Lev Bukovský, Igor Kluvánek „Dirichletov princíp”

Praha 1970

Näide 1. Tuginedes antropoloogiale, ei leidu inimest suurema kui 500 000 juuksekarvade arvuga. Tõestame, et Prahas leidub kaks võrdse juuksekarvade arvuga inimest.

Ülesanne 1. Raamatukogus on 1100 raamatut, millest ühelgi pole rohkem kui 1000 lehekülge. Tõestage, et raamatukogus leidub kaks võrdse lehekülgede arvuga raamatut.

Ülesanne 2. Kõrgkooli esimesele kursusele tuli 84 eri keskkoolist pärit 120 üliõpilast. Tõestage, et esimesel kursusel leidub vähemalt kaks üliõpilast, kes tundsid üksteist juba keskkoolipäevil.

Ülesanne 3. Korratul õpilasel on sahtlis viit eri värvi sokke (igast värvist vähemalt kaks). Mitu sokki tuleks sahtlist võtta, et võetud sokkide seas oleks kaks sama värvi?

Ülesanne 4. Viskame kaht täringut. Mitu korda on tarvis visata, et kindlasti saada kaks viset, mille silmade summad on võrdsed?

Näide 2. Konverentsist võttis osa 40 delegaati 13 riigist. Tõestage, et vähemalt ühe riigi delgatsioonis oli rohkem kui 3 liiget.

Ülesanne 5. Mitu korda on tarvis visata kolme täringut, et kindlasti olla teinud vähemalt neli viset, mille silmade summad on võrdsed?

Ülesanne 6. Mitu korda on tarvis visata kahte täringut, et saada kolm korda samad silmad mõlemal täringul? Lahendada ülesanne a) juhul, kui täringud on ühesugused, st. silmade paarid $(2,1)$ ja $(1,2)$ loeme võrdseteks; b) juhul, kui täringud on erinevad (näiteks eri värvi), st. näiteks silmade paarid $(2,1)$ ja $(1,2)$ loeme erinevateks.

Näide 3. On antud kumer neliteisttahukas 9 tipuga. Tõestage, et tal leidub tipp, millest väljub vähemalt 5 serva.

Ülesanne 7. On antud kumer seitsetahukas 6 tipuga. Tõestage, et täpselt üks tahk on nelinurk.

Näide 4. Konverentsist võttis osa 70 delegaati, kes kõnelesid 11 erinevat keelt. Üht keelt kõneles ülimalt 15 delegaati. Otsustati valida ametlikuks keeleks iga keel, mida kõneles vähemalt 5 delegaati. Tõestage, et konverentsil oli vähemalt 3 ametlikku keelt.

Näide 5. On tarvis tõestada, et suvaliste 13 reaalarvu seast saab leida kaks arvu x ja y, mille korral

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < 2-\sqrt{3}.$$

Ülesanne 8. Tõestage, et antud $n+1$ suvalise reaalarvu seast saab leida kaks arvu x ja y, mille korral

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < \tan\frac{\pi}{n}.$$

Ülesanne 9. Tõestage, et suvalise 11 reaalarvu seast, mis on vahemikus $(1,100)$, saab valida kaks sellist, mille jagatis on väiksem kui 1,6, aga suurem kui 1.

Näide 6. Aianduses kehtivate reeglite kohaselt peab kahe puu vaheline kaugus olema mitte väiksem kui 5 meetrit. Tõestage, et ristkülikukujulises aias mõõtmetega 20 m $\times 15$ peab seetõttu olema vähem kui 26 puud.

Ülesanne 10. Aias mõõtmetega 35 m $\times 42$ m on 100 puud. Kas saab leida sellise 3 m $\times 5$ m ristküliku, et selles kasvaks vähemalt kaks puud?

Ülesanne 11. Ruudus mõõtmetega 10×10 asetsevad 101 punkti. Näidake, et selles ruudus võib leida kolmnurga pindalaga 1 cm^2, milles asub vähemalt kaks antud punkti.

Ülesanne 12. Aias mõõtmetega 80 m $\times 90$ m kasvab 365 puudu. Kas võib leida aias ristküliku mõõtmetega 5 m $\times 8$ m, milles kasvab vähemalt 3 puud?

Ülesanne 13. Ristkülikusse mõõtmetega 27 m $\times 36$ m on paigutatud 1945 punkti. Tõestage, et vähemalt 7 neist võib korraga katta kolmnurgaga, mille pindala on 3 cm^2.

Ülesanne 14. Näidake, et ruudus küljepikkusega 1 asetsevast 51 punkti seast võib leida mingid 3, mida saab katta ringiga raadiusega $\frac{1}{7}$.

Näide 7. On antud 82 naturaalarvu. Tarvis tõestada, et nende seast võib leida kaks sellist, mille vahe jagub arvuga 81.

Ülesanne 15. Näidake, et antud $n+1$ naturaalarvu seas leidub kaks, mille vahe jagub arvuga n.

Ülesanne 16. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral leidub arv, mille kümnendesitus on kujul $11\ldots100\ldots0$ ning mis jagub arvuga n.

Ülesanne 17. Tõestage, et iga arvust 2 ja 5 erineva algarvu p korral leidub arv kujul $111\ldots1$ (st. kirja pandav kümnendsüsteemis ainult numbriga 1), mis jagub arvuga p.

Näide 8. On antud 67 naturaalarvu. Tõestage, et nende seast võib välja valida mõned arvud selliselt, et nende summa jaguks arvuga 67.

Ülesanne 18. Tõestage, et n arvu seast saab valida mõned selliselt, et nende summa jagub arvuga n.

Ülesanne 19. Ignatius Kvantifikaator (kuulsa professor Kvantifikaatori poeg) lahendas kolme kuu kestel iga päev vähemalt ühe matemaatikaülesande. Kalendrinädala jooksul ei lahendanud ta samas rohkem kui 13 ülesannet. Tõestage, et leidub üksteisele järgnevate päevade jada, mille käigus lahendas Ignatius täpselt 33 ülesannet.

Ülesanne 20. Keegi lahendas vähemalt kaks ülesannet päevas, aga nädalas mitte rohkem kui 17. Tõestage, et kas leiduvad mõned üksteisele järgnevad päevad, mille käigus lahendas ta 23 ülesannet või mõned üksteisele järgnevad päevad, mille käigus ta lahendas 46 ülesannet.

Ülesanne 21. Olgu p ja q ühistegurita naturaalarvud. Tõestage, et leidub naturaalarv n selliselt, et arv $1+q+q^2+\cdots+q^n$ jagub arvuga p. Lisaks tõestage, et kui $1+q+q^2+\cdots+q^n$ jagub arvuga p ja k on naturaalarv, siis ka $1+q+q^2+\cdots+q^{k(n+1)-1}$ jagub arvuga p.

Näide 9. Tõestage, et arvu 37 mingi aste lõpeb numbrite rühmaga 00001.

Ülesanne 22. Olgu arv p ühistegurita arvuga 100000. Tõestage, et arvu p mingi astme kümnendesitus lõpeb numbrite rühmaga 00001. Tõestage veel, et iga naturaalarvu n korral leidub selline naturaalarv k, et p^k kümnendesituse lõpus on n nulli ja number 1.

Ülesanne 23. Olgu arvud p ja q ühistegurita. Tõestage, et arvu p mingi positiivne aste annab arvuga q jagades jäägi 1.

Näide 10. Tõestage, et leidub selline naturaalarv $k \leq 100$, et võrrandil $\left\lfloor \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor = k$ on vähemalt 100 naturaalarvulist lahendit.

Ülesanne 24. Tõestage, et leiduvad sellised naturaalarvud k:

a) $k \leq 6000$, et võrdust $\lfloor \sqrt{x} \log x \rfloor = k$ rahuldab vähemalt 160 naturaalarvu.

b) $k \leq 600$, et võrdust $\lfloor \sqrt[3]{x} \log x \rfloor = k$ rahuldab vähemalt 160 naturaalarvu.

Näide 11. Olgu x irratsionaalarv. Tõestage, et kui k on suvaline naturaalarv, siis leiduvad sellised täisarvud m ja n, et $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Ülesanne 25. Olgu $x \neq 0$ ratsionaalarv, mille võib kirjutada kujul $x = \frac{p}{q}$, kus p on täisarv, q naturaalarv ning p ja q on ühistegurita. Tõestage, et kui k on naturaalarv, $k < q$, siis leiduvad sellised täisarvud m ja n, et $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Ülesanne 26. Tõestage, et kui x on ratsionaalarv, $x \neq 0$, $x = \frac{p}{q}$, kus p on täisarv ja q on naturaalarv, ning α, β on sellised arvud, et $\beta - \alpha < \frac{1}{q}$, siis leiduvad sellised täisarvud m ja n, et $\alpha < m + nx < \beta$.

Ülesanne 27. Tõestage, et kui x on ratsionaalarv, $x \neq 0$, $x = \frac{p}{q}$, kus p on täisarv ja q on naturaalarv, ning k on selline naturaalarv, et $k \geq q$, siis leiduvad sellised täisarvud m ja n, et $0 < m + nx < \frac{1}{k}$.

Näide 12. On teada, et leidub täpselt 7 algarvu, mis pole väiksemad kui 1061 ja suuremad kui 1097 ning lisaks, nende 7 seas on kaks järjestikust algarvu p ja q selliselt, et $p - q = 18$. Tõestage, et leidub vähemalt kaks paari algarvude kaksikuid arvude 1061 ja 1097 vahel.

Ülesanne 28. Arvude 3907 ja 3947 vahel on 9 algarvu, kusjuures teatud kahe järjestikuse algarvu vahe on 12. Tõestage, et 3907 ja 3947 vahel on vähemalt kaks paari algarvude kaksikuid.

Ülesanne 29. Arvude a ja b vahel on $k \geq 2$ algarvu, $a < b$, kusjuures kahe järjestikuse algarvu vahe on h. Tõestage, et a ja b vahel on vähemalt $\left\lfloor 2(k-1) - \frac{b-a-h}{2} \right\rfloor$ paari algarvude kaksikuid.

Näide 13. Tarvis on näidata, et kumera n-nurga vähemalt üks nurk on suurem või võrdne arvuga $\frac{n-2}{n}\pi$.

Näide 14. Poldaavia pindala on 268 138 km^2. Seal on püstitatud 13 televisioonimasti TV-signaali edastamiseks. Signaali kvaliteet on normikohane mastist 80 km raadiuses. Tõestage, et Poldaavia ei ole täielikult televisioneeritud, see tähendab, seal leidub kohti, kus signaali kvaliteet on alla normi.

Ülesanne 30. Kehtigu järgmine väide.

> Kui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on suvalised reaalarvud, mis pole väiksemad kui b, siis vähemalt üks nende seast pole väiksem kui $\frac{b}{n}$.

Tõestage selle väite abil Dirichlet' printsiip (nii liht- kui üldvariant).

Ülesanne 31. Olgu tasandil antud kolm punkti. Tõestage, et vähemalt üks nende poolt määratud nurk pole väiksem kui $\frac{1}{3}\pi$.

Näide 15. Olgu antud neli erinevat punkti tasandil. Tõestage, et vähemalt üks nende poolt määratud nurk pole väiksem kui $\frac{1}{2}\pi$.

Ülesanne 32. Tõestage, et 5 punkti tasandil määravad vähemalt ühe nurga, mis pole väiksem kui $\frac{3}{5}\pi$.

Ülesanne 33. Tõestage, et 6 punkti tasandil määravad vähemalt ühe nurga, mis pole väiksem kui $\frac{2}{3}\pi$.

Ülesanne 34. Tõestage, et 7 punkti tasandil määravad vähemalt ühe nurga, mis pole väiksem kui $\frac{2}{3}\pi$.

Ülesanne 35. Tõestada järgmised väited.

> Antud n reaalarvu seas, mille summa on suurem kui b, leidub vähemalt üks, mis on suurem kui $\frac{b}{n}$.
>
> Kui n reaalarvu summa pole suurem kui b, on vähemalt üks neist arvudest mitte suurem kui $\frac{b}{n}$.
>
> Kui n reaalarvu summa on väiksem kui b, on vähemalt üks neist arvudest väiksem kui $\frac{b}{n}$.

Näide 16. Tõestage, et silindrikujulisse kasti kõrgusega 60 cm ja põhja läbimõõduga 40 cm pole võimalik paigutada 2630 lauatennisepalli läbimõõduga 3,8 cm.

Näide 17. Tõestage, et ristkülikukujulises aias mõõtmetega 100 korda 300 m peab olema vähem kui 3851 puud, kui suvalise kahe puu vaheline kaugus peab olema suurem kui 4 m.

Näide 18. Tõestage, et ristkülikukujulises aias mõõtmetega 100 korda 300 m peab olema vähem kui 2516 puud, kui suvalise kahe puu vaheline kaugus peab olema suurem kui 4 m.

Ülesanne 36. Tõestage, et ristkülikusse mõõtmetega 197 korda 94 ei saa paigutada 24 000 punkti selliselt, et iga kahe punkti vaheline kaugus poleks väiksem kui 1.

Ülesanne 37. Tõestage, et ristkülikusse mõõtmetega a korda b ei saa paigutada rohkem kui $\frac{4(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)}{\pi\varepsilon^2}$ punkti selliselt, et suvalise kahe punkti vaheline kaugus oleks suurem kui ε.

Ülesanne 38. Tõestage, et ristkülikusse mõõtmetega a korda b ei saa paigutada rohkem kui $\left\lfloor \frac{2ab}{\varepsilon^2} + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(a+b) \right\rfloor + 1$ punkti selliselt, et suvalise kahe punkti vaheline kaugus oleks suurem kui ε.

Näide 19. Ringikujuline auk läbimõõduga 6 m on kaetud 15 plaadiga (selliselt, et august pole midagi näha). Tõestage, et ühe plaadi laius on vähemalt 40 cm.

Ülesanne 39. Ring raadiusega R on jaotatud n osaks. Tõestage, et vähemalt ühe osa laius pole väiksem kui $\frac{2R}{n}$.

Näide 20. Sirgel p olgu antud 6 lõiku u_1 kuni u_6 ilma ühiste punktideta. Olgu k_i selline ring, mille keskpunkt asub pooltasandil ρ^+ raadiusega u_i, kusjuures u_i osutugu selle ringi kõõluks. Näidake, et ei leidu punkti, mis asuks kõigi nende ringide sees.

Ülesanne 40. Olgu sirgel p antud n lõiku $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ilma ühiste punktideta (otspunktid võivad olla ühised). Olgu k_i ring, mille keskpunkt asub pooltasandil ρ^+ selliselt, et u_i on selle ringi kõõl ja kõõludele u_i toetuvad kesknurgad on kõik võrdsed nurgaga α. Tõestage, et kui $n \cdot \alpha \geq 360°$, siis nendel ringidel ei ole ühist punkti. Tõestage, et kui $n \cdot \alpha < 360°$, siis leiduvad sellised lõigud $u_1, \ldots, u_n$, et vastavatel ringidel on ühine punkt.

Ülesanne 41. Olgu sirgel p antud n lõiku $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ilma ühiste punktideta (otspunktid võivad olla ühised). Olgu k_i ring, mille keskpunkt asub pooltasandil ρ^+ selliselt, et u_i on selle ringi kõõl ja kõõlule u_i toetuv kesknurk on α_i. Tõestage, et kui $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 360°$, siis nendel ringidel ei ole ühist punkti. Tõestage, et kui $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 360°$, siis leiduvad sellised lõigud $u_1, \ldots, u_n$, et vastavatel ringidel on ühine punkt.

Näide 21. On antud kaks numbrit (näiteks 1, 2). Mitu sellist kolmekohalist arvu võib nendest numbritest moodustada, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt kahel numbrikohal?

Ülesanne 42. Veenduge, et võib leida 8 neljakohalist (16 viiekohalist) arvu, mis koosnevad kahest numbrist selliselt, et suvalised kaks arvu erinevad vähemalt kahel numbrikohal, aga et rohkem kui 8 sellist neljakohalist (16 viiekohalist) arvu ei leidu.

Ülesanne 43. Veenduge, et pole võimalik leida rohkem kui 2^{n-1} n-numbrilist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt kahel numbrikohal. Püüdke anda juhis selliste 2^{n-1} n-numbrilise arvu konstrueerimiseks (induktsiooniga n järgi).

Näide 22. Tarvis tõestada, et pole võimalik leida rohkem kui 4 viiekohalist arvu (ikka kasutades kaht numbrit 1 ja 2), milles suvalised kaks arvu erineksid vähemalt kolmel numbrikohal. Sealjuures neli sellist arvu võib leida, näiteks 11111, 22211, 11222, 22122.

Ülesanne 44. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 8 kuuekohalist arvu numbritest 1 ja 2 selliselt, et suvalised kaks erineksid vähemalt kolmel numbrikohal. Konstrueerige 8 sellist arvu.

Ülesanne 45. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 16 seitsmekohalist arvu numbritest 1 ja 2 selliselt, et suvalised kaks erineksid vähemalt kolmel numbrikohal.

Näide 23. Tarvis näidata, et pole võimalik leida rohkem kui 28 kaheksakohalist arvu numbritest 1 ja 2 selliselt, et suvalised kaks erineksid vähemalt kolmel numbrikohal.

Ülesanne 46. Tuginedes näitele 22 lahendage uuesti ülesanne 45.

Ülesanne 47. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui $\left\lfloor \frac{2^n}{n+1} \right\rfloor$ n-kohalist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt kolmel numbrikohal.

Näide 24. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 4 kuuekohalist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt neljal numbrikohal.

Ülesanne 48. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 8 seitsmekohalist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt neljal numbrikohal. Leidke 8 sellist arvu.

Ülesanne 49. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 16 kaheksakohalist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt neljal numbrikohal. Leidke 16 sellist arvu.

Ülesanne 50. Tõestage, et pole võimalik leida rohkem kui 2^{n-4} n-kohalist arvu, mis koosnevad kahest numbrist nii, et suvalised kaks arvu erineksid vähemalt neljal numbrikohal.

Näide 25. Nelja numbri abil (näiteks 1, 2, 3, 4) pole võimalik konstrueerida rohkem kui 16 sellist kolmekohalist arvu, millest suvalised kaks erineksid vähemalt kahel numbrikohal. Tarvis on tõestada see väide ning veenduda, et 16 sellist arvu on võimalik konstrueerida.

Ülesanne 51. Tõestage, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui k^2 kolmekohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt kahel numbrikohal.

Ülesanne 52. Tõestage, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui k^3 neljakohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt kahel numbrikohal.

Ülesanne 53. Tõestage, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui k^{n-1} n-kohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt kahel numbrikohal.

Näide 26. Tarvis tõestada, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui $\dfrac{k^5}{5k-4}$ viiekohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt kolmel numbrikohal.

Ülesanne 54. Tõestage, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui $\left\lfloor \dfrac{k^n}{nk+1-n} \right\rfloor$ n-kohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt kolmel numbrikohal.

Ülesanne 55. Tõestage, et k numbri abil on võimatu konstrueerida rohkem kui

a) $\dfrac{k^n}{1+n(k-1)+\binom{n}{2}(k-1)^2}$ b) $\dfrac{k^n}{1+n(k-1)+\binom{n}{2}(k-1)^2+\binom{n}{3}(k-1)^3}$

n-kohalist arvu nii, et suvalised kaks neist erineksid vähemalt a) viiel b) seitsmel numbrikohal.

Näide 27. On antud 6 sirget ruumis, millest ükski kaks pole paralleelsed ja ükski kolm ei lõiku ühes punktis. Leidke nende seast kolm selliselt, mis asuksid ühel tasandil, või kolm, mis on paarikaupa kiivsirged.

Ülesanne 56. Tõestage, et maleturniiril, millest võttis osa 6 mängijat, võib leida mängijate kolmiku, kes kõik mängisid üksteisega, või kolmiku, milles ükski mängija teisega ei mänginud.

Ülesanne 57. Olgu tasandil 6 punkti, millest ükski kolm ei asu ühel sirgel, ühendatud siniste või punaste lõikudega (st. mõned kaks on ühendatud siniste, mõned kaks punaste lõikudega, kusjuures suvalised kaks punkti on ühendatud). Tõestage, et leidub vähemalt üks ühevärviline kolmnurk, mille tipud on mingid punktid nende 6 seast.

Näide 28. 17 teadlast on omavahel kirjavahetuses (kõik kõigiga), kusjuures kogu korrespondents toimub kolmel teemal. Tõestage, et leidub teadlaste kolmik, kes kõik omavahel kirjutavad samal teemal.

Ülesanne 58. Ruumis on antud 17 sirget. Tõestage, et nende seas võib leida kolm, mis kas on kõik üksteisega paralleelsed, kõik lõikuvad üksteisega või kõik on üksteisega kiivsirged.

Ülesanne 59. Koolis, kus on 17 klassi, mängiti klassidevaheline jalgpalliturniir põhimõttel „kõik kõigiga”. Turniir kestis kolm päeva. Tõestage, et leidus kolm klassi, kes mängisid kõik kohtumised omavahel samal päeval.

Ülesanne 60. Tasandil on antud 17 punkti, mis on ühendatud omavahel mustade, punaste või siniste lõikudega selliselt, et ükski kolm punkti ei asu ühel sirgel ning iga kaks on ühendatud. Tõestage, et leidub ühevärviline kolmnurk, mille tipud on antud 17 punkti hulgas.

Ülesanne 61. Tõestage, et igas kahevärvilises (värvitakse servi) 6-tipulises graafis leidub vähemalt üks ühevärviline kolmest servast koosnev alamgraaf (lühidalt: ühevärviline kolmnurk). Tõestage, et igas kolmevärvilises 17-tipulises graafis leidub ühevärviline kolmnurk.

Näide 29. Tõestage, et igas neljavärvilises 66-tipulises graafis leidub ühevärviline kolmnurk.

Ülesanne 62. Tõestage, et igas viievärvilises 327-tipulises graafis leidub ühevärviline kolmnurk.

Ülesanne 63. Tõestage, et kui igas k-värvilises m-tipulises leidub ühevärviline kolmnurk, siis igas $(k+1)$-värvilises $(km+m-k+1)$-tipulises graafis leidub ühevärviline kolmnurk.

Näide 30. Olgu kahevärvilises graafis sellised 5 tippu A, B, C, D, E, et A, B, C moodustavad ühevärvilise kolmnurga ja tippude D ning E vaheline serv on ka sama värvi nagu see kolmnurk. Tõestage, et selles graafis leidub lisaks kolmnurgale A, B, C veel üks ühevärviline kolmnurk.

Näide 31. Tõestage, et kahevärvilises 6-tipulises graafis leidub vähemalt kaks ühevärvilist kolmnurka.

Ülesanne 64. Kontrueerige kahevärviline kolmnurk, milles ei leiduks kolme ühevärvilist kolmnurka.

Näide 32. Igas kahevärvilises 7-tipulises graafis leidub vähemalt 4 ühevärvilist kolmnurka.

Ülesanne 65. Tõestage, et kahevärvilises a) 8-tipulises, b) 9-tipulises, c) 10-tipulises, d) 11-tipulises graafis leidub vähemalt a) 7, b) 11, c) 16, d) 22 ühevärvilist kolmnurka.

Näide 33. Tarvis näidata, et kahevärvilises n-tipulises graafis leidub vähemalt $\frac{1}{2}n^2 - \frac{19}{2}n + 61$ ühevärvilist kolmnurka.

Näide 34. Tarvis näidata, et kahevärvilises 24-tipulises graafis leidub vähemalt üks ühevärviline 4-tipuline täisgraaf.

Ülesanne 66. Tõestage, et kahevärvilises 24-tipulises graafis leidub vähemalt kaks ühevärvilist 4-tipulist täisgraaf.

Ülesanne 67. Tõestage, et kahevärvilises 192-tipulises graafis leidub vähemalt üks ühevärviline 5-tipuline täisgraaf.