandi lahendiks. Asendades teises võrrandis muutuja x arvudega a ja $-a$, leiame, et $a=0$ ja $a=-2$ korral pole võrrandid samaväärsed.

Vastus: kui $a\neq 0$ ja $a\neq -2$, siis

$$L=\left\{\frac{-a^2-4a\pm a\sqrt{a^2+4a+20}}{2}\right\};$$

kui $a=-2$, siis $L=\{6\}$;

kui $a=0$, siis $L=\varnothing$.

3-31. Võrrandid on samaväärsed kui $\pm c$ ja $\pm(b+c)$ ei ole teise võrrandi lahendeiks. Asendades need muutuja väärtused teise võrrandisse, saate leida a, b ja c väärtused, mille korral võrdus kehtib.

Vastus: $c(a-c)(a+b-c)(b+c-a)(2c+b)(b+c)\neq 0$.

3-32. Võttes $\sqrt{x+1}=u$, saate võrrandi $\sqrt{(u-2)^2}+\sqrt{(u-1)^2}=$ $=1 \Leftrightarrow |u-2|+|u-1|=1$. Vt. näide 3-43.

Vastus: $L=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 3\}$.

3-33. *Vastus:* kui $a \neq 0$ ja $a \neq 2$, siis $L = \left\{ \frac{a-4b}{a(a-2)} \right\}$;

kui $a = 2$ ja $b = \frac{1}{2}$ või $a = b = 0$, siis $L = R$;

kui $a = 2$ ja $b \neq \frac{1}{2}$ või $a = 0$ ja $b \neq 0$, siis $L = \varnothing$.

3-34. *Vastus:* kui $a \neq 1$ ja $b \neq 2$, siis $L = \left\{ \frac{2b-a}{(b-2)(a-1)} \right\}$;

kui $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$ või $a = 4$ ja $b = 2$, siis $L = R$;

kui $a = 1$ ja $b \neq \frac{1}{2}$ või $a \neq 4$ ja $b = 2$, siis $L = \varnothing$.

3-35. *Vastus:* kui $a \neq 0$, siis $L = \left\{ -1; \frac{b}{a} \right\}$;

kui $a = 0$ ja $b \neq 0$, siis $L = \{-1\}$;

kui $a = b = 0$, siis $L = R$.

3-36. $D = 1 - a(a+2)(1-a^2) = 1 + a(a+1)(a-1)(a+2) =$
$= 1 + (a^2+a)[(a^2+a) - 2] = (a^2+a)^2 - 2(a^2+a) + 1 =$
$= (a^2+a-1)^2$.

Vastus: kui $a \neq 0$ ja $a \neq -2$, siis $L = \left\{ \frac{a-1}{a}; -\frac{a+1}{a+2} \right\}$;

kui $a = 0$, siis $L = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$;

kui $a = -2$, siis $L = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

3-37. *Vastus:* kui $a = b = 0$, siis $L = R$;

kui $a \neq 0$ ja $b = 0$, siis $L = \{-1\}$;

$b \neq 0$, siis $L = \left\{ -1; \frac{a}{b} \right\}$.

3-38. Kuna $x \neq \frac{a}{3}$ ja $x \neq \frac{4}{a}$, siis $\frac{20-3a}{5a-9}$ ei tohi olla võrdne arvudega $\frac{a}{3}$ ja $\frac{4}{a}$.

Vastus: kui $a \neq \frac{9}{5}$ ja $a \neq \pm 2\sqrt{3}$, siis $L = \left\{ \frac{20-3a}{5a-9} \right\}$;

kui $a = \frac{9}{5}$ või $a = \pm 2\sqrt{3}$, siis $L = \varnothing$.

3-39. *Vastus:* kui $a \neq -b$ ja $a \neq -b+1$, siis $L = \left\{ \frac{a+b+1}{a+b-1} \right\}$;

kui $a = -b$ või $a = -b+1$, siis $L = \varnothing$.

3-40. *Vastus:* kui $b \neq c$, siis $L = \{-a;\ a;\ a+b+c\}$;

kui $b = c$, siis $L = \{b\}'_R$.

3-41. *Vastus:* kui $b \neq 0$, siis $L = \left\{ a+b;\ \frac{a^2-b^2}{2b} \right\}$;

kui $b = 0$, siis $L = \{a\}$.

3-42. *Vastus:* kui $a \neq 0$, siis $L = \left\{ a+1;\ \frac{a+1}{a} \right\}$;

kui $a = 0$, siis $L = \varnothing$.

3-43. *Vastus:* kui $a \neq 0$ ja $a \neq \pm 1$, siis $L = \left\{ a;\ \frac{1-a^2}{a} \right\}$;

kui $a = \pm 1$, siis $L = \{0\}$;

kui $a = 0$, siis $L = \varnothing$.

3-44. *Vastus:* kui $a = b$, siis $L = R$;

kui $a \neq b$, siis $L = \{0;\ a+b\}$.

3-45. Lahendit on vaja otsida piirkonnas $x \leqslant 1$, $0 < x \leqslant 2a$. Ruutu võttes saate $2x^2 - 2(a+1) \cdot x + 1 = 0$. $D = a^2 + 2a - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geqslant -1 + \sqrt{2}$. $\quad x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a-1}}{2}$. Mõlemad lahendid on positiivsed kõigi $a > 0$ korral.

$\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-1}}{2} \leqslant 1$ kõigi a väärtuste korral.

$\frac{a+1+\sqrt{a^2+2a-1}}{2} \leqslant 1$, kui $a \leqslant \frac{1}{2}$.

$\frac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a-1}}{2}\leqslant 2a$ kõigi a väärtuste korral. Kui $a=$
$=-1+\sqrt{2}$, siis $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vastus: kui $a<-1+\sqrt{2}$, siis $L=\varnothing$;

kui $a=-1+\sqrt{2}$, siis $L=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;

kui $-1+\sqrt{2}<a\leqslant\frac{1}{2}$, siis

$$L=\left\{\frac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a-1}}{2}\right\};$$

kui $a>\frac{1}{2}$, siis $L=\left\{\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a-1}}{2}\right\}$.

3-46. $\sqrt[7]{(b-ax)^{-3}}=-\sqrt[7]{\frac{1}{(ax-b)^3}}$. Asendage $\sqrt[7]{(ax-b)^3}=u$.

Vastus: $L=\left\{\frac{b+128}{a};\ \frac{128b+1}{128a}\right\}$.

3-47. Võrrandi määramispiirkond on $a<0$, $x\geqslant a$. Pärast $\sqrt{x-a}$ viimist paremale poole, ruutu võtmist ja koondamist saate

$-2a-9=6\sqrt{x-a}\Rightarrow -2a-9\geqslant 0\Rightarrow a\leqslant -4{,}5$.

Vastus: kui $a>-4{,}5$, siis $L=\varnothing$;

kui $a\leqslant -4{,}5$, siis $L=\left\{\frac{4a^2+72a+81}{36}\right\}$.

3-48. Kuna võrrandi parem pool on mittenegatiivne, siis $\sqrt[3]{a+x}\geqslant$ $\geqslant\sqrt[3]{a-x}\Rightarrow a+x\geqslant a-x\Rightarrow x\geqslant 0$. Peale selle $a^2-x^2\geqslant 0\Rightarrow$ $\Rightarrow|a|\geqslant x$. Võtame võrrandi pooled kuupi: $a+x-a+x-$
$-3\sqrt[3]{(a-x)(a+x)}(\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x})=\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow$
$\Rightarrow 2x-3\sqrt[3]{a^2-x^2}\sqrt[6]{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-x^2}$. (Asendasime $\sqrt[3]{a+x}-$

$-\sqrt[3]{a-x}$ esialgse võrrandi põhjal avaldisega $\sqrt[6]{a^2-x^2}$. Kuna võrdus $\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[6]{a^2-x^2}$ pole absoluutne samasus, siis saadud võrrand on vaid eelmise järeldus. Lahendeid on vaja kontrollida!). $2x-3\sqrt{a^2-x^2}=$ $=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x=2\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x^2=\frac{4a^2}{5} \Rightarrow x=\pm\frac{2a}{\sqrt{5}}$. $\frac{2a}{\sqrt{5}}\geqslant 0$, kui $a\geqslant 0$ ja $\frac{-2a}{\sqrt{5}}\geqslant 0$, kui $a\leqslant 0$. Ka tingimus $|a|\geqslant x$ on täidetud.

Vastus: kui $a\geqslant 0$, siis $L=\left\{\frac{2a}{\sqrt{5}}\right\}$;

kui $a\leqslant 0$, siis $L=\left\{-\frac{2a}{\sqrt{5}}\right\}$.

3-49. Asendage $\sqrt[8]{a+x}=t$ ja $\sqrt[8]{a-x}=u$ $(t\geqslant 0,\ u\geqslant 0)$.

Vastus: kui $a\geqslant 0$, siis $L=\{0\}$;

kui $a<0$, siis $L=\varnothing$.

3-50. Määramispiirkond on määratud võrratustega $x\geqslant b$, $x\leqslant a$, $x\neq\frac{a+b}{2}$; seega $a\geqslant b$. Kui $a=b$, siis võrrandil lahend puudub. Olgu $a>b$. Vabanege irratsionaalsusest nimetajates, korrutage võrrand avaldisega $a+b-2x$, koondage.

Vastus: kui $a>b$, siis $L=\{a;\ b\}$;

kui $a\leqslant b$, siis $L=\varnothing$.

3-51. Määramispiirkond on määratud võrratustega $x\leqslant a$, $x\leqslant b$, $x\leqslant\frac{a+b}{2}$. Ruutu võttes ja lihtsustades leiate, et $x=a$, kui $b\geqslant a$ (tingimusest $x\leqslant b$) või $x=b$, kui $b\leqslant a$ (tingimusest $x\leqslant a$).

3-52. Kasutades astmesummasid S_2 ja S_3 saate u ja v määramiseks süsteemi

$$\begin{cases} u^2-3v=3, \\ u^3-3uv-4v=1, \end{cases}$$

millest $u_1=3$, $u_2=-\frac{3}{4}$, $v_1=2$, $v_2=-\frac{13}{16}$. Vt. näide 3-38.

Vastus: $L=\left\{(1;\ 2),\ (2;\ 1),\ \left(\frac{-3+\sqrt{61}}{8};\ \frac{-3-\sqrt{61}}{8}\right),\right.$

$$\left.\left(\frac{-3-\sqrt{61}}{8};\ \frac{-3+\sqrt{61}}{8}\right)\right\}.$$

3-53. Lahendage näite 3-38 eeskujul.

Vastus: $L=\{(1;\ 3),\ (3;\ 1),\ (-1;\ -3),\ (-3;\ -1)\}$.

3-54. Asendage $\sqrt[4]{x^3-11}=w$ ja $\sqrt{y}=t$, siis

$$\begin{cases} w+t=2, \\ w^4+t^4=16. \end{cases}$$

Kasutades astmesummasid S_1 ja S_4 saate w ja t määramiseks süsteemi

$$\begin{cases} u=2, \\ u^4-4u^2v+2v^2=16 \Rightarrow u=2,\ v_1=0,\ v_2=8. \end{cases}$$

Vastus: $L=\{(3;\ 0),\ (\sqrt[3]{11};\ 4)\}$.

3-55. Lahendage näite 40 eeskujul. Teisendage süsteemi kolmandat võrrandit. Võtke esimese võrrandi pooled ruutu: $\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}=5$. Saadud võrrand võtke veel kord ruutu ja arvestage, et $xy+xz+yz=9$. Saate võrrandi $2\sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})=16$. Lahendage süsteem

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+yz+xz=9, \\ xyz=4. \end{cases}$$

Vastus: $L=\{(1;\ 1;\ 4),\ (1;\ 4;\ 1),\ (4;\ 1;\ 1)\}$.

3-56. Liitke võrrandite vastavad pooled.

Vastus: $L=\{(0;\ 4;\ 5),\ (0;\ -4;\ -5)\}$.

3-57. Viige tähte a sisaldavad liikmed paremale, lahutage vasakud pooled tegureiks ja jagage võrrandite vastavad pooled. $\frac{x}{y}=\frac{y}{4x}$, kui $a\neq0$, $y\neq x$, millest $y=\pm2x$.

Vastus: kui $a\neq0$, siis $L=\left\{(0;\ 0),\ \left(\frac{2a}{3};\ -\frac{4a}{3}\right),\ (2a;\ 4a)\right\}$.

kui $a=0$, siis $L=\{(\alpha;\ \alpha)\}$, kus $\alpha\in R$.

3-58. Olgu $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=k$, siis $\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=\frac{1}{k}$. $k^2-ak+1=0\Rightarrow k=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, kui $|a|\geqslant2$. $\frac{x}{y}=k^3\Rightarrow x=k^3y\Rightarrow x=k^3(b-x)\Rightarrow x=\frac{k^3b}{1+k^3}$, kui $1+k^3\neq0$. $1+k^3=0$, kui $k=-1$. $\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}=-1$, kui $a=-2$. Kui $x=-1$, siis $x=-y\Rightarrow x+y=0$.

Vastus: kui $a<-2$ või $a\geqslant2$, siis

$$L=\left\{\left(\frac{\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}}{1+\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3};\ \frac{b}{1+\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3 b}{1+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3};\ \frac{b}{1+\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^3}\right)\right\};$$

kui $a=-2$ ja $b=0$, siis $L=\{(\alpha;\ -\alpha)\}$, kus $\alpha\in\{0\}'_R$;

kui $-2<a<2$, siis $L=\varnothing$;

kui $a=-2$ ja $b\neq0$, siis $L=\varnothing$.

3-59. Graafikute lõikepunktide koordinaadid on vastava võrrandisüsteemi lahendeiks. Lõikepunktide abstsissid leiame võrrandist $2ax+1=(a-6)x^2-2$. Graafikud ei lõiku, kui $D<0$.

Vastus: $-6<a<3$.

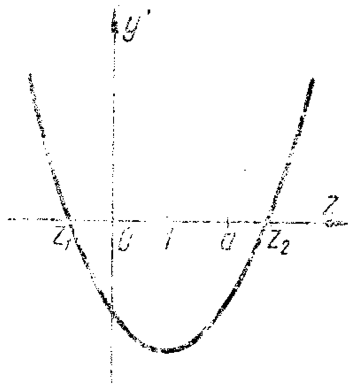
3-60. Arvud x_1 ja y_1 on ruutvõrrandi $z^2-(2a+1)z+\frac{a^2-a}{2}=0$ lahendid. Olgu $x_1=z_1$ ja $y_1=z_2$. Vt. joonis 6-1. a määramiseks saate süsteemi

$$\begin{cases} f(1)<0 \\ f(a)<0 \\ D>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-(2a+1)+\frac{a^2-a}{2}<0 \\ a^2-2a^2-a+\frac{a^2-a}{2}<0 \\ (2a+1)^2-2(a^2-a)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

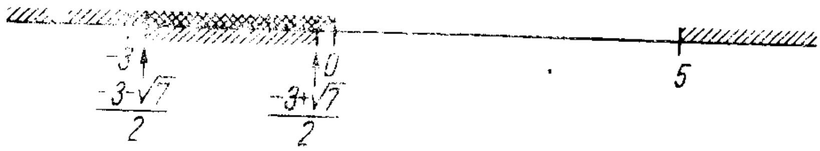
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-5a<0 \\ a^2+3a>0 \\ 2a^2+6a+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<a<5 \\ a<-3 \vee a>0 \\ a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2} \vee a>\frac{-3+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0<a<5$. Vt. joonis 6-2.

Vastus: $0<a<5$.



Joon. 6-1



Joon. 6-2

3-61. Olgu $f(x)=x^2+x+a$. Tuleb lahendada süsteem

$$\begin{cases} f(a)>0 \\ D\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+2a>0 \\ 1-4a\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \vee a<-2 \\ a\leqslant \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a<-2$. Vt. näide 3-42.

Vastus: $a<-2$.

3-62. Lahendage ülesande 3-60 eeskujul.

$$\begin{cases} D>0 \\ f(4)>0 \\ f(-4)>0 \\ 2m+1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-4m>0 \\ -6m+25>0 \\ 10m+9>0 \\ m<-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<0 \vee m>4 \\ m<4\frac{1}{6} \\ m>-\frac{9}{10} \\ m<-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{10}<m<-\frac{1}{2}.$$

Et lahendid oleksid erimärgilised, peab Viète'i teoreemi põhjal nende korrutis $2m+1$ olema negatiivne.

4-1. Teisendage antud võrratusega samaväärse võrratuse $(a^4+1)-2a(a^2-a+1)\geqslant 0$ vasak pool kujule $(a^2+1)\times$ $\times(a-1)^2$, mis on positiivne, kui $a\neq 1$ ja võrdub nulliga, kui $a=1$.

4-2. Pärast võrratuse mõlema poole korrutamist kahega ja kõigi liikmete vasakule poole viimist saab sellele anda kuju $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geqslant 0$.

4-3. Võrratuse vasaku poole saab teisendada avaldiseks $(m^4+1)(m^2-m+1)$, mille mõlemad tegurid on positiivsed m iga reaalarvulise väärtuse korral.

4-4.

$$\begin{array}{rll} + & a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=1, & \text{(vt. eeldus)} \\ & a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqslant 0, & \text{(ilmselt tõene)} \\ \hline & 2(a^2+b^2)\geqslant 1, & \text{(vt. p. 1. teisendus 1.)} \end{array}$$

$$2(a^2+b^2)\geqslant 1 \Leftrightarrow 4(a^2+b^2)^2\geqslant 1, \text{ (vt. p. 1. teisendus } 7a)$$

$$\begin{array}{r} + \ 4(a^2-b^2)^2\geqslant 0, \\ \hline 8(a^4+b^4)\geqslant 1, \end{array} \text{ (vt. p. 1. teisendus } 4a).$$

Järgmine analoogiline teisendus viibki antud võrratuseni.

4-5. Andke võrratusele kuju $(k-1)(n-k)\geqslant 0$.

4-6. Kui eelmises võrratuses $k=1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, siis

$$\begin{aligned} 1\cdot n&=n, \\ 2(n-1)&\geqslant n, \\ 3(n-2)&\geqslant n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)2&\geqslant n, \\ n\cdot 1&=n. \end{aligned}$$

Kasutades teisendusi $2a$ ja 5 saame $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)^2\geqslant$ $\geqslant n^n \Leftrightarrow (n!)^2\geqslant n^n$. Võrdus kehtib, kui $n=1$; 2.

4-7. $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2$,

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2&\geqslant 2a_1a_2, \\ a_1^2+a_3^2&\geqslant 2a_1a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^2+a_n^2&\geqslant 2a_1a_n; \\ a_2^2+a_3^2&\geqslant 2a_2a_3, \\ a_2^2+a_4^2&\geqslant 2a_2a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2^2+a_n^2&\geqslant 2a_2a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^2+a_n^2&\geqslant 2a_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Teisenduste 1. ja $4a$ põhjal leiame, et

$$n(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)\geqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)^2.$$

4-8. Kasutage seost $AK\geqslant GK$ (vt. p. $3b$).

4-9. Liitke võrratuse $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\geqslant 2$ mõlemale poolele 2.

4-10. Andke tingimusena esinevale võrratusele kuju $(a+b)^2+$ $+(a-b)^2\leqslant 4$.

4-11. Pärast võrratuse mõlema poole jagamist positiivse avaldisega $\frac{a+b}{2}$ saab võrratuse esitada kujul $\frac{3}{4}(a-b)^2\geqslant 0$.

4-12. Kasutage a, b ja c vahel seost $AK\geqslant HK$ (vt. p. 3b).

4-13. Esitage võrratuse vasak pool kujul $\sqrt{a^2+a+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}$. Edasine lahenduskäik vt. ül. nr. 8.

4-14. Vt. ül. nr. 13.

4-15. Liitke ülesandes nr. 2 tõestatud võrratuse mõlemale poolele $2(ab+ac+bc)$.

4-16. $\sqrt{a}+1\leqslant a+\frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a}+1\leqslant\frac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$. Pärast viimase võrratuse mõlema poole jagamist positiivse suuruse $(\sqrt{a}+1)$-ga, saame võrratuse $\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\geqslant 2$, mis on tõene (vt. ül. nr. 8).

4-17. Kasutage võrdust $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}=\sqrt[n]{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}$.

4-18. Et a, b, $c>0$, siis $a+b+c>b+c$, $a+b+c>a+c$ ja $a+b+c>a+b$. Edasi kasutage nende võrratuste kohta teisendust 3.

4-19. $a+b+c=1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=$ $=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1-2(ab+ac+bc)$. Et $a^2+b^2+c^2\geqslant$ $\geqslant ab+ac+bc$ (vt. ül. nr. 2), siis $1-2(ab+ac+bc)\geqslant$ $\geqslant 1-2(a^2+b^2+c^2)$; samuti $a^2+b^2+c^2\geqslant 1-2(a^2+b^2+c^2)$.

4-20. Olgu $x=b+c$; $y=a+c$ ja $z=a+b$, siis $y-x=a-b$, $y-x+z=2a$, millest $a=\frac{y+z-x}{2}$. Analoogiliselt leiame, et $b=\frac{x+z-y}{2}$ ja $c=\frac{x+y-z}{2}$. Teeme asendused antud võrratusse ja peale lihtsaid teisendusi saame $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+$ $+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geqslant 6$, mille õigsus järeldub võrratusest ülesandes nr. 8.

4-21. Võrratuse mõlema poole positiivsus lubab rakendada teisendust $7a$ ja seejärel viia võrratus kujusse, mis vastab tõesele võrratusele $AK\geqslant GK$.

4-22. Rakendage võrratust $AK\geqslant GK$ avaldistele $\frac{a+b}{2}$ ja ab.

4-23. Kasutage asjaolu, et liidetavate geomeetriline keskmine on 1.

4-24. Näitame, et $\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$, kui $n\geqslant 1$:

$$2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Edasi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}}<2\sqrt{4}-2\sqrt{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}=1$$

Nende võrratuste ja viimase võrduse vastavate poolte liitmisel saamegi vajaliku võrratuse.

4-25. Tõestage esmalt, et $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$ $=\frac{2n-1}{n}$.

4-26. Ilmselt on $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{1\cdot 2}+$ $+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3^3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3^{n-3}}$, viimane summa on aga omakorda väiksem summast $2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+$ $+\frac{1}{18}+\ldots=2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=2+\frac{3}{4}=2{,}75.$

4-27. Olgu $a^2+b^2+c^2=p$, $ab+bc+ac=q$ ja $a^3+b^3+c^3-3abc=m$. Näidake, et $m^2=(p+2q)(p-q)^2$ ja $p^3-m^2=q^2(2p-2q+$ $+p)$. Et $p>0$ ja $p-q\geqslant 0$ (vt. ül. nr. 2), siis $p^3-m^2\geqslant 0$, millega ongi ülesanne lahendatud.

4-28. Bernoulli võrratuse kohaselt $(1+0{,}001)^n>1+0{,}001n$.

4-29. Kasutage võrratust $AK\geqslant GK$.

4-30. Tähistame võrratuse vasaku poole A-ga, siis

$$A^2=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{999\,999^2}{10^{12}}<\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\frac{999\,999^2}{10^{12}-1}=\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{999\,999^2}{999\,999\cdot 1\,000\,000}=$$
$$=\frac{1}{1\,000\,000},$$ millest järeldubki tõestatav võrratus.

4-32. Newtoni binoomvalemi järgi võrratuse vasakul poolel on

$$1+a\cdot\frac{1}{a}+\frac{a(a-1)}{2!}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\cdot\frac{1}{a^3}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{a(a-1)\ldots[a-(a-1)]}{a!}\cdot\frac{1}{a^a}=2+\frac{1-\frac{1}{a}}{2!}+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)}{3!}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\ldots\left(1-\frac{a-1}{a}\right)}{a!}<$$
$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{a!}.$$ Edasi vt. ül. nr. 26.

4-33. Antud võrratus on samaväärne võrratusega $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$. Kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit:

1) Võrratus kehtib, kui $n=1$.

3) Oletame, et $k! > \left(\frac{k}{3}\right)^k$.

3) Võrratus $k!(k+1) > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}$ on tõene, kui $k+1 >$ $> \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} : \left(\frac{k}{3}\right)^k$ on tõene. Viimase tõestamiseks jagame selle võrratuse mõlemaid pooli avaldisega $k+1$. Saame $1 > \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, mis on õige ül. nr. 32 tõestatu põhjal.

4-34. Tõestame, et $(a+1)^a > a^{a+1}$, kui $a \in N$ ja $a > 2$: $(a+1)^a =$ $= \left(a\left(1+\frac{1}{a}\right)\right)^a = a^a\left(1+\frac{1}{a}\right)^a < a^a \cdot 3$, sest $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a < 3$ (vt. ül. nr. 32). Seega $(a+1)^a < a^a \cdot 3$. Kui $a \geqslant 3$, siis $a^a \cdot a >$ $> a^a \cdot 3$ ja ka $a^a \cdot a > (a+1)^a \Rightarrow a^{a+1} > (a+1)^a$.

4-35. Antud võrratuse vasaku poole võib kirjutada kujul $|x-1|+$ $+|x-2|+|x-3|$. Analüüsige selle avaldise väärtust kogu arvtelje ulatuses vahemike $x<1$; $1 \leqslant x < 2$; $2 \leqslant x < 3$; $x \geqslant 3$ kaudu. Näiteks, kui $x<1$, siis $|x-1|+|x-2|+$ $+|x-3| = 1-x+2-x+3-x = -3x+6$, mille minimaalne väärtus antud tingimusel on aga 3-st suurem. Seega selles vahemikus on võrratus tõene.

4-36. Tähistame võrratuse vasaku poole esimese liidetava b-ga ja teise c-ga. Siis $b^3+c^3=2a$. (1)
Et $b^3+c^3 > bc^2+b^2c$ (tõestage!), siis $bc(c+b) < 2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3bc(c+b) < 6a$. Liites viimase võrratuse pooltele võrduse (1) vastavad pooled, saame $(b+c)^3 < 8a$, millest järeldub $b+c < 2\sqrt[3]{a}$.

4-37. *Vastus:* $L = \{x \mid x \leqslant -5 \vee x=1 \vee 2 \leqslant x \leqslant 3\}$.

4-38. Lugeja on lahutatav tegureiks $(x-2)(x+1)^2$.

Vastus: $L = \{x \mid x < -3 \vee x = -1 \vee 2 \leqslant x < 3\}$.

4-39. Teisendage lugejat nii, et üks tegureist oleks $(x+3)^2+1$.

Vastus: $L=\{x \mid x<0 \vee 0<x<0{,}5 \vee x>3\}$.

4-40. *Vastus:* $L=\{x \mid -1<x<0 \vee 1<x\leqslant 2\}$.

4-41. *Vastus:* $L=\{x \mid x>-1{,}5\}$.

4-42. *Vastus:* $L=\{x \mid -2<x<0\}$.

4-43. *Vastus:* $L=\{x \mid 1-\sqrt{3}<x<2-\sqrt{2}\}$.

4-44. Kasutage võrratuse omadust 7*a*. Miks võib seda antud võrratuse juures kasutada?

Vastus: $L=\left\{x \mid 0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right\}$.

4-45. Võrratuse määramispiirkond $X=\{x \mid x\leqslant 0 \vee x\geqslant 4\}$. Kui $x\leqslant 0$, siis $x-3<0$ ja võrratus on tõene. Kui $x\geqslant 4$, siis $x-3>0$ ja võrratuse mõlemaid pooli võib astendada 2-ga.

Vastus: $L=\{x \mid x\leqslant 0 \vee x>4{,}5\}$.

4-46. *Vastus:* $L=\left\{x \mid x<-\frac{7}{9}\right\}$.

4-47. Võrratuse lihtsustamiseks on otstarbekas kasutada asendusi

$x-3=y$ ja $x-5=z$,

Vastus: $L=\{7\}$.

4-48. *Vastus:* $L=\{x \mid x\leqslant -1\}$.

4-49. Andke võrratusele kuju $\sqrt{(x-5)(7-x)}+\sqrt{x-5}>\sqrt{7-x}-1$ ja analüüsige nüüd võrratust parema poole negatiivsuse ja mittenegatiivsuse eeldusel.

Vastus: $L=\left\{x \mid 6-2\sqrt{\sqrt{5}-2}<x\leqslant 7\right\}$.

4-50. Pärast võrratuse mõlema poole ruutu tõstmist (et võrratuse määramispiirkond $X=\{x \mid x\geqslant 1\}$, siis on ka võrratuse parem pool positiivne) saame võrratuse $2x+2|x-2|>\frac{x^2}{4}$.

Vastus: $L=\{x \mid 1\leqslant x<8+4\sqrt{3}\}$.

4-51. *Vastus:* $L=\left\{x \,\middle|\, \frac{-\sqrt{2}}{2}\leqslant x<0 \vee 0<x\leqslant\frac{2}{3}\right\}$.

4-52. Viige kõik liikmed võrratuse vasakule poolele ja ühisele nimetajale ning kasutage intervallmeetodit.

Vastus: $L=\{x \mid x<-\sqrt{2}-1 \vee -2\leqslant x<\sqrt{2}-1 \vee x\geqslant 1\}$.

4-53. *Vastus:* $L=\{x \mid x<\sqrt[3]{4}\}$.

4-54. Vt. näide 4-15.

Vastus: $L=\left\{(a;\ x) \mid a=0 \wedge x<1 \vee a>0 \wedge -\frac{2}{a}<x<\right.$ $<1 \vee -2<a<0 \wedge x>-\frac{2}{a} \vee x<1 \vee a=-2 \wedge x\in R \wedge$ $\left.\wedge\, x\neq 1 \vee a<-2 \wedge x>1 \vee x<-\frac{2}{a}\right\}$.

4-55. 1. Kui $a<0$, siis $x-a>0$ (sest $x\geqslant 0$) ja $x>a$, mis rahuldab võrratuse määramispiirkonna tingimust $x-a\geqslant 0$. $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2 \Leftrightarrow \sqrt{x}>2+\sqrt{x-a} \Leftrightarrow x>4+4\sqrt{x-a}+$ $+x-a \Leftrightarrow 4\sqrt{x-a}<a-4 \Rightarrow a>4$, mis on vastuolus eeldusega ja järelikult lahend puudub.

2. Kui $a=0$, siis $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=0$, mis ei rahulda võrratust.

3. Kui $a>0$, siis võrratusest $4\sqrt{x-a}<a-4$ järeldub, et $a>4$. Peale võrratuse mõlema poole astendamist kahega saame $16(x-a)<a^2-8a+16 \Leftrightarrow 16x<(a+4)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2$.

Vastus: $L=\left\{(a;\ x) \mid a>4 \wedge a\leqslant x<\left(\frac{a+4}{4}\right)^2\right\}$.

4-56. Et $2(x-\sqrt{x^2-a^2})=(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})^2$, siis $|\sqrt{x+a}-$ $-\sqrt{x-a}|>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}$.

1) $a<0 \Rightarrow x-a>x+a \Rightarrow \sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(x-a)-5\sqrt{x^2-a^2}>x+a \Rightarrow 4x-6a>5\sqrt{x^2-a^2}$. Arvestades võrratuse määramispiirkonda $X=\{x \mid x\geqslant$ $\geqslant |a|\}$ võime võrratuse mõlemad pooled ruutu tõsta ja seejärel leida lahendi $L_1=\left\{x \mid |a| \leqslant x < \frac{8+5\sqrt{5}}{3}|a|\right\}$.

2) Kui $a=0$, siis võrratusel lahend puudub.

3) Kui $a>0$, siis $L_2=\left\{x \,\middle|\, \frac{24-5\sqrt{5}}{11}\cdot a < x < \frac{24+5\sqrt{5}}{11}a\right\}$.

4-57. Võrratus on teisendatav kujule $\sqrt{(x+2a)(x+2b)}<x+a+b$, mis on tõene Cauchy võrratuse põhjal, kui $x+2a \neq x+2b$ e. $a \neq b$. Järelikult viimasel tingimusel on võrratuse lahendiks tema määramispiirkond, milleks on $x \geqslant -2a$, kui $a<b$ ja $x \geqslant -2b$, kui $a>b$. Võrratusel puudub lahend, kui $a=b$.

4-58. 1) Kui a ja b on samamärgilised, siis antud võrratus on samaväärne võrratusega $2(b-a)x<(a+b)^2$, millest $a>b$ korral $x>\frac{(a+b)^2}{2(b-a)}$ ja $a<b$ korral $x<\frac{(a+b)^2}{2(b-a)}$.

2) Kui a ja b on vastandmärgilised, siis antud võrratus on samaväärne võrratusega $2(b-a)x>(a+b)^2$, millest $a>b$ korral $x<\frac{(a+b)^2}{2(b-a)}$ ja $a<b$ korral $x>\frac{(a+b)^2}{2(b-a)}$.

3) Kui $a=b\neq 0$, siis võrratus $2(b-a)x<(a+b)^2$ on tõene, kui $x \in R$.

4-59. Et määramispiirkond $X=\{y \mid 1 \leqslant y \leqslant 4\}$, siis $L=\{1;\ 2\}$.

4-60. Kui $x=y=z$ ja $x, y, z \in N_1$, siis $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$. Kui aga kõik kolm arvu x, y ja z ei ole omavahel võrdsed, siis

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)>\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}=1 \text{ ja } \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}>3.$$

4-61. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right) \geqslant \sqrt[4]{\geqslant \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{t}\cdot\frac{t}{x}}=1$, millest $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x} \geqslant 4$. Võrdus kehtib ainult siis, kui $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{t}=\frac{t}{x}=1$. Järelikult $x=y=z=t$, kus x on mis tahes nullist erinev naturaalarv.

5-1. Viige kõik logaritmid alusele a.

5-2. Viige kõik logaritmid alusele a.

5-3. Viige kõik logaritmid alusele a.

5-4. Tehes nimetajas asenduse $1=\log_{1977!} 1977!$ näidake, et antud avaldis on võrdne $\log_{1987!} 1977!$. Viimasele liitke ja lahutage temast $\log_{1978!} 1978$.

5-5. Viige kõik logaritmid alusele 2.

Vastus: $L=\{(x;\ y)\,|\,(x=4 \vee x=\sqrt{2}) \wedge (y \in R^+ \wedge y \neq 1)\}$.

5-6. Viige vasak pool alusele a.

5-7. Näidake, et $\log_{14} 8=\dfrac{3}{\log_2 7+1}$ ja $\log_2 7=\dfrac{2}{m}$.

5-8. *Vastus:* $\dfrac{3}{4}$.

5-9. Kasutades ülesandes 5-6. tõestatud samasust saate näidata, et antud logaritmid on võrdsed.

5-10. Avaldage otsitav logaritm $\log_4 5$ ja $\log_4 3$ kaudu. Sama tehke ka logaritmidega $\log_4 15$ ja $\log_2 3\sqrt{5}$. Viimaste abil saate näidata, et $\log_4 3=b-a$ ja $\log_4 5=2a-b$.

Vastus: $\dfrac{1+2a-b}{2(b-a)}$.

5-11. *Vastus:* $\dfrac{2-a}{a+b}$.

5-12. Võtke abiks graafikud.

Vastus: $L=\{0{,}25;\ 0{,}364;\ 0{,}5\}$.

5-13. a) on, b) ei ole, c) on, d) on, e) ei tarvitse olla.

5-14. Lahendage näite 11 eeskujul.

Vastus: $L=\{2\}$.

5-15. Lahendage näite 12 eeskujul.

Vastus: $L=\{\pm 2\}$.

5-16. Lahendage näite 12 eeskujul.

Vastus: $L=\{\pm 3\}$.

5-17. Lahendage näite 12 eeskujul.

Vastus: $L=\{\pm 2\}$.

5-18. Tähistades $2^x=u$, saate võrrandi $|u-1|+|u-2|=1$.

Vastus: $L=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

5-19. Logaritmige alusel $x-1$.

Vastus: $L=\{0{,}1;\ 1000\}$.

5-20. Olgu $\sqrt{\log_5 x}=u$ ja $\sqrt[3]{\log_5 x}=v$, siis $u+v=2$ ja $\log_5 x=$ $=u^2=v^3$.

Vastus: $L=\{5\}$.

5-21. Viige kõik logaritmid alusele 2, taandage. Võrrandist $\log_2(n+1)=10\Rightarrow n+1=2^{10}$.

Vastus: $L=\{1023\}$.

5-22. Võrrandi määramispiirkonnaks on $3-\sqrt{1-2x+x^2}>0\Rightarrow$ $\Rightarrow -2<x<4$. Kuna $\sqrt{1-2x+x^2}=|1-x|$, siis vaadelge eraldi juhte, kus $x<1$ ja $x\geqslant 1$.

Vastus: $L=\left\{\frac{9-\sqrt{29}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

5-23. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2-16}=-\log_3\frac{1}{x^2-16}=\log_3(x^2-16)$.

$\log_{\frac{1}{2}}u=-\log_2 u$; $\log_2\log_3(x^2-16)=1\Leftrightarrow\log_3(x^2-16)=$ $=2\Leftrightarrow x^2-16=9$.

Vastus: $L=\{\pm 5\}$.

5-24. Võrrandi määramispiirkond on määratud võrratustega $a>1$, $a\neq\sqrt{2}$, $x>0$, $x\neq 1$, $x<2a$. Kasutades seost $\frac{\log_a b}{\log_a c}=$ $=\log_c b$ ja et $\frac{\log_a\sqrt{x}}{\log_{a^2}2}=\frac{\log_a x}{\log_a 2}$, saate võrrandi esitada kujul $\log_2(2a-x)+\log_2 x=\log_2(a^2-1)$.

Vastus: kui $a>1$, $a\neq\sqrt{2}$ ja $a\neq 2$, siis $L=\{a\pm 1\}$;
kui $a=2$, siis $L=\{3\}$;
kui $a<1$ või $a=\sqrt{2}$, siis $L=\varnothing$

5-25. Võrrandi määramispiirkond on määratud võrratustega $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $x\neq 2a$, $\frac{a^2-4}{2a-x}>0$, $\frac{a^2-4}{2a-x}\neq 1$. Võrrandi saate esitada kujul $\log_{a^2}\frac{a^2-4}{2a-x}=\log_a\sqrt{x}$.

Vastus: kui $2<a<3$ või $a>3$, siis $L=\{a\pm 2\}$;
kui $0<a<1, 1<a<2$ või $a=3$, siis $L=\{a+2\}$;
kui $a\leqslant 0$, $a=1$ või $a=2$, siis $L=\varnothing$.

5-26. Jagage võrrandi pooled avaldisega $(ab)^{\frac{1}{x}}$, asendage $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}}=u$, siis $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{u}$.

Vastus: kui $m>2$, siis $L=\dfrac{\log|a|-\log|b|}{\log\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4}}{2}}$;
kui $m\leqslant 2$, siis $L=\varnothing$.

5-27. Potentseerides saate, et $2x(2-x)=\log p$. Võrrandil on lahend, kui $0<x<2$ ja $\log p>0\Rightarrow p>1$ ning $1-\frac{\log p}{2}\geqslant 0\Rightarrow p\leqslant 100$.

Vastus: kui $1<p\leqslant 100$, siis $L=\left\{1\pm\sqrt{1-\frac{\log p}{2}}\right\}$;
kui $p\leqslant 1$ või $p>100$, siis $L=\varnothing$.

5-28. $\log_{\sqrt{x}}(x+12)=2\log_x(x+12)$, $\log_{x+2}x=\dfrac{1}{\log_x(x+12)}$. Seega $\log^2_x(x+12)=4\Leftrightarrow\log_x(x+12)=\pm 2$. Võrrandi $x^2=x+12$ täisarvuliseks lahendiks on 4 (—3 ei kuulu esialgse võrrandi määramispiirkonda), võrrandil $x^{-2}=x+12$ täisarvulised lahendid puuduvad.

5-29. Pärast lihtsustamist saate süsteemi

$$\begin{cases} \log_5 x = \frac{2}{3}, \\ \sqrt{y} + x^2 = 10. \end{cases}$$

Vastus: $L = \{(\sqrt[3]{25};\ 10 - 5\sqrt[3]{5})\}$.

5-30. Võrrandisüsteemi määramispiirkonnaks on $0 < x \neq 1$, $0 < y \neq 1$. Logaritmides võrrandite pooled, saate pärast lihtsustamist võrrandi $\log^2 x = 4\log^2 y$, millest $x = y^2$ või $x = \frac{1}{y^2}$.

Vastus: $L = \left\{\left(\frac{81}{16};\ \frac{4}{9}\right)\right\}$.

5-31. Võrrandisüsteemi määramispiirkonnaks on $0 < x$, $0 < y \neq 1$, $0 < a \neq 1$. Logaritmige esimese võrrandi pooled alusel a. Olgu näiteks $\log_a x = u$ ja $\log_a y = v$. Saate võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} bu = cv, \\ u - v = \frac{u}{v}, \end{cases}$$

millest $u = \frac{c^2}{b(c-b)}$, $v = \frac{c}{c-b}$.

Vastus: kui $abc = 0$, $a < 0$ või $b = c$, siis $L = \varnothing$;

kui $a > 0$, $b \neq c$, $bc \neq 0$, siis

$$L = \left\{\left(a^{\frac{c^2}{b(c-b)}};\ a^{\frac{c}{c-b}}\right)\right\}.$$

5-32. Kasutage matemaatilise induktsiooni meetodit.

5-33. Et erinevate arvude korral $AK > GK$, siis $\frac{1}{5}(\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 + \log_8 4) >$

$$> \sqrt[5]{\log_4 5 \cdot \frac{1}{\log_6 5} \cdot \log_6 7 \cdot \frac{\log_4 8}{\log_4 7} \cdot \log_8 4} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{\log_6 7}{\log_6 5} \cdot \frac{\log_4 7}{\log_4 7}} = \sqrt[5]{\log_5 7 \cdot \log_7 5} = 1.$$

5-34. Pärast kõigi logaritmide viimist alusele π on võrratuse vasak pool teisendatav arvuks $\log_\pi 100$. Et $\pi^2<10$, siis $\pi^4<100$ ja $\log_\pi 100>4$.

5-35. 1) Kui $a<1$, siis $a^n>a^m$ ja järelikult $1+a^n>1+a^m$ ning $(1+a^n)^m>(1+a^m)^n$; logaritmides saame $m \log (1+a^n)>n \log (1+a^m) \Rightarrow \frac{1}{m} \log (1+a^m)<\frac{1}{n} (1+a^n)$.

2) Kui $a\geqslant 1$, siis $a^n\leqslant a^m \Rightarrow \frac{1}{a^n}\geqslant\frac{1}{a^m} \Rightarrow 1+\frac{1}{a^n}\geqslant 1+\frac{1}{a^m} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a^n}\right)^m>\left(1+\frac{1}{a^m}\right)^n \Rightarrow (1+a^n)^m>(1+a^m)^n$ jne.

5-36. *Vastus:* $L=\{x|x<-2\}$.

5-37. *Vastus:* $L=\{x|x<-9 \vee x>0{,}6\}$.

5-38. Andke võrratusele kuju $(0{,}5x)^{x^2-x}>(0{,}5x)^2$.

Vastus: $L=\{x|0<x<2 \vee x>2\}$.

5-39. 1) $-1<x<1 \Rightarrow 3+5x-2x^2>0 \Rightarrow -0{,}5<x<3 \Rightarrow$ $\Rightarrow -0{,}5<x<1$.

2) $x>1 \vee x<-1 \Rightarrow 3+5x-2x^2<0 \Rightarrow x>3 \vee x<$ $<-0{,}5 \Rightarrow x<-1 \vee x>3$.

Vastus: $L=\{x|x<-1 \vee -0{,}5<x<1 \vee x>3\}$.

5-40. 1) $x-1>0 \Rightarrow x>1$.

a) $x-1>1 \Rightarrow x>2$. Et nüüd $x>x^2$, millest $0<x<1$, siis lahend puudub.

b) $0<x-1<1 \Rightarrow 1<x<2$. Nüüd $x<x^2$ ja $x>1 \vee$ $\vee x<0$. Seega $1<x<2$.

2) $x-1<0 \Rightarrow x<1$.

a) $-1<x-1<0 \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow (1-x)^x>(1-x)^{x^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x<x^2$, mis on antud juhul ilmselt väär.

b) $x-1<-1 \Rightarrow x<0$. Et siin astendatava absoluutväärtus on ühest suurem, siis peab $x>x^2$, mis on aga antud tingimusel $(x<0)$ väär.

Vastus: $L=\{x|1<x<2\}$.

5-41. Kui $0<1-x<1$ ehk $0<x<1$, siis $x<1-x$ ja $x<0,5$. Seega $L=\{x|0<x<0,5\}$. Ei ole võimalik, et $1-x>1$, sest siis $x<0$, mis ei kuulu määramispiirkonda.

5-42. Leidke võrratuse määramispiirkond tingimustest x^2-4x+ $+5>0$ ja $1-\log_3(x^2-4x+5)\geqslant 0$. $D=\{x|2-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant$ $\leqslant 2+\sqrt{2}\}$. Kasutades abimuutujat $z=\log_3(x^2-4x+5)$ lahendage võrratus z suhtes ja seejärel x suhtes.

Vastus: $L=\{x|2-\sqrt{2}\leqslant x<2 \vee 2<x\leqslant 2+\sqrt{2}\}$.

5-43. Teisendage kõik logaritmid alusele 2. Lihtsustamisel saadud võrratus $\dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x(\log_2 x+1)}<0$ lahendage intervallmeetodil $\log_2 x$ suhtes. Et $\log_2 x$ kuulub vahemikesse $0<\log_2 x<1$ või $\log_2 x<-1$, siis $L=\{x|0<x<0,5 \vee 1<$ $<x<2\}$.

5-44. Kui olete leidnud võrratuse määramispiirkonna, siis näete, et võrratuse mõlema poole korrutamisel avaldisega $\log_2(x+17)$ jääb võrratus samapidiseks, kui $-16<x<-1$ või $x>4$ ja muutub vastupidiseks, kui $-17<x<-16$.

Vastus: $L=\{x|-17<x<-16 \vee -3\leqslant x<-1 \vee 4<x\leqslant 7\}$.

5-45. Pärast võrratuse mõlema poole kahega astendamist saab võrratuse esitada kujul $(\log_a x-2)(\log_a x+1)>0$, millest intervallmeetodil saame $\log_a x>2$ või $\log_a x<-1$. Et algvõrratuse parema poole mittenegatiivsuse tõttu $\log_a x>0$, siis langeb teine võimalus ära ja analüüsida tuleb ainult võrratust $\log_a x>2$.

Vastus: kui $0<a<1$, siis $0<x<a^2$;

kui $a>1$, siis $x>a^2$.

SISUKORD

Харри Кеэрутая, Кальюю Крузе, Лембит Тартес

Материалы для внеклассной работы по математике в IX—XI классах

На эстонском языке.
Художник-оформитель Т. Ару.
Таллин, «Валгус».

Toimetaja T. Kilgas.
Kunstiline toimetaja Ü. Meister.
Tehniline toimetaja L. Krikmann.
Korrektorid L. Kondraševa, M. Lillipuu.
ИБ № 3461

Laduda antud 23. 11. 82.
Trükkida antud 17. 03. 83.
Formaat 60×90/16.
Trükipaber nr. 2.
Kiri literaturnaja.
Kõrgtrükk.
Tingtrükipoognaid 9,0.
Tingvärvitõmmiseid 9,25.
Arvestuspoognaid 6,94.
Trükiarv 7000.
Tellimuse nr. 3498.

Hind 15 kop.

Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10. Hans Heidemanni nim. trükikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. I.

15 kop.

Nagu näitavad eksameil antud vastused, pole isegi üliõpilaskandidaatidel selgust, milliste teisenduste tulemusena võivad võrrandi või võrratuste lahendid kaotsi minna või tekkida võõrlahendid. Ka õpetajate hulgas pole alati üksmeelt küsimuses, kas leitud lahendit on vaja kontrollida või mitte. Käesolev raamat (pt. III. ...V) püüab süvendada võrrandite ja võrratuste lahendamise oskust. Peale selle on raamatus täiendavat materjali koolikursusele arvuteooriast (I pt.), algebralistest teisendustest (II pt.), parameetreid sisaldavatest võrranditest ja võrratustest. Samuti on vaadeldud mõningaid ülesannete lahendamisel kasutatavaid erivõtteid.

Iga peatüki algul antud teoreetilisele osale tuleb vaadata kui teatmematerjalile. Pole vaja teoreeme pähe õppida, vaid omandada ülesannete lahendamiseks vastav teoreetiline baas.

Raamatus on toodud üle 400 ülesande, millest ligemale kolmandik on lahendatud näidisülesannetena. Iseseisvaks lahendamiseks mõeldud ülesannetele on antud viimases peatükis näpunäited või lahendused ja vastused.