Funktsioonid

Jan Willemson, Indrek Zolk

29. juuni 2004. a.

Sisukord

1 Teooria ja ülesanded

1.1 Funktsioonid

Funktsioon on üks matemaatika ja hulgateooria põhimõisteid, millega väljendatakse ühe suuruse ühest sõltumist teisest. Konkreetsemalt, olgu antud mingid hulgad X ja Y ning me ütleme, et hulgast X hulka Y on määratud *funktsioon*, kui on kirjeldatud, kuidas hulga X igale elemendi alusel määrata üks (ja täpselt üks) hulga Y element.

Näide 1. Olgu X kõikvõimalike kuupäevade ja Y kõikvõimalike kellaaegade hulk. Siis saame defineerida funktsiooni, mis seab igale kuupäevale vastavusse päikese tõusmise kellaaja sel päeval Tartus.

Näide 2. Olgu X tasandi kõigi ringjoonte ja Y tasandi kõigi punktide hulk. Siis saame defineerida funktsiooni, mis määrab iga ringjoone jaoks tema keskpunkti.

Näide 3. Olgu $X = \mathbb{Z}$ ja $Y = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Kui seame igale täisarvule vastavusse tema ruudu, oleme kirjeldanud funktsiooni hulgast X hulka Y.

Tihti võib leida ka vastavusi, kus element hulgast X ei määra üheselt elementi hulgast Y või kui vastavus pole määratud kõigi hulga X elementide jaoks. Rangelt võttes pole siis tegemist funktsiooniga.

Näide 4. Olgu X noormeeste ja Y neidude hulk tantsuõhtul. Soovides kirjeldada, milline noormees millise neiuga tantsis, ei saa me üldjuhul funktsiooni, sest mõni noormees ei pruukinud üldse püsti tõusta, mõni aga võis tantsida mitme neiuga.

Näide 5. Olgu $X = (0, \infty)$ ja $Y = \mathbb{R}$. Olukord, kus elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse tema ruutjuur hulgast Y, ei ole funktsioon, sest mittenegatiivse reaalarvu ruutjuurel on üldjuhul kaks väärtust. Küll aga saaksime funktsiooni, kui võtaksime ka $Y = (0, \infty)$.

Näide 6. Olgu $X = Y = \mathbb{R}$. Püüdes iga reaalarvu $x \in X$ korral leida tema tangensit, ei saa me funktsiooni, sest näiteks juhul $x = \dfrac{\pi}{2}$ pole $\tan x$ määratud. Võttes aga $X = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, muutub tangensfunktsiooni kirjeldus korrektseks.

Toodud näidetest võib näha ka, et kuigi funktsioon peab hulga X igale elemendile seadma vastavusse täpselt ühe elemendi hulgast Y, pole keelatud olukord, kus mitmele hulga X elemendile vastab sama element hulgast Y. Kõige äärmuslikumal juhul vastab hulga X kõigile elementidele üks ja sama hulga Y element; määratavat funktsiooni nimetatakse sel juhul *konstantseks*.

Funktsioone tähistame enamasti (aga mitte alati) ladina väiketähtedega f, g, h, ... Olukorda, kus f tähistab funktsiooni hulgast X hulka Y, märgime

$$f : X \to Y.$$

Olukorda, kus funktsioon f seab elemendile $x \in X$ vastavusse elemendi $y \in Y$ märgime

$$f(x) = y \quad \text{või} \quad f : x \mapsto y.$$

Funktsioonide võrdsus

Paneme tähele, et sisuliselt sama funktsionaalset vastavust võib määrata mitmel erineval viisil.

Näide 7. Olgu X mingi linna telefoniomanike hulk ja Y sama linna telefoninumbrite hulk. Inimese telefoninumbri kindlakstegemine telefoniraamatu abil annab ühe, sama operatsioon infotelefoni abil aga teise vastavuse. Samas kui nii telefoniraamat kui infotelefoni andmebaas on täpsed, langevad tulemused alati kokku.

Näide 8. Defineerides $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ kui $f : x \mapsto |x|$ ja $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ kui $g : x \mapsto \sqrt{x^2}$ näeme, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) = g(x)$.

Definitsioon 1. Ütleme, et funktsioonid $f : X \to Y$ ja $g : X \to Y$ on *võrdsed*, kui iga $x \in X$ korral $f(x) = g(x)$. Sellist olukorda tähistame ka $f \equiv g$.

1.2 Funktsionaalvõrrandid

Tavaline arvvõrrandiülesanne tähendab, et tuleb leida kõik antud tingimust rahuldavad arvud.

Näide 9. Leia kõik reaalarvud, mis rahuldavad tingimust $x^2 = 4(x - 1)$. (Vastus: $x = 2$ on ainus lahend.)

Funktsionaalvõrrandi korral tuleb analoogiliselt leida kõik antud tingimust rahuldavad funktsioonid. Mida see tähendab? Kuna funktsiooni $f : X \to Y$ määramiseks tuleb kirjeldada, kuidas seada hulga X elementidele vastavusse hulga Y elemente, tähendabki funktsionaalvõrrandi lahendamine sobivate vastavuseeskirjade leidmist. Seejuures tuleb tähele panna järgmisi asjaolusid.

- Nagu eelpool nägime, on sama funktsiooni kirjeldamiseks palju erinevaid võimalusi. Üldiselt püütakse lahendina esitada lihtsaim võimalik kirjeldus; olümpiaadidel antavad ülesanded ongi nii valitud, et neil leiduks üks ilmselt lihtsaimal kujul vastus.

- Funktsionaalvõrrandi lahendamiseks ei piisa, kui lugeda üles vaid mõni sobiv funktsioon, sest üldjuhul võib vastuseid olla palju. Lisaks tuleb kindlasti anda tõestus, et rohkem lahendeid pole. See tõestus moodustab funktsionaalvõrrandi lahendusest reeglina suurema ja raskema osa.

Näide 10.
Ülesanne. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille jaoks iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus $(f(x))^2 = 4x(f(x) - x)$.

Lahendus. Pärast väikest katsetamist osutub, et lahendiks sobib funktsioon, mis seab igale reaalarvule x vastavusse arvu $2x$ (st funktsioon $f(x) = 2x$), sest $(2x)^2 = 4x^2 = 4x(2x - x)$. Miks ükski sellest funktsioonist erinev funktsioon ei sobi? Võtame suvalise $x \in \mathbb{R}$ ja tõestame, et selle x korral $f(x) = 2x$. See tähendab, et kui mõni teine funktsioon ka rahuldaks ülesande tingimust, peaks tema väärtus iga $x \in \mathbb{R}$ korral funktsiooni $f(x) = 2x$ väärtusega kokku langema ning järelikult on need kaks funktsiooni võrdsed. Olgu $f(x) = y$, siis teame ülesande tingimustest, et $y^2 = 4x(y - x)$. Viimane võrrand on aga samaväärne võrdusega $(y - 2x)^2 = 0$, millest järeldub $y - 2x = 0$ ehk $y = 2x$, nagu oligi tarvis.

1.3 Asendusmeetod

Sageli võimaldavad funktsionaalvõrrandid otsitava funktsiooni väärtusi mõnel konkreetsel argumendi väärtusel lihtsalt kindlaks teha.

Näide 11.
Ülesanne. Olgu antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldab tingimust $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Leia $f(0)$ kõik võimalikud väärtused.

Lahendus. Kuna ülesande võrdus kehtib kõigi argumentide väärtuste korral, peab ta kehtima ka $x = y = 0$ korral. Vastavat asendust tehes saame

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Lahutades võrduse mõlemalt poolt $f(0)$, on tulemuseks $f(0) = 0$, seega on $f(0)$ ainus võimalik väärtus 0. See väärtus realiseerub näiteks funktsioonide $f(x) = 0$ ja $f(x) = x$ korral.

Näide 12.
Ülesanne. Olgu antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldab tingimust $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Leia $f(1)$ kõik võimalikud väärtused.

Lahendus. Kuna ülesande võrdus kehtib kõigi argumentide väärtuste korral, peab ta kehtima ka $x = y = 1$ korral. Vastavat asendust tehes saame

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2.$$

Võrrandil $z = z^2$ on kaks lahendit $z = 0$ ja $z = 1$, mis on ka antud ülesande vastusteks. Esimene väärtus realiseerub näiteks funktsiooni $f(x) = 0$, teine aga funktsiooni $f(x) = 1$ korral.

Peale funktsiooni väärtuste mingitel kohtadel võimaldavad õigesti valitud asendused määrata ma mitmeid funktsioonide omadusi.

Näide 13.
Ülesanne. Olgu antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldab tingimust $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Tõesta, et

(a) f on paaritu funktsioon;

(b) iga naturaalarvu n ja iga reaalarvu x korral $f(nx) = nf(x)$.

Lahendus.

(a) Valime suvalise $z \in \mathbb{R}$ ja asendame $x = z$, $y = -z$. Tulemusena saame:

$$f(0) = f(z - z) = f(z) + f(-z).$$

Kuna näite 11 põhjal $f(0) = 0$, siis $f(z) = -f(-z)$ ja järelikult on f paaritu.

(b) Kui $n = 0$, siis järeldub väide ülesandest 11, juhul $n = 1$ pole midagi tõestada, juhul $n = 2$ saame vajaliku väite võttes $x = y$:

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Üldjuhu jaoks kasutame matemaatilist induktsiooni. Baas on juhtudel $n = 0, 1, 2$ juba kontrollitud, induktsiooni sammu jaoks eeldame mingi n korral, et $f(nx) = nf(x)$ ja tõestame, et siis $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$. Asendame $y = nx$:

$$\begin{aligned} f((n+1)x) = f(x + nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = \\ = (n+1)f(x). \end{aligned}$$

Ülesanne 1. (New York 1976) Mittekonstantsete funktsioonide $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korral kehtivad iga $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks võrdused

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x)g(y) + g(x)f(y), \\ g(x + y) &= g(x)g(y) - f(x)f(y). \end{aligned}$$

Leia $f(0)$ ja $g(0)$ kõik võimalikud väärtused.

1.4 Injektiivsed, sürjektiivsed ja monotoonsed funktsioonid

Olgu X ja Y hulgad.

Definitsioon 2. Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse *injektiivseks* ehk *üksüheseks*, kui mistahes $x_1, x_2 \in X$ korral

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Teisisõnu tähendab funktsiooni üksühesus, et kaks erinevat elementi ei või selle funktsiooni abil samaks elemendiks kujutuda.

Definitsioon 3. Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse *sürjektiivseks* funktsiooniks ehk *pealekujutuseks*, kui mistahes $y \in Y$ korral leidub $x \in X$ nii, et $f(x) = y$.

Teisisõnu tähendab pealekujutuseks olemine, et antud funktsiooni väärtustena esinevad kõik kujutishulga elemendid.

Definitsioon 4. Funktsiooni $f : X \to Y$ nimetatakse *bijektiivseks* funktsiooniks ehk *üksüheseks vastavuseks*, kui ta on injektiivne ja sürjektiivne.

Teisisõnu tähendab funktsiooni bijektiivsus, et kõik kujutishulga elemendid esituvad funktsiooni väärtustena täpselt üks kord.

Ülesanne 2. Olgu funktsioonid $f : X \to Y$ ja $g : Y \to X$ sellised, et $g(f(x)) = x$ mistahes $x \in X$ korral. Tõesta, et f on injektiivne ja g sürjektiivne.

Ülesanne 3. Tõesta, et mistahes funktsiooni $f : X \to Y$ korral leidub hulk Z ja funktsioonid $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ nii, et g on injektiivne, h on sürjektiivne ja $f(x) = h(g(x))$ mistahes $x \in X$ puhul.

Ülesanne 4. Olgu $f : X \to X$ funktsioon, mis rahuldab $f(f(x)) = x$ mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõesta, et see funktsioon on bijektsioon.

Definitsioon 5. Olgu $A \subseteq \mathbb{R}$. Funktsiooni $f : A \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kasvavaks* (*kahanevaks*), kui mistahes $x, y \in A$ korral

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y) \qquad (f(x) > f(y)).$$

Funktsiooni $f : A \to \mathbb{R}$ nimetatakse *mittekahanevaks* (*mittekasvavaks*), kui mistahes $x, y \in A$ korral

$$x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y) \qquad (f(x) \geqslant f(y)).$$

Funktsiooni nimetatakse *monotoonseks*, kui ta on kas mittekahanev või mittekasvav. Funktsiooni nimetatakse *rangelt monotoonseks*, kui ta on kas kasvav või kahanev.

Ülesanne 5. Tõesta, et rangelt monotoonne funktsioon on üksühene.

Ülesanne 6. (Itaalia 1999) Leia kõik rangelt monotoonsed funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ jaoks kehtib võrdus

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

1.5 Cauchy meetod

Cauchy[1] meetodi korral püütakse leida kõigepealt funktsiooni $f(x)$ väärtused naturaalarvude korral, siis täisarvude ning seejärel ratsionaalarvude korral. Täiendavaid eeldusi (pidevus, monotoonsus jmt.) kasutades saab lahendi seejärel laiendada kõigile reaalarvudele.

Klassikalised näited funktsionaalvõrranditest, kus niisugust lähenemist rakendada saab, on järgmised.

Definitsioon 6. Funktsionaalvõrrandeid

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

[1]Prantsuse matemaatiku Augustin Louis Cauchy [ko'ši] (1789–1857) järgi.

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2}$$
$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{3}$$
$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{4}$$

nimetatakse *Cauchy funktsionaalvõrranditeks.*

Näide 14.
Ülesanne. Näita, et kõik funktsioonid $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrrandit (1), avalduvad parajasti kujul $f(x) = ax$, kus a on mingi reaalarv.

Lahendus. Lihtne on kontrollida, et kõik funktsioonid kujul $f(x) = ax$ sobivad lahendeiks:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Näitest 13 teame, et iga naturaalarvu n korral $f(nx) = nf(x)$. Võrrandi (1) ja näite 11 põhjal

$$0 = f(0) = f(nx + (-nx)) = f(nx) + f(-nx)$$

ja järelikult $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. Seega kehtib võrdus $f(px) = pf(x)$ kõigi täisarvude p korral.

Saadud võrdusele toetudes piisaks funktsiooni f väärtuse määramiseks kõigil täisarvudel, kui me teaksime tema väärtust kohal $x = 1$, siis $f(p) = f(p \cdot 1) = pf(1)$. Kuidas $f(1)$ teada saada? Ülesanne ütleb ette, et see pole võimalik: sobiva funktsiooni valikul võib $f(1)$ omada suvalist reaalarvulist väärtust. Ülesanne ütleb rohkemgi: iga $f(1)$ väärtus realiseerub täpselt ühe sobiva funktsiooni korral. Et lahendusega edasi minna, tuleb $f(1)$ fikseerida; olgu siis $f(1) = a$.

Valime nüüd suvalise ratsionaalarvu $\frac{p}{q}$, kus $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ja näitame, et $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot a$. Eespooltõestatut kasutades saame

$$pa = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right),$$

millest järeldubki vajalik võrdus. Seega iga ratsionaalarvu x koral $f(x) = ax$.

Kas võib väita, et suvaline funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldab võrrandit (1), peab esituma kujul $f(x) = ax$? Osutub, et ei või. Võrrandil (1) on üldjuhul lõpmata palju lahendeid, mis niisugusel kujul ei esitu, kuid nende konstrueerimine jääb käesoleva brošüüri raamest kaugele välja.

Küll aga näitame, et eeldades lisaks funktsiooni f pidevust jäävad võrrandile (1) ainult lahendid kujul $f(x) = ax$.

Näide 15.
Ülesanne. Näita, et kõik pidevad funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrrandit (1), avalduvad parajasti kujul $f(x) = ax$, kus a on mingi reaalarv.

Lahendus. Me teame juba näitest 14, et leidub niisugune $a \in \mathbb{R}$, et iga $x \in \mathbb{Q}$ korral $f(x) = ax$. Olgu nüüd antud suvaline $x \in \mathbb{R}$. Siis leidub jada $x_n \in \mathbb{Q}$ nii, et $x_n \to x$ protsessis $n \to \infty$. Kuna f on pidev, siis

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(1)x_n = f(1) \lim_{n\to\infty} x_n = ax.$$

Ülesanne 7.

(a) Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Näita, et võrrandi (2) lahendid esituvad parajasti kujul $f(x) = a^x$, kus $a \geqslant 0$.

(b) Olgu $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Näita, et võrrandite (3) ja (4) lahenditeks on vastavalt funktsioonid $f(x) = x^a$ ja $f(x) = a \ln x$, kus $a \in \mathbb{R}$.

Ülesanne 8. Leidugu funktsioonil f punktis $x_0 \in \mathbb{R}$ lõplik tuletis. Lahenda võrrand (1).

Ülesanne 9. Olgu mittekahanev funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline, et ta rahuldab võrrandit (1). Leia kõik sellised funktsioonid f.

Ülesanne 10. Olgu funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline, et ta rahuldab võrrandit (1) ning kehtib $x \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. Leia kõik sellised funktsioonid f.

Ülesanne 11. (Põhjamaade matemaatikavõistlus 1998) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, mille jaoks kõigi $x, y \in \mathbb{Q}$ korral kehtib võrdus

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y).$$

1.6 Perioodilised funktsioonid

Definitsioon 7. Funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimetatakse *perioodiliseks* perioodiga $p > 0$, kui $f(x) = f(x + kp)$ mistahes täisarvu k korral.

Tuntuimad perioodilised on trigonomeetrilised funktsioonid $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ ja mõned nende abil moodustatud liitfunktsioonid.

1.7 Paaris- ja paaritud funktsioonid

Definitsioon 8. Funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimetatakse *paarisfunktsiooniks*, kui $f(x) = f(-x)$, ja *paarituks* funktsiooniks, kui $f(x) = -f(-x)$ mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral.

Tuntuimad paarisfunktsioonid on $\cos x$ ja ainult paarisastmeid sisaldavad polünoomid; paaritud on aga $\sin x$ ning ainult paarituid astmeid sisaldavad polünoomid.

Ülesanne 12. Olgu antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esita see kahe funktsiooni f_1 ja f_2 summana nii, et f_1 oleks paaris- ja f_2 paaritu funktsioon.

Ülesanne 13. Olgu antud funktsioonid $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on kas paaris või paaritud. Otsusta funktsioonide $f \pm g$, $f \cdot g$ (korrutamine punktiviisi) ning $g \circ f$ (liitfunktsioon) paarsuse üle.

1.8 Funktsionaalvõrrandid täis- või naturaalarvudel

Naturaalarvudel määratud ja naturaalarvuliste väärtustega funktsioonide korral on tihti oluline kasutada ära asjaolu, et naturaalarvuga korrutamine muudab teist naturaalarvu alati suuremaks, v.a. kui vaadeldav tegur võrdub ühega. Nii saab kergesti moodustada lõpmatuid võrdusteahelaid, mis viivad vastuolule.

Näiteks funktsionaalvõrrandil $f(n) = 2f(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$ puudub lahend seepärast, et ahelvõrdusest

$$f(1) = 2f(2) = 2^2 f(3) = \ldots = 2^{n-1} f(n) = \ldots,$$

järeldub, et $2^n \mid f(1)$ iga n korral. See pole aga naturaalarvude vallas võimalik.

Tihti ongi naturaalsete väärtustega funktsioonide korral ülesandeks: tõesta, et ei leidu funktsiooni, mis rahuldaks antud funktsionaalvõrrandit. Mugavaks viisiks vastuolu saamisel võib sel juhul osutuda näitamine, et funktsiooni teatud väärtus peab olema murdarvuline vmt.

Käesolevas õppevahendis jätame kõrvale arvuteoreetilisi funktsioone kasutavad ja kindlasti diskreetse matemaatika valdkonda kuuluvad funktsioonidega seotud ülesanded.

1.9 Arvjadad

1.9.1 Arvjada mõiste

Definitsioon 9. Kui igale naturaalarvule n on seatud vastavusse kindel reaalarv x_n, siis öeldakse, et on antud *arvjada* (ehk lihtsalt *jada*)

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{5}$$

Arvusid x_n nimetatakse jada (5) *liikmeteks* (või *elementideks*). Arvu n nimetatakse jada liikme x_n *indeksiks*. Jada (5) tähistatakse ka sümboliga $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ või lihtsalt (x_n). Jada (x_n), kus $x_n = x_1$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral, nimetatakse *konstantseks jadaks*.

Definitsioon 10. Arvjadade (x_n) ja (y_n) *summaks* nimetatakse jada (x_n+y_n), *vaheks* — jada $(x_n - y_n)$, korrutiseks — jada $(x_n y_n)$ ning kui $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, siis *jagatiseks* — jada $(\dfrac{x_n}{y_n})$.

Definitsioon 11. Öeldakse, et arvjada (x_n) on

a) *ülalt tõkestatud*, kui leidub arv $M \in \mathbb{R}$ nii, et $x_n \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$;

b) *alt tõkestatud*, kui leidub arv $M \in \mathbb{R}$ nii, et $x_n \geqslant M$, $n \in \mathbb{N}$;

c) *tõkestatud*, kui leiduvad arvud $M, m \in \mathbb{R}$ nii, et $m \leqslant x_n \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}$.

Ülesanne 14. Tõesta, et jada (x_n) on tõkestatud parajasti siis, kui leidub reaalarv $L \geqslant 0$ nii, et $|x_n| \leqslant L$, $n \in L$. Mis jadaga on tegemist, kui $L = 0$?

1.9.2 Arvjada piirväärtus

Definitsioon 12. Arvu $a \in \mathbb{R}$ nimetatakse *jada* (x_n) *piirväärtuseks* ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} = a \quad \text{või} \quad \lim_n x_n = a \quad \text{või} \quad \lim x_n = a$$

või

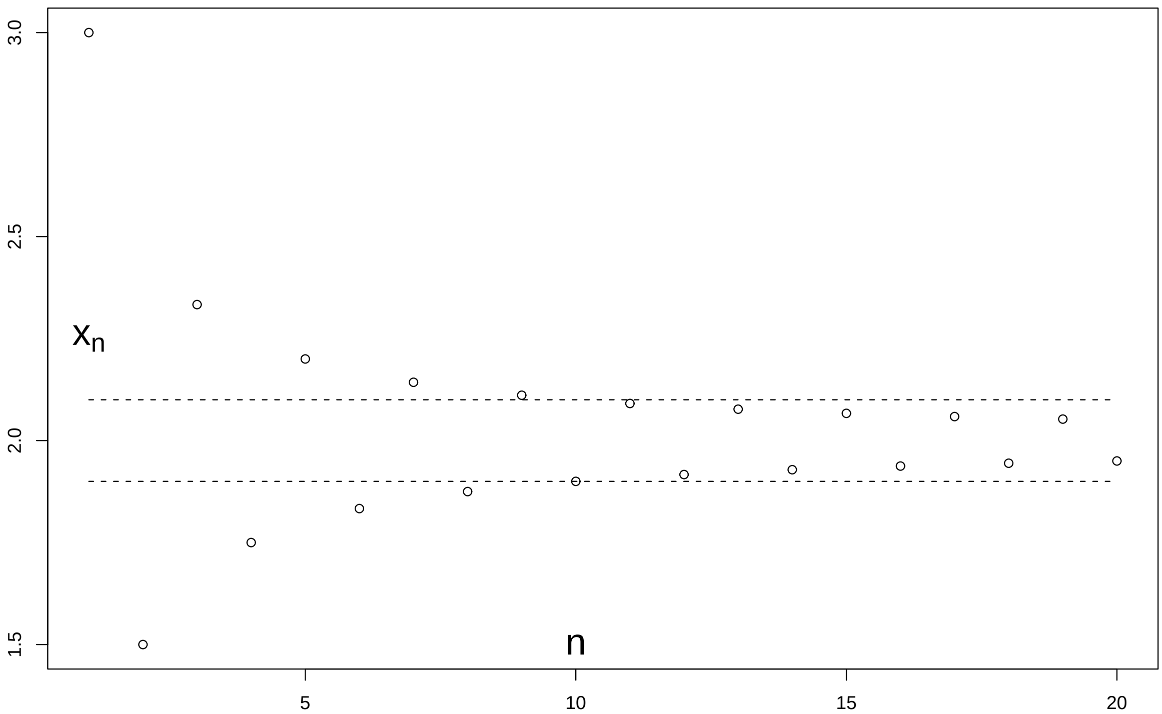
$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{või} \quad x_n \to a,$$

kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et kui $n \geqslant N$, siis

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Kuna võrratus $|x_n - a| < \varepsilon$ on samaväärne tingimusega $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, siis võib jada piirväärtuse definitsiooni sõnastada ka järgmiselt: *öeldakse, et arv $a \in \mathbb{R}$ on jada (x_n) piirväärtus, kui vastavalt arvu a mistahes ümbrusele leidub indeks $N \in \mathbb{N}$, millest alates kõik jada (x_n) liikmed kuuluvad sellesse ümbrusesse.*

Joonisel näeme arvjada $x_n = 2 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ esimesi elemente $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Selle arvjada piirväärtus $a = 2$. Valisime $\varepsilon = 0{,}1$ ning näeme, et alates liikmest x_{10} on kõik jada liikmed ümbruses $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ (tähistatud punktiiriga).



Definitsioon 13. Öeldakse, et arvjada on *koonduv*, kui tal on olemas piirväärtus $a \in \mathbb{R}$. Kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$, siis öeldakse ka, et *jada (x_n) koondub arvuks a* või et *arvud x_n koonduvad piirväärtuseks a.*

Öeldakse, et arvjada on *hajuv*, kui ta pole koonduv.

Ülesanne 15. Tõesta, et koonduval jadal on ainult üks piirväärtus.

Ülesanne 16. Tõesta, et koonduv jada on tõkestatud.

Definitsioon 14. Öeldakse, et arvjada (x_n) on *hääbuv* (ehk *lõpmata väike*), kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Niisiis, *jada* (x_n) *on hääbuv parajasti siis, kui iga reaalarvu* $\varepsilon > 0$ *korral leidub indeks* $N \in \mathbb{N}$ *selliselt, et kui* $n \geqslant N$, *siis*

$$|x_n| < \varepsilon.$$

Ülesanne 17. Tõesta, et jada (x_n) koondub arvuks a parajasti siis, kui tema liikmed esituvad kujul $x_n = a + \alpha_n$, kus (α_n) on hääbuv jada.

Ülesanne 18. Tõesta, et hääbuvate jadade summa ja vahe on hääbuvad jadad.

Ülesanne 19. Tõesta, et tõkestatud jada ja hääbuva jada korrutis on hääbuv jada.

Definitsioon 15. Öeldakse, et jada (x_n) *piirväärtus on* ∞ ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{või} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{või} \quad x_n \to \infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et kui $n \geqslant N$, siis

$$x_n > E.$$

Definitsioon 16. Öeldakse, et jada (x_n) *piirväärtus on* $-\infty$ ja kirjutatakse

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{või} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{või} \quad x_n \to -\infty,$$

kui iga reaalarvu $E > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et kui $n \geqslant N$, siis

$$x_n < -E.$$

Definitsioon 17. Öeldakse, et jada (x_n) on *lõpmata suur*, kui $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.

1.9.3 Koonduvate jadade omadused

Ülesanne 20. Tõesta, et koonduvate jadade (x_n) ja (y_n) summa $(x_n + y_n)$, vahe $(x_n - y_n)$, korrutis $(x_n y_n)$ ning kui $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, siis ka jagatis $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ on koonduvad jadad, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Ülesanne 21. Olgu (x_n) koonduv jada ning olgu $b \in \mathbb{R}$. Tõesta, et

a) Kui alates mingist indeksist $x_n \leqslant b$, siis ka

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant b.$$

b) Kui alates mingist indeksist $x_n \geqslant b$, siis ka

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geqslant b.$$

Võib juhtuda, et koonduva jada liikmed rahuldavad ranget võrratust $x_n > b$, kuid $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Näiteks kui $x_n = \dfrac{1}{n}$, siis $x_n > 0$, kuid $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ülesanne 22. Olgu antud arv $a \in \mathbb{R}$. Leia jadad (x_n) ja (y_n) nii, et $x_n < a < y_n$, $n \in \mathbb{N}$, ent $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Ülesanne 23. Olgu (x_n) ja (y_n) koonduvad jadad, kusjuures alates mingist indeksist $x_n \leqslant y_n$. Tõesta, et siis ka

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Jada piirväärtuse omadust säilitada järjestus (vt. ülesanded 21 ja 23) nimetatakse *jada piirväärtuse monotoonsuseks*.

Ülesanne 24. (nn. sändvitšiteoreem) Rahuldagu jadade (x_n), (y_n) ja (z_n) liikmed alates mingist indeksist tingimust

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

ning koondugu jadad (x_n) ja (z_n) ühiseks piirväärtuseks $c \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c.$$

Tõesta, et siis on ka jada (y_n) koonduv, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Järgnev ülesanne on ülesande 24 lõpmatu analoog.

Ülesanne 25. Rahuldagu jadade (x_n) ja (y_n) liikmed alates mingist indeksist tingimust $x_n \leqslant y_n$.

a) Kui $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

b) Kui $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

1.9.4 Monotoonsed arvjadad

Definitsioon 18. Öeldakse, et jada (x_n) on

a) *mittekahanev*, kui $x_n \leqslant x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) *mittekasvav*, kui $x_n \geqslant x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Mittekahanevaid ja mittekasvavaid jadasid nimetatakse *monotoonseteks jadadeks.*

Definitsioon 19. Öeldakse, et jada (x_n) on

a) *kasvav*, kui $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) *kahanev*, kui $x_n > x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Kasvavaid ja kahanevaid jadasid nimetatakse *rangelt monotoonseteks jadadeks.*

Ülesanne 26.

a) Olgu jada (x_n) mittekahanev. Tõesta, et see jada koondub parajasti siis, kui ta on ülalt tõkestatud.

b) Olgu jada (x_n) mittekasvav. Tõesta, et see jada koondub parajasti siis, kui ta on alt tõkestatud.

Ülesanne 27. Näita, et jada (x_n), kus

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

on ülalt tõkestatud ja mittekahanev.

Ülesanded 26 ja 27 annavad, et jada $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ koondub. Selle jada piirväärtust nimetatakse *arvuks* e.

1.9.5 Arvjada osajadad

Definitsioon 20. Olgu (x_n) arvjada ning olgu (k_n) mingi kasvav naturaalarvude jada, s.t. $k_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, ja

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$$

Eraldame jadast (x_n) välja liikmed indeksitega

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$$

ning reastame nad samas järjekorras:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$$

Saadud arvjada $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nimetatakse jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *osajadaks.*

Ülesanne 28. Tõesta, et

a) Kui jada (x_n) koondub arvuks $a \in \mathbb{R}$, siis ka jada (x_n) mistahes osajada koondub arvuks a.

b) Kui jada (x_n) piirväärtus on ∞, siis ka jada (x_n) mistahes osajada piirväärtus on ∞.

c) Kui jada (x_n) piirväärtus on $-\infty$, siis ka jada (x_n) mistahes osajada piirväärtus on $-\infty$.

Ülesanne 29. Tõesta, et iga jada sisaldab monotoonse osajada.

Ülesanne 30. (Bolzano[2]-Weierstrassi[3] teoreem) Tõesta, et mistahes tõkestatud jadast saab välja eraldada koonduva osajada.

Ülesanne 31. (B-W teoreemi lõpmatu analoog) Tõesta, et

a) Mistahes ülalt tõkestamata jadast saab välja eraldada osajada, mille piirväärtus on ∞.

b) Mistahes alt tõkestamata jadast saab välja eraldada osajada, mille piirväärtus on $-\infty$.

1.9.6 Arvread

Definitsioon 21. Olgu antud arvjada (a_n). Formaalset summat

$$\sum a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nimetatakse *arvreaks* ehk lihtsalt *reaks.*

Definitsioon 22. Öeldakse, et arvrida $\sum a_n$ *koondub*, kui tema osasummade jada

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)_{n=1}^{\infty}$$

koondub. Vastasel korral öeldakse, et arvrida *hajub.*

[2]Tšehhi matemaatiku Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848) järgi.
[3]Saksa matemaatiku Karl Theodor Wilhelm Weierstrassi (1815–1897) järgi.

Definitsioon 23. Öeldakse, et arvrea $\sum a_n$ *summa* on $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, kui selle arvrea osasummade piirväärtus on A.

Ülesanne 32. Tõesta, et kui arvrida $\sum a_n$ koondub, siis $\lim a_n = 0$.

1.9.7 Aritmeetiline ja geomeetriline jada

Definitsioon 24. Olgu antud arvjada (a_n). Kui jadas (a_n) kehtib omadus

$$a_2 - a_1 = a_{n+1} - a_n = \text{const} = d,$$

$n \in \mathbb{N}$, siis nimetatakse jada (a_n) *aritmeetiliseks jadaks*. Konstanti d nimetatakse sealjuures aritmeetilise jada (a_n) *vaheks*.

Juhul $d = 0$ osutub aritmeetiline jada (a_n) konstantseks jadaks.

Praktikas näeme tihti, et aritmeetilise jada indeksite hulgaks võetakse $\mathbb{N} \cup \{0\}$, s.t. jadaks on $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

Ülesanne 33. Näita, et aritmeetilise jada (a_n) korral kehtib

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Tähistame

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Näita, et esimese n liikme summa

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

Definitsioon 25. Olgu antud arvjada (b_n), kusjuures $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Kui jadas (b_n) kehtib omadus

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \text{const} = q,$$

$n \in \mathbb{N}$, siis nimetatakse jada (b_n) *geomeetriliseks jadaks*. Konstanti q nimetatakse sealjuures geomeetrilise jada (b_n) *teguriks*.

Juhul $q = 1$ osutub geomeetriline jada (b_n) konstantseks jadaks.

Praktikas näeme tihti, et geomeetrilise jada indeksite hulgaks võetakse $\mathbb{N} \cup \{0\}$, s.t. jadaks on $b_0, b_1, b_2, \ldots$.

Ülesanne 34. Näita, et geomeetrilise jada (b_n) korral kehtib

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Tähistame

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Näita, et esimese n liikme summa

$$S_n = b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Ülesanne 35. Näita, et geomeetriline jada (b_n) koondub parajasti siis, kui jada tegur $|q| \leqslant 1$. Juhul kui geomeetriline jada (b_n) koondub, leia $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ning geomeetrilise rea

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

summa.

Ülesanne 36. (Eesti lõppvoor, 2000.a., 12. klass) Olgu $x \neq 1$ fikseeritud positiivne arv ja $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mingi arvjada. Tõesta, et $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots$ on mittekonstantne geomeetriline jada siis ja ainult siis, kui $a_1, a_2, a_3, \ldots$ on mittekonstantne aritmeetiline jada.

1.9.8 Rekurrentsed võrrandid

Võib juhtuda, et jada (a_n) on antud kujul

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1),$$

kus f on mingi avaldis, mis sisaldab (võib-olla mitte kõiki) liikmeid a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_1. Tuntuimaks näiteks on siin vahest Fibonacci jada, mis defineeritakse $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ juhul $n > 2$. Selliste jadadega opereerimine võib olla mugav, kui õnnestub avaldada need oma üldliikme kujul, s.t. $a_n = g(n)$, kus g on avaldis, mis sõltub ainult arvust n ning ei sisalda enam jada (a_n) liikmeid ilmutatud kujul.

Taoliste nn. *rekurrentsete võrrandite* lahendamine on alati võimalik, kui a_n sõltub oma eelmistest liikmetest lineaarselt. Lahendame näiteks teist järku lineaarse rekurrentse võrrandi

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2}, \tag{6}$$

millel on veel lisaks antud jada esimesed kaks liiget a_1 ja a_2.

Moodustame võrrandist (6) lähtuvalt tema *karakteristliku võrrandi*

$$q^2 = b_1 q + b_2,$$

mille lahendid olgu q_1 ja q_2 (need lahendid võivad olla ka kompleksarvulised). Oletame nüüd, et kõigi indeksite $k \leqslant n-1$ korral kehtib valem

$$a_k = c_1 q_1^k + c_2 q_2^k, \tag{7}$$

kus c_1 ja c_2 on mingid konstantsed suurused. Tõestame, et seesama valem kehtib ka a_n jaoks,

$$\begin{aligned} a_n &= b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} = b_1(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}) + b_2(c_1 q_1^{n-2} + c_2 q_2^{n-2}) = \\ &= c_1 q_1^{n-2}(b_1 q_1 + b_2) + c_2 q_2^{n-2}(b_1 q_2 + b_2) = \\ &= c_1 q_1^{n-2} \cdot q_1^2 + c_2 q_2^{n-2} \cdot q_2^2 = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n. \end{aligned}$$

Nüüd jääb veel määrata induktsiooni baasi tarvis vajalikud suurused c_1 ja c_2, mis peavad olema sellised, et valem (7) kehtiks juhul $k = 1, 2$. Suurused c_1, c_2 määramegi siis lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 = c_1 q_1 + c_2 q_2 \\ a_2 = c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 \end{cases} \tag{8}$$

lahenditena.

Märkus. Võrrandisüsteemi (8) lahendamine on lihtsam, kui vaadelda jadasid, mille indeksite hulk on $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.10 Polünoomid

Definitsioon 26. Funktsiooni $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimetame *polünoomiks*, kui leiduvad nisugune naturaalarv n ja niisugused reaalarvud $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Naturaalarvu n nimetame polünoomi P *astmeks* (tähistatakse $\deg P$) ning reaalarve $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ tema *kordajateks.* Arvu x_0 nimetame polünoomi P juureks, kui $P(x_0) = 0$.

Analoogiliselt võib polünoome defineerida ka täisarvudel, ratsionaalarvudel jne.

Peale tavaliste võtete funktsionaalvõrrandite lahendamisel saab polünoomide korral kasutada veel mõnesid tulusaid omadusi.

Teoreem 1. Kaks polünoomi on võrdsed parajasti siis, kui nende astmed ja kordajad on vastavalt võrdsed.

Teoreem 2. (Bézout'[4] teoreem) Kui x_0 on polünoomi P juureks, siis avaldub $P(x)$ kujul $P(x) = (x - x_0)R(x)$ mingi polünoomi R jaoks.

[4]Prantsuse matemaatiku Etienne Bézout' (1730–1783) järgi

Ülesanne 37. (Balti Tee 1998) Olgu P 6. astme polünoom ning rahuldagu reaalarvud a ja b tingimusi $0 < a < b$. Olgu $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$ ning $P'(0) = 0$. Tõesta, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus $P(x) = P(-x)$.

1.10.1 Polünoomi kordajate leidmine

Olgu antud polünoom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kujul, kust ei ole võimalik otseselt tema kordajaid välja lugeda. Siis võime kasutada järgmisi omadusi:

Ülesanne 38. Tõesta, et

1) $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

2) $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$;

3) $\dfrac{P(1) + P(-1)}{2} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]}$;

4) $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$.

Ülesanne 39. Tõesta, et

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Märgime[5], et ülesades 39 leitud kordajad esinevad samal kujul ka polünoomidest üldisemate avaldiste, astmeridade teoorias. Nimelt tõestatakse seal

Teoreem 3. (Taylori[6] teoreem) Eksisteerigu funktsioonil f punktis a lõplik n-järku tuletis ($n \in N$). Siis argumendi x iga väärtuse korral punkti a mingist ümbrusest kehtib *Taylori valem*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x),$$

kus $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Võttes teoreemis 3 $a = 0$, $f(x) = P(x)$ ning $n = \deg P$, saamegi ülesande 39 lahenduse.

[5]Selle lõigu vahelejätmine ei sega järgnevast arusaamist

[6]Inglise matemaatiku Brook Taylori (1685–1731) järgi.

1.10.2 Polünoomide juurte leidmisest

Et on, mida leida, põhjendab

Teoreem 4. (Algebra põhiteoreem[7]) Mistahes kompleksarvuliste (sh. reaalarvuliste) kordajatega polünoomil $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ (kus $a_n \neq 0$) on täpselt n kompleksarvulist juurt (lugedes iga juurt niimitu korda, kui suur on selle kordsus).

Järeldus 4.1. Mistahes kompleksarvuliste kordajatega polünoom lahutub lineaartegurite korrutiseks:

$$f(x) = a \cdot (x - c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_s)^{k_s},$$

kus $c_1, \ldots, c_s$ on polünoomi $f(x)$ paarikaupa erinevad (üldiselt kompleksarvulised) juured, iga juure c_i kordsus on k_i, $k_1 + \ldots + k_s = \deg f$ ning a on polünoomi $f(x)$ pealiikme kordaja.

Järeldus 4.2. Mistahes n-astme polünoomil ($n \geqslant 1$) on ülimalt n erinevat reaal- või kompleksarvulist juurt.

Järeldus 4.3. Kui kahe n-astme polünoomi väärtused langevad kokku $n + 1$ punktis, siis langevad nende polünoomide väärtused kokku kõikjal, st need polünoomid on võrdsed.

Lineaar- ja ruutpolünoomi juured leiame koolikursusest tuntud valemite järgi. Kolmanda ja neljanda astme polünoomide juurte leidmiseks on valemid välja töötatud[8], aga need on liialt keerulised praktiliseks kasutamiseks. On tõestatud (Abeli[9] teoreem), mille kohaselt viienda ja kõrgema astme polünoomide juuri ei õnnestu üldkujul avaldada. Siiski on võimalik kasutada teatud kaudseid võtteid ka kõrgema astme polünoomide (vähemalt ratsionaalarvuliste) juurte leidmiseks.

Teoreem 5. Kui täisarvuliste kordajatega polünoomil

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

on ratsionaalarvuline juur $\frac{p}{q}$ (p ja q on ühistegurita), siis a_n jagub p-ga ja a_0 jagub q-ga.

---

[7]Teoreemi tõestas esmakordselt saksa matemaatik Carl Friedrich Gauss 1799.a.

[8]Kuupvõrrandi lahendivalemeid nimetatakse Cardano valemiteks itaalia matemaatiku Girolamo Cardano (1501–1576) järgi. Siiski lahendasid kuupvõrrandi esmakordselt sõltumatult itaalia matemaatikud Scipione dal Ferro (1465–1526) ja Nicolo Tartaglia (1499–1557).

Neljanda astme võrrandi lahendivalemi leidis itaalia matemaatik Lodovico Ferrari (1522–1565).

[9]Norra matemaatiku Niels Henrik Abeli (1802–1829) järgi.

Teoreem 6. Kui a on polünoomi $f(x)$ juur, siis $f(k)$ jagub arvuga $k-a$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

Polünoomi $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ nimetatakse *sümmeetriliseks polünoomiks*, kui $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots$. Sümmeetrilised on näiteks polünoomid

$$\begin{aligned}
&x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1,\\
&2x^6 - 5x^4 + x^3 - 5x^2 + 2,\\
&x^n + 1.
\end{aligned}$$

Paneme kohe tähele, et $x = 0$ ei ole sümmeetrilise polünoomi juureks, vastasel korral oleks kordajate sümmeetrilisuse tõttu pealiikme kordaja 0.

Ülesanne 40. Tõesta, et paarituastmelise sümmeetrilise polünoomi üheks juureks on $x = -1$.

Ülesanne 41. Tõesta, et kui sümmeetrilise polünoomi juureks on $x_1 = \alpha$, siis on tema lahendiks ka $x_2 = \dfrac{1}{\alpha}$.

Ülesanne 42. Tõesta, et suurus $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ on avaldatav $x + \dfrac{1}{x}$ polünoomina.

Järgnevad kaks ülesannet toovad ära *sümmeetrilise võrrandi* $P(x) = 0$, kus P on sümmeetriline polünoom, lahendamise võtted.

Ülesanne 43. Tõesta, et paarisastmeline sümmeetriline võrrand taandub asendusega $x + \dfrac{1}{x} = y$ võrrandiks, mille aste on kaks korda madalam.

Ülesanne 44. Tõesta, et paarituastmelise sümmeetrilise võrrandi jagamisel kaksliikmega $x + 1$ saame paarisastmelise sümmeetrilise võrrandi.

Näeme, et täielikult oskame nüüd leida kuni viienda astme sümmeetriliste polünoomide juuri.

1.10.3 Polünoomide kordsed juured

Definitsioon 27. Arvu x_0 nimetatakse polünoomi $P(x)$ k-kordseks juureks, kui $(x - x_0)^k \mid P(x)$, aga $(x - x_0)^k \nmid P(x)$.

Teoreem 7. Kui x_0 on polünoomi $P(x)$ k-kordne juur, siis x_0 on polünoomi $P'(x)$ $k-1$-kordne juur ($P'(x)$ tähistab polünoomi $P(x)$ tuletist).

Ülesanne 45. Tõesta teoreem 7.

1.10.4 Viète'i valemid

Teoreem 8. (Viète[10]'i teoreem) Kui $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ on polünoomi

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

juured, siis kehtivad *Viète'i valemid*

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1, \\
&x_1 x_2 + x_1 x - 3 + \ldots + x - n - 1 x_n = a_2, \\
&x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_3, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

Valemite tõestamiseks piisab kirjutada polünoom $P(x)$ tegurdatuna juurte järgi lineaarteguriteks ning need uuesti kokku korrutada.

1.11 Geomeetrilised funktsionaalvõrrandid

Funktsioone ei saa defineerida mitte ainult arvuvaldadel, vaid ka teistel hulkadel, näiteks tasandi või ruumi punktidel. Tuntumad näited tasandi punktidel defineeritud funktsioonidest on geomeetrilised teisendused (lükked, peegeldused, homoteetiad jne). Mingitele tingimustele vastavate geomeetriliste funktsioonide otsimisel ei saa sageli kasutada arvfunktsioonide leidmisel kasutatavaid võtteid (kasvamine-kahaneimne, algebralised tehted jne), kuid see-eest on meie käsutuses mitmed geomeetriast pärinevad tehnikad (sümmeetria, vektorite skalaarkorrutis jm). Samuti omavad geomeetrilistel objektidel defineeritud funktsioonide korral mõtet üldisest hulgateooriast pärinevad injektiivsuse, sürjektiivsuse ja bijektiivsuse mõisted.

Ülesanne 46. (Valgevene 1999) Kas leidub selline

(a) tasandi bijektsioon iseendasse

(b) kolmemõõtmelise ruumi bijektsioon iseendasse

(olgu ta f), et suvalise kahe erineva punkti A ja B korral on sirged AB ja $f(A)f(B)$ risti?

Ülesanne 47. (Rumeenia 1996) Olgu n positiivne täisarv ja D punktihulk tasandil, mis koosneb n kontsentrilisest ringjoonest. Tähistame punktide A ja B vahelist kaugust $d(A, B)$. Tõesta, et kui funktsioon $f : D \to D$ rahuldab iga $A, B \in D$ korral võrratust $d(f(A), f(B)) \geqslant d(A, B)$, siis iga $A, B \in D$ korral kehtib tegelikult võrdus $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

[10]Prantsuse matemaatiku François Viète'i (1540–1603) järgi.

1.12 Binaarsed tehted

Sageli kasutatakse kahe muutujaga ekh binaarsete funktsioonide esitamisel kirjaviisi $\varphi(x, y)$ asemel kirjaviisi $x\varphi y$. Tuntumad näited sellistest funktsioonidest on liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine. Binaarseid funktsioone nimetatakse vahel ka *binaarseteks teheteks*.

Definitsioon 28. Ütleme, et binaarne tehe $* : X \times X \to X$ on *kommutatiivne*, kui iga $x, y \in X$ korral kehtib võrdus

$$x * y = y * x.$$

Definitsioon 29. Ütleme, et binaarne tehe $* : X \times X \to X$ on *assotsiatiivne*, kui iga $x, y, z \in X$ korral kehtib võrdus

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Ülesanne 48. (Tšehhi-Slovaki matš 1996) Olgu M mittetühi hulk ja $*$ sellel hulgal antud binaarne tehe, mille korral iga $a, b \in M$ jaoks kehtivad võrdused

$$(a * b) * b = a \quad \text{ja} \quad a * (a * b) = b.$$

(a) Näita, et tehe $*$ on kommutatiivne.

(b) Milliste lõplike hulkade M korral toodud tingimustele vastav tehe eksisteerib?

Ülesanne 49. (Balti Tee 1990) Kasutame sümbolit $*$ binaarsete tehete tähistamiseks. Kirjuta niisugune võrdus, kus kasutatakse sümbolit $*$, muutujaid ja sulge ning mis on alati tõene, kui sümbol $*$ tähistab kas kommutatiivset või assotsiatiivset tehet, kuid on üldjuhul väär mingi mittekommutatiivse ja mitteassotsiatiivse tehte $*$ jaoks.

Ülesanne 50. (Venemaa 1998) Binaarne tehe $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rahuldab kõigi reaalarvude a, b, c korral võrdust $(a * b) * c = a + b + c$. Tõesta, et $a * b = a + b$.

2 Ülesandeid harjutamiseks

Ülesanne 51. (Horvaatia 2002) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral rahuldavad tingimust $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$.

Ülesanne 52. (Modifitseeritud 1980. aasta Luxembourgi asendus-IMO ülesandest) Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon ning $f(1) = 2$. Leia kõik sellised funktsioonid f, mille korral

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ülesanne 53. (Rumeenia 1997, III voor) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, mis rahuldavad võrrandit

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy).$$

Ülesanne 54. (Kanada harjutusülesanne 1997-98) Leia kõik sellised funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad tingimust

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Ülesanne 55. (Kanada IMO treeningvõistlus 1996) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad tingimust

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy.$$

Ülesanne 56. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral rahuldavad tingimust

$$f(x)f(y) = y^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) + x^\beta f\left(\frac{y}{2}\right).$$

Ülesanne 57. (Sloveenia harjutusülesanne)

a) Leia kõik sürjektiivsed funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ puhul

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + 1.$$

b) Leia kõik injektiivsed funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ puhul

$$f(x + f(y)) = f(x+y) + 1.$$

Ülesanne 58. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldaksid tingimust

$$f(xf(y)) = xy.$$

Ülesanne 59. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele 2000) Leia kõik selliseid positiivsete täisarvuliste väärtustega funktsioonid $f(n)$, mis on määratud kõikide positiivsete täisarvude n jaoks ning rahuldavad iga niisuguse n korral tingimust $f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$.

Ülesanne 60. (Eesti olümpiaad 1986, II voor, 10.(11.) klass) Funktsioon $f(x)$ rahuldab seost

$$f(x+p) = \frac{f(x)}{3f(x)-1}$$

(siin $p \neq 0$ on fikseeritud) mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral. Tõesta, et funktsiooni f periood on $2p$.

Ülesanne 61. (Itaalia 1998) Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$f(10+x) = f(10-x), \qquad f(20+x) = -f(20-x).$$

Tõesta, et f on paaritu perioodiline funktsioon.

Ülesanne 62. (Peruu valikvõistlus olümpiaadiks „Cono Sur", 1994) Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selline, et

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$$

mistahes $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

a) Tõesta, et $f(0) = 0$.

b) Leia $f(1994)$.

Ülesanne 63. (Iraan, 1997) Tähistagu $\mathbb{N}$ kõikide positiivsete täisarvude hulka. Vaatleme funktsioone $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mis rahuldavad iga $n \in \mathbb{N}$ korral tingimusi $f(n) \geqslant 2$ ja

$$f(n) + f(n+2) = f(n+4)f(n+6) - 1997.$$

a) Leia $f(1997)$ ja $f(1999)$, kui $f(1) = 2$.

b) Kirjelda kõik antud tingimusi rahuldavad funktsioonid.

Ülesanne 64. (Kanada harjutusülesanne, 1997-98) Olgu $f(1) = 1$ ja $f(2) = 3$. Kehtigu $n \geqslant 3$ korral

$$f(n) = \max\{f(r) + f(n-r) \,|\, 1 \leqslant r \leqslant n-1\}.$$

Leia, millist tingimust peab rahuldama arvupaar (a, b), et kehtiks võrdus $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Ülesanne 65. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral tingimusi $f(x) \leqslant x$ ja $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Ülesanne 66. (Iirimaa, 1996) Tähistame $K = [0, 1]$. Olgu $f : K \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et

(i) $f(1) = 1$;
(ii) $f(x) \geqslant 0$ mistahes $x \in K$ korral;
(iii) kui $x, y, x+y \in K$, siis $f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$.

Tõesta, et $f(x) \leqslant 2x$ mistahes $x \in K$ korral.

Ülesanne 67. (Austria-Poola matemaatikavõistlus 1978) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, mis kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad võrdust

$$f(x+y) = f(x^2 + y^2).$$

Ülesanne 68. (IMO 2002) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad võrdust

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

Ülesanne 69. (Balti Tee 1997) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldavad võrdust

$$f(x)f(y) = f(x-y).$$

Ülesanne 70. (Balti Tee 1998) Olgu $\mathbb{Z}^+$ kõigi positiivsete täisarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, mis kõigi $x, y \in \mathbb{Z}^+$ korral rahuldavad võrdusi

$$\begin{aligned} f(x, x) &= x, \\ f(x, y) &= f(y, x), \\ (x+y)f(x, y) &= yf(x, x+y). \end{aligned}$$

Ülesanne 71. (Balti Tee 1995) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad võrdusi

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f\left(\frac{1}{x+y}\right) &= f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right), \text{ kui } x, y, x+y \neq 0, \\ (x+y)f(x+y) &= xyf(x)f(y), \text{ kui } x, y, x+y \neq 0. \end{aligned}$$

Ülesanne 72. (Rumeenia 1996) Olgu antud naturaalarv $n > 2$ ja niisugune funktsioon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mis iga korrapärase n-nurga $A_1A_2\ldots A_n$ korral rahuldab võrdust

$$f(A_1) + f(A_2) + \ldots + f(A_n) = 0.$$

Tõesta, et f on nullfunktsioon.

Ülesanne 73. (Rumeenia 2000) Olgu S mingi kera ja C mingi ringi sisepunktide hulk. Kas leidub niisugune funktsioon $f : S \to C$, mille korral iga $A, B \in S$ jaoks kehtib võrratus $|AB| \leqslant |f(A)f(B)|$?

Ülesanne 74. (Iraan 1998) Olgu $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niisugused funktsioonid, et funktsioon

$$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$$

on monotoonne kõigi reaalarvude a_1, a_2, a_3 korral. Tõesta, et leiduvad sellised $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, mis ei ole kõik nullid ja mille korral iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks kehtib võrdus

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + c_3f_3(x) = 0.$$

Ülesanne 75. (Eesti 1977, II voor, 10. klass) Olgu $x_{n+1} = \sin x_n$, kus $x_1 = 1$. Näita, et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ eksisteerib ja leia see piirväärtus.

Ülesanne 76. (Eesti 1975, III voor, 9. klass) Jada (a_n) on antud järgmiselt:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \sqrt{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{a_n}}.$$

Tõesta, et antud jada ei ole tõkestatud.

Ülesanne 77. (IMC Eesti valikvoor 2001) Olgu (a_n) tõkestatud jada, mis rahuldab tingimust

$$a_{n+1} \geqslant a_n - \frac{1}{2^n}$$

mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõesta, et see jada koondub.

Ülesanne 78. (IMC 2001) Olgu $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $b_{n+1} = \dfrac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}$. Tõesta, et $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n b_n$ ning leia see piirväärtus.

Ülesanne 79. (Eesti lahtine võistlus, sügis 1993) Reaalarvude jada a_0, a_1, a_2, ... on määratud valemitega

$$a_0 = x\,, \quad a_1 = y\,, \quad a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \ \ (i \geqslant 2)\,.$$

Milliste x ja y väärtuste korral on see jada tõkestatud (s.t. leidub positiivne arv M nii, et $|a_i| < M$ iga $i = 0, 1, 2, \ldots$ korral)?

Ülesanne 80. (IMO 1982) Vaatleme positiivsete reaalarvude jada (x_n), mille korral $x_0 = 1$ ja $x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots$

a) Tõesta, et mistahes sellise jada korral leidub $n \geqslant 1$ nii, et

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3{,}999.$$

b) Leia jada (x_n), mille korral

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

mistahes n puhul.

Ülesanne 81. (Briti 1997, I voor) Olgu jada (a_n) antud järgmiste võrdustega:

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \quad n > 1.$$

Leia a_{1997}.

Ülesanne 82. (Rumeenia 1996 II eelvoor IMO kandidaatidele) Jada (a_n) on defineeritud järgnevalt: kui $p_1, p_2, \ldots, p_k$ on arvu n erinevad algarvulised jagajad, siis $a_n = p_1^{-1} + p_2^{-1} + \ldots + p_k^{-1}$. Näita, et mistahes positiivse täisarvu $N > 2$ korral

$$\sum_{n=2}^{N} a_2 a_3 \cdots a_n < 1.$$

Ülesanne 83. Tõesta samasus

$$\frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)} + \ldots + \frac{1}{[a+(n-2)d]\cdot[a+(n-1)d]} = \frac{n-1}{a \cdot a_n},$$

kus $a_n = a + (n-1)d$.

Ülesanne 84. (Moskva tee-instituut, 1976) Leia summa

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

Ülesanne 85. (Eesti lõppvoor 2001, 11. klass) Kumera n-nurga sisenurkade suurused on α, 2α, ..., $n\alpha$. Leia n kõik võimalikud väärtused ja α väärtus iga sellise n korral.

Ülesanne 86. (Eesti lõppvoor 1998, 12. klass) Leia kõik algarvud kujul $10101\ldots01$.

Ülesanne 87. (Balti Tee 1990) Olgu $a_0 > 0$, $c > 0$ ja

$$a_{n+1}=\frac{a_n+c}{1-a_nc}, \quad n=0,\,1,\ldots.$$

Kas on võimalik, et selle jada esimesed 1990 liiget $a_0, a_1, \ldots, a_{1989}$ on kõik positiivsed, kuid $a_{1990} < 0$?

Ülesanne 88. Arvjada (a_n) on defineeritud seosega

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

kus $n \geqslant 3$. Jada liikmed a_1 ja a_2 on fikseeritud, kusjuures $a_2 > 2a_1 > 0$. Leia

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Ülesanne 89. (Bulgaaria 2000) Olgu n positiivne täisarv ja

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\},\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kõigi pikkusega n binaarvektorite hulk. Vektorite $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ ja $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A$ *summaks* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ nimetame vektorit $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, kus $c_i = a_i + b_i \bmod 2$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vektorit, mille kõik elemendid on võrdsed 0-ga, tähistame $\overrightarrow{0}$. Olgu $f : A \to A$ niisugune funktsioon, et $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ ning kui vektorid $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ erinevad k positsioonil, siis erinevad k positsioonil ka vektorid $f(\overrightarrow{a})$ ja $f(\overrightarrow{b})$. Tõesta, et kui mingite $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ korral kehtib võrdus $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, siis kehtib ka võrdus $f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$.

Ülesanne 90. (Kanada 2002) Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, mille jaoks iga $x, y \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrdus

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2).$$

Ülesanne 91. (IMO 1983) Leia kõik funktsioonid $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, mis iga $x, y \in (0, +\infty)$ korral rahuldavad võrdust

$$f(xf(y)) = yf(x)$$

ja millle jaoks $f(x) \to 0$ kui $x \to +\infty$.

Ülesanne 92. (Moskva treipingioperaatorite kõrgkool, 1976) Tõesta, et ühegi täisarvuliste kordajatega polünoomi $p(x)$ korral ei saa kehtida $p(7) = 5$, $p(15) = 9$.

Ülesanne 93. (Hong Kong, 1989–90) Tõesta, et mistahes reaalarvuliste kordajatega polünoomi $P(x)$ korral leidub polünoomil $x^3P(x) + x^2 + x + 1$ kompleksarvuline juur, mis ei ole reaalarv.

Ülesanne 94. (Minsk, 1998) Olgu $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + \frac{7}{xy} + \frac{1}{z}$. Leia kõik reaalarvud n, mille korral $n = f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$, kus a, b, c on mingid paarikaupa erinevad reaalarvud.

Ülesanne 95. (Hiina, 1980) Leia liikme x^2 kordaja polünoomis

$$P_n(x) = \underbrace{(\ldots(((}_{n} x - 2)^2 - 2)^2 - 2)^2 - \ldots - 2)^2.$$

Ülesanne 96. (Bratislava kaugõppekool, 1996) Kas leiduvad niisugused ratsionaalarvud a ja b, et polünoomidel $x^2 + ax + b$ ja $x^5 - x + 1$ on ühine juur?

Ülesanne 97. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele, 1996) Tõesta, et polünoomil $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ ei ole nullkohti, kui n on paarisarv, ja on täpselt üks nullkoht, kui n on paaritu arv.

Ülesanne 98. (Iiri 1997) Leia kõik polünoomid $p(x)$, mis rahuldavad iga x korral tingimust

$$(x - 16)p(2x) = 16(x - 1)p(x).$$

Ülesanne 99. Polünoomi $x^3 + px^2 + qx + r$ juured on x_1, x_2, x_3, kus $p, q, r \in \mathbb{R}$ on etteantud arvud. Leia polünoom, mille juurteks on x_1^2, x_2^2, x_3^2.

3 Vastused, vihjed ja lahendused

1. Asendus $x = y = 0$ annab $f(0) = 2f(0)g(0)$ ning $g(0) = g(0)^2 - f(0)^2$. Juhul $f(0) \neq 0$ saame $g(0) = \dfrac{1}{2}$ ning $f(0)^2 = -\dfrac{1}{4}$, vastuolu. Seega $f(0) = 0$ ning $g(0) = g(0)^2$. Juht $g(0) = 0$ ei sobi, sest siis iga $x \in \mathbb{R}$ korral $g(x) = g(x + 0) = 0 - 0 = 0$ ning tegemist oleks konstantse funktsiooniga. Seega $g(0) = 1$.

Mittekonstantseteks funktsioonideks, mis rahuldavad ülesande tingimusi, sobivad näiteks $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \cos x$.

2. Võtame suvalised $x_1, x_2 \in X$ nii, et $f(x_1) = f(x_2)$. Siis

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2,$$

mis tähendab, et f on injektiivne. Et $x = g(f(x))$, siis on g sürjektiivne.

3. Võtame

$$Z = \{(x, 0) \,|\, x \in X\} \cup \{(y, 1) \,|\, y \in Y\}$$

ning defineerime $g(x) = (x, 0)$ ja

$$h(x, k) = \begin{cases} f(x), \text{ kui } k = 0 \\ x, \text{ kui } k = 1 \end{cases}.$$

Funktsiooni h definitsioon on korrektne, sest kui $k = 0$, siis kehtib $x \in X$ ning $f(x) \in Y$; kui aga $k = 1$, siis $x \in Y$. Seega $h(x, k) \in Y$ mistahes argumentide korral.

Täidetud on $h(g(x)) = h(x, 0) = f(x)$ mistahes $x \in X$ korral; tuleb veel veenduda, et g on injektiivne ja h sürjektiivne.

Kui $|X| \leqslant 1$ (s.t. ta on kas tühi või koosneb ühest elemendist), siis on injektiivsuse tingimus alati täidetud. Olgu $|X| > 1$, siis valime $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$. Sel korral $g(x_1) = (x_1, 0)$, $g(x_2) = (x_2, 0)$. Et $x_1 \neq x_2$, siis ka $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$. Seega on g injektiivne.

Kuna mistahes $y \in Y$ korral leidub $z = (y, 1) \in Z$ nii, et $h(z) = h(y, 1) = y$, siis on h sürjektiivne.

4. Võttes ülesandes 2 $f = g$ ja $X = Y$ saamegi käesolevas ülesandes nõutud tulemuse.

5. Oletame, et rangelt monotoonne funktsioon f pole üksühene, st leiduvad $x_1 < x_2$ nii, et $f(x_1) = f(x_2)$. Samas kui f oleks rangelt kasvav, peaks kehtima võrratus $f(x_1) < f(x_2)$, kui aga rangelt kahanev, peaks kehtima võrratus $f(x_1) > f(x_2)$. Mõlemal juhul saame vastuolu.

6. Lihtne on näha, et funktsioonid $f(x) = x$ ja $f(x) = -x$ rahuldavad ülesande tingimusi. Näitame, et rohkem selliseid funktsioone ei ole.

Asendus $x = y = 0$ annab $f(f(0)) = f(0)$, asendus $x = -f(0)$, $y = 0$ aga $f(-f(0)) = f(0)$. Kuna f on rangelt monotoonne, on ta ülesande 5 põhjal üksühene, järelikult $f(0) = -f(0)$ ja $f(0) = 0$. Asendades ülesande võrdusesse nüüd $x = 0$, saame iga y korral $f(f(y)) = y$.

Oletame, et f on kasvav. Kui mingi $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) > x$, siis $x = f(f(x)) > f(x)$, vastuolu. Kui mingi $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) < x$, siis $x = f(f(x)) < f(x)$, samuti vastuolu. Seega on iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks ainus võimalus $f(x) = x$.

Oletame nüüd, et f on kahanev. Asendades alul $x = -f(t)$ ja $y = t$ ning seejärel $x = 0$ ja $y = -t$, saame $f(< f(t)) = f(f(t)) = -t$. Järelikult $f(t) = -f(-t))$ iga $t \in \mathbb{R}$ korral. Kui $f(x) < -x$, siis

$$x = f(f(x)) > f(-x) = -f(x),$$

vastuolu. Kui aga $f(x) > -x$, siis

$$x = f(f(x)) < f(-x) = -f(x),$$

jälle vastuolu. Seega on iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks ainus võimalus $f(x) = -x$.

7.

(a) Võtame kõigepealt jälle $x = y = 0$. Siis saame $f(0) = f(0)^2$, millest kas $f(0) = 0$ või $f(0) = 1$. Esimene võimalus viib seosele

$$f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$$

mistahes $x \in \mathbb{R}$ korral.

Vaatleme siis järgnevas juhtu $f(0) = 1$. Asendus $y = nx$ võrdusesse (2) annab $f((n + 1)x) = f(x + nx) = f(x)f(nx)$, millest järeldub matemaatilise induktsiooni abil (tee see läbi!), et iga $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral $f(nx) = f(x)^n$. Pannes x ja y asemele vastavalt nx ja $-nx$, on tulemuseks

$$1 = f(0) = f(nx + (-nx)) = f(nx)f(-nx) = f(x)^n f(-n),$$

kust $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Järelikult $f(px) = f(x)^p$ iga $p \in \mathbb{Z}$ ja $x \in \mathbb{R}$ korral.

Vaatleme ratsionaalarvu $x = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Eelpooltõestatu alusel saame siis

$$f(1)^p = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right)^q = f(x)^q,$$

millest saame $f(x) = f(1)^{\frac{p}{q}} = a^x$, kus $a = f(1)$. Et negatiivsest arvust ratsionaalarvulise astendajaga astet pole defineeritud, siis tuleb järgnevas täiendavalt eeldada $a \geqslant 0$.

Lõpuks kasutame funktsiooni f pidevust ja näitame, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x) = a^x$. Olgu antud suvaline $x \in \mathbb{R}$. Siis leidub jada $x_n \in \mathbb{Q}$ nii, et $x_n \to x$ protsessis $n \to \infty$. Kuna f ja astmefunktsioon on pidevad, siis

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim_{n\to\infty} x_n} = a^x.$$

Kontrollime, et kõik funktsioonid kujul $f(x) = a^x$, $a \geqslant 0$ rahuldavad võrrandit (2):

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x)f(y).$$

Paneme tähele, et ka lahend $f(x) = 0$ esitub kujul $f(x) = a^x$, kui $a = 0$.[11]

(b) Võrrandis (4) teeme kõigepealt muutuja vahetuse, võttes $x = e^\alpha$ ning $y = e^\beta$. Siis sobivad α ja β rolli suvalised reaalarvud ning defineerides uue funktsiooi $g(x) = f(e^x)$ saame

$$g(\alpha+\beta) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(\alpha) + g(\beta).$$

Siit järeldub, et $f(e^\alpha) = a\alpha$, kus $k \in \mathbb{R}$. Nüüd $f(x) = a \ln x$, mida oligi tarvis.

Võrrandi (3) lahendamiseks logaritmime lähtevõrrandit (seda võime teha, sest funktsiooni väärtused on positiivsed) ja saame

$$\ln f(xy) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Nähtub, et $\ln f$ on võrrandi (4) otsitavaks funktsiooniks. See tähendab, et kehtib võrdus $\ln f(x) = a \ln x = \ln x^a$, millest järeldub $f(x) = x^a$, nagu soovitud.

8. Eksisteerigu lõplik $f'(x_0) = k$. Nagu ülesandes 7, saame ka siin $f(0) = 0$. Mistahes $x \in \mathbb{R}$ ja $\Delta x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x},$$

mille abil ka

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

[11] Tõsi, lisaks tuleb eeldada, et $0^0 = 0$.

Minnes ülalsaadud võrduses piirile $\Delta x \to 0$, näeme

$$f'(x) = f'(x_0) = k.$$

Seega diferentseeruvusest ühes punktis järeldub siin diferentseeruvus kogu reaalteljel. Võttes võrduse mõlemast poolest määramata integraali, saame

$$f(x) = \int k dx = kx + C,$$

kus konstandi $C = 0$ määrame $f(0) = 0$ abil.

9. Nagu ülesandes 7, saame suvalise ratsionaalarvu $q \in \mathbb{Q}$ korral $f(q) = aq$. Olgu nüüd ette antud reaalarv x_0 ning leiame jadad $a_n \to x_0$ ja $b_n \to x_0$ nii, et $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$ (sellised jadad kindlasti leiduvad — näiteks kasutame arvu x_0 puuduga ja liiaga kümnendlähendeid). Siis

$$aa_n = f(a_n) \leqslant f(x_0) \leqslant f(b_n) = ab_n$$

ning saadud võrratuses piirile $n \to \infty$ minnes saame $ax_0 \leqslant f(x_0) \leqslant ax_0$, mis annabki vajaliku $f(x_0) = ax_0$.

10. Näitame, et f on mittekahanev. Ülesande 9 abil saame siis vajaliku väite.

Olgu $x \geqslant y$, siis $x - y \geqslant 0$. Seetõttu

$$f(x) = f[(x - y) + y] = f(x - y) + f(y) \geqslant f(y),$$

millest järeldubki, et f on mittekahanev funktsioon.

11. Sobivad parajasti kõik funktsioonid kujul $f(x) = kx^2$, $k \in \mathbb{Q}$. Veendume, et niisuguste funktsioonide korral on ülesande võrrand rahuldatud:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= k(x+y)^2 + k(x-y)^2 = \\ &= kx^2 + 2kxy + y^2 + kx^2 - 2kxy + y^2 = \\ &= 2kx^2 + 2ky^2 = \\ &= 2f(x) + 2f(y). \end{aligned}$$

Veendume nüüd, et rohkem lahendeid ei ole. Asendus $x = y = 0$ annab $2f(0) = 4f(0)$, järelikult $f(0) = 0$. Tõestame induktsiooniga, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja $z \in \mathbb{Q}$ korral $f(nz) = n^2 f(z)$. $n = 0$ ja $n = 1$ jaoks väide kehtib. Olgu $n \geqslant 2$ ning eeldame, et väide kehtib $n - 2$ ja $n - 1$ korral. Asendades $x = (n-1)z$ ja $y = z$ saame

$$f(nz) + f((n-2)z) = 2f((n-1)z) + 2f(z),$$

millest

$$\begin{aligned} f(nz) &= 2f((n-1)z) + 2f(z) - f((n-2)z) = \\ &= 2(n-1)^2(z) + 2f(z) - (n-2)^2 f(z) = \\ &= (2n^2 - 4n + 2 + 2 - n^2 + 4n - 4)f(z) = \\ &= n^2 f(z). \end{aligned}$$

Võttes ülesande võrduses $x = 0$ saame

$$f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y) = 2f(y)$$

ehk $f(y) = f(-y)$, järelikult on f paarisfunktsioon ja võrdus $f(pz) = p^2 f(z)$ kehtib kõigi täisarvude p korral.

Olgu nüüd $f(1) = k$. Siis suvalise täisarvu p korral $f(p) = kp^2$. Suvalise ratsionaalarvu $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) jaoks saame

$$kp^2 = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q^2 \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 f(x),$$

millest järeldubki $f(x) = k \cdot \dfrac{p^2}{q^2} = kx^2$.

12. Tähistame

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Lihtne on näha, et need funktsioonid rahuldavad ülesande tingimusi.

13. Koostame tabeli, eeldusel, et kumbki funktsioon pole samaselt võrdne nulliga.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x) \pm g(x)$	$f(x) \cdot g(x)$	$g(f(x))$
paaris	paaris	paaris	paaris	paaris
paaris	paaritu	-	paaritu	paaris
paaritu	paaris	-	paaritu	paaris
paaritu	paaritu	paaritu	paaris	paaritu

14. Olgu jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tõkestatud, s.t. leiduvad $m, M \in \mathbb{R}$ nii, et $m \leqslant x_n \leqslant M$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Valime $L = \max(|m|, |M|)$, siis kindlasti $x_n \leqslant L$.

Teiselt poolt, kehtigu $|x_n| \leqslant L$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Võtame $m = -L$, $M = L$, siis $-L \leqslant x_n \leqslant L$, $n \in \mathbb{N}$.

Kui $L = 0$, siis $|x_n| \leqslant 0$, s.t. $x_n = 0$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Tegemist on nulljadaga.

15. Oletame, et koonduval jadal (x_n) on kaks piirväärtust a, b; üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a < b$. Valime $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $N_1 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant N_1$, siis $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \left(\frac{2a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Sama definitsiooni kohaselt leidub $N_2 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant N_2$, siis $x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{2b-a}{2}\right)$. Võttes nüüd $N = \max(N_1, N_2)$, saame, et kui $n \geqslant N$, siis

$$x_n \in \left(\frac{2a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \cap \left(\frac{a+b}{2}, \frac{2b-a}{2}\right) = \emptyset,$$

mis on võimatu. Seega ei saa koonduval jadal olla kaht erinevat piirväärtust.

16. Olgu (x_n) koonduv jada, $x_n \to a$. Näitame, et see jada on ülalt tõkestatud (alt tõkestatuse juhtu vaatleme analoogiliselt). Jada koonduvuse definitsiooni kohaselt leidub $N \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N$, siis $|x_n - a| < 1$. See tähendab, mistahes $m \in \mathbb{N}$ korral kehtib võrratus

$$x_m \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, a+1),$$

mille parema poole võtamegi jada (x_n) ülemiseks tõkkeks.

17. Koondugu jada (x_n) arvuks a, siis jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt on jada $(x_n - a)$ hääbuv.

Esitugu jada (x_n) liikmed kujul $x_n = a + \alpha_n$, kus α_n on hääbuv jada. Tõestame, et siis $x_n \to a$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $N \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N$, siis

$$|x_n - a| = |(a + \alpha_n) - a| = |\alpha_n| < \varepsilon,$$

mis tähendabki, et jada (x_n) koondub arvuks a.

18. Olgu antud hääbuvad jadad (α_n) ja (β_n). Meil on vaja näidata, et jadad $(\alpha_n \pm \beta_n)$ on ka hääbuvad jadad. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Et $\alpha_n, \beta_n \to 0$, siis leiduvad $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N_1$, siis $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja kui $n \geqslant N_2$, siis $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tähistame $N = \max(N_1, N_2)$. Absoluutväärtuse omaduse abil saame $n \geqslant N$ korral

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mis tähendab, et $(\alpha_n \pm \beta_n)$ on hääbuvad jadad.

19. Olgu antud tõkestatud jada (x_n) ja hääbuv jada (α_n). Meil on vaja näidata, et jada $(x_n\alpha_n)$ on hääbuv jada. Kuna (x_n) on tõkestatud, leidub arv $L \in \mathbb{R}$, et $|x_n| \leqslant L$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $N \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N$, siis $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{L}$. Nüüd juhul $n \geqslant N$ kehtib

$$|x_n\alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

mis tähendab, et $(x_n\alpha_n)$ on hääbuv jada.

20.

a) b) Esita jadad x_n ja y_n piirväärtuse ja hääbuva jada summana.

c) Koondugu jadad $x_n \to x$, $y_n \to y$. Siis mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral

$$x_ny_n - xy = x_ny_n - xy_n + xy_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y),$$

kusjuures paremal pool on ülesannete 18 ja 19 põhjal hääbuva jada liikmed. See tähendab, et jada $(x_ny_n - xy)$ on hääbuv, järelikult $x_ny_n \to xy$.

d) Näitame kõigepealt, et jada $\left(\dfrac{1}{y_n}\right)$ on tõkestatud. Jada (y_n) on eelduse põhjal koonduv, $y_n \to y$. Oletame, et $y > 0$ (juhtu $y < 0$ vaatleme analoogiliselt). Siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{y}{2} < y_n < \dfrac{3y}{2}$, mis tähendab, et

$$n \geqslant N \Rightarrow \frac{2}{3y} < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{y}.$$

Olgu nüüd $L = \max\left(\left|\dfrac{1}{y_1}\right|, \left|\dfrac{1}{y_2}\right|, \ldots, \left|\dfrac{1}{y_{n-1}}\right|, \dfrac{2}{y}\right)$, siis $\left|\dfrac{1}{y_n}\right| \leqslant L$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näita nüüd analoogiliselt jada korrutise piirväärtusega, et jada $\left(\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{x}{y}\right)$ on hääbuv.

21. a) Oleta vastuväiteliselt, et $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n > b$, vali jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = \dfrac{b-x}{2}$ ning järelda sellest vastuolu antud tingimusega $x_n \leqslant b$.

22. Nõutavad jadad on näiteks $x_n = a - \dfrac{1}{n}$, $y_n = a + \dfrac{1}{n}$.

23. Oleta vastuväiteliselt, et $x = \lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n = y$, vali jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2}$ ning järelda sellest vastuolu antud tingimusega $x_n \leqslant y_n$.

24. Olgu täidetud jadade (x_n), (y_n) ja (z_n) jaoks ülesandes nimetatud tingimused. Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $N_1 \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N_1$, siis $|x_n - c| < \varepsilon$, ning leidub $N_2 \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N_2$, siis $|z_n - c| < \varepsilon$. Võttes $N = \max(N_1, N_2)$, kehtib $n \geqslant N$ korral

$$c - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < c + \varepsilon,$$

mis annab $|y_n - c| < \varepsilon$, s.t. $y_n \to c$, nagu soovitud.

25. Olgu $N_0 \in \mathbb{N}$ selline, et kui $n \geqslant N_0$, siis $x_n \leqslant y_n$. Kehtigu $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Fikseerime vabalt reaalarvu $E > 0$, siis jada piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub arv $N_1 \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant N_1 \Rightarrow x_n > E$. Võtame $N = \max(N_0, N_1)$, siis $n \geqslant N$ korral $y_n \geqslant x_n > E$, s.t. $y_n \to \infty$. Ülesande b)-osa lahendame analoogiliselt.

26. a) Eeldame, et jada (x_n) on mittekahanev, s.t. $x_n \leqslant x_{n+1}$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Kui see jada koondub, on ta tõkestatud, s.t. ka ülalt tõkestatud.

Oletame nüüd, et jada (x_n) on ülalt tõkestatud, s.t. $x_n \leqslant M$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral, ning näitame, et see jada koondub. Selleks valime ülemistest tõketest vähima, s.t. sellise ülemise tõkke M, et mistahes $\varepsilon > 0$ korral leidub jadas liige $x_n > M - \varepsilon$ ja $M - \varepsilon$ pole seega enam jada (x_n) ülemine tõke (reaalarvude teoorias tõestatakse, et selline vähim ülemine tõke, nn. *ülemine raja* alati leidub). Näitame nüüd, et $x_n \to M$.

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Siis leidub eelneva põhjal arv $N \in \mathbb{N}$, et $x_N > M - \varepsilon$. Jada mittekahanevuse tõttu kehtib $n \geqslant N$ korral $x_n \geqslant x_N > M - \varepsilon$. Ilmselt kehtib $x_n \leqslant M < M + \varepsilon$, millest kokkuvõttes järeldub $|x_n - M| < \varepsilon$, s.t. $x_n \to M$, nagu soovitud.

Ülesande b)-osa lahendame analoogiliselt.

27. Põhjendame, et jada (x_n) on mittekahanev. Selleks tuleb näidata, et kehtib $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. Pidades silmas binoomvalemit, piisaks näidata, et

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leqslant \binom{n+1}{k} \cdot \frac{1}{(n+1)^k},$$

kus $2 \leqslant k \leqslant n-1$. See võrratus on samaväärne

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1+\frac{k}{n+1-k},$$

mille saame tõestada matemaatilise induktsiooni teel.

Kõigepealt tõestame baasjuhu $k=2$. Vaja on näidata, et kehtib

$$1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2} \leqslant 1+\frac{2}{n-1},$$

mis on samaväärne $2n^2-n-1 \leqslant 2n^2$ ning seega kehtib. Kehtigu nüüd tõestatav võrratus mingi $k=m$ korral, siis $k=m+1$ jaoks

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^k &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(1+\frac{m}{n+1-m}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \\
&= 1+\frac{1}{n}+\frac{m}{n+1-m}+\frac{m}{n(n+1-m)},
\end{aligned}$$

ning tahame näidata, et see avaldis pole suurem kui $1+\dfrac{m+1}{n-m}$. Seega tuleb tõestada võrratus

$$\frac{1}{n}+\frac{m}{n(n+1-m)} \leqslant \frac{m+1}{n-m}-\frac{m}{n+1-m},$$

mis on samaväärne

$$\frac{n+1}{n(n+1-m)} \leqslant \frac{n+1}{(n-m)(n+1-m)}$$

ning seega kehtib.

Lõpuks on jäänud liikmeti võrrelda veel juhul $k=n$, s.t. tõestada, et

$$\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{n-1}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leqslant n,$$

kusjuures vasaku poole arendises tuleb n liidetavat, millest ükski ei ületa arvu 1. Seega kokkuvõttes on jada (x_n) mittekahanev.

Põhjendame, et jada (x_n) on ülalt tõkestatud. Selleks peame silmas, et $\dfrac{n-k}{n} \leqslant 1$, kui $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ning hindame binoomvalemi abil

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} \leqslant \\ &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 3.\end{aligned}$$

Kuna (x_n) on mittekahanev ja ülalt tõkestatud, on ta ülesande 26 kohaselt koonduv.

28. Tähistame formaalselt tingimused $A_1 \equiv |x_n - a| < \varepsilon$, $A_2 \equiv x_n > E$, $A_3 \equiv x_n < -E$ ning $B_1 \equiv |x_{k_n} - a| < \varepsilon$, $B_2 \equiv x_{k_n} > E$, $B_3 \equiv x_{k_n} < -E$. Olgu antud suuruseks $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ koonduv jada (x_n) ning vaatleme kasvavat naturaalarvude jada (k_n). Meil on vaja tõestada, et ka $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ koondub sellekssamaks suuruseks a.

Fikseerime vabalt arvu $E > 0$. Siis leidub naturaalarv $N \in N$, et kui $n \geqslant N$, siis kehtib üks tingimustest A_1, A_2, A_3. Kuna $k_m \geqslant m$ mistahes indeksi $m \in \mathbb{N}$ korral, siis ka $k_n \geqslant N$, s.t. kehtib sobiv tingimustest B_1, B_2, B_3. See aga tähendab, et vaadeldav osajada (x_{k_n}) koondub samaks suuruseks, milleks koondus esialgne jada (x_n).

29. Ütleme, et indeks m on jada (x_n) *tippkoht*, kui $x_n \leqslant x_m$ mistahes $n > m$ korral. On kolm võimalust:

1) jadal (x_n) on lõpmata palju tippkohti. Siis saame moodustada tippkohtade $n_1 < n_2 < \ldots$ järgi mittekasvava osajada (x_{n_k}).

2) jadal (x_n) on lõplik arv tippkohti. Olgu n_1 indeks, mis on suurem kõigist tippkohtadest, siis on võimalik leida indeks $n_2 > n_1$ nii, et $x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$ (kui mistahes $n > n_1$ puhul kehtiks $x_n < x_{n_1}$, oleks n_1 jada (x_n) tippkoht, vastuolu n_1 valikuga), edasi leiame indeksi $n_3 > n_2$ nii, et $x_{n_3} \geqslant x_{n_2}$ jne. Saame mittekahaneva osajada (x_{n_k}).

3) jadal (x_n) polegi tippkohti. Siis kasutame punkti 2) tulemust, võttes $n_1 = 1$.

Kõigil juhtudel õnnestus leida monotoonne osajada (x_{n_k}).

30. Olgu antud tõkestatud jada (x_n). Ülesande 29 põhjal sisaldab ta monotoonse osajada. Et saadud osajada on ka tõkestatud, on ta ülesande 26 põhjal koonduv.

31. a) Olgu antud ülalt tõkestamata jada. Leiame indeksi $n_1 \in \mathbb{N}$, et $x_{n_1} > 1$ (selline indeks n_1 kindlasti leidub, muidu oleks arv 1 antud jada ülemine tõke). Olgu nüüd leitud osajada liige $x_{n_k} > k$ ning leiame indeksi $n_{k+1} > n_k$, et $x_{n_{k+1}} > k+1$. Tuleb kontrollida, et selline indeks n_{k+1} leidub, selleks oletame vastuväiteliselt, et $x_m \leqslant k+1$, kui $m > n_k$. Sel korral aga

$$x_m \leqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}, k+1),$$

mis tähendab, et jada (x_n) on ülalt tõkestatud, vastuolu.

Nüüd on leitud osajada, mille liikmed $x_{n_k} > k \to \infty$. Ülesande 25 põhjal ka $x_{n_k} \to \infty$.

b)-osa lahendame analoogiliselt.

32. Koondugu arvrida $\sum a_n$ summaks $A \in \mathbb{R}$. Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N$, siis $\left|\sum_{i=1}^{n} a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nüüd juhul $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &= \left|\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_n - A\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_n - A\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n+1} a_n - A\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

mis tähendab, et (a_n) on hääbuv jada.

33. Ülesande esimese väite tõestame matemaatilise induktsiooni teel. Teise väite tõestamiseks võime ka kasutada matemaatilist induktsiooni, aga võib panna ka tähele, et

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_n + a_1,$$

millest saamegi kohe nõutava võrduse (kõigi võrreldavate liikmete kokkuliitmisel liidame igat jada liiget topelt).

34. Mõlemad võrdused õnnestub tõestada matemaatilise induktsiooni meetodil. Võrdus

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

on aga tõestatav ka avaldisega $q - 1$ läbikorrutamise teel (peame eeldama, et $q \neq 1$).

35. Juhul $|q| < 1$ on jada $(|q|^n)$ rangelt kahanev ja alt tõkestatud (tõkkeks näiteks arv 0), mis tähendab, et ülesande 26 põhjal on see jada koonduv, $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Samal moel on rangelt kasvav jada $(-|q|^n)$ ülalt tõkestatud (tõkkeks arv 0), mis tähendab, et ka see jada koondub, $\lim_{n\to\infty}(-|q|^n) = 0$. Et $-|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$, siis koondub ka (q^n) samaks piirväärtuseks. Samuti on siis koonduv $b_n = b_1 \cdot q^n \to 0$.

Kui $q = 1$, siis saame konstantse jada $b_1, b_1, \ldots$, mis ilmselt on koonduv (liikmeks b_1), ning kui $q = -1$, saame jada $b_1, -b_1, b_1, \ldots$, mis ilmselt pole koonduv. Kui $|q| > 1$, siis on jada (q^n) ülalt tõkestamata (olgu tõkkeks $q^n \leqslant |q|^n = |q^n| \leqslant L$, siis $n \ln|q| \leqslant \ln L$, millest $n \leqslant \dfrac{\ln L}{\ln|q|}$, teiselt poolt on $n \in \mathbb{N}$ suvaline, vastuolu), mis tähendab, et ta ei saa olla koonduv. Siis pole koonduv ka $b_n = b_1 \cdot q^n$.

Summa leidmine juhul $|q| = 1$ pole võimalik, sest $b_1 \neq 0$ ning eeldades geomeetrilise rea koonduvust, saaksime vastuolu ülesandega 32. Kui aga $|q| < 1$, siis ülesandes 34 tuletatud valemis

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \to \frac{b_1}{1 - q}$$

eelnevalt leitud piirväärtust $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ kasutades.

36. Olgu x^{a_1}, x^{a_2}, … geomeetriline jada teguriga $q \neq 1$. Siis

$$q = \frac{x^{a_{n+1}}}{x^{a_n}} = x^{a_{n+1} - a_n}$$

iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Seega $d = a_{n+1} - a_n = \log_x q$ on arvust 0 erinev konstant ning järelikult on a_1, a_2, … mittekonstantne aritmeetiline jada vahega d.

Vastupidi, olgu a_1, a_2, … aritmeetiline jada vahega $d \neq 0$. Siis $d = a_{n+1} - a_n$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral ning $q = \dfrac{x^{a_{n+1}}}{x^{a_n}} = x^d$ on arvust 1 erinev konstant. Järelikult on x^{a_1}, x^{a_2}, … mittekonstantne geomeetiline jada teguriga q.

37. Polünoomi $Q(x) = P(x) - P(-x)$ aste on ülimalt 5, lisaks on tal juured erinevates punktides $-b$, $-a$, 0, a ja b. Samuti kehtib $Q'(0) = 0$, mistõttu 0 on vähemalt kahekordne juur. Järelikult saame $Q(x) = x^2 R(x)$ mingi ülimalt 3. astme polünoomi R jaoks. Kuna polünoomi R juured on erinevad arvud $-b$, $-a$, a ja b, peab R olema nullpolünoom, mistõttu ka Q on nullpolünoom ja $P(x) \equiv P(-x)$.

38.

1) $P(1) = a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$;

2) $P(-1) = a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 =$
$= a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$;

3) $P(1) + P(-1) = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n) =$
$= (a_0 + a_0) + (a_1 - a_1) + (a_2 + a_2) + \ldots + (a_n + (-1)^n a_n)$, mille jagamisel arvuga 2 saame vajaliku võrduse;

4) $P(1) - P(-1) = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) - (a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n) =$
$= (a_0 - a_0) + (a_1 + a_1) + (a_2 - a_2) + \ldots + (a_n + (-1)^{n+1} a_n)$, mille jagamisel arvuga 2 saame vajaliku võrduse;

39. Ilmselt $P(0) = a_n \cdot 0^n + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$.
Võrdustest

$$\begin{aligned}
&P'(x) = na_n x^{n-1} + \ldots + ka_k x^{k-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1,\\
&P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots + k(k-1)a_k x^{k-2} + \ldots + 2a_2,\\
&\ldots,\\
&P^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + \ldots + k(k-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot a_k
\end{aligned}$$

näeme, et polünoomi $P(x)$ k-nda tuletise vabaliige on $k!a_k$. Seega $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k!} = a_k$.

40. Olgu $P(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_n x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ paarituastmeline sümmeetriline polünoom. Siis

$$P(-1) = -a_0 + a_1 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + (-1)^n a_n + \cdots - a_1 + a_0 = 0.$$

41. Olgu $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sümmeetriline polünoom, mille korral $P(\alpha) = 0$ ja $\alpha \neq 0$. Siis

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = a_0 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_1 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + a_0 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n P(\alpha) = 0.$$

42. Ülesande väite tõestame matemaatilise induktsiooni teel. Baasväide kehtib ilmselt. Eeldame siis, et mistahes $n < k$ korral on $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ avaldatav $x + \dfrac{1}{x}$ polünoomina.

Olgu $n = k = 2m$ paarisarv, siis

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = x^n + \frac{1}{x^n} + \binom{n}{1} \cdot \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + \binom{n}{m-1} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + \binom{n}{m},$$

millest induktsiooni eelduse põhjal avaldame $x^n + \frac{1}{x^n}$ suuruse $x + \frac{1}{x}$ polünoomina.

Olgu $n = k = 2m + 1$ paaritu arv, siis

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = x^n + \frac{1}{x^n} + \binom{n}{1} \cdot \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \cdots + \binom{n}{m} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

ja jälle induktsiooni eelduse põhjal avaldame $x^n + \frac{1}{x^n}$ suuruse $x + \frac{1}{x}$ polünoomina.

43. Olgu $P(x)$ $n = 2k$-astme sümmeetriline polünoom. Kuna $x = 0$ ei ole sümmeetrilise polünoomi juureks, siis võime polünoomi $P(x)$ jagada läbi suurusega x^k. Seejärel avaldame ülesande 42 põhjal saadud polünoomis kõik suurused $x^m + \frac{1}{x^m}$, $m = 0, 1, \ldots, k$, suuruse $y = x + \frac{1}{x}$ kaudu. Uus polünoom y suhtes on k-astme polünoom.

44. Olgu $P(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_n x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ paarituastmeline sümmeetriline polünoom. Ülesande 40 ja Bézout teoreemi põhjal me juba teame, et $P(x)$ jagub kaksliikmega $x + 1$. Olgu jagatiseks polünoom $Q(x) = b_0 x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \cdots + b_{2n-1} x + b_{2n}$. Siis võrduses $P(x) = (x+1)Q(x)$ kordajaid võrreldes saame

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0 \\
a_1 &= b_0 + b_1 \\
a_2 &= b_1 + b_2 \\
\ldots \\
a_n &= b_{n-1} + b_n \\
\ldots \\
a_1 &= b_{2n-1} + b_{2n} \\
a_0 &= b_{2n}
\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= a_0 = b_0 \\
b_{2n-1} &= a_1 - a_0 = b_1 \\
\ldots \\
b_{n+1} &= a_{n-1} - a_{n-2} = b_{n-1},
\end{aligned}$$

mis tähendab, et $Q(x)$ on sümmeetriline polünoom.

45. Ülesande eeldustel avaldub polünoom $P(x)$ kujul

$$P(x) = (x - x_0)^k R(x),$$

kus $R(x)$ on polünoom ja x_0 ei ole $R(x)$ juur. Nüüd

$$P'(x) = k(x-x_0)^{k-1}R(x)+(x-x_0)^k R'(x) = (x-x_0)^{k-1}(kR(x)+(x-x_0)R'(x)).$$

Oleme saanud, et x_0 on polünoomi $P'(x)$ vähemalt $(k-1)$-kordne juur. Oletame vastuväiteliselt, et $(x - x_0) \mid kR(x) + (x - x_0)R'(x)$, siis ka $(x - x_0) \mid kR(x)$, vastuolu. Seega on x_0 polünoomi $P'(x)$ k-kordne juur.

46. (a) Jah, sobiv teisendus on näteks pööre suvalise punkti ümber 90° võrra.

(b) Näitame, et niisugust bijektsiooni ei leidu. Selleks oletame vastuväiteliselt, et sobiv funktsioon f eksisteerib. Samastame ruumi hulgaga $\mathbb{R}^3$ ning selle ruumi iga punkti (x, y, z) tema kohavektoriga, st vektoriga punktist $(0, 0, 0)$ punkti (x, y, z). Siis tähendab ülesande tingimus, et iga kahe vektori $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ korral peab kehtima seos

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (f(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{b})) = \overrightarrow{0}. \tag{9}$$

Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, vastasel juhul võime vaadelda funktsiooni $g(\overrightarrow{p}) = f(\overrightarrow{p}) - f(\overrightarrow{0})$; see on bijektsioon, mis rahuldab võrdusi (9) ja $g(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Asendades võrdusesse (9) nüüd $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, saame iga vektori $\overrightarrow{a}$ korral $\overrightarrow{a} \cdot f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. Võrdus (9) taandub seega kujule

$$\overrightarrow{a} \cdot f(\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} \cdot f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}. \tag{10}$$

Suvaliste vektorite $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ ning reaalarvude m ja n korral saame siis

$$\begin{aligned} m(\overrightarrow{a} \cdot f(\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{b} \cdot f(\overrightarrow{a})) &= \overrightarrow{0}, \\ m(\overrightarrow{a} \cdot f(\overrightarrow{c}) + \overrightarrow{c} \cdot f(\overrightarrow{a})) &= \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{a} \cdot f(m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}) + (m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}) \cdot f(\overrightarrow{a}) &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Liites kaks esimest võrdust ja lahutades kolmanda, saame

$$\overrightarrow{a} \cdot (mf(\overrightarrow{b}) + nf(\overrightarrow{c}) - f(m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c})) = \overrightarrow{0}.$$

See võrdus peab kehtima kõigi vektorite $\overrightarrow{a}$ jaoks, järelikult

$$f(m\overrightarrow{b} + n\overrightarrow{c}) = mf(\overrightarrow{b}) + nf(\overrightarrow{c}).$$

Seega on funktsioon f lineaarne ning tema väärtused on määratud väärtustega baasivektoritel $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ ja $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$. Kui $f(\overrightarrow{i}) = (a_1, a_2, a_3)$, $f(\overrightarrow{j}) = (b_1, b_2, b_3)$ ja $f(\overrightarrow{k}) = (c_1, c_2, c_3)$, siis suvalise vektori $\overrightarrow{x}$ korral kehtib

$$f(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}.$$

Võttes võrduses $\overrightarrow{a} \cdot f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ väärtustused $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, saame $a_1 = b_2 = c_3 = 0$. Võttes võrduses (10) väärtustused $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$, saame $b_1 = -a_2$, $c_2 = -b_3$, $c_1 = -a_3$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned} f(c_2\overrightarrow{i} + (-c_1)\overrightarrow{j} + b_1\overrightarrow{k}) &= c_2 f(\overrightarrow{i}) + (-c_1) f(\overrightarrow{j}) + b_1 f(\overrightarrow{k}) = \\ &= c_2(0, -b_1, -c_1) + (-c_1)(b_1, 0, -c_2) + b_1(c_1, c_2, 0) = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Kuna f on bijektsioon ja $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, siis $c_2 = c_1 = b_1 = 0$ ja seega $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ suvalise vektori $\overrightarrow{x}$ korral. Järelikult ei saa f olla pealekujutus, vastuolu.

47. Kasutame $f(A)$ asemel lühemat tähistust A'.

Esitame ülesande punktihulga kujul $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$, kus $D_1, D_2, \ldots, D_n$ on ringjooned keskpunktiga O ja raadiustega vastavalt $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$. On selge, et funktsioon f viib ringjoone D_n mingi diameetri otspunktid sama ringjoone mingi (võibolla teise) diameetri otspunktideks.

Võtame punktid $A, B, C \in D_n$ nii, et AC on selle ringjoone diameeter. Kuna

$$A'B'^2 + B'C'^2 \geqslant AB^2 + BC^2 = AC^2 = A'C'^2,$$

siis saame kolmnurga $A'B'C'$ mediaani OB' pikkuse ruutu hinnata järgnevalt:

$$OB'^2 = \frac{1}{2}(A'B'^2 + B'C'^2) - \frac{1}{4}A'C'^2 \geqslant \frac{1}{4}A'C'^2 = r_n^2.$$

Järelikult $B' \in D_n$, $AB = A'B'$ ja $BC = B'C'$. Kuna punktiks B võime valida hulga $D_n \setminus \{A, C\}$ suvalise punkti, oleme näidanud, et $f(D_n) \subseteq D_n$ ning et iga $A, B \in D_n$ korral $d(A, B) = d(A', B')$.

Tõestame, et iga punkti $Y \in D_n$ korral leidub selline punkt $X \in D_n$, et $X' = Y$. Selleks võtame suvalise punkti $A \in D_n$ ja leiame $A' \in D_n$. Valime punktid $X_1 \neq X_2$ nii, et $d(A, X_1) = d(A, X_2) = d(A', Y)$ (mõtle iseseisvalt läbi, mis juhtub, kui A' ja Y on ühe diameetri otspunktid). Siis ka $d(A', X_1') = d(A', X_2') = d(A', Y)$ ja kuna X_1' ning X_2' on erinevad, peab kehtima kas $X_1' = Y$ või $X_2' = Y$, mida oligi tarvis. Järelikult $f(D_n) = D_n$.

Tänu ülesande tingimusele on funktsioon f injektiivne (kui $A' = B'$, siis $0 = d(A', B') \geqslant d(A, B)$, mistõttu $A = B$). Seega ei kujuta ta ühtegi hulga $D \setminus D_n$ punkti hulka D_n ja me võime korrata ülaltooduga analoogilist arutelu. Ringjoonte $D_{n-1}, D_{n-2}, \dots, D_1$ jaoks saame, et $f(D_{n-1}) = D_{n-1}$, $f(D_{n-2}) = D_{n-2}, \dots, f(D_1) = D_1$ ja et kahe samalt ringjoonelt võetud punkti korral säilitab f nende vahekauguse.

Jääb veel näidata, et vahekaugus säilib ka erinevatelt ringjoontelt võetud punktide korral. Võtame kõigepealt niisugused punktid $A \in D_k$ ja $B \in D_p$, $1 \leqslant k < p \leqslant n$, et punkt O asub lõigul AB. Saame

$$A'B' \geqslant AB = r_k + r_p = OA' + OB',$$

mistõttu O kuulub ka lõigule $A'B'$ ja $d(A, B) = d(A', B')$.

Lõpuks vaatame juhtu, kus $A \in D_k$, $B \in D_p$, $1 \leqslant k < p \leqslant n$ ja O ei kuulu lõigule AB. Siis valime $A_1 \in D_k$ ja $B_1 \in D_p$, et O on nelinurga AA_1B_1B diagonaalide lõikepunkt. See nelinurk on siis võrdhaarne trapets ja eeltõestatu põhjal on ta kongruentne trapetsiga $A'A_1'B_1'B'$, millest järeldub muuhulgas $d(A, B) = d(A', B')$.

48.

(a) Esimese reegli põhjal saame $[a * (a * b)] * (a * b) = a$. Teise reegli põhjal võime selle võrduse vasaku poole ümber kirjutada kui $b * (a * b)$, seega iga $a, b \in M$ korral $b * (a * b) = a$ ja järelikult $b * [b * (a * b)] = b * a$. Teise reegli abil arvutame $b * [b * (a * b)] = a * b$, mistõttu $a * b = b * a$, nagu ülesandes nõutud.

(b) Niisugune tehe eksisteerib kõigi mittetühjade lõplike hulkade M jaoks. Seades hulga M elemendid vastavusse arvudega $1, 2, \dots, n$, võime defineerida

$$a * b = c \Leftrightarrow a + b + c \equiv 0 \bmod n.$$

Lihtne on näha, et see definitsioon on korrektne ja määrab vajalike omadustega tehte.

49. Sobib näiteks võrdus $(x * x) * x = x * (x * x)$, mis on ilmselt tõene, kui $*$ on kas kommutatiivne või assotsiatiivne. Samas võttes põhihulgaks reaalarvude hulga ja tehteks $*$ lahutamise, näeme, et näiteks $(1 - 1) - 1 \neq 1 - (1 - 1)$.

50. Kõigepealt paneme tähele, et kui $a * b = a * d$, siis

$$a + b + c = (a * b) * c = (a * d) * c = a + d + c,$$

mistõttu $b = d$. Analoogiliselt leiame, et võrdusest $a * b = d * b$ järeldub võrdus $a = d$. Näitame nüüd, et tehe $*$ on kommutatiivne. Olgu $a * b = d_1$ ning $b * a = d_2$. Siis $d_1 * c = a + b + c = d_2 * c$, millest saamegi $d_1 = d_2$.

Veendume, et $a * 0 = a$. Olgu $a * 0 = x$, siis $x * 0 = (a * 0) * 0 = a$. Järelikult

$$2x = (x * 0) * x = a * x = x * a = (a * 0) * a = 2a$$

ja seega $x = a$ ning $a * 0 = a$. Lõpuks saame

$$a + b = (a * b) * 0 = a * b,$$

mida oligi tarvis.

51. Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ rahuldab ülesande tingimust.

Oletame, et leidub $x_0 \in \mathbb{R}^+$ nii, et $f(x_0) \neq 1$. Siis

$$f(x_0)^{f(xy)} = f(x_0^{xy}) = f((x_0^x)^y) = f(x_0^x)^{f(y)} = f(x_0)^{f(x)f(y)},$$

millest $f(xy) = f(x)f(y)$, ja

$$f(x_0)^{f(x+y)} = f(x_0^{x+y}) = f(x_0^x \cdot x_0^y) = f(x_0)^{f(x)} f(x_0)^{f(y)} = f(x_0)^{f(x)+f(y)},$$

millest $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Saadud kaks võrdust on Cauchy funktsionaalvõrrandid. Lahendame ülesande näiteks teise põhjal; selle lahendiks on $f(x) = ax$. Esimest saadud Cauchy võrrandit kasutades

$$axy = f(xy) = f(x)f(y) = a^2xy,$$

mille abil $a = a^2$ ja $a = 0$ või $a = 1$. Et $0 \notin \mathbb{R}^+$, siis sobib siit vaid veel $f(x) = x$.

52. Võttes antud võrrandis $y = 1$, saame $f(x + 1) = f(x) + 1$. Et $f(1) = 2$, siis matemaatilise induktsiooni abil $f(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Võttes nüüd $x = \dfrac{1}{n}$ ja $y = n$, kus $n \in \mathbb{N}$, näeme, et $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + 1$. Edasi, võttes $x = p \in \mathbb{Z}$ ja $y = \dfrac{1}{q}$, kus $q \in \mathbb{N}$, saame $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q} + 1$. Kasutades ka f pidevust, tuleb lahendiks $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

53. *Vastus:* $f(x) = Cx^2$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant.

Lahendus. Võttes $x = y = 0$, tuleb $f(0) = 2f(0)$, millest $f(0) = 0$. Valides $x = 0$, saame $f(y^2) = f(-y^2)$, mis tähendab, et f on paarisfunktsioon. Seega piirdume edaspidises muutujate positiivsete väärtustega.

Kahe etteantud positiivse arvu $X < Y$ korral valime $x = \sqrt{\dfrac{Y+X}{2}}$, $y = \sqrt{\dfrac{Y-X}{2}}$. Siis teiseneb lähtevõrdus kujule

$$f(Y) - f(X) = f(\sqrt{Y^2 - X^2}) \geqslant 0, \tag{11}$$

mis tähendab, et piirkonnas $(0, \infty)$ on f mittekahanev funktsioon.

Tõestame omaduse

$$f(x) = Cx^2 \Rightarrow f(nx) = C(nx)^2, \tag{12}$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $C \geqslant 0$ on suvaline konstant. Selleks kehtigu $f(x) = Cx^2$ ning olgu ette antud reaalarv $x \geqslant 0$. Valime võrduses (11) $X = x$ ja $Y = \sqrt{2}x$. Saame $f(\sqrt{2}x) = C(\sqrt{2}x)^2$. Matemaatilise induktsiooni teel (valides nüüd võrduses (11) $Y = \sqrt{k+1}x$ ja $X = \sqrt{k}x$) põhjendame $f(\sqrt{k}x) = C(\sqrt{k}x)^2$, millest järeldub otsekohe tõestatav omadus (12).

Tähistame $f(1) = A$. Siis $f(n) = An^2$, $n \in \mathbb{N}$. Kehtigu $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = B\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$, kus $B \geqslant 0$ on mingi konstant. Omaduse (12) põhjal

$$A = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = B \cdot \left(n \cdot \frac{1}{n}\right)^2 = B.$$

Seega $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = A\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$. Omaduse (12) abil saame lõpuks, et mistahes positiivse ratsionaalarvu x korral $f(x) = Ax^2$.

Olgu nüüd ette antud positiivne reaalarv α. Leiame jadad $x_n \to \alpha$, $y_n \to \alpha$ nii, et $x_n \leqslant \alpha \leqslant y_n$, $n \in \mathbb{N}$ (matemaatilisest analüüsist on teada, et sellised jadad kindlasti leiduvad). Siis

$$Ax_n^2 = f(x_n) \leqslant f(\alpha) \leqslant f(y_n) = Ay_n^2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ja võrratuses piirile $n \to \infty$ minnes saame $A\alpha^2 \leqslant f(\alpha) \leqslant A\alpha^2$, mis annabki $f(\alpha) = A\alpha^2$.

54. Teeme muutuja vahetuse $x+y = k$, $x-y = l$, siis $lf(k) - kf(l) = kl(k^2 - l^2)$. Näiteks $k = 0$ abil saame $f(0) = 0$. Kui $kl \neq 0$, siis jagades saadud võrdust avaldisega kl, tuleb

$$\frac{f(k)}{k} - \frac{f(l)}{l} = k^2 - l^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(k) = k^3 + kC.$$

Asetades saadud avaldise lähtevõrrandisse, näeme, et mistahes reaalarvuline konstant C sobib.

55. Võtame $x = y$, siis

$$c = f(f(0)) = f(x)^2 - x^2,$$

mille abil $f(x) = \pm\sqrt{x^2 + c}$. Lähtevõrrandist $x = y = 0$ korral $\pm\sqrt{2c} = c$, mis annab $c = 0$ või $c = 2$, s.t. kõne alla tuleb plussmärk ja funktsioonid $f(x) = x$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Kontroll näitab, et sobib vaid $f(x) = x$.

56. Vaatleme kõigepealt juhtu $\alpha = \beta$. Siis annab $x = y$ tingimuse

$$f(x)^2 = 2x^\alpha f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)^2}{2x^\alpha}.$$

Asetades selle lähtevõrrandisse, saame

$$f(x)f(y) = \frac{y^\alpha f(x)^2}{2x^\alpha} + \frac{x^\alpha f(y)^2}{2y^\alpha} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha f(x)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha f(y)^2\right],$$

mis tähendab tegelikult, et

$$\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\alpha}{2}} f(y) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\alpha}{2}} f(x)\right]^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{f(y)}{y^\alpha} = C.$$

Siit saame lahendi $f(x) = Cx^\alpha$. Konstandi C leidmiseks asetame saadud avaldise lähtevõrrandisse. Siis

$$Cx^\alpha \cdot Cy^\alpha = y^\alpha \cdot C\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha + x^\alpha \cdot C\left(\frac{y}{2}\right)^\alpha,$$

millest teisendamisel $C = 0$ või $C = 2^{1-\alpha}$.

Vaatleme nüüd juhtu $\alpha \neq \beta$. Sel korral vahetame tundmatute x ja y väärtused (vasak pool $f(x)f(y)$ ei muutu) ja lahutame antud võrrandist saadu. Vaheks tuleb

$$0 = f\left(\frac{x}{2}\right)(y^\alpha - y^\beta) + f\left(\frac{y}{2}\right)(x^\beta - x^\alpha),$$

mis $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ korral annab

$$\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{x^\alpha - x^\beta} = \frac{f\left(\frac{y}{2}\right)}{y^\alpha - y^\beta} = C$$

ehk $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ korral

$$f(x) = C\left((2x)^\alpha - (2x)^\beta\right).$$

Määrata tuleb konstant C, selleks asetame saadud avaldise lähtevõrrandisse ja korrutame sulud lahti:

$$4^\alpha C^2 x^\alpha y^\alpha - 2^{\alpha+\beta} C^2 x^\alpha y^\beta - 2^{\alpha+\beta} C^2 x^\beta y^\alpha + 4^\beta C^2 x^\beta y^\beta = C x^\alpha y^\alpha - C y^\beta x^\beta,$$

millest $C = 0$. Seega juhul $\alpha \neq \beta$ sobib lahendiks vaid nullfunktsioon.

57. a) Valides $x = 0$, tuleb $f(f(y)) = f(y) + 1$. Kuna mistahes reaalarvu z korral leidub y, et $f(y) = z$, siis kehtib $f(z) = z + 1$.

b) Valime $x = -y$, siis $f(-y + f(y)) = f(0) + 1 = const$. Seetõttu ($f$ on injektiivne) saame $-y + f(y) = const$, mille abil $f(y) = y + c$. Lähtevõrrandisse asendamisel $c = 1$.

58. Võttes $x = 1$, saame $f(f(x)) = x$, mis ülesande 4 kohaselt tähendab, et f on üksühene. Võttes $y = 1$, tuleb $f(xf(1)) = x = f(f(x))$, millest f üksühesuse tõttu $xf(1) = f(x)$.

Seega on jäänud leida $f(1)$. Saame $xy = f(xf(y)) = xf(y)f(1) = xyf(1)^2$. Mittenulliste $x, y \in \mathbb{R}$ abil $f(1) = \pm 1$; funktsioonid $f(x) = x$ ja $f(x) = -x$ rahuldavad lähtevõrrandit.

59. Kui $f(n) = f(m)$, siis ilmselt $m = n$, s.t. f on üksühene funktsioon.

Et $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$ ning kõik liidetavad on positivsed täisarvud, siis $f(1) = 1$. Näitame nüüd induktsiooniga n järgi, et $f(n) = n$ mistahes positiivse täisarvu n korral. Olgu $f(k) = k$ iga $k < n$ korral, siis funktsiooni üksühesuse tõttu peab olema $f(n) \geqslant n$. Oletame, et $f(n) > n$, siis jällegi f üksühesuse tõttu

$$f(f(n)) \geqslant n, \quad f(f(f(n))) \geqslant n \quad \text{ja} \quad f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) > 3n,$$

vastuolu. Niisiis $f(n) = n$.

60. Tõepoolest,

$$f(x + 2p) = f((x + p) + p) = \frac{f(x + p)}{3f(x + p) - 1} = \frac{\frac{f(x)}{3f(x)-1}}{\frac{3f(x)}{3f(x)-1} - 1} = f(x).$$

Seega, funktsiooni f periood on $2p$.

61. Teine tingimus on samaväärne võrdusega $f(20 - x) = -f(20 + x)$. Teisendades

$$f(20 - x) = f(10 + (10 - x)) = f(10 - (10 - x)) = f(x)$$

ja

$$\begin{aligned} f(20 - x) &= -f(20 + x) = -f(10 + (10 + x)) = -f(10 - (10 + x)) = \\ &= -f(-x), \end{aligned}$$

mis kokkuvõttes annab $f(x) = -f(-x)$, s.t. f on paaritu.

Kuna

$$f(40+x) = f(20+(20+x)) = -f(20-(20+x)) = -f(-x) = f(x),$$

siis on f perioodiline.

62. a) Vaadeldes lähtevõrrandit x ja $-x$ korral, saame $f(x)^2 = f(-x)^2$. Siit järeldub, et f rahuldab iga x korral kas $f(x) = f(-x)$ või $f(x) = -f(-x)$.

Näitame, et f on üksühene; sellest järeldub, et f ei saa rahuldada seost $f(x) = f(-x)$ ühegi x korral. Valime $x = 0$, siis

$$f(f(y)) - y = f(0)^2 = const.$$

Võttes nüüd reaalarvud x_1, x_2, mille korral $f(x_1) = f(x_2)$, tuleb eelmise võrduse abil, et $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, ehk $x_1 = x_2$. Seega on f üksühene.

Kui f on nüüd paaritu funktsioon, siis $f(0) = -f(0)$ ning koheselt $f(0) = 0$.

b) Valides $x = 1$ ja $y = 0$, tuleb $f(1) = f(1)^2$. Kui $f(1) = 0$, siis $x = 0$ ja $y = 1$ abil $f(f(1)) = 1$, mis on võimatu. Seega $f(1) = 1$. Oletame, et $f(n) = n$, siis

$$f(n+1) = f(1^2 + f(n)) = n + f(1)^2 = n + 1.$$

Matemaatilise induktsiooni abil saame nüüd $f(1994) = 1994$.

63. Antud seost n ja $n+2$ korral rakendades saame lahutamisel

$$f(n) - f(n+4) = f(n+6)(f(n+4) - f(n+8)).$$

Seda korduvalt kasutades leiame

$$\begin{aligned} &f(n) - f(n+4) = f(n+6)(f(n+4) - f(n+8)) = \ldots \\ &\ldots = f(n+6) \cdots f(n+(4k+2))(f(n+4k) - f(n+(4k+4))) = \ldots, \end{aligned}$$

mis $f(m) \geqslant 2$ tõttu annab, et $f(n) = f(n+4)$ (sest nende vahe on lõplik suurus).

Seeabil teiseneb lähtevõrrand kujule

$$(f(n) - 1)(f(n+2) - 1) = 1998$$

ja $f(1) = 2$ tõttu $f(1997) = 2$ ning $f(1999) = 1999$.

Punkti b) ammendavaks lahendamiseks tähistame $f(1) = a$ ja $f(2) = b$. Siis

$$f(3) = \frac{1998}{a-1} + 1, \qquad f(4) = \frac{1998}{b-1} + 1,$$

mis tähendab ka, et $a - 1, b - 1 \mid 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Esimesed neli väärtust määravad funktsiooni üheselt, suurused a ja b võime valida sõltumatult.

64. *Lahendus 1:* Funktsiooni f esimeste väärtuste arvutamisel selgub, et $f(2k) = 3k$ ja $f(2k+1) = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Tõestame selle matemaatilise induktsiooni meetodil. $k = 1$ korral on tõestus vahetu. Eeldame, et väide kehtib kuni arvuni $k = m$.

Olgu kõigepealt $2m+2$ esitatav kahe positiivse paarisarvu $2x$ ja $2y$ summana. Siis $f(2x) + f(2y) = 3(x+y) = 3(m+1)$. Esitame $2m+2$ ka kahe positiivse paaritu arvu $2u+1$ ja $2v+1$ summana, siis

$$f(2u+1) + f(2v+1) = (3u+1) + (3v+1) = \\ = 3(u+v) + 2 < 3(u+v+1) = 3(m+1).$$

Siit järeldub, et $f(2(m+1)) = 3(m+1)$.

Olgu $2m+3$ arvude $2z$ ja $2w+1$ summa. Siis $z + w = m+1$ ning

$$f(2z) + f(2w+1) = 3z + 3w + 1 = 3(z+w) + 1 = 3(m+1) + 1.$$

Niisiis ka $f(2(m+1)+1) = 3(m+1)+1$.

Vaadeldes arvude a ja b paarsusi, selgub, et $f(a+b) = f(a) + f(b)$ kehtib parajasti juhul, kui vähemalt üks arvudest a või b on paarisarv.

Lahendus 2: Märkame, et $f(n+1) = f(n) + 2$, kui n on paaritu, ja $f(n+1) = f(n) + 1$, kui n on paarisarv. See kehtib ilmselt $n = 1, 2$ korral; oletame, et väide kehtib arvuni $n = 2k$. Kui $2k+1 = i+j$, kus i on paaris ja j paaritu, siis

$$f(i-1) + f(j+1) = f(i) - 2 + f(j) + 2 = f(i) + f(j)$$

ning

$$f(i+1) + f(j-1) = f(i) + 1 + f(j) - 1 = f(i) + f(j),$$

s.t. $f(2k+1) = f(2k) + f(1) = f(2k) + 1$. Seega $f(2k+1) = f(i) + f(j)$, kui $i + j = 2k+1$.

Vaatleme nüüd juhtu $2k+2 = i+j$. Kui i ja j on mõlemad paarisarvud, siis

$$f(i+1) + f(j-1) = f(i) + 1 - f(j) - 2 = f(i) + f(j) - 1,$$

aga kui mõlemad paaritud, siis

$$f(i+1) + f(j-1) = f(i) + 2 - f(j) - 1 = f(i) + f(j) + 1.$$

Seega, $f(2k+2) = f(i) + f(j)$ parajasti siis, kui i ja j on mõlemad paarisarvud. Muuhulgas $f(2k+2) = f(2k) + f(2) = f(2k+1) - 1 + 3 = f(2k) + 2$. Kokkuvõttes leidsime, et $f(a+b) = f(a) + f(b)$ parajasti siis, kui vähemalt üks arvudest a ja b on paarisarv.

65. Et $f(0) \leqslant 0$ ja $f(0+0) \leqslant 2f(0)$, millest $f(0) \geqslant 0$, siis $f(0) = 0$. Siit saame, et

$$0 = f(0) = f(x-x) \leqslant f(x) + f(-x) \leqslant x - x = 0,$$

mille abil $f(x) = -f(-x)$ (funktsioon f on paaritu). Kuna $f(-x) \leqslant -x$, siis $-f(-x) \geqslant x$. Nüüd

$$x \geqslant f(x) = -f(-x) \geqslant x,$$

millest $f(x) = x$.

66. Näitame kõigepealt, et funktsioon f on mittekahanev. Selleks valime $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, siis

$$f(y) = f((y-x)+x) \geqslant f(y-x) + f(x) \geqslant f(x).$$

Võttes kolmandas tingimuses $x = y = \dfrac{1}{2^n}$, kus $n \geqslant 1$, tuleb

$$f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \geqslant 2f\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

mis koos võrdusega $f(1) = 1$ annab matemaatilist induktsiooni kasutades, et

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Olgu nüüd ette antud arv $0 < x \leqslant 1$. Saame leida n nii, et $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant x < \dfrac{1}{2^n}$. See annab

$$f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 2x.$$

Lõpuks, märgime, et $f(1) = 1 \leqslant 2$ ning $f(0) \geqslant 2f(0)$, mille abil $f(0) \leqslant 0$.

67. Olgu f ülesande tingimusi rahuldav funktsioon. Valime positiivsed reaalarvud a ja b nii, et $a \leqslant b < 2a$ ning võtame

$$x = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b-a}}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b-a}}{2}.$$

Siis $x, y > 0$, $x+y = \sqrt{2a}$ ja $x^2+y^2 = b$. Järelikult $f(\sqrt{2a}) = f(b)$. Fikseerides a ning lastes arvul b muutuda poolõigus $[a, 2a)$ näeme, et f on sel poollõigul konstantne. Niisugune väide kehtib suvalise positiivse a korral. Järgnevalt näitame, et see funktsioon on konstantne kogu arvkiirel $\mathbb{R}^+$.

Võtame $u, v \in \mathbb{R}^+$ ning eeldame üldsust kitsendamata $u < v$. Siis on f konstantne poollõikudel $[u, 2u)$, $[1,5u, 3u)$, $[2,5u, 5u)$, $\ldots$. Ühte sellisesse poollõiku peab kuuluma ka v ja kuna igal kahel järjestikusel poollõigul toodud reas on mittetühi ühisosa, siis peab funktsiooni f väärtus kohtadel u ja v kokku langema.

Teisest küljest on selge, et suvaline konstantne funktsioon rahuldab ülesande tingimusi.

68. Lihtne on kontrollida, et lahenditeks sobivad funktsioonid $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ ja $f(x) \equiv x^2$. Nende funktsioonide korral võtavad ülesande võrduse mõlemad pooled vastavalt väärtused 0, 1 ja $(x^2+z^2)(y^2+t^2)$. Tõestame, et rohkem lahendeid ei ole.

Võttes ülesande võrduses $x = y = z = 0$, saame $2f(0) = 2f(0)(f(0)+f(t))$. Muuhulgas $2f(0) = 4f(0)^2$ ja seega $f(0) = 0$ või $f(0) = \frac{1}{2}$. Kui $f(0) = \frac{1}{2}$, saame $f(0) + f(t) = 1$ iga t korral ja järelikult $f(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Oletame nüüd et $f(0) = 0$. Asendus $z = t = 0$ ülesande võrdusesse annab $f(xy) = f(x)f(y)$ ehk funktsiooni f multiplikatiivsuse. Muuhulgas $f(1) = f(1)^2$, millest saame $f(1) = 0$ või $f(0) = 1$. Kui $f(1) = 0$, siis $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ iga x korral.

Seega võime eeldada, et $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Võttes ülesande võrduses $x = 0$ ja $y = t = 1$, saame

$$f(-z) + f(z) = 2f(z),$$

järelikult $f(z) = f(-z)$ iga z korral ja f on paarisfunktsioon. Järelikult piisab tõestada, et $f(x) = x^2$ positiivsete x väärtuste korral. Paneme tähele, et $f(x^2) = f(x)^2 \geqslant 0$ ja tänu f paarsusele kehtib võrratus $f(y) \geqslant 0$ kõigi y väärtuste korral.

Asendus $t = x$ ja $z = y$ ülesande võrdusesse annab

$$f(x^2+y^2) = (f(x)+f(y))^2,$$

järelikult $f(x^2+y^2) \geqslant f(x)^2 = f(x^2)$, mis tähendab, et funktsioon f on mittenegatiivsete argumendi väärtuste korral kasvav.

Võttes ülesande võrduses $y = z = t = 1$ saame

$$f(x-1) + f(x+1) = 2(f(x)+1).$$

Kui $x = 1$, tuleb siit $f(2) = 4$, kui $x = 2$, saame $f(3) = 9$ jne, induktsiooniga n järgi on lihtne tõestada, et $f(n) = n^2$ kõigi naturaalarvude n jaoks. Kuna f

on paarisfunktsioon, kehtib sama väide ka kõigi täisarvude korral ja arvestades funktsiooni f multiplikatiivsust on $f(x) = x^2$ kõigi ratsionaalarvude jaoks.

Näitame lõpuks, et funtsiooni kasvamisest arvkiirel $[0, \infty)$ järeldub võrdus $f(x) = x^2$ samas piirkonnas. Oletame, et $f(x) \neq x^2$ mingi positiivse x jaoks. Kui $f(x) < x^2$, siis valime ratsionaalarvu a nii, et $x > a > \sqrt{f(x)}$. Siis $f(a) = a^2 > f(x)$, kuid teisest küljest $f(a) \leqslant f(x)$, sest f on kasvav. Vastuolu. Samasuguse vastuolu annab ka eeldus $f(x) > x^2$, seega on veelkord funktsiooni f paarsust arvestades ainus võimalus $f(x) \equiv x^2$.

69. Lihtne on kontrollida, et funtsioonid $f(x) \equiv 0$ ja $f(x) \equiv 1$ rahuldavad ülesande tingimusi. Tõestame, et rohkem selliseid funktsioone ei ole.

Kui f ei ole konstantne nullfunktsioon, leidub niisugune $x_0 \in \mathbb{R}$, et $f(x_0) \neq 0$. Võrdustest $f(x_0)f(0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ järeldub siis, et $f(0) = 1$. Võttes ülesande tingimustes $x = y$, saame

$$f(x)^2 = f(x)f(x) = f(x - x) = f(0) = 1,$$

mistõttu iga $x \in \mathbb{R}$ korral $x \neq 0$. Lõpuks järeldub seostest

$$f(x)f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(x - \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

võrdus $f(x) = 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks.

70. Veidi katsetades on kerge jõuda hüpoteesini, et funktsiooni f rolli võiks sobida kahe arvu VÜK. Kahe esimese tingimuse kehtivus on VÜKi korral triviaalne, seega tuleb veenduda vaid kolmanda rahuldatuses:

$$\begin{aligned}(x+y) \cdot \text{VÜK}(x,y) = (x+y) \cdot \frac{xy}{\text{SÜT}(x,y)} = y \cdot \frac{x(x+y)}{\text{SÜT}(x,x+y)} = \\ = y \cdot \text{VÜK}(x, x+y).\end{aligned}$$

Lõpuks näitame, et antud tingimusi saab rahuldada vaid üks funktsioon. Vaatleme täisarvu $z \geqslant 2$. Teades väärtusi $f(x,y)$ kõigi argumentide $0 < x, y < z$ korral, saame asenduse $y = z - x$ abil kolmandast tingimusest arvutada $f(x,z)$ iga $0 < x < z$ jaoks. Esimest kaht tingimust kasutades leiame väärtused $f(z,y)$ ka $0 < y \leqslant z$ korral. Funktsiooni ühesus järeldub nüüd induktsiooni abil kergelt.

71. Võttes teises võrduses $x = y = \dfrac{1}{2}z$, saame

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = 2f\left(\frac{2}{z}\right) \tag{13}$$

suvalise $z \neq 0$ korral. Asendus $x = y = \dfrac{1}{z}$ annab kolmandast võrdusest iga $z \neq 0$ jaoks $\dfrac{2}{z} f\left(\dfrac{2}{z}\right) = \dfrac{1}{z^2}\left(f\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^2$ ning järelikult

$$2f\left(\frac{2}{z}\right) = \frac{1}{z}\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)^2 \tag{14}$$

iga $z \neq 0$ korral. Võrdustest (13) ja (14) järeldub $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z}\left(f\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)^2$ ehk

$$f(x) = x(f(x))^2 \tag{15}$$

suvalise $x \neq 0$ jaoks. Kui mõne x_0 korral kehtiks võrdus $f(x_0) = 0$, siis saaksime ülesande kolmanda võrduse põhjal

$$f(1) = (x + (1 - x))f(x + (1 - x)) = (1 - x)f(x)f(1 - x) = 0,$$

mis on vastuolus esimese tingimusega. Seega iga $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral kehtib $f(x) \neq 0$ ja võrdusest (15) saame argumendi x iga võimaliku väärtuse korral $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On lihtne kontrollida, et funktsioon $f(x) = \dfrac{1}{x}$ rahuldab kõiki ülesande tingimusi.

72. Valime tasandil suvalise punkti $P(x, y)$ ja veendume, et $f(P) = 0$. Konstrueerime suvalise korrapärase n-nurga $PA_1A_2 \ldots A_{n-1}$ ja pöörame seda ümber punkti P nurkade $\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ võrra. Olgu saadud n-nurgad $A_{k,0}A_{k,1} \ldots A_{k,n-1}$, kus $A_{k,0} = P$ ja $A_{k,i}$ on punkti A_i pööramisel tekkiv punkt $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ korral.

Rakendades ülesande tingimust iga korrapärase n-nurga jaoks ja summeerides tekkivad n võrdust, saame

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(A_{k,i}) = 0.$$

Kuna selles summas esineb liige $f(P)$ kokku n korda, võime kirjutada

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(A_{k,i}) = nf(P) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(A_{k,i}). \tag{16}$$

Teisest küljest ilmselt

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(A_{k,i}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(A_{k,i}) = 0, \tag{17}$$

sest ka kõik n-nurgad $A_{0,i}A_{1,i}\ldots A_{n-1,i}$ on korrapärased. Võrdustest (16) ja (17) järeldubki $f(P)=0$. Korrates sama arutelu suvalise punkti korral saame, et f peab olema nullfunktsioon.

73. Näitame, et niisugust funktsiooni ei eksisteeri. Oletame vastuväiteliselt, et eksisteerib ja tähistame $f(A)=A'$.

Joonestame kera sisse kuubi; olgu tema küljepikkus 1. Võtame mingi positiivse täisarvu n ja jagame kuubi n^3 väikeseks ühesuuruseks kuubiks. Saadud kuupidel on kokku $(n+1)^3$ tipupunkti, olgu need $A_1, A_2, \ldots, A_{(n+1)^3}$. Kui $i\neq j$, saame $|A_iA_j|\geqslant \dfrac{1}{n}$, mistõttu ka $|A_i'A_j'|\geqslant \dfrac{1}{n}$. Järelikult ei oma ringid D_i keskpunktidega punktides A_i' ja raadiustega $\dfrac{1}{2n}$ paarikaupa ühiseid sisepunkte. Nende ringide ühend aga sisaldub ringis C_1, mis on saadud ringist C homoteetse teisendusega ringi C keskpunkti suhtes kordajaga $\dfrac{r+\frac{1}{n}}{r}$, kus r on ringi C raadius.

Võrreldes ringide D_i pindalade summat ringi C_1 pindalaga, saame

$$\sum_{i=1}^{(n+1)^3} S_{D_i}=(n+1)^3\cdot\frac{\pi}{4n^2}\leqslant S_{C_1}=\pi\cdot\left(r+\frac{1}{2n}\right)^2.$$

Piisavalt suure n väärtuse korral aga ei saa see võratus kehtida, vastuolu.

74. Defineerime iga $x\in\mathbb{R}$ korral vektori

$$\overrightarrow{v(x)}=(f_1(x),f_2(x),f_3(x)).$$

Nende vektorite kõikvõimalike lineaarkombinatsioonide hulk on kolmemõõtmelise ruumi alamruum. Kui selle alamruumi mõõde on vähem kui 3, siis leidub alamruumiga ortogonaalne vektor (c_1,c_2,c_3) ja järelikult muuhulgas iga $x\in\mathbb{R}$ korral

$$0=(c_1,c_2,c_3)\cdot\overrightarrow{v(x)}=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x).$$

Jääb üle vaadelda juhtu, kus vektorite $\overrightarrow{v(x)}$ lineaarkombinatsioonid katavad kogu ruumi. Siis saame leida $x_1<x_2<x_3\in\mathbb{R}$, mille korral vektorid $\overrightarrow{v(x_1)}$, $\overrightarrow{v(x_2)}$ ja $\overrightarrow{v(x_3)}$ ehk maatriksi

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1)\\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2)\\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & f_3(x_3)\end{pmatrix}$$

read on lineaarselt sõltumatud. Järelikult on ka sama 3×3 maatriksi veeruvektorid lineaarselt sõltumatud ja me võime leida niisuguse vektori $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, et

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ f_1(x_3) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ f_2(x_3) \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} f_3(x_1) \\ f_3(x_2) \\ f_3(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seega

$$\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{v(x_1)} = 0, \quad \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{v(x_2)} = 1, \quad \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{v(x_3)} = 0,$$

mis on vastuolus ülesande tingimustes nõutud monotoonsusega. Järelikult ei saa vaadeldava alamruumi mõõde olla üle 2.

75. Et vahemikus $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ kehtib võrratus $0 < \sin x < x$, siis $0 < x_{n+1} < x_n$. Järelikult jada (x_n) on monotoonselt kahanev ja alt tõkestatud. Seega eksisteerib piirväärtus. Olgu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Kui lähteseoses $n \to \infty$, siis saame, et $\sin a = a$. Et $a > 0$ korral $\sin a < a$, siis järelikult $a = 0$.

Seega $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

76. Et $a_1 = 1 > 0$ ja $\sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + \dfrac{1}{a_n}} > \dfrac{a_n}{2}$, siis $a_{n+1} > a_n$. Seega on vaadeldav jada kasvav.

Tuleb näidata, et sellel kasvaval jadal puudub piirväärtus. Oletame vastupidiselt, et vaadeldaval jadal on piirväärtus. Olgu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Siis

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{1}{A}}.$$

Et tegemist on ühe ja sama jadaga, siis ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = A$. Kuna

$$\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{1}{A}} > A,$$

siis saame vastuolu kujul $A > A$.

Et jada (a_n) on kasvav ja piirväärtust ei oma, siis on ta tõkestamata. Seega on antud väide tõestatud.

77. Vaatleme uut jada liikmetega $b_n = a_n - \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Jada (a_n) tõkestatus tähendab $m \leqslant a_n \leqslant M$, millest $m - 1 \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant M$, millest järeldub, et (b_n) on tõkestatud. Jada (b_n) on mittekahanev — tõepoolest,

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2^n} \geqslant a_n - \frac{2}{2^n} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}} = b_n.$$

Siit järeldub, et jada (b_n) koondub. Järelikult koondub ka jada $a_n = b_n + \frac{1}{2^{n-1}}$ kui kahe koonduva jada summa.

78. Matemaatilise induktsiooni teel tõestame $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$, $b_n = 2\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$. Nüüd

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\pi}{2}$$

ning

$$\lim_{n\to\infty} 2^n b_n = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{2^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{\pi}{2}.$$

79. Ilmselt on jada tõkestatud, kui $x = y = 0$, ja ei ole tõkestatud, kui $x = 0$, $y \neq 0$ (siis $a_2 = y$, $a_3 = 2y$, ja edasi saame kergesti $|a_n| \geqslant (n-1)|y|$, kui $n \geqslant 2$), või $x \neq 0$, $y = 0$ (siis $a_2 = a_3 = x$, $a_4 = 2x$, ja $|a_n| \geqslant (n-2)|x|$, kui $n \geqslant 2$).

Olgu nüüd $x, y \neq 0$, $\frac{a_1}{a_0} = \frac{y}{x} = \alpha$ ja $\frac{a_2}{a_1} = \frac{x+y}{y} = \beta$. Saame

$$\beta = \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}\ .$$

Vaatleme eraldi kaht juhtu:

a) Kui $\beta = \alpha$, siis $a_2 = \alpha y \neq 0$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1+\beta}{\beta} = \frac{1+\alpha}{\alpha} = \beta$ ning induktsiooni abil saame kergesti veenduda, et $a_n = \alpha a_{n-1} = \alpha^n x$, $n = 1, 2, \ldots$. Seega on tegemist geomeetrilise jadaga, mille tegur on α. Tingimusest $\beta = \frac{1+\alpha}{\alpha} = \alpha$ leiame $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Et $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$, $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > 1$, siis $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ korral on antud jada tõkestatud (täpsemalt, koondub nulliks), ja $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ korral ei ole tõkestatud ($|a_n| = |\alpha|^n|x|$ saab n kasvades kuitahes suureks).

b) Kui $\beta \neq \alpha$, siis $\alpha \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tähistades $\alpha_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, saame $\alpha = \alpha_0 + \delta$, kus $\delta \neq 0$. Leiame:

$$\begin{aligned} a_1 &= y = \alpha x = \alpha_0 x + \delta x\ ; \\ a_2 &= x + y = (1+\alpha_0)x + \delta x = \alpha_0^2 x + \delta x\ ; \\ a_3 &= a_1 + a_2 = \alpha_0(1+\alpha_0)x + 2\delta x = \alpha_0^3 x + 2\delta x\ . \end{aligned}$$

Induktsiooni abil on lihtne veenduda, et $a_n = \alpha_0^n x + F_n\delta x$, kus $F_1 = F_2 = 1$, $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$, $i \geqslant 3$, s.t. F_i on Fibonacci arvud. Et ilmselt $F_n \geqslant n-1$, siis saame

$$\begin{aligned}|a_n| &\geqslant |F_n\delta x| - |\alpha_0^n x| \geqslant \\ &\geqslant |x|\Big((n-1)|\delta| - |\alpha_0|^n\Big) > |x|\big((n-1)|\delta| - 1\big)\end{aligned}$$

iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. On selge, et mistahes $x, \delta \neq 0$ ja $M > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et $|a_N| > M$, s.t. jada ei ole tõkestatud.

Kokkuvõttes saime, et antud jada on tõkestatud siis ja ainult siis, kui $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot x$ (kus x võib olla suvaline reaalarv).

80.

a) Piisab näidata, et vastava (lõpmatu) rea summa on vähemalt 4. Olgu k kõigi selliste ridade summade suurim alumine tõke (nn. *alumine raja*). Ilmselt $k \geqslant 1$.

Mistahes $\varepsilon > 0$ korral võime leida jada (x_n), millele vastava rea summa on väiksem kui $k + \varepsilon$ (sest k oli suurim alumine tõke). Kirjutades vaadeldava summa kujul

$$\frac{x_0^2}{x_1} + x_1 \cdot \left(\frac{\left(\frac{x_1}{x_1}\right)^2}{\frac{x_2}{x_1}} + \frac{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}{\frac{x_3}{x_1}} + \ldots + \frac{\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2}{\frac{x_{n+1}}{x_1}} + \ldots \right)$$

Sulgudes oleva rea summa on samasugune nagu vaadeldava rea summa, s.t. sulgavaldise väärtus on vähemalt k. Seega $k + \varepsilon > \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{x_1}{k}$. See kehtib kõigi $\varepsilon > 0$ korral, mis tähendab, et $k \geqslant \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{x_1}{k}$. Ent $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{x_1}{k} \geqslant 2\sqrt{k}$, mille abil $k \geqslant 4$.

b) Tähistame $x_n = \dfrac{1}{2^n}$. Siis

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 4 - \frac{1}{2n-2} < 4.$$

81. *Lahendus 1:* Väikeste n väärtuste korral proovides ilmneb seaduspära $a_n = 2^{n-2}(n+1)$. Tõestame selle kehtivuse matemaatilise induktsiooni teel. Ilmselt piisab selleks näidata, et summa

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = (n-1)2^{n-2}.$$

Oletame, et kõigi $k \leqslant n-1$ korral kehtib $a_k = 2^{k-2}(k+1)$ ning leiame vaadeldava summa

$$\begin{aligned}
S &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = \\
&= 2 \cdot 2^{-1} + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^{n-3} = \\
&= 2 \cdot (2^{-1} + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-3}) + (1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-3}) + \\
&\quad + (2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) + (2^2 + \ldots + 2^{n-3}) + \ldots \\
&\quad \ldots + (2^{n-4} + 2^{n-3}) + 2^{n-3} = \\
&= 1 + 3 \cdot (2^{n-2} - 1) + 2 \cdot (2^{n-3} - 1) + 2^2 \cdot (2^{n-4} - 1) + \ldots + \\
&\quad + \ldots + 2^{n-4}(2^2 - 1) + 2^{n-3}(2 - 1) = \\
&= n2^{n-2} - 1 - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) = n2^{n-2} - 1 - (2^{n-2} - 1) = \\
&= (n-1)2^{n-2},
\end{aligned}$$

nagu soovitud.

Lahendus 2: Vaadeldav summa

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-2}(k+1)$$

on avaldatav kui funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 + x^3 + \ldots + x^n) = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} x^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2(x^{n-1} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - x^2}{4(x-1)}$$

tuletis kohal $x = 2$ — tõepoolest,

$$f'(2) = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} k2^{k-1} = \sum_{k=2}^{n} k2^{k-3} = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)2^{k-2} = S,$$

teiselt poolt

$$f'(x) = \frac{((n+1)x^n - 2x)(x-1) - (x^{n+1} - x^2)}{4(x-1)^2} =$$

mille abil

$$f'(2) = \frac{1}{4}[(n+1)2^n - 4 - 2^{n+1} + 4] = (n+1)2^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2} = (n-1)2^{n-2}.$$

Lahendus 3: Vaadeldava summa

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-2}(k+1)$$

võime leida ka kui

$$
\begin{aligned}
2S - S &= [2^0 \cdot 2 + 2^1 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + \ldots + 2^{n-3}(n-1) + 2^{n-2}n] - \\
&\quad - [2^{-1} \cdot 2 + 2^0 \cdot 3 + 2^1 \cdot 4 + \ldots 2^{n-4}(n-1) + 2^{n-3}n] = \\
&= -2^{-1} \cdot 2 - (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-3}) + 2^{n-2}n = \\
&= -1 - (2^{n-2} - 1) + 2^{n-2}n = 2^{n-2}(n-1).
\end{aligned}
$$

82. On lihtne näha, et

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k}\right) = \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor .$$

Teiselt poolt kehtivad võrratused

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \leqslant \sum_{p \leqslant n} \frac{n}{p^2} < n \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right) < \frac{n}{4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{n}{2}.$$

Seega $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k < \dfrac{n}{2}$ mistahes $n \geqslant 2$ korral. Kasutades nüüd aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelist võrratust, tuleb

$$a_2 a_3 \cdots a_n < \left(\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{e}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^{n-1}}.$$

Nende võrratuste liitmisel saame

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + 3\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) = \\
&= \frac{46}{60} + \frac{3}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = \frac{46}{60} + \frac{6}{32} < 1.
\end{aligned}
$$

83. Korrutame võrduse pooli arvuga d:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{a(a+d)} &+ \frac{d}{(a+d)(a+2d)} + \ldots + \frac{d}{[a+(n-2)d] \cdot [a+(n-1)d]} = \\
&= \frac{n-1}{a \cdot a_n} \cdot d, \\
\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} &+ \frac{1}{a+d} - \frac{1}{a+2d} + \ldots + \frac{1}{a+(n-2)d} - \frac{1}{a+(n-1)d} = \\
&= \frac{n-1}{a \cdot a_n} \cdot d, \\
&\frac{1}{a} - \frac{1}{a+(n-1)d} = \frac{a+(n-1)d-a}{a[a+(n-1)d]} = \frac{(n-1)d}{a \cdot a_n}.
\end{aligned}
$$

84. Teisendame

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$

mille abil

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \to \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

protsessis $n \to \infty$.

85. *Vastus:* Arvu n võimalikud väärtused on $n = 3$ ja $n = 4$. Esimesel juhul $\alpha = \frac{\pi}{6}$, teisel juhul $\alpha = \frac{\pi}{5}$.

Ilmselt peab olema $n \geqslant 3$, sest muidu ei teki üldse hulknurka. Et nurkade suurused moodustavad aritmeetilise jada, siis vaadeldava hulknurga sisenurkade summa on

$$n \cdot \frac{(\alpha + n\alpha)}{2} = \pi(n-2)\ .$$

Avaldades saadud võrdusest α, saame

$$\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}\ .$$

Hulknurga kumeruse tõttu

$$n\alpha = \frac{2\pi(n-2)}{n+1} < \pi$$

(teised nurgad on kõik väiksemad) ehk $2n - 4 < n + 1$, millest $n < 5$. Seega on arvu n võimalikeks väärtusteks $n = 3$ ja $n = 4$.

Juhul $n = 3$ saame $\alpha = \frac{2\pi}{3 \cdot 4} = \frac{\pi}{6}$, juhul $n = 4$ aga $\alpha = \frac{2 \cdot 2\pi}{4 \cdot 5} = \frac{\pi}{5}$.

86. *Vastus:* ainus selline algarv on 101.

Arvu $\underbrace{10101\ldots01}_{k \text{ ühte}}$ saame esitada kujul

$$\begin{aligned} 10101\ldots01 &= 100^0 + 100^1 + \cdots + 100^{k-1} = \\ &= \frac{100^k - 1}{100 - 1} = \frac{(10^k)^2 - 1}{99} = \\ &= \frac{(10^k - 1)\cdot(10^k + 1)}{99}. \end{aligned}$$

Kui $k \geqslant 3$, siis on viimase murru lugejas mõlemad tegurid suuremad kui 99 ning pärast taandamist jääb järele kahe 1-st suurema arvu korrutis. Juhul $k = 2$ on vaadeldavaks arvuks 101, mis on algarv.

87. Ilmselt on võimalik leida nurgad $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ nii, et $\tan\alpha > 0$, $\tan(\alpha + \beta) > 0$, $\ldots$, $\tan(\alpha + 1989\beta) > 0$ ja $\tan(\alpha + 1990\beta) < 0$. Nüüd piisab tähele panna, et võttes $a_0 = \tan\alpha$ ja $c = \tan\beta$ saame $a_n = \tan(\alpha + n\beta)$.

88. Karakteristliku võrrandi $q^2 = q + 2$ lahendid saame $q_1 = -1$, $q_2 = 2$. Seega on jada (a_n) liikmed kujul $a_n = c_1(-1)^n + c_2 \cdot 2^n$. Lähtetingimuste abil (võttes $n = 1$, $n = 2$) määrame $c_1 = \dfrac{a_2 - 2a_1}{3}$, $c_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{6}$. Seega $c_1, c_2 > 0$,

$$a_n = 2^n \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n c_1 + c_2 \right]$$

ning $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$, sest $\left(-\dfrac{1}{2} \right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ja $\sqrt[n]{c_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

89. Tähistame

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= (1, 0, \ldots, 0), \\ \overrightarrow{e_2} &= (0, 1, \ldots, 0), \\ &\ldots \\ \overrightarrow{e_n} &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Kuna $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, siis ülesande tingimuste järgi leidub iga $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jaoks $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$, et $f(\overrightarrow{e_p}) = \overrightarrow{e_q}$. Samuti on selge, et $p \neq q$ korral $f(\overrightarrow{e_p}) \neq f(\overrightarrow{e_q})$. Järelikult

$$\{f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}. \tag{18}$$

Vaatleme suvalist vektorit $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, milles on t positsioonil 1-d ja ülejäänud positsioonidel 0-d. Kui $f(\overrightarrow{e_p}) = \overrightarrow{e_q}$ ja $a_p = 1$, siis on q. positsioonil vektoris $f(\overrightarrow{a})$ samuti 1 (muidu erineksid vektorid $\overrightarrow{e_p}$ ja $\overrightarrow{a}$ kokku $t - 1$ positsioonil, vektorid $f(\overrightarrow{e_p})$ ja $f(\overrightarrow{a})$ aga $t + 1$ positsioonil). Analoogiliselt saame, et kui $a_p = 0$, siis on q. positsioonil vektoris $f(\overrightarrow{a})$ samuti 0.

Olgu nüüd antud vektorid $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ nii, et $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$. See tähendab, et iga $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ korral on $a_i + b_i + c_i$ paarisarv. Fikseerime indeksi i ja olgu $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_j}$. Siis langevad vektorite $f(\overrightarrow{a})$, $f(\overrightarrow{b})$ ja $f(\overrightarrow{c})$ j. positsioonide väärtused kokku vastavalt väärtustega a_i, b_i ja c_i ning kasutades omadust (18) näeme, et $f(\overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$.

90. Sobivad parajasti kõik konstantsed funktsioonid. Veendume, et konstantne funktsioon $f(x) = c$ rahuldab ülesande tingimust:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)c = (x + y)f(x^2 + y^2).$$

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et f võib olla mittekonstantne. Järelikult leidub tema väärtuste hulgas vähemalt kaks erinevat elementi. Valime $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $f(x_0) < f(y_0)$ ning et suuruste $f(x_0)$ ja $f(y_0)$ vahel ei ole ühtki teist funktsiooni f väärtust. Nüüd aga

$$\begin{aligned} f(x_0) = \frac{x_0 f(x_0) + y_0 f(x_0)}{x_0 + y_0} &< \frac{x_0 f(y_0) + y_0 f(x_0)}{x_0 + y_0} < \\ &< \frac{x_0 f(y_0) + y_0 f(y_0)}{x_0 + y_0} = f(y_0), \end{aligned}$$

mis annab vastuolu x_0 ja y_0 valikuga, sest $\dfrac{x_0 f(y_0) + y_0 f(x_0)}{x_0 + y_0} = f(x_0^2 + y_0^2)$ ja järelikult $f(x_0) < f(x_0^2 + y_0^2) < f(y_0)$.

91. Võttes $x = y = 1$ saame $f(f(1)) = f(1)$ ning võttes $x = 1$ ja $y = f(1)$ saame $f(f(f(1))) = f(1)^2$. Järelikult

$$f(1)^2 = f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1),$$

mistõttu $f(1) = 1$ ja 1 on funktsiooni f püsipunkt[12].

Asendades $y = x$, on tulemuseks

$$f(xf(x)) = xf(x),$$

järelikult on iga x korral suurus $xf(x)$ funktsiooni f püsipunktiks.

Oletame, et funktsioonil f leidub püsipunkt $x > 1$. Siis

$$f(x^2) = f(xf(x)) = xf(x) = x^2$$

ja ka x^2 on püsipunkt. Analoogiliselt on püsipunktid $x^4, x^8, \ldots, x^{2^m}, \ldots$. Kuid kuna $x > 1$, siis $x^{2^m} \to \infty$ kui $m \to \infty$, mis on vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult pole funktsioonil f püsipunkti, mis oleks suurem kui 1.

[12]Funktsiooni f ***püsipunktiks*** nimetame sellist elementi x, mille korral $f(x) = x$.

Oletame nüüd, et vaadeldaval funktsioonil leidub püsipunkt $x \in (0,1)$. Siis

$$1 = f\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = f\left(\frac{1}{x} \cdot f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right),$$

järelikult on ka $\frac{1}{x}$ püsipunkt. Kuna $\frac{1}{x} > 1$, saame jälle vastuolu.

Niisiis on 1 funktsiooni f ainus püsipunkt. Ülaltõestatu põhjal peab siis iga $x \in (0, +\infty)$ korral kehtima $xf(x) = 1$ ehk $f(x) = \frac{1}{x}$. Kontrollime, et see funktsioon rahuldab ülesande tingimusi:

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = yf(x),$$

samuti $x \to \infty$ korral $f(x) \to 0$.

92. Oletame, et selline polünoom leidub, siis

$$p(7) = a_0 7^n + a_1 7^{n-1} + \ldots + a_n = 5, \qquad p(15) = a_0 15^n + \ldots + a_n = 9;$$

lahutades ühe võrduse teisest, saame $a_0(15^n - 7^n) + \ldots + a_{n-1}(15-7) = 4$, kus vasak pool jagub $15 - 7 = 8$-ga, aga parem pool ei jagu 8-ga — vastuolu.

93. Olgu polünoom $x^3P(x) + x^2 + x + 1$ n-astme polünoom, mille juured on $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Oletame, et kõik need juured on reaalsed, ning näitame, et sellest järeldub vastuolu. Olgu polünoomi $P(x)$ pealiikme kordaja a_0, siis Viète'i valemite põhjal

$$c_1c_2 \ldots c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{a_0},$$
$$c_1c_2 \ldots c_n \cdot \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}\right) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{a_0},$$
$$c_1c_2 \ldots c_n \cdot \left(\frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_1c_3} + \ldots + \frac{1}{c_{n-1}c_n}\right) = (-1)^{n-2} \cdot \frac{1}{a_0},$$

millest saame avaldada

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n} = -1, \qquad \frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_1c_3} + \ldots + \frac{1}{c_{n-1}c_n} = -1.$$

Nüüd on ruutude summa

$$\begin{aligned}\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \ldots + \frac{1}{c_n^2} &= \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}\right)^2 - \\ &\quad - 2 \cdot \left(\frac{1}{c_1c_2} + \frac{1}{c_1c_3} + \ldots + \frac{1}{c_{n-1}c_n}\right) = \\ &= -1\end{aligned}$$

negatiivne, mis on võimatu. Järelikult on vähemalt üks juurtest $c_1, c_2, \dots, c_n$ kompleksarv, mis ei ole reaalarv.

94. Olgu $h(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$, kus $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$ (Viète'i valemid). Nüüd

$$\begin{aligned} n &= f(a,b,c) = 2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + \frac{7}{ab} + \frac{1}{c} = \\ &= 2(a^2+b^2+c^2) - 4c^2 + \frac{7c}{\sigma_3} + \frac{1}{c} = 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 4c^2 + \frac{7c}{\sigma_3} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Viimase võrduse kirjutame kujul $c^3 - \frac{7}{4\sigma_3}c^2 + \left(\frac{n}{4} - \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{2}\right)c - \frac{1}{4} = 0$. Siit järeldub, et reaalarv c on polünoomi

$$g(t) = t^3 - \frac{7}{4\sigma_3}t^2 + \left(\frac{n}{4} + \sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t - \frac{1}{4}$$

juur. Samal kombel annavad võrdused $n = f(b,c,a)$ ja $n = f(c,a,b)$, et a ja b on samuti polünoomi $g(t)$ juured. Seepärast $h(t) \equiv g(t)$ ning, võrrelnud vastavaid kordajaid, võime kirjutada $\sigma_1 = \frac{7}{4\sigma_3}$, $\sigma_2 = \frac{n}{4} + \sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{2}$, $\sigma_3 = -\frac{1}{4}$. Neist seostest keskmine annab $n = 2\sigma_1^2$, esimesest ja viimasest saame $\sigma_1 = -7$, millest avaldame $n = 2 \cdot 49 = 98$.

95. Polünoom $P(n)$ on avaldatav rekurrentselt kujul

$$P_n(x) = (P_{n-1}(x) - 2)^2, \qquad P_1(x) = (x-2)^2.$$

Liikme x^2 kordaja võrdub $\frac{P_n''(0)}{2!}$, seega leiame selle suuruse. Esimene tuletis

$$P_n'(x) = 2(P_{n-1}(x) - 2)P_{n-1}'(x)$$

ning teine tuletis

$$P_n''(x) = 2(P_{n-1}'(x))^2 + 2(P_{n-1}(x) - 2)P_{n-1}''(x).$$

On selge, et $P_n(0) = 4$. Esimese tuletise avaldisest

$$P_n'(0) = 2(P_{n-1}(0) - 2)P_{n-1}'(0) = 4P_{n-1}'(0)$$

ning $P_1'(0) = -4$, mille abil $P_n'(0) = -4^n$. Edasi, teise tuletise avaldisest

$$P_n''(0) = 2(P_{n-1}'(0))^2 + 2(P_{n-1}(0) - 2)P_{n-1}''(0) = 2 \cdot 4^{2n-2} + 4P_{n-1}''(0)$$

ning $P_1''(0) = 2$, seega $P_n''(0) = -\frac{1}{6} \cdot 4^n + \frac{1}{6} \cdot 4^{2n}$. On jäänud avaldada

$$\frac{P_n''(0)}{2!} = -\frac{1}{12} \cdot 4^n + \frac{1}{12} \cdot 4^{2n}.$$

96. Rakendades teoreemi 5 polünoomile $x^5 - x + 1$ veendume kõigepealt, et sellel ei ole ratsionaalarvulisi juuri (selliseks juureks võiks olla ainult 1 või -1). Oletame nüüd, et mingi reaal- või kompleksarv α on polünoomide $x^2 + ax + b$ ja $x^5 - x + 1$ ühine juur, s.t. $\alpha^2 = -a\alpha - b$ ja $\alpha^5 = \alpha - 1$. Siis

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= \alpha^5 = \alpha(\alpha)^2 = \alpha(-a\alpha - b)^2 = \\ &= \alpha(a^2(-a\alpha - b) + 2ab\alpha + b^2) = (-a^3 + 2ab)\alpha^2 + (b^2 - a^2 b)\alpha = \\ &= (a^4 - 3a^2 b + b^2)\alpha + (a^3 b - 2ab^2), \end{aligned}$$

s.t. $(a^4 - 3a^2 b + b^2 - 1)\alpha = -a^3 b + 2ab^2 - 1$. Et α ei ole ratsionaalarv, siis saame siit võrdused

$$a^4 - 3ab^2 + b^2 - 1 = 0,$$
$$-a^3 b + 2ab^2 - 1 = 0.$$

Avaldades neist võrdustest $b = \dfrac{2a^5 - 2a + 1}{5a^3}$ ja asendades esimesse võrdusse, saame

$$a^{10} + 3a^6 + 11a^5 - 4a^2 + 4a - 1 = 0,$$

mis ei ole ratsionaalarvulise a korral võimalik, sest polünoomil

$$x^{10} + 3x^6 + 11x^5 - 4x^2 + 4x - 1$$

puuduvad ratsionaalarvulised juured (selles veendumiseks kasutame jällegi teoreemi 5).

97. Olgu n paarisarv. Siis peab polünoomil $P_n(x)$ leiduma miinimum mingis punktis x_0, kus $P_n'(x_0) = 0$. Kuid

$$P_n'(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x)$$

ning seega $x_0 \neq 0$ ja $P_n(x_0) = P_n'(x_0) + \dfrac{x_0^n}{n!} > 0$. Niisiis on polünoomi $P_n(x)$ minimaalne väärtus $P_n(x_0) > 0$, see aga tähendab, et $P_n(x_0) > 0$ iga x väärtuse korral.

Olgu nüüd n paaritu arv. Kuna $P_n'(x) = P_{n-1}(x)$ ja $n-1$ on paarisarv, siis vastavalt eelpool tõestatule $P_n'(x) > 0$ mistahes x korral, s.t. funktsioon $P_n(x)$ on kogu reaalsirgel rangelt kasvav. Et $\lim\limits_{x\to\infty} P_n(x) = \infty$ ja $\lim\limits_{x\to-\infty} P_n(x) = -\infty$, siis on polünoomil $P_n(x)$ täpselt üks nullkoht.

98. Võttes $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ ja $x = 8$, saame, et $p(2) = 0$, $p(4) = 0$, $p(8) = 0$ ja $p(16) = 0$, millest Bézout' teoreemi kohaselt

$$p(x) = (x-2)(x-4)(x-8)(x-16)q(x),$$

kus $q(x)$ on mingi polünoom. Asetades saadud avaldise lähtevõrrandisse saame

$$\begin{aligned}&16(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)q(2x) = \\ &= 16(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)q(x).\end{aligned}$$

Siit näeme, et $q(2x) = q(x)$ vähemalt kõigi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 4, 8, 16\}$ korral, mis tähendab, et q on konstantne polünoom. Teiselt poolt on lihtne veenduda, et polünoom

$$p(x) = a(x-2)(x-4)(x-8)(x-16)$$

rahuldab ülesande tingimust mistahes reaalarvulise konstandi a korral.

99. Viète'i valemite abil

$$\begin{aligned}&p = -(x_1 + x_2 + x_3);\\ &q = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;\\ &r = -x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Saadud võrdusi teisendades saame

$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 = -p;\\ &x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q;\\ &x_1x_2x_3 = -r.\end{aligned}$$

Pidades silmas Viète'i valemeid, peavad uue võrrandi kordajad olema (muutuja x astmenäitaja kahanevas järjekorras)

$$\begin{aligned}-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) &= -[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] = \\ &= -(p^2 - 2q) = 2q - p^2;\\ x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - \\ &\quad - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= q^2 - 2pr;\\ -x_1^2x_2^2x_3^2 &= -(x_1x_2x_3)^2 = -r^2\end{aligned}$$

Seega on nõutud võrrand kujul

$$x^3 + (2q - p^2)x^2 + (q^2 - 2pr)x - r^2 = 0.$$