

Matemaatika olümpiaadid

Algebra

Ülesanne 1

Lahendage võrrand:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$$

Ülesanne 2

Lahendage võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \\ x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

Ülesanne 3

Tõestada võrratus:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^8 \geq 64ab(a+b)^2, \quad \text{kui } a, b > 0$$

Ülesanne 4

Tõestada võrratus:

$$1.001^n > 1000, \quad \text{kui } n > 999000$$

Ülesanne 5

1. Leia kõik surjektiivsed funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ puhul

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1.$$

2. Leia kõik injektiivsed funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ puhul

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + 1.$$

Ülesanne 6

Tähistagu $\mathbb{N}$ kõikide positiivsete täisarvude hulka. Vaatleme funktsioone $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, mis rahuldavad iga $n \in \mathbb{N}$ korral tingimusi $f(n) \geq 2$ ja

$$f(n) + f(n+2) = f(n+4)f(n+6) - 1997.$$

1. Leia $f(1997)$ ja $f(1999)$, kui $f(1) = 2$.
2. Kirjelda kõik antud tingimusi rahuldavad funktsioonid.

Ülesanne 7

Leia kõik funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral tingimusi $f(x) \leq x$ ja $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Ülesanne 8

Leia summa

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

Ülesanne 9

Arvjada (a_n) on defineeritud seosega

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

kus $n \geq 3$. Jada liikmed a_1 ja a_2 on fikseeritud, kusjuures $a_2 > 2a_1 > 0$. Leia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$