Võrratused

Jan Willemson, Indrek Zolk

24. september 2002. a.

Sissejuhatus

Võrratused pole meie matemaatikavõistlustel reeglina just oodatud külalised. Kooliprogramm käsitleb neid niipalju kui funktsiooni uurimiseks hädapärast tarvis, häid eestikeelseid sellealaseid klassivälise töö materjale pole saada ja nii ei jõuagi õpilasteni võrratuste omapärane ning rikas maailm.

Eesti matemaatikaolümpiaadide korraldajad on püüdnud seda lünka aegajalt täita ja võistlustele mitmesuguseid võrratustega seotud ülesandeid pakkuda. Tuleb kurvastusega tõdeda, et enamus lahendajatest isegi ei ürita selliste ülesannete sisusse süüvida, lahendusteede otsimisest rääkimata. Tundmatu asja kartus on inimkonnale läbi tema ajaloo väga omane olnud ja nii pole õpilasegi julgusepuudus mingi ime: enne kui võrratused käes "jooksma" hakkavad, tuleb päris palju tüüpülesandeid sügavuti läbi töötada.

Käesolev materjal ongi mõeldud eeskätt gümnaasiumiõpilastele ja kõrgkoolide esimeste kursuste tudengitele, kes soovivad end omal käel algebraliste ja geomeetriliste võrratuste vallas täiendada. Sel otstarbel korjasid brošüüri autorid kokku 129 ülesannet erinevate maade matemaatikavõistlustelt ning olümpiaadiettevalmistusmaterjalidest.

1. peatükis esitatakse põhiteooria enamlevinud algebraliste võrratuste kohta, 2. peatükis leiavad käsitlemist põhilised geomeetrilised võrratused. Enamik tõestustest on mõlemas peatükis antud harjutustena. 3. peatükk pakub valiku ülesannetest, mille läbilahendamine peaks andma piisavad teadmised suvalise taseme matemaatikavõistlusel võrratustega toimetulemiseks. Toodud ülesannete raskusastmest võib aru saada nende päritolu järgi. Kõige keerukamad ülesanded pärinevad reeglina rahvusvaheliselt matemaatikaolümpiaadilt (*International Mathematical Olympiad*, IMO) või sinna esitatud, kuid viimases valikus tagasi lükatud ülesannete (*shortlist*, e.k. eelvalik) seast. Umbes sama raskeid pähkleid pakuvad oma õpilastele puremiseks IMOl traditsiooniliselt tugevalt esinevad maad (Hiina, Iraan, Rumeenia, Vietnam). Eesti tasemele lähedasemaid võrratusi võib leida Balti Tee, Sloveenia, Iirimaa jt võistlustel esinenud ülesannete seast.

Kõigi harjutuste lahendused või lahendusjuhised on toodud 4. peatükis, 5. peatükk aga sisaldab ühe 2001. aastal Eesti lahtisel matemaatikavõistlusel esinenud ülesande põhjalikult läbi töötatud ja lahti seletatud lahendust.

Autorid loodavad, et käesoleva raamatukese vastsed omanikud leiavad siit palju huvitavat ja kasulikku ning et seeläbi paraneb ka Eesti matemaatikahariduse üldine tase.

1 Algebralised võrratused

1.1 Absoluutväärtuse omadustest

Teoreem 1. Suvaliste reaalarvude a ja b korral kehtivad võrratused

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

Ülesanne 1. Tõesta teoreem 1.

Teoreemi 1 võrratused kehtivad ka juhul, kui a ja b on kompleksarvud; märgid $|\,|$ tähistavad sel korral moodulit.

Ülesanne 2. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvud. Tõesta võrratus

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{n-1}-a_n| \geqslant |a_1-a_n|.$$

1.2 Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

Ülesanne 3. Olgu $a, b > 0$. Tõesta võrratus

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Teoreem 2. [1] Olgu $n \geqslant 2$ täisarv ning a_1, a_2, $\ldots$, a_n positiivsed reaalarvud. Siis kehtib võrratus

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Võrdus kehtib parajasti juhul $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Järgnevates ülesannetes anname sellele teoreemile kaks erinevat tõestust – seega ei tohi nende lahendamisel teoreemi ennast kasutada!

Ülesanne 4. Tõesta, et kui positiivsed arvud a_1, a_2, $\ldots$, a_n rahuldavad seost $a_1a_2\ldots a_n = 1$, siis

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqslant n$$

ning et võrdus kehtib parajasti siis, kui $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ülesanne 5. Tõesta teoreem 2 ülesande 4 abil.

[1] Teoreemi tõestas esmakordselt prantsuse matemaatik Augustin Louis Cauchy [ko'ši] (1789–1857).

Ülesanne 6. Tõesta, et iga naturaalarvu N ja positiivsete reaalarvude $a_1, a_2, \dots, a_{2^N}$ korral kehtib võrratus

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^N}}{2^N} \geqslant \sqrt[2^N]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^N}}.$$

Ülesanne 7. Tõesta teoreem 2 ülesande 6 abil.

1.3 Bernoulli võrratus

Teoreem 3. *(Bernoulli võrratus[2]).* Olgu $x > -1$. Tõesta, et kui $0 < \alpha < 1$, siis kehtib võrratus

$$(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x,$$

ja kui $\alpha < 0$ või $\alpha > 1$, siis kehtib võrratus

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x.$$

Ülesanne 8. Tõesta teoreem 3.

Ülesanne 9. Olgu n naturaalarv ja $x > -1$. Tõesta võrratus

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

ilma teoreemi 3 kasutamata.

Ülesanne 10. Tõesta teoreem 3 naturaalarvuliste α ja positiivsete x väärtuste jaoks teoreemi 2 abil.

Ülesanne 11. Panka pandi 1000 krooni. Millisel juhul saab hoiustaja 10 aastaga rohkem tulu: kas siis, kui pank maksab talle igal aastal 5% või igas kuus $\frac{5}{12}$% dividende?

1.4 α-järku astmekeskmiste vaheline võrratus

Definitsioon 1. Olgu $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ja $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Arvude $a_1, a_2, \dots, a_n$ **α-järku astmekeskmiseks** nimetatakse suurust

$$m_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

[2] Võrratuse tõestas esmakordselt šveitsi matemaatik Jakob (Jacques) Bernoulli [ber'nuli] (1654–1705), esimesena märkas aga seda võrratust tema vend Johann (Jean) Bernoulli (1667–1748).

Leiame piirväärtuse[3]

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\ln \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\right)-\ln n}{\alpha}} =$$

$$= e^{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}\ln a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}}} = e^{\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln a_k}{n}} = e^{\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

Kuna $\lim_{p\to 0} a^p = e^{\ln\lim_{p\to 0} a^p} = e^{\lim_{p\to 0} p\ln a} = e^0 = 1$, kui $a > 0$, siis on kolmanda võrduse juures võimalik kasutada l'Hospitali reeglit (nullile läheneva lugeja ja nimetajaga murru piirväärtus langeb kokku lugeja tuletise ja nimetaja tuletise jagatise piirväärtusega). Logaritmi ja piirväärtuse sümbolite vahetamine, samuti l'Hospitali reegli kasutamine on võimalik tänu logaritmfunktsiooni diferentseeruvusele kogu oma määramispiirkonnas.

Eelneva põhjal evib mõtet

Definitsioon 2. Olgu $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Arvude $a_1, a_2, \dots, a_n$ **0-järku astmekeskmiseks** nimetatakse suurust

$$m_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Teoreem 4. Kui $\alpha < \beta$, siis kehtib suvaliste $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ korral võrratus

$$m_\alpha \leqslant m_\beta.$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Järgnevates ülesannetes tõestame selle teoreemi, niisiis ei tohi teoreemi ennast nende lahendamisel jälle kasutada.

Ülesanne 12. Tõesta, et kui $\alpha < 0 < \beta$, siis kehtivad võrratused

$$m_\alpha \leqslant m_0 \leqslant m_\beta.$$

Ülesanne 13. Olgu $0 < \alpha < \beta$. Tõesta, et $m_\alpha \leqslant m_\beta$.

Ülesanne 14. Olgu $\alpha < \beta < 0$. Tõesta, et $m_\alpha \leqslant m_\beta$.

Teist järku astmekeskmist nimetatakse **ruutkeskmiseks (RK)**, esimest järku astmekeskmist **aritmeetiliseks keskmiseks (AK)**, 0. järku astmekeskmist **geomeetriliseks keskmiseks (GK)** ning (-1). järku astmekeskmist **harmooniliseks keskmiseks (HK)**. Niisiis saame positiivsete arvude $a_1, a_2, \dots, a_n$ korral

$$RK \geqslant AK \geqslant GK \geqslant HK.$$

[3] Selle lõigu vahelejätmine ei sega järgnevast arusaamist.

1.5 Cauchy(-Bunjakovski-Schwarzi) võrratus

Teoreem 5. *(Cauchy(-Bunjakovski-Schwarzi) võrratus*[4]*).* Suvaliste reaalarvude a_1, a_2, ... , a_n, b_1, b_2, ... , b_n korral kehtib võrratus

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Selles võrratuses kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub selline konstant c, et mistahes indeksi i korral $a_i = cb_i$.

Märgime, et mõnede ülesannete lahendamisel on otstarbekas kasutada Cauchy võrratust järgmisel kujul: olgu a_1, a_2, ... , a_n reaalarvud ning b_1, b_2, ... , b_n positiivsed reaalarvud. Siis

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui leidub selline konstant c, et mistahes indeksi i korral $a_i = cb_i$.

Ülesanne 15. Tõesta, et suvaliste reaalarvude a_1, a_2, ... , a_n, b_1, b_2, ... , b_n korral kehtib võrdus

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{i<j}(a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Ülesanne 16. Tõesta Cauchy võrratus koos võrdusjuhuga.

Ülesanne 17. Tõesta Cauchy võrratus, uurides polünoomi $\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2$.

Ülesanne 18. Olgu $P(x)$ mittenegatiivsete kordajatega polünoom. Tõesta, et kõigi $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$P(x,y)^2 \leqslant P(x^2)P(y^2).$$

1.6 Muirheadi võrratus

Vaatleme reaalarvujärjendeid $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ja $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, kusjuures $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ ja $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant 0$. Öeldakse, et järjend α ***majoreerib***

[4] Võrratuse tõestas esmakordselt prantsuse matemaatik A. L. Cauchy. Nimetatud võrratuse integraalkuju tuntakse rohkem Bunjakovski võrratuse või Schwarzi võrratuse nime all, vene matemaatiku Viktor Bunjakovski (1804–1889) ja saksa matemaatiku Karl Hermann Amandus Schwarzi [švarts] (1843–1921) järgi.

järjendit β, kui

$$\begin{cases} \alpha_1 & \geqslant & \beta_1, \\ \alpha_1+\alpha_2 & \geqslant & \beta_1+\beta_2, \\ & \ldots\ldots & \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1} & \geqslant & \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{n-1}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n & = & \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n. \end{cases} \tag{1}$$

Süsteemi (1) tähistatakse $\alpha \succ \beta$.

Olgu antud üksliige $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Tähistagu $\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ kõigi selliste üksliikmete aritmeetilist keskmist, mis on saadud antud üksliikmest muutujate kõikvõimalike ümberpaigutuste teel, st

$$\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}x_{\pi(1)}^{\alpha_1}x_{\pi(2)}^{\alpha_2}\ldots x_{\pi(n)}^{\alpha_n},$$

kus S_n tähistab kõigi permutatsioonide hulka n elemendist. Nii näiteks

$$\Phi_{3,2,1}(x,y,z)=\frac{1}{6}(x^3y^2z+x^3z^2y+y^3x^2z+y^3z^2x+z^3x^2y+z^3y^2x)$$

ja

$$\Phi_{2,2,0}(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2).$$

Teoreem 6. *(Muirheadi võrratus*[5]*).* Olgu antud mittenegatiivsete elementidega reaalarvujärjendid $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ ja $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, kus elemendid on mittekasvavas järjekorras. Olgu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ positiivsed reaalarvud. Võrratus

$$\Phi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant\Phi_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{2}$$

kehtib parajasti siis, kui $\alpha\succ\beta$.

Võrratuses (2) kehtib võrdus parajasti siis, kui järjendid α ja β langevad kokku või $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Ülesanne 19. Tõesta, et kui $\alpha\succ\beta$, siis leiduvad sellised järjendid $\alpha=\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{l-1}$, $\gamma_l=\beta$, et mistahes $i=1,2,\ldots,l$ korral $\gamma_{i-1}\succ\gamma_i$ ning γ_{i-1} ja γ_i erinevad teineteisest täpselt kahe elemendi võrra.

Ülesanne 20. Ülesandest 19 järeldub, et teoreemi 6 tõestamiseks piisab vaadelda juhtu, kus järjendid α ja β erinevad vaid kahe elemendi võrra. Tõesta, et teoreemi 6 tõestamiseks piisab vaadelda juhtu, kus järjendid α ja β on kaheelemendilised.

Ülesanne 21. Olgu $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ sellised positiivsed täisarvud, et $\alpha_1\geqslant\alpha_2$, $\beta_1\geqslant\beta_2$, $\alpha_1\geqslant\beta_1$ ja $\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$. Tõesta, et kõigi positiivsete x,y väärtuste korral kehtib võrratus

$$x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}+x^{\alpha_2}y^{\alpha_1}\geqslant x^{\beta_1}y^{\beta_2}+x^{\beta_2}y^{\beta_1}.$$

[5]Võrratuse tõestas esmakordselt šoti matemaatik Robert Franklin Muirhead (1860–1941).

Ülesanne 22. Kehtigu võrratus (2) mistahes $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ korral. Tõesta, et siis $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$.

Ülesanne 23. Kehtigu võrratus (2) mistahes $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ korral. Tõesta, et siis $\alpha \succ \beta$.

Ülesanne 24. Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positiivsed reaalarvud. Tõesta Muirheadi võrratuse abil, et juhul $\gamma > 0$ kehtib $m_\gamma \geqslant m_0$.

1.7 Tšebõšovi võrratus

Teoreem 7. *(Tšebõšovi võrratus*[6]*).* Olgu antud reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Kui $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ ja $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ või $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, siis

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{3}$$

Kui $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ või $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, siis

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{4}$$

Mõlemal juhul leiavad võrdused aset siis ja ainult siis, kui $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ või $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Ülesanne 25. Tõesta, et

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)(b_i - b_j) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ülesanne 26. Tõesta teoreem 7.

1.8 Ümberpaigutusvõrratus

Ülesanne 27. (Hiina 1978) 10 inimest ämbritega seisavad järjekorras, et täita ämber kraanist tuleva veega. Iga ämbri täitmiseks kulub erinev aeg. Kuidas peaks inimesed järjestama, et aeg, mis nad kõik kokku peavad ootama, oleks vähim võimalik?

[6] Võrratuse tõestas esmakordselt vene matemaatik Pafnuti Tšebõšov (1821–1894).

Teoreem 8. *(Ümberpaigutusvõrratus).* Olgu $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ reaalarvud. Arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mistahes ümberjärjestuse $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ korral

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n \geqslant a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n, \quad (5)$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti juhul, kui jada $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ on võrdne vastavalt jadaga $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ või jadaga $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

Ülesanne 28. Tõesta teoreem 8.

Ülesanne 29. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalarvud ning $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ nende ümberjärjestus. Tõesta, et

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant a_1a'_1 + a_2a'_2 + \ldots + a_na'_n.$$

Ülesanne 30. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud ning $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ nende ümberjärjestus. Tõesta, et

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \ldots + \frac{a'_n}{a_n} \geqslant n.$$

Ülesanne 31. Tõesta võrratus $HK \leqslant GK \leqslant AK$, kasutades teoreemi 8.

Ülesanne 32. Tõesta võrratus $AK \leqslant RK$, kasutades teoreemi 8.

Ülesanne 33. Tõesta teoreem 5 (Cauchy võrratus), kasutades teoreemi 8.

Ülesanne 34. Tõesta teoreem 7 (Tšebõšovi võrratus), kasutades teoreemi 8.

1.9 Sümmeetrilistest polünoomidest

Definitsioon 3. Öeldakse, et n muutuja polünoom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on **sümmeetriline**, kui ta ei muutu muutujate mistahes ümberpaigutuse korral.

Näiteks polünoom $x_1+x_2+\ldots+x_n$ on sümmeetriline. Polünoom $x_1^2x_2$ aga ei ole sümmeetriline, sest muutujate ümbervahetamisel saame esialgse polünoomiga mittevõrdse polünoomi $x_1x_2^2$.

Definitsioon 4. Sümmeetrilisi polünoome

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\ldots\ldots \\
\sigma_n &= x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

nimetatakse **sümmeetrilisteks põhipolünoomideks** n muutujast.

Edaspidises on kasulik silmas pidada järgmist teoreemi, mille võtame tõestuseta.

Teoreem 9. Mistahes sümmeetriline polünoom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on esitatav polünoomina sümmeetrilististest põhipolünoomidest $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Hästi on tuntud näiteks valem $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Ülesanne 35. Avalda sümmeetriliste põhipolünoomide kaudu

1. $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \ldots + x_n^2 x_{n-1}$,
2. $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$,
3. $x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_2^4 x_1 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_1 + x_3^4 x_2$,
4. $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$,,
5. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3}$.

Sümmeetrilistest polünoomidest koosnevate võrratuste üleskirjutamist ja lahendamist kergendab toodud tähiste $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sisseviimine. Mõnikord kasutatakse ka tähiseid

$$s_i = \frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \sigma_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

s.t. tähistatakse sümmeetriliste põhipolünoomide liidetavate aritmeetilised keskmised. Säärase tähistuse eelise põhjendab

Teoreem 10. Kehtigu ainult suurusi $s_1, s_2, \ldots, s_k$, $k \leqslant n$, siduv võrratus või võrdus n muutuja sümmeetriliste polünoomide puhul. Siis kehtib sama võrratus või võrdus ka $n+1$ muutuja sümmeetriliste polünoomide korral.

Ülesanne 36. Olgu antud $n+1$ muutujat $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ ning toodud sisse tähised $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}$. Vaatleme polünoomi $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)(x-x_{n+1})$ tuletise juuri $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Tähistame $S_i = \frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \Sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, kus Σ_i tähistab i-ndat sümmeetrilist põhipolünoomi muutujatest $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Avalda suurused S_i suuruste s_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, kaudu.

Ülesanne 37. Tõesta teoreem 10.

Nii võime ülesandes 109 vaadeldava Schuri võrratuse kirjutada kujul

$$3s_1^3 + s_3 \geqslant 4s_1 s_2,$$

teoreemi 10 põhjal kehtivana $n \geqslant 3$ positiivse reaalarvu korral.

Ülesanne 38. (Maclaurini[7] võrratus) Olgu muutujate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtused positiivsed reaalarvud ning $1 < k \leqslant n$ täisarv. Tõesta võrratus

$$s_{k-1}^k \geqslant s_k^{k-1}.$$

[7]Inglise matemaatiku Colin Maclaurini [mök'lo:rin] (1698–1746) järgi.

Ülesanne 39. (Newtoni[8] võrratus) Tõesta suvaliste reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korral võrratus

$$s_{k-1}s_{k+1} \leqslant s_k^2,$$

kus $1 \leqslant k \leqslant n-1$ on täisarv.

Võrratuste tõestamisel on mõnikord otstarbekas kasutada binoomvalemit

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

milles võime summa sümmeetrilisuse tõttu arvuhulga $\{0, 1, \ldots, n\}$ elementide keskmise $\dfrac{n}{2}$ suhtes vahetada kõikjal summamärgi all, kus meile vajalik, arvud k ja $n-k$. Hinnanguid saadakse selle valemi abil tavaliselt mõnesid liidetavaid ära jättes või siis lisades. Kõrgemalt astendajalt madalamale ja vastupidi üle minnes on otstarbekas kasutada võrdusi

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k},$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Ülesanne 40. Tõesta teoreem 3 naturaalarvuliste α ja positiivsete x väärtuste jaoks binoomvalemit kasutades.

Ülesanne 41. (Bratislava kaugõppekool 1997) Tõesta, et mistahes täisarvu $n \neq -2, -1, 0$ korral kehtib võrratus

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

1.10 Jenseni võrratus

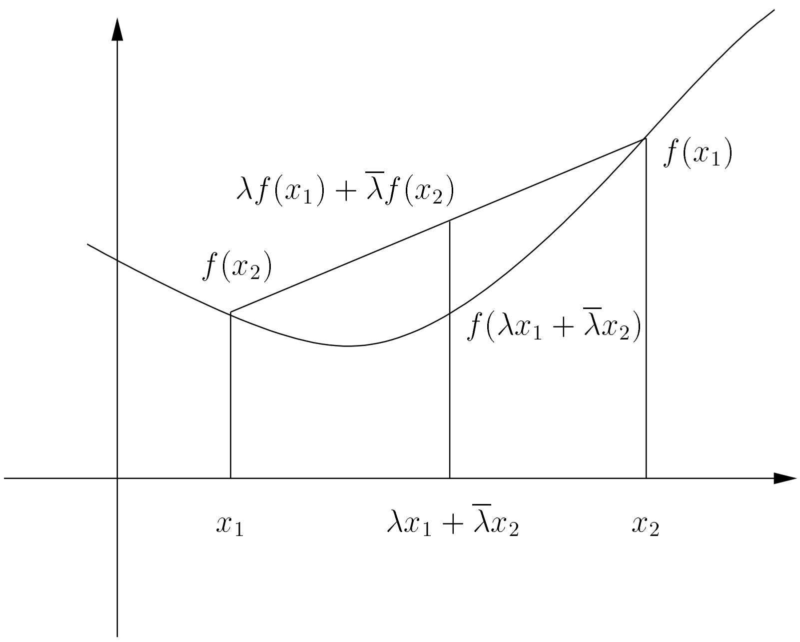
Tähistame $\overline{\lambda} = 1 - \lambda$. **Definitsioon 5.** Öeldakse, et funktsioon f on **kumer** lõigul $[a, b]$, kui mistahes reaalarvude $x_1, x_2 \in [a, b]$ ja $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x_1 + \overline{\lambda} x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + \overline{\lambda} f(x_2).$$

Definitsioonist arusaamiseks paneme tähele, et kui λ muutub lõigul $[0, 1]$, siis $\lambda x_1 + \overline{\lambda} x_2$ muutub parajasti lõigul $[x_1, x_2]$ (vt joonis 1).

Definitsioon 6. Öeldakse, et funktsioon f on **nõgus** lõigul $[a, b]$, kui funktsioon $-f$ on selles lõigus kumer.

[8]Inglise füüsiku ja matemaatiku Isaac Newtoni (1642-1727) järgi.



Joonis 1

Sisuliselt on nõgusa funktsiooni definitsioon analoogiline kumera funktsiooni omaga, ainult defineeriva võrratuse märk on vastupidine.

Järgmine teoreem seob kooliprogrammist tuttava kumeruse mõiste äsjadefineerituga. Oluline on tähele panna, et kumera funktsiooni graafik avaneb ülespoole. Koolis aga nimetatakse ülespoole avaneva graafikuga funktsiooni hoopis nõgusaks funktsiooniks. Analoogiline märkus kehtib nõgusate funktsioonide kohta.

Mugava kriteeriumi funktsiooni kumeruse (nõgususe) kindlakstegemiseks annab

Teoreem 11. Eksisteerigu funktsioonil f lõigus $[a, b]$ teine tuletis. Funktsioon f on lõigus $[a, b]$ kumer (nõgus) parajasti siis, kui $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) \leqslant 0$) mistahes $x \in (a, b)$ korral.

Kumera funktsiooni f korral kehtib Jenseni võrratus, mille esitab

Teoreem 12. *(Jenseni võrratus*[9]*).* Olgu f lõigul $[a, b]$ kumer funktsioon ning $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ niisugused positiivsed arvud, et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Siis kehtib võrratus

$$\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geqslant f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n).$$

Analoogiline teoreem kehtib ka nõgusate funktsioonide korral, kusjuures väite võrratusmärk on siis vastupidine.

Ülesanne 42. Tõesta teoreem 12.

Ülesanne 43. Olgu a_1, a_2, ..., a_n positiivsed reaalarvud. Tõesta Jenseni võrratuse abil, et $m_\alpha \leqslant m_1$, kui $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, ning $m_\alpha \geqslant m_1$, kui $\alpha > 1$.

[9]Võrratuse tõestas esmakordselt taani matemaatik Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1859–1925).

Ülesanne 44. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud. Tõesta Jenseni võrratuse abil, et $m_\alpha \geqslant m_0$, kui $\alpha > 0$, ning $m_\alpha \leqslant m_0$, kui $\alpha < 0$.

Ülesanne 45. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud. Tõesta Jenseni võrratust kasutades teoreem 4.

1.11 Määratud integraali monotoonsusega seotud võrratused

Teoreem 13. Olgu f mittekasvav funktsioon lõigul $[m, n]$, kus m ja n on täisarvud. Siis kehtivad võrratused

$$\int_m^n f(x)dx - (f(m) - f(n)) \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_m^n f(x)dx.$$

Märgime, et analoogiline teoreem kehtib mittekahaneva funktsiooni korral; siis on mõlemad võrratusmärgid vastupidised.

Ülesanne 46. Olgu antud lõigul $[m, n]$ mittekasvav funktsioon $f(x)$. Pidades silmas, et mittekasvav funktsioon on integreeruv ning kasutades määratud integraali monotoonsust (s.t. kui lõigul $[a, b]$ integreeruvate funktsioonide f ja g korral $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a, b]$, siis $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$), põhjendada, et mistahes fikseeritud täisarvu $k \in [m, n-1]$ ja reaalarvu $x \in [k, k+1]$ korral

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).$$

Ülesanne 47. Kasutades määratud integraali aditiivsust piirkonna järgi (s.t. omadust, et kui f on lõigul $[a, b]$ integreeruv funktsioon ning $c \in [a, b]$, siis $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$), tõesta teoreem 13.

1.12 Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste hindamine

Teoreem 14. Olgu $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Siis kehtivad võrratused

$$|\tan x| \geqslant |x| \geqslant |\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|,$$

kusjuures võrdused kehtivad vaid juhul $x = 0$.

Ülesanne 48. Tõesta teoreem 14.

Ülesanne 49. (Aristarchose[10] võrratus). Tõesta, et kui $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, siis

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}.$$

1.13 Algebraliste võrratuste geomeetriline tõlgendus

Leidub võrratusi, millele õnnestub leida geomeetriline tõlgendus. Üldisi meetodeid on siin raske anda, leitav tõlgendus sõltub konkreetsest ülesandest. Siiski, näiteks avaldiste a^2-ab+b^2 ja a^2+ab+b^2 korral võiks mõelda kolmnurkadele külgedega a ja b ning nendevahelise nurgaga vastavalt $\frac{\pi}{3}$ ja $\frac{2\pi}{3}$. Kui esineb avaldisi kujul $\sqrt{a^2-b^2}$ või $\sqrt{a^2+b^2}$, siis võime otsida täisnurkseid kolmnurki vastavalt hüpotenuusiga a ja kaatetitega b ning $\sqrt{a^2-b^2}$ või kaatetitega a ja b ning hüpotenuusiga $\sqrt{a^2+b^2}$. Avaldist ab võime tõlgendada kui ristküliku, mille küljed on a ja b, pindala. Geomeetrilise tõlgenduse juures tuleb tihtipeale tarvitada geomeetrilisi võrratusi, nt. kolmnurga võrratust $a+b>c$, kus a,b,c on kolmnurga küljed, või selle üldistusi suuremale külgede arvule, Ptolemaiose võrratust $ac+bd \leqslant d_1d_2$, kus a,b,c,d ja d_1,d_2 on vastavalt suvalise nelinurga küljed ja d_1,d_2 tema diagonaalid (võrdus kehtib siin juhul, kui tegemist on kõõlnelinurgaga) vm. Mõnikord selgub aga pärast geomeetrilise sisuga võrratuse korralikku üleskirjutamist tähtavaldiste abil, et ta on tõestatav puhtalgebraliste võtetega.

2 Geomeetrilised võrratused

2.1 Kolmnurgavõrratus

Kuigi erinevate nimedega erikujulisi geomeetrilisi võrratusi on välja mõeldud palju, tugineb enamus neist ühele – kolmnurgavõrratusele. Seda võrratust sõnastatakse tavaliselt järgnevalt: olgu kolmnurga külgede pikkused a, b ja c, siis kehtib võrratus

$$a < b + c.$$

Kuna kolmnurga külgi võib suvaliselt ümber tähistada, saame, et kehtivad ka seosed

$$b < c + a, \qquad \text{ning} \qquad c < a + b.$$

Ülesanne 50. Tähistame suvalise kahe tasandipunkti $A(a_x, a_y)$ ja $B(b_x, b_y)$ korral $d(A,B) = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$. Tõesta, et suvalise kolme punkti A, B, C korral kehtib võrratus

$$d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B).$$

Järelda sellest võrratusest kolmnurgavõrratus.

[10]Vana-Kreeka matemaatik Aristarchos Samoselt (310–230 e.Kr.) kasutas seda võrratust, kui püüdis arvutada Kuu ja Päikese kaugust Maast.

Ülesanne 51. Tõesta, et võrratused

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b$$

kehtivad parajasti siis, kui kehtivad võrratused

$$|a - b| < c, \quad |b - c| < a, \quad |c - a| < b.$$

Ülesanne 52. (Eesti 1994) Olgu a, b, c kolmnurga külgede pikkused. Tõesta, et kehtivad võrratused

1. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$,
2. $a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

2.2 Järeldused algebralistest võrratustest

Väga sageli tulevad geomeetriliste võrratuste lahendamisel appi tavalised algebralised võrratused (astmekeskmiste vahelised võrratused, asjaolu, et iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne jne).

Ülesanne 53. (Euleri teoreem[11]) Tõesta, et suvalise kolmnurga ümberringjoone raadiuse R ja siseringjoone raadiuse r vahel kehtib võrratus

$$R \geqslant 2r,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui kolmnurk on võrdkülgne.

Ülesanne 54. Kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid külgedega on D, E ja F. Tähistagu p, r ja R vastavalt selle kolmnurga poolümbermõõtu, siseringjoone raadiust ja ümberringjoone raadiust. Tõesta võrratused

$$\frac{2pr}{R} \leqslant DE + EF + FD \leqslant p$$

ja näita, et võrdused kehtivad samaaegselt.

2.3 Lühim tee kahe punkti vahel on sirge

Käesoleva punkti pealkirjas sõnastatud reegel tundub nõnda loomulik ja lihtne, et kerkib lausa küsimus, kas nii triviaalset reeglit üldse kasutada saab. Osutub aga, et sellele omadusele saab taandada mitmeid keerulisi probleeme. Järgnevates ülesannetes tuleb tasandi teisenduste abil moodustada antud lõikudest murdjoon ja võrrelda tema pikkust murdjoone otspunkte ühendava sirglõigu omaga.

[11] Šveitsi päritolu matemaatiku Leonhard Euleri (1707–1783) järgi.

Ülesanne 55. (Fagnano ülesanne[12]) Teravnurkse kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid K, L ja M. Selgita, kuidas tuleb valida punktid K, L ja M, et kolmnurga KLM ümbermõõt oleks vähim võimalik.

Ülesanne 56. (Fermat'-Torricelli punkt[13]) Kolmnurga ABC kõik nurgad on väiksemad kui $120°$. Leia selle kolmnurga sisepiirkonnas niisugune punkt P, et lõikude pikkuste summa

$$PA + PB + PC$$

oleks minimaalne.

Ülesanne 57. (IMO 1995) Olgu $ABCDEF$ selline kumer kuusnurk, et $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ ning $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Olgu kuusnurga sisepiirkonnas antud niisugused punktid G ja H, et $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Tõesta võrratus

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.$$

2.4 Lõigu projektsiooni pikkus ei ole suurem kui lõigu enda pikkus

Ülesanne 58. Leia ühikkuubi projektsiooni maksimaalne pindala tasandil.

Ülesanne 59. (Taiwan 1998) Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt, D sirgete AI ja BC lõikepunkt, E sirgete BI ja CA lõikepunkt ning F sirgete CI ja AB lõikepunkt. Olgu X, Y ja Z suvalised punktid vastavalt lõikudel EF, FD ja DE.

1. Tõesta, et

   $$d(X, BC) = d(X, CA) + d(X, AB),$$

   kus $d(P, QR)$ tähistab punkti P kaugust sirgest QR.

2. Tõesta võrratus

   $$d(X, AB) + d(Y, BC) + d(Z, CA) \leqslant XY + YZ + ZX.$$

2.5 Erdős-Mordelli võrratus

Olgu M suvaline punkt kolmnurga ABC sees. Olgu x, y, z punkti M kaugused vastavalt tippudest A, B, C ning u, v, w punkti M kaugused vastavalt külgedest BC, CA, AB. Erdős-Mordelli võrratus[14] esitub siis kujul

[12]Itaalia matemaatiku Giulio Cesare Fagnano (1682–1766) järgi.

[13]Prantsuse matemaatiku Pierre de Fermat (1601–1665) ja itaalia matemaatiku Evangelista Torricelli (1608–1647) järgi.

[14]Ungari matemaatiku Pál Erdőse (1913–1996) ja leedu päritolu matemaatiku Louis Joel Mordelli (1888–1972) järgi.

$$x + y + z \geqslant 2(u + v + w).$$

Järgnevas tõestame selle võrratuse ühe üldisema võrratuse abil, millest saab teha veel teisigi huvitavaid järeldusi. Kõigi selle peatüki ülesannete puhul kasutame ülalantud tähistusi.

Ülesanne 60. Olgu kolmnurga ABC sees võetud punkt M ning kiirtel AB ja AC võetud vastavalt punktid B_1 ja C_1. Tõesta, et lõikudele AB_1 ja AM ning lõikudele AC_1 ja AM ehitatud rööpkülikute pindalade summa on võrdne sellise rööpküliku pindalaga, mille üks külg on B_1C_1 ning teine on lõiguga AM paralleelne ja sama pikk.

Ülesanne 61. Kasutame tähiseid B_1, C_1 nii, nagu eelnevas ülesandes. Tõesta võrratus

$$AC_1v + AB_1w \leqslant B_1C_1x. \tag{6}$$

Ülesanne 62. Tõesta Erdős-Mordelli võrratus.

Ülesanne 63. Tõesta võrratus $ax + by + cz \geqslant 4S_{ABC}$.

Ülesanne 64. Tõesta võrratus $xu + yv + zw \geqslant 2(uv + vw + wu)$.

Ülesanne 65. (IMO 1996) On antud selline kumer kuusnurk $ABCDEF$, et $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Olgu R_A, R_C ja R_E vastavalt kolmnurkade FAB, BCD ja DEF ümberringjoonte raadiused ning P antud kuusnurga ümbermõõt. Tõesta võrratus

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{P}{2}.$$

2.6 Kolmnuga suurema külje vastas on suurem nurk

Kui kolmnurga külgede pikkused on a, b ja c, kusjuures $a \geqslant b \geqslant c$, ning nende vastas asuvad nurgad on suurustega α, β ja γ, siis kehtivad ka võrratused $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Ülesanne 66. (Balti Tee 1994) Kolmnurga külgede pikkused on a, b ja c ning nende vastas asuvate nurkade suurused vastavalt α, β ja γ. Tõesta võrratus

$$a \cdot \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geqslant 2 \cdot \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right).$$

2.7 Ptolemaiose võrratus

Ülesanne 67. (Ptolemaiose võrratus[15]) Olgu $ABCD$ kumer nelinurk tasandil. Tõesta võrratus

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD \tag{7}$$

[15]Vana-Kreeka matemaatiku Claudius Ptolemaiose (ligik. eluaastad 85–165) järgi.

ja näita, et võrdus kehtib parajasti siis, kui $ABCD$ on kõõlnelinurk.

Ülesanne 68. Tõesta, et võrratus (7) kehtib ka mittekumera nelinurga korral.

Ülesanne 69. Tõesta, et võrratus (7) kehtib suvalise nelja punkti A, B, C, D korral tasandil (või ka ruumis), mis ei kuulu kõik ühele sirgele.

Ülesanne 70. (Tšehhi-Slovaki matš 1998) Kumera kuusnurga $ABCDEF$ küljed rahuldavad võrdusi $AB = BC$, $CD = DE$ ja $EF = FA$. Tõesta võrratus

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ülesanne 71. (Hiina 1998) Olgu D punkt teravnurkse kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Tõesta võrratus

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA,$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui D on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.

Ülesanne 72. (IMO 2001 eelvalik) Olgu G kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Leia niisuguse punkti P asukoht kolmnurga ABC tasandil, et avaldise

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$$

väärtus oleks vähim võimalik, ning avalda see väärtus kolmnurga küljepikkuste kaudu.

2.8 Täisnurkne kolmnurk on suurima pindalaga

Kui kolmnurga kaks külge on pikkustega a ja b ning nendevahelise nurga suurus on γ, siis selle kolmnurga pindala avaldub valemiga $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Kui suurused a ja b on fikseeritud, siis on kolmnurga pindala suurim võimalik, kui $\sin\gamma = 1$, st γ on täisnurk.

Ülesanne 73. Olgu a, b, c, d nelinurga järjestikused küljed. Tõesta, et nelinurga pindala S jaoks kehtib võrratus

$$S \leqslant \frac{ac + bd}{2},$$

kusjuures võrdus kehtib vaid siis, kui antud nelinurk on ristuvate diagonaalidega kõõlnelinurk.

2.9 Sisemine kujund on väiksem

Kui kahest kujundist üks asub teise sees, siis on sisemise kujundi pindala väiksem. Kuigi see väide on üsna ilmne ja võib tunduda triviaalsena, on tema formaalselt korrektne tõestus küllalt komplitseeritud ning eeldab pindala formaalset defineerimist teatud piirväärtusena. Meie seda siinkohal tegema ei hakka, vaid võtame selle küllalt ilmse väite lihtsalt teadmiseks.

Analoogiline väide kehtib ka kujundite ümbermõõtude kohta, kuid loomulikult tuleb lisaks eeldada kujundite kumerust.

Ülesanne 74. Üks kumer hulknurk asub teise kumera hulknurga sees. Tõesta, et sisemise hulknurga ümbermõõt on väiksem.

Ülesanne 75. (IMO 1999 eelvalik) Olgu M kolmnurga ABC sisepunkt. Tõesta võrratus

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC.$$

3 Ülesandeid harjutamiseks

3.1 Absoluutväärtust sisaldavad võrratused

Ülesanne 76. Tõesta, et kui mistahes $x \in [-1, 1]$ korral kehtib võrratus $|ax^2 + bx + c| \leqslant h$, siis $|a| + |b| + |c| \leqslant 4h$.

Ülesanne 77. (Balti Tee 1990) Ringjoonele on mingis järjekorras kirjutatud naturaalarvud $1, 2, \ldots, n$. Milline on kõrvutiasetsevate arvude vahede absoluutväärtuste summa vähim võimalik väärtus?

Ülesanne 78. (Balti Tee 1995) Reaalarvud a, b ja c rahuldavad võrratusi $|a| \geqslant |b + c|$, $|b| \geqslant |c + a|$ ja $|c| \geqslant |a + b|$. Tõesta, et $a + b + c = 0$.

3.2 Kahe, kolme ja nelja tundmatuga sümmeetrilised võrratused

Ülesanne 79. Olgu $x > 0$. Tõesta, et $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Ülesanne 80. (Eesti 2000) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a ja b korral kehtib võrratus

$$a^5 + b^5 \geqslant a^3b^2 + a^2b^3.$$

Ülesanne 81. Olgu $a, b, c \geqslant 0$. Tõesta võrratus

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Ülesanne 82. (Kanada 1995) Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Ülesanne 83. (Slovakkia ettevalmistus IMO-le 1998) Mistahes reaalarvude $x, y, z \geqslant 0$ korral $xy + yz + zx = 1$. Tõesta, et

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) \leqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Ülesanne 84. (IMO 1977 eelvalik) Olgu $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Tõesta, et

$$a^b b^c c^d d^a \geqslant b^a c^b d^c a^d.$$

Ülesanne 85. (Poola 1963) Tõesta, et positiivsete arvude a, b, c korral kehtib võrratus

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}.$$

Ülesanne 86. (Kanada ettevalmistus 1997–98) Olgu x, y, z positiivsed reaalarvud. Tõesta, et

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leqslant 1.$$

Ülesanne 87. (Rumeenia 1997) Olgu x, y, z positiivsed reaalarvud nii, et $xyz = 1$. Tõesta, et

$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6} \geqslant 2.$$

Ülesanne 88. (Iraan 1998) Olgu $x, y, z \geqslant 1$ ja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Tõesta võrratus

$$\sqrt{x + y + z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Ülesanne 89. (Venemaa 1997) Tõesta, et kui $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, siis kehtib võrratus

$$\frac{x}{7 + y^3 + z^3} + \frac{y}{7 + z^3 + x^3} + \frac{z}{7 + x^3 + y^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Ülesanne 90. Olgu x, y, z sellised positiivsed arvud, et $xyz = 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ülesanne 91. (IMO 1995 eelvalik) Olgu a, b, c sellised positiivsed arvud, et $abc = 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ülesanne 92. (Korea 1998) Olgu a, b, c sellised positiivsed reaalarvud, et $a + b + c = abc$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Ülesanne 93. (Bulgaaria 1997) Olgu a, b, c positiivsed reaalarvud nii, et $abc = 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqslant \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

Ülesanne 94. (Iraan 1996) Tõesta positiivsete reaalarvude x, y, z korral võrratus

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

Ülesanne 95. (Vietnam 1996) Olgu a, b, c, d mittenegatiivsed reaalarvud nii, et

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Tõesta, et

$$a + b + c + d \geqslant \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Ülesanne 96. (Iirimaa 1998) Tõesta, et positiivsete reaalarvude a, b, c korral kehtivad võrratused

$$\frac{9}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

3.3 n tundmatuga sümmeetrilised võrratused

Ülesanne 97. Olgu antud n positiivset reaalarvu $a_1, \ldots, a_n$, nii et $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Tõesta võrratus

$$(1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Ülesanne 98. (Aasia-Okeaania olümpiaad 1990) Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud, ning olgu S_k nende k-kaupa võetud korrutiste summa. Tõesta, et

$$S_k S_{n-k} \geqslant \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \ldots a_n$$

mistahes $k = 1, 2, \ldots, n-1$ korral.

Ülesanne 99. (Poola 1996) Olgu $n \geqslant 2$ naturaalarv ning $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud, mille summa on 1. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mille summa on 1, korral

$$2 \sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1 - a_i}$$

ning selgitada, millal kehtib võrdus.

Ülesanne 100. (Rumeenia 1999) Olgu $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ positiivsed reaalarvud. Tõesta, et kui kehtib võrratus

$$x_1 + \ldots + x_n \geqslant x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,$$

siis kehtib ka võrratus

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant \frac{x_1}{y_1} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}.$$

Ülesanne 101. (Hiina 1989) Olgu $x_1, \ldots, x_n$ sellised positiivsed arvud, et $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Tõesta võrratus

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Ülesanne 102. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele 1997) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ korral kehtib võrratus

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Millisel juhul kehtib siin võrdus?

Ülesanne 103. (Sloveenia valikvõistlus IMO kandidaatidele 2000) Olgu $x_1, \ldots, x_n$ niisugused positiivsed arvud, et kehtib võrdus

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Tõesta võrratus

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \geqslant (n-1)^n.$$

Ülesanne 104. (Türgi 1997) On antud täisarv $n \geqslant 2$. Leia avaldise

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}$$

minimaalne võimalik väärtus positiivsete reaalarvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ korral.

Ülesanne 105. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele 1998) Olgu antud reaalarvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja $y_1, y_2, \ldots, y_n$, mis rahuldavad tingimusi $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n > 0$ ning $y_1 \geqslant x_1, y_1y_2 \geqslant x_1x_2, \ldots, y_1y_2\ldots y_n \geqslant x_1x_2\ldots x_n$. Tõesta, et $y_1+y_2+\ldots+y_n \geqslant x_1+x_2+\ldots+x_n$.

3.4 Tsüklilised võrratused

Ülesanne 106. (Uus-Meremaa ettevalmistussessioon 1998) Olgu $a, b, c > 0$. Tõesta, et

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Ülesanne 107. Olgu x, y, z positiivsed reaalarvud. Tõesta võrratus

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz.$$

Ülesanne 108. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele 1994) Tõesta, et mistahes positiivsete arvude a, b, c, d, e korral kehtib võrratus

$$(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+de+ea).$$

Ülesanne 109. Tõesta, et positiivsete reaalarvude x, y, z korral kehtib *Schuri võrratus*[16]

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Ülesanne 110. (IMO 2000) Olgu a, b, c sellised positiivsed reaalarvud, et $abc = 1$. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

3.5 Täisarve sisaldavad võrratused

Ülesanne 111. (IMO 1967 eelvalik) Tõesta, et mistahes täisarvu $n \geqslant 1$ korral

$$\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \geqslant (n!)^{\frac{2}{n}},$$

kusjuures võrdus leiab aset vaid juhul $n = 1$.

Ülesanne 112. (Rumeenia 1998) Olgu n positiivne täisarv ning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ täisarvud nii, et

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + n^3 \leqslant (2n-1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + n^2.$$

Tõesta, et

a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on mittenegatiivsed täisarvud,

b) arv $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n + 1$ ei ole täisruut.

Ülesanne 113. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{5n-1} \leqslant 2\frac{1}{12}.$$

Ülesanne 114. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratus

$$\frac{1}{1^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \ldots + \frac{1}{n^3+n} < 1 + \ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

[16]Saksa matemaatiku Issai Schuri (1875–1941) järgi.

Ülesanne 115. (Eesti valikvõistlus IMC (*International Mathematics Competition*) kandidaatidele 1999) Olgu n positiivne täisarv. Tõesta, et

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Ülesanne 116. Olgu n positiivne täisarv. Tõesta võrratused

$$2<2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}<\pi,$$

kus juuremärk esineb n korda (kirjutises esineb täpselt üks miinusmärk).

Ülesanne 117. (Eesti ettevalmistussessioon 2000)

a) Olgu $n>1$ täisarv. Tõesta, et

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<\frac{4}{5}\cdot n^2.$$

b) Liidame ülalantud võrratuse vasakule poolele veel $\frac{n}{2}$. Tõesta saadud võrratus.

3.6 Geomeetrilise sisuga võrratused

Ülesanne 118. Olgu α,β,γ mingi teravnurkse kolmnurga nurgad. Tõesta, et kehtib võrratus

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}.$$

Ülesanne 119. (Ladina-Ameerika olümpiaad 1992) Etteantud kolmnurgast ABC lähtudes konstrueeritakse kuusnurk $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, nagu näidatud joonisel 2. Tõesta, et

$$S_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2}\geqslant 13S_{ABC},$$

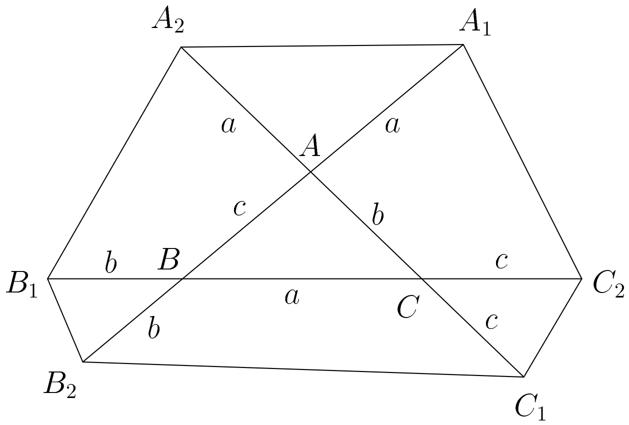
kus S tähistab osutatud kujundi pindala.

Ülesanne 120. (Eesti valikvõistlus IMO kandidaatidele 2001) Küljepikkusega a korrapärase n-nurga sisepiirkonnas võetud punkti X kaugused n-nurga külgedega määratud sirgetest on $h_1,h_2,\ldots,h_n$. Tõesta, et

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\ldots+\frac{1}{h_n}>\frac{2\pi}{a}.$$

Ülesanne 121. (IMO 1992) Kolmemõõtmelises ruumis on antud lõplik punktihulk S. Olgu selle punktihulga ristprojektsioonid yz-, zx- ja yx-tasandile vastavalt S_x, S_y ja S_z. Tõesta võrratus

$$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|.$$



Joonis 2

3.7 Muud võrratused

Ülesanne 122. (Belgia 1976) Tõesta, et iga $\alpha \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$\sin(\cos\alpha) < \cos(\sin\alpha).$$

Ülesanne 123. (Bulgaaria kevadvõistlus 1998) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c korral kehtib

$$3(a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}) \leqslant 4(a + b + c).$$

Ülesanne 124. (Bratislava kaugõppekool 1997) Tõesta, et mistahes reaalarvude x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 korral kehtib võrratus

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5).$$

Ülesanne 125. (Bratislava kaugõppekool 1997/98) Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud ning $b_1, b_2, \ldots, b_n$ needsamad arvud võetuna samas või mingis teises järjekorras. Leia korrutise

$$\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{b_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)$$

maksimaalne võimalik väärtus.

Ülesanne 126. (Kanada ettevalmistussessioon 1997–98) Olgu $0 < a < b$ reaalarvud. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral

$$\frac{b+a}{2} \leqslant \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}.$$

Ülesanne 127. (Eesti 1988) Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b ja c korral kehtib võrratus

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2},$$

kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Ülesanne 128. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c korral kehtib võrratus

$$c\sqrt{a^2 - ab + b^2} + a\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant b\sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Ülesanne 129. (Türgi 1996) On antud reaalarvud $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ tingimusega $x_{i+1} - x_i \leqslant h$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Tõesta, et

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

4 Vastused, juhised ja lahendused

1. Kuna $\pm c \leqslant |c|$ mistahes reaalarvu c korral, siis ka $a^2 \pm 2ab + b^2 \leqslant a^2 + 2|ab| + b^2$. Seega $(a \pm b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$, ehk võttes ruutjuure $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$.

Eelmise lõigu põhjal $|a| = |a \pm b \mp b| \leqslant |a \pm b| + |b|$, analoogiliselt $|b| \leqslant |a \pm b| + |a|$. Seepärast $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b|$.

2. Kasutades ülesande 1 väidet mitu korda saame, et $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| \geqslant |a_1 - a_3|$, $|a_1 - a_3| + |a_3 - a_4| \geqslant |a_1 - a_4|$ jne.

3. Antud võrratus on samaväärne tõese võrratusega

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

4. Kasuta matemaatilise induktsiooni meetodit. Kui $n = 2$ ja $a_1 < a_2$, siis $a_1 < 1$ ja $a_2 > 1$ ning järelikult $(1 - a_1)(a_2 - 1) > 0$, millest tuleb induktsiooni baas. Sammu tegemisel üleminekul n-lt $n + 1$-le võib samuti eeldada, et $a_1 < 1$ ja $a_{n+1} > 1$. Tähistades $b = a_1 a_{n+1}$, saame kasutada induktsiooni eeldust arvude $b, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jaoks.

5. Tähista

$$b_k = \frac{a_k}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$$

ja kasuta ülesannet 4.

6. Kasuta matemaatilist induktsiooni N järgi. $N = 1$ jaoks on tegu ülesande 3 väitega, induktsiooni sammu sooritamiseks kasutame samuti sama ülesannet kahe 2^{N-1} elemendilise arvujärjendi keskmise leidmiseks.

7. Olgu vaja leida arvude $a_1, \dots, a_n$ aritmeetiline keskmine, kus $2^{N-1} < n < 2^N$ (kui $n = 2^N$ mingi $N \in \mathbb{N}$ korral, võime kasutada vahetult ülesannet 6). Olgu $g = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ ning $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_{2^N} = g$. Nüüd võime ülesannet 6 kasutada arvude $a_1, a_2, \dots, a_{2^N}$ jaoks.

8. Defineeri funktsioon $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$ ja uuri tema käitumist tuletise abil.

9. Kasuta matemaatilist induktsiooni.

10. Tähista $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 1$ ja $x_n = 1 + nx$ ning kasuta teoreemi 2.

11. Suurem tulu saadakse igakuiste dividendide korral.

12. Tõestamaks nt, et $m_\alpha \leqslant m_0$, kasuta teoreemi 2 arvude $a_1^\alpha, \dots, a_n^\alpha$ jaoks.

13. Defineeri $b_i = \left(\dfrac{a_i}{m_\alpha}\right)^\alpha$, siis

$$\left(\frac{b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{m_\beta}{m_\alpha}$$

ja järelikult piisab näidata, et $b_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots + b_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant n$. Defineeri suurused c_i seostega $b_i = 1 + c_i$, näita, et $c_1 + \ldots + c_n = 0$ ja kasuta vajaliku võrratuse tõestamiseks Bernoulli võrratust (teoreem 3).

14. Ülesande lahenduse tekst langeb kokku ülesande 13 lahendusega, ainult võrratusmärk peab olema vastupidine.

15. Vasakul pool saame sulgude avamisel

$$\begin{aligned}&(a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + \ldots + a_1^2b_n^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \ldots + a_2^2b_n^2 + \ldots +\\ &+ a_n^2b_1^2 + a_n^2b_2^2 + \ldots + a_n^2b_n^2) -\\ &- (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + \ldots + a_n^2b_n^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + \ldots + 2a_1b_1a_nb_n +\\ &+ \ldots + 2a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n)\end{aligned}$$

ning paremal pool

$$\begin{aligned}&(a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2) + (a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2) + \ldots +\\ &+ (a_1^2b_n^2 - 2a_1b_na_nb_1 + a_n^2b_1^2) + \ldots + (a_{n-1}^2b_n^2 - 2a_{n-1}b_na_nb_{n-1} + a_n^2b_{n-1}^2).\end{aligned}$$

Lihtsustanud mõlemad avaldised, saame, et nad on võrdsed.

16. Kasuta ülesannet 15.

17. Paneme tähele, et

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2 = x^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2x\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Kuna vaadeldava polünoomi väärtused on kõik mittenegatiivsed, peab viimase ruutkolmliikme diskriminant olema mittepositiivne, kust järeldubki vajalik võrratus.

18. Olgu $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$. Tähista $a_i = x\sqrt{c_i}$ ja $b_i = y\sqrt{c_i}$ ning kasuta Cauchy võrratust.

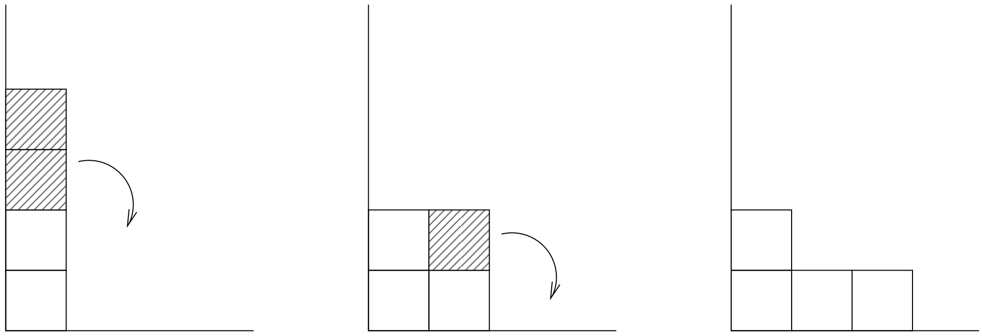
19. Olgu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ja $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ sellised mittenegatiivsete ja mittekasvavate elementidega reaalarvujärjendid, et $\alpha \succ \beta$ ja $\alpha \neq \beta$. Tähistame $\gamma_0 = \alpha$. Olgu j suurim indeks, mille korral $\alpha_j > \beta_j$ (selline indeks kindlasti leidub, sest kui alati $\alpha_i \leqslant \beta_i$, siis peaks mistahes i korral $\alpha_i = \beta_i$ ning $\alpha = \beta$). Olgu k vähim indeks, mis järgneb indeksile j, nii, et $\alpha_k < \beta_k$ (selline indeks leidub samuti, sest suurima indeksi i korral, kus $\alpha_i \neq \beta_i$, peab kehtima $\alpha_i < \beta_i$). Väljavalitud j ja k korral kehtib $\alpha_j > \beta_j \geqslant \beta_k > \alpha_k$. Tähistame $\delta = \min(\alpha_j - \beta_j, \beta_k - \alpha_k)$ ning $\gamma_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - \delta, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k + \delta, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$.

Oletame, et $\alpha_j - \delta < \alpha_{j+1}$. Siis $\beta_{j+1} \leqslant \beta_j = \alpha_j - (\alpha_j - \beta_j) \leqslant \alpha_j - \delta < \alpha_{j+1}$, vastuolu indeksi j valikuga. Analoogilisel moel saame vastuolu oletusest $\alpha_{k-1} < \alpha_k + \delta$. Seega on γ_1 mittekasvavate elementidega järjend. Arvu δ positiivsuse ning suuruste δ ja $-\delta$ koondumise tõttu on $\gamma_0 \succ \gamma_1$ ilmne. Põhjendame $\gamma_1 \succ \beta$.

$\alpha \succ \beta$ tõttu kehtivad esimesed $j - 1$ võrratust järjendite γ_1 ja β jaoks süsteemis (1). $\alpha_j - \delta \geqslant \beta_j$ ning $\alpha_i = \beta_i$, $i = j + 1, \ldots, k - 1$ põhjendavad ka j-nda kuni $(k - 1)$-nda võrratuse kehtivuse, ning et suurused δ ja $-\delta$ koonduvad, siis on põhjendatud ka kõik järgnevad võrratused süsteemis (1).

Ilmselt erinevad järjendid γ_0 ja γ_1 täpselt kahe elemendi poolest. Kuna $\alpha_j - \delta = \beta_j$, kui $\delta = \alpha_j - \beta_j$, või $\alpha_k + \delta = \beta_k$, kui $\delta = \beta_k - \alpha_k$, siis erinevad γ_1 ja β vähemalt ühe elemendi võrra vähem kui γ_0 ja β. Järelikult, korrates ülesande lahendust järjendite γ_1 ja β jaoks jne., saame leida lõpliku arvu järjendeid $\alpha = \gamma_0 \succ \gamma_1 \succ \ldots \succ \gamma_l = \beta$, kus kõik kõrvutised järjendid erinevad teineteisest täpselt kahe elemendi poolest.

Märkus: Kui järjendite α ja β elemendid on mittenegatiivsed täisarvud, siis on ülesande väites lihtne veenduda nende järjendite graafilise interpretatsiooni kaudu (vt joonis 3).



$(4, 0, 0)$ $(2, 2, 0)$ $(2, 1, 1)$

Joonis 3

Olgu $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = l$ ning vaatleme l ühikruudust koosnevat kujundit koordinaattasandi esimeses veerandis, mille esimeses veerus on α_1 ruutu, teises veerus α_2 ruutu jne. Meie eesmärk on muuta see kujund järjendile β vastavaks kujundiks. Võrratuste süsteem (1) ütleb, et iga i korral on järjendile α vastava kujundi veergudes $1, \ldots, i$ kokku vähemalt sama palju ruute kui järjendile β vastava kujundi veergudes. Seega võib vajaliku muutuse teha veergude kaupa, tõstes esimesest veerust $\alpha_1 - \beta_1$ ruutu teise jne. Kuna sellised muutused puudutavad korraga ainult kahte veergu, on ülesande väide tõestatud.

20. Kuna ülesandes 19 leitud järjendid $\alpha = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l-1}, \gamma_l = \beta$ erinevad teineteisest ülimalt kahe elemendi võrra ja $\gamma_{i-1} \succ \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$ (tähistame siin $\gamma_m = (\gamma_m^1, \gamma_m^2, \ldots, \gamma_m^n)$ mistahes $m = 0, 1, 2, \ldots, l$ korral), siis vastavad üksliikmed $x_1^{\gamma_{i-1}^1} x_1^{\gamma_{i-1}^2} \ldots x_1^{\gamma_{i-1}^n}$ ja $x_1^{\gamma_i^1} x_1^{\gamma_i^2} \ldots x_1^{\gamma_i^n}$ erinevad samuti teineteisest ülimalt kahe teguri võrra. Siit järeldub, et tõestatava võrratuse

$$\Phi_{\gamma_{i-1}^1, \gamma_{i-1}^2, \ldots, \gamma_{i-1}^n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \Phi_{\gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots, \gamma_i^n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$$

vasakus pooles võib kokkulangevate astendajatega tegureid sisaldavad üksliikmed nelja liikme kaupa grupeerida ning tuua sealt kokkulangevate astendajatega tegurid sulgude ette. Sulgude sisse jääva avaldise mittenegatiivsus põhjendatakse ülesandes 21.

21. Võttes $\delta = \alpha_1 - \beta_1$, saame $\alpha_1 - \alpha_2 \geqslant \delta \geqslant 0$, $\beta_1 = \alpha_1 - \delta$ ja $\beta_2 = \alpha_2 + \delta$. Ülesande väide järeldub võrratustest

$$\begin{aligned} & x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} + x^{\alpha_2} y^{\alpha_1} - x^{\beta_1} y^{\beta_2} - x^{\beta_2} y^{\beta_1} = \\ = \; & x^{\alpha_2} y^{\alpha_2} (x^\delta - y^\delta)(x^{\alpha_1 - \alpha_2 - \delta} - y^{\alpha_1 - \alpha_2 - \delta}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

22. Vali kõigepealt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n > 1$ ja seejärel $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_n < 1$.

23. Tähistagu $\mathfrak{S}_k$ hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõigi k-elemendiliste alamhulkade hulka, $k = 1, 2, \ldots n$. Valides $x_1 = x_2 = \ldots = x_k > 1$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$, saame

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_k} x_1^{\sum_{i \in S} \alpha_i} \geqslant \sum_{S \in \mathfrak{S}_k} x_1^{\sum_{i \in S} \beta_i}. \tag{8}$$

Oletades nüüd, et $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i < \sum_{i=1}^{k} \beta_i$, saame piisavalt suure x_1 korral vastuolu võrratusega (8). Kasutades ka ülesandes 22 saadut, kehtib seetõttu $\alpha \succ \beta$.

24. Järjendite $\alpha = (\gamma, 0, \ldots, 0)$ ja $\beta = \left(\frac{\gamma}{n}, \frac{\gamma}{n}, \ldots, \frac{\gamma}{n}\right)$ korral saame Muirheadi võrratuse abil soovitava tulemuse.

25. Korrutame tõestatava võrduse läbi arvuga 2. Kui saadud võrduse vasakul pool on $i = j$, siis sellel kohal summas esinev liidetav võrdub nulliga. See tähendab, et mingi $k = 1, 2, \ldots, n$ korral saab liidetav $a_k b_k$ summasse tulla juhtudel $i = k$, $j \neq k$ või $i \neq k$, $j = k$. Selliseid (plussmärgiga) liidetavaid esineb täpselt $2(n-1)$ tükki, nagu ka paremal pool.

Mingite k ja l, $k = 1, 2, \ldots, n$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $k \neq l$ korral tuleb liige $a_k b_l$ vasakul pool summasse (miinusmärgiga) parajasti 2 korral (juhtudel $i = k$, $j = l$ ning $i = l$, $j = k$); täpselt sama palju kui paremal pool. Seega on võrduse vasakul ja paremal pool täpselt samad liidetavad, mis tähendab, et tõestatav võrdus kehtib.

26. Kui arvud a_i ja b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, on samapidi järjestatud, siis ülesandes 25 tõestatud võrduse vasakul pool on kõik liidetavad $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ mittenegatiivsed (tegurid on samamärgilised). Järelikult on selle võrduse pooled mittenegatiivsed suurused, millest järeldub arvuga n^2 jagamise järel teoreemi 7 esimene osa.

Kui aga arvud a_i ja b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, on eripidi järjestatud, siis ülesandes 25 tõestatud võrduse vasakul pool on kõik liidetavad $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ mittepositiivsed (tegurid on erimärgilised). Järelikult on selle võrduse pooled mittepositiivsed suurused, millest järeldub arvuga n^2 jagamise järel teoreemi 7 teine osa.

27. Olgu ämbri täitmiseks kuluvad ajad $T_1 < T_2 < \ldots < T_{10}$. Järjestatuna kasvavas järjekorras on ooteaeg kokku $T = 10T_1 + 9T_2 + \ldots + T_{10}$. Mingi muu järjestuse korral on ooteaeg kokku $S = 10S_1 + 9S_2 + \ldots + S_{10}$, kus $(S_1, S_2, \ldots, S_{10})$ on vektori $(T_1, T_2, \ldots, T_{10})$ elementide ümberjärjestus.

Kuna vaadeldavad vektorid on erinevad, leidub vähim indeks i, mille korral $S_i \neq T_i$. Siis leidub $j > i$ nii, et $S_j = T_i < S_i$. Defineerime $S'_i = S_j$, $S'_j = S_i$ ning $S'_k = S_k$ $k \neq i, j$ korral. Olgu $S' = 10S'_1 + 9S'_2 + \ldots + S'_{10}$. Siis

$$S - S' = (11 - i)(S_i - S'i) + (11 - j)(S_j - S'_j) = (S_i - S_j)(j - i) > 0.$$

Et selliseid vahetamisi saab veel teha, vektorini $(T_1, T_2, \ldots, T_{10})$ jõuame aga ülimalt 9 sammuga, siis on T tõesti vähim võimalik kogu-ooteaeg.

28. Olgu ette antud reaalarvud $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ ja $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ ning olgu arvud a_i ümber järjestatuna a'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tõestame kõigepealt võrratuse (5) vasaku poole. Tähistame summad $A = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$ ja $A' = a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n$.

Kui $a'_i = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pole midagi tõestada. Vastasel korral leidub vähim indeks i, mille korral $a_i \neq a'_i$. Siis leidub $j > i$ nii, et $a'_j = a_i < a'_i$. Defineerime $c_i = a'_j$, $c_j = a'_i$ ning $c_k = a'_k$ $k \neq i, j$ korral. Tähistame $C = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_nb_n$. Siis

$$C - A' = (c_ib_i + c_jb_j) - (a'_ib_i + a'_jb_j) = (a'_i - a'_j)(b_j - b_i) > 0.$$

Et selliseid vahetamisi saab veel teha, summani A jõuame aga ülimalt $n - 1$ sammuga, siis on A tõesti suurim võimalik summa.

Võrratuse (5) parema poole tõestamiseks tähistame $B = a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ldots + a_1b_n$. Kui nüüd $a'_i = a_{n+1-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pole midagi tõestada. Vastasel korral leidub vähim indeks i, mille korral $a_{n+1-i} \neq a'_i$. Siis leidub $j > i$ nii, et $a'_j = a_{n+1-i} > a'_i$. Defineerime $d_i = a'_j$, $d_j = a'_i$ ning $d_k = a'_k$ $k \neq i, j$ korral. Tähistame $D = d_1b_1 + d_2b_2 + \ldots + d_nb_n$. Siis

$$D - A' = (d_ib_i + d_jb_j) - (a'_ib_i + a'_jb_j) = (a'_i - a'_j)(b_j - b_i) < 0.$$

Et selliseid vahetamisi saab veel teha, summani B jõuame aga ülimalt $n - 1$ sammuga, siis on B tõesti vähim võimalik summa.

29. Kasutades ümberpaigutusvõrratust järjendite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ning $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ korral, jõuame soovitavale tulemusele.

30. Kasutades ümberpaigutusvõrratust järjendite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ning $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$ korral, jõuame soovitavale tulemusele.

31. Tähista $G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, $x_1 = \frac{a_1}{G}$, $x_2 = \frac{a_1a_2}{G^2}$, …,$x_n = \frac{a_1a_2\cdots a_n}{G^n} = 1$ ning kasuta ülesannet 30 arvude $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jaoks (saab silmas pidada, et $\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{G}{a_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$).

32. Ülesannet 29 kasutades

$$\begin{array}{rcl}
x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 & \geqslant & x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1, \\
x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 & \geqslant & x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2, \\
\ldots & & \ldots \\
x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 & \geqslant & x_1x_n + x_2x_1 + \ldots + x_nx_{n-1}, \\
x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 & \geqslant & x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.
\end{array}$$

Nende võrratuste liitmisel saame soovitava tulemuse.

33. Kui $a_i = 0$ või $b_i = 0$, pole midagi tõestada. Olgu siis $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ ja $T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$. Tähistame $x_i = \dfrac{a_i}{S}$ ja $x_{n+i} = \dfrac{b_i}{T}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ülesande 29 põhjal

$$\begin{aligned}2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 \geqslant x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \ldots + x_n x_{2n} + \\ + x_{n+1}x_1 + x_{n+2}x_2 + \ldots + x_{2n}x_n = \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)}{ST},\end{aligned}$$

mis on samaväärne Cauchy võrratusega. Võrdus kehtib parajasti juhul $x_i = x_{n+i}$, s.t. $a_iT = b_iS$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

34. Olgu arvud a_i ja b_i samapidiselt järjestatud, $i = 1, 2, \ldots, n$. Võrratuste

$$\begin{array}{rcl} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n & \geqslant & a_1b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_nb_1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n & \geqslant & a_1b_3 + a_2b_4 + \ldots + a_nb_2, \\ \ldots & \geqslant & \ldots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n & = & a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{array}$$

liitmine annab Tšebõšovi võrratuse. Selle võrratuse duaalne väide tõestatakse analoogiliselt.

35.

1. $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \ldots + x_n^2x_{n-1} = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$,
2. $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$,
3. $x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + x_2^4x_1 + x_2^4x_3 + x_3^4x_1 + x_3^4x_2 = \sigma_1^3\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2$,
4. $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - \sigma_3$,
5. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \dfrac{x_3}{x_1} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_2} + \dfrac{x_1}{x_3} = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3} - 3$.

36. Polünoomi $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^{n+1} - \sigma_1x^n + \sigma_2x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n+1}\sigma_{n+1}$ tuletiseks on $(n+1)x^n - n\sigma_1x^{n-1} + (n-1)\sigma_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n\sigma_n$. Selle juurte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kohta teame nüüd Viète'i valemite põhjal, et

$$\Sigma_i = \frac{1}{n+1} \cdot (n - i + 1)\sigma_i,$$

millest

$$S_i = \frac{1}{\binom{n}{i}} \cdot \Sigma_i = \frac{1}{\binom{n+1}{i}} \cdot \sigma_i = s_i.$$

37. Olgu täidetud teoreemi 10 eeldused, kasutame eelmise ülesande tähistusi. Kirjutame vaadeldava võrratuse või võrduse välja polünoomi $(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1})$ tuletise juurte jaoks. Eelmise ülesande tulemuse põhjal osutub suurusi S_i siduv võrratus või võrdus ka suurusi s_i siduvaks, $1 \leqslant i \leqslant n$ (tegelikult on tarvis vaid $1 \leqslant i \leqslant k$).

38. Aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\left(\frac{x_1x_2\cdots x_{k-1} + x_1x_2\cdots x_{k-2}x_k + \ldots + x_2x_3\cdots x_k}{k}\right)^k \geqslant (x_1x_2\cdots x_k)^{k-1},$$

s.t. oleme saanud $s_{k-1}^k \geqslant s_k^{k-1}$ k muutuja korral. Teoreemi 10 põhjal kehtib saadud võrratus ka mistahes suurema arvu muutujate korral.

39. Teoreemi 10 põhjal võime eeldada, et $n + 1 = k$, sellest järeldub võrratuse kehtivus ka suurema arvu muutujate jaoks. Arvestades toodud tähiseid, esitub tõestatav võrratus kujul

$$\frac{1}{\binom{n+1}{n-1}} \cdot \sigma_{n-1} \cdot \frac{1}{\binom{n+1}{n+1}} \cdot \sigma_{n+1} \leqslant \frac{1}{\binom{n+1}{n}^2} \cdot \sigma_n^2$$

ehk pärast teisendamist ning tähistamist $\sigma_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} x_i = X$

$$2(n+1)X \sum_{i<j} \frac{X}{x_ix_j} \leqslant n \sum_{i=1}^{n+1} \frac{X^2}{x_i^2} + 2n \sum_{i<j} \frac{X}{x_ix_j}.$$

See võrratus on aga samaväärne

$$\sum_{i<j} \left(\frac{X}{x_i} - \frac{X}{x_j}\right)^2 \geqslant 0,$$

mis ilmselt kehtib.

40. Arendame binoomvalemist:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \sum_{k=2}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k \leqslant 1 + \alpha x,$$

kusjuures võrdus saab arvu x positiivsuse tõttu kehtida vaid juhul, kui vaadeldud summa rajades $k = 2$ kuni α on võrdne nulliga, s.t. juhul $\alpha = 1$.

41. Tõestame võrratuse kõigepealt juhul $n > 0$. Selleks piisab näidata, et jada

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

on kasvav. Arendame:

$$\begin{aligned}
y_n &= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \\
&+ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \\
&+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Näeme, et jada liige y_n avaldub $n+1$ positiivse liidetava summana, kusjuures kaks esimest liidetavat on võrdsed arvuga 1 ja seega konstantsed, iga järgnev liidetav

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

($2 \leqslant k \leqslant n$) aga kasvab n suurendamisel, peale selle kasvab n suurenedes ka liidetavate arv $n+1$. Seega $y_{n+1} > y_n$.

Juhul $n < -2$ teisendame avaldist (olgu $m = -n$):

$$\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{-(m+1)} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{-(m+1)} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Seega piisab näidata, et jada

$$z_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

on kahanev. Arvutame selle jada kahe järjestikuse liike suhte:

$$\begin{aligned}
\frac{z_m}{z_{m+1}} &= \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}{\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^{m+2}} = \frac{(m+1)^{2m+3}}{m^{m+1}\cdot(m+2)^{m+2}} = \\
&= \left(\frac{(m+1)^2}{m(m+2)}\right)^{m+1}\cdot\frac{m+1}{m+2} = \left(\frac{m^2+2m+1}{m^2+2m}\right)^{m+1}\cdot\frac{m+1}{m+2} = \\
&= \left(1+\frac{1}{m^2+2m}\right)^{m+1}\cdot\frac{m+1}{m+2}.
\end{aligned}$$

Bernoulli võrratusest

$$\left(1+\frac{1}{m^2+2m}\right)^{m+1} > 1+\frac{m+1}{m^2+2m} > 1+\frac{m+1}{m^2+2m+1} = 1+\frac{1}{m+1} = \frac{m+2}{m+1}.$$

Seepärast

$$\frac{z_m}{z_m+1} > \frac{m+2}{m+1}\cdot\frac{m+1}{m+2} = 1,$$

mis tähendab, et $z_m > z_{m+1}$.

42. Tõestame väite matemaatilise induktsiooni abil. Juhul $n = 2$ on tegu kumeruse definitsiooniga ja väide kehtib triviaalselt. Induktsiooni sammu tegemiseks eeldame, et väide kehtib $n-1$ korral. Olgu antud n positiivset arvu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ summaga 1. Tähistame $\lambda'_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_n}$, kus $i = 1, \ldots, n-1$, siis $\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{n-1} = 1$ ja

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) &= \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i f(x_i) \geqslant \\
&\geqslant \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i x_i\right) \geqslant \\
&\geqslant f\left(\lambda_n x_n + (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i x_i\right) = \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right).
\end{aligned}$$

43. Funktsioon $f(x) = x^\alpha$ on juhul $\alpha > 1$ või $\alpha < 0$ poolsirgel $(0, \infty)$ kumer (sest $f''(x) \geqslant 0$), juhul $0 < \alpha < 1$ aga samal poolsirgel nõgus ($f''(x) \leqslant 0$). Võttes nüüd etteantud arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ korral $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$ ning kasutades Jenseni võrratust, saame aritmeetilise keskmise ja α-järku astmekeskmise vahelise võrratuse ($\alpha \neq 0$).

44. Olgu etteantud positiivsed reaalarvud $a_1, a_2, \ldots a_n$. Tähista $f(x) = e^{\alpha x}$, $b_i = f(a_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$, ja kasuta funktsiooni f jaoks Jenseni võrratust juhul $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.

45. Olgu etteantud positiivsed reaalarvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ning oletame, et $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Tähista $b_i = a_i^\alpha$ ning kasuta ülesande 43 tulemust arvude $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ning $\dfrac{\beta}{\alpha}$ -järku astmekeskmise korral. Kui aga $\alpha = 0$ või $\beta = 0$, siis annab ülesanne 44 vajaliku tulemuse.

46. Olgu fikseeritud täisarv $k \in [m, n-1]$ ning reaalarv x, $k \leqslant x \leqslant k+1$. Siit funktsiooni f mittekasvavuse tõttu

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k).$$

Kasutades asjaolu, et funktsioon f on integreeruv lõigus $[m, n]$ (siis on ta integreeruv ka osalõigus $[k, k+1]$) ning määratud integraali monotoonsust, saame

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k),$$

sest $f(k)$ ja $f(k+1)$ on muutuja x suhtes konstantsed suurused.

47. Fikseerides järjest $k = m, m+1, \ldots, n-1$ ning kasutades ülesande 46 tulemust, jõuame võrratusteni

$$\begin{aligned} &f(m+1) + f(m+2) + \ldots + f(n) \leqslant \\ &\leqslant \int_m^{m+1} f(x)dx + \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leqslant \\ &\leqslant f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n-1), \end{aligned}$$

keskmine avaldis on määratud integraali aditiivsuse tõttu piirkonna järgi võrdne

$$\int_m^n f(x)dx.$$

48. Olgu $f(x) = \tan x - x$, $g(x) = x - \sin x$ ja $h(x) = \sin x - \frac{\pi}{2}x$. Kuna kõik vaadeldavad funktsioonid on paaritud, siis piisab tõestada võrratused ilma absoluutväärtusteta lõigus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (vasakpoolse võrratuse korral lõikmikus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$).

Saame $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ ning $f'(x) \geqslant 0$ lõigus $[0, a]$, kus $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, kusjuures punktid, kus $f'(x) = 0$ (s.t. $x = 0$) ei moodusta vahemikke. Seega on funktsioon $f(x)$ kasvav selles lõigus, ning kuna $f(0) = 0$, peab $f(x) > 0$, kui $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Saame $g'(x) = 1 - \cos x$ ning $g'(x) \geqslant 0$ vaadeldavas lõigus, kusjuures punktid, kus $g'(x) = 0$ (s.t. $x = 0$) ei moodusta vahemikke. Seega on funktsioon $g(x)$ kasvav selles lõigus, ning kuna $g(0) = 0$, peab $g(x) > 0$, kui $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Saame $h'(x) = \cos x - \frac{\pi}{2}$. Teine tuletis $h''(x) = -\sin x$ annab $h''(x) \leqslant 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tõttu (punktid x, kus $h''(x) = 0$ ei moodusta vahemikke), et $h'(x)$ on kahanev lõigus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tähistame $\xi = \arccos \frac{\pi}{2}$, siis $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ning $h'(\xi) = 0$. Järelikult kui $0 \leqslant x \leqslant \xi$, siis $h'(x) \geqslant 0$, kusjuures punktid, kus $h'(x) = 0$, ei moodusta vahemikke, seega lõigus $[0, \xi]$ on funktsioon $h(x)$ kasvav. $h(0) = 0$ tõttu $h(x) > 0$ juhul $x \in (0, \xi)$. Kuna juhul $\xi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ on $h'(\xi) \leqslant 0$, kusjuures punktid, kus $h'(x) = 0$, ei moodusta vahemikke, siis on funktsioon $h(x)$ lõigus $\left[\xi, \frac{\pi}{2}\right]$ kahanev. $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ tõttu $h(x) > 0$, kui $x \in \left(\xi, \frac{\pi}{2}\right)$.

49. Järelda Aristarchose võrratus siinusfunktsiooni nõgususest ja tangensfunktsiooni kumerusest vaadeldavas vahemikus.

50. Tõstes ülesande võrratuse ruutu, teisendades ja tähistades $A = a_x - c_x$, $B = c_x - b_x$, $C = a_y - c_y$ ja $D = c_y - b_b$ saame, et esialgne võrratus on samaväärne võrratusega

$$AB + CD \leqslant \sqrt{(A^2 + C^2)(B^2 + D^2)},$$

millest peale ruututõstmist ja koondamist jääb järele

$$2ABCD \leqslant A^2D^2 + B^2C^2$$

ehk

$$0 \leqslant (AD + BC)^2.$$

Mõtle iseseisvalt läbi, miks saab toodud arutluskäigu ümber pöörata ja nii ülesande väite tõestada. Tööta läbi ka juhud, kus mõni suurustest A, B, C, D võib olla negatiivne ja uuri, millal kehtib tõestatavas võrratuses võrdus. Miks on kolmnurgavõrratus range?

51. Kasuta absoluutväärtuse definitsiooni

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a > b, \\ b-a, & a \leqslant b. \end{cases}$$

52. Võrratusest $a < b + c$ järeldub $a^2 < ab + ca$. Liites sellele võrratusele kaks analoogilist, saamegi 1. osas soovitud tulemuse. Ülesande 2. osa tõestamiseks võib kasutada võrdust

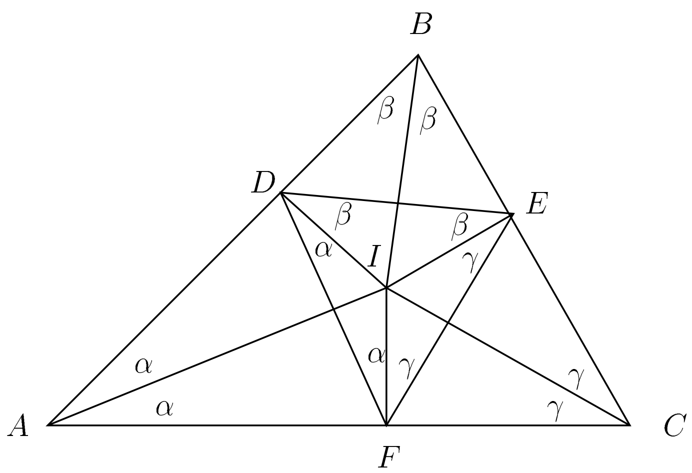
$$\begin{aligned}&(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c) = \\ &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).\end{aligned}$$

53. Euleri valemist teame, et kolmnurga siseringjoone keskpunkti I ja ümberringjoone keskpunkti O vaheline kaugus avaldub valemiga

$$IO^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

Kuna ilmselt $IO^2 \geqslant 0$, saamegi vajaliku võrratuse. Võrdus kehtib seejuures juhul kui $IO = 0$, lugejale jääb tõestada, et see on nii parajasti siis, kui kolmnurk on võrdkülgne.

54. Olgu I kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt. Kui kolmnurga nurgad on vastavalt 2α, 2β ja 2γ, siis võib leida ka teiste tekkivate nurkade suurused nii nagu joonisel 4.



Joonis 4

Kuna $DI = IF = r$, siis $DF = 2r\cos\alpha$; analoogiliselt $DE = 2r\cos\beta$ ja $EF = 2r\cos\gamma$. Siinusteoreemist saame $a = 2R\sin 2\alpha$, $b = 2R\sin 2\beta$ ja $c = 2R\sin 2\gamma$. Samuti on lihtne näha, et

$$p = AD + BE + CF = r(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma).$$

Seega peame tõestama võrratused

$$2r \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \sin 2\phi \leqslant 2r \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \cos\phi \leqslant r \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \cot\phi.$$

Esimese võrratuse tõestame ümberjärjestusvõrratuse abil. Paneme tähele, et nurgad α, β ja γ on teravnurgad, mistõttu eeldades $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ saame ka $\sin\alpha \leqslant \sin\beta \leqslant \sin\gamma$ ja $\cos\gamma \leqslant \cos\beta \leqslant \cos\alpha$. Siis

$$\begin{aligned}
\sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \sin 2\phi &= 2 \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \sin\phi\cos\phi \leqslant \\
&\leqslant (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) + \\
&\ (\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta) + (\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma) = \\
&= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = \\
&= \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \cos\phi.
\end{aligned}$$

Teise võrratuse tõestamiseks kasutame jälle asjaolu, et nurgad α, β ja γ on teravnurgad. Seega kasutades Jenseni võrratust funktsioonide $\cos x$ ja $\cot x$ jaoks võime kirjutada

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \cos\phi &\leqslant 2\cdot 3\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \\
&= 3\sqrt{3} = \\
&= 3\cot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\phi\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} \cot\phi.
\end{aligned}$$

55. *Vastus.* Punktid K, L, ja M on vastavalt tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid.

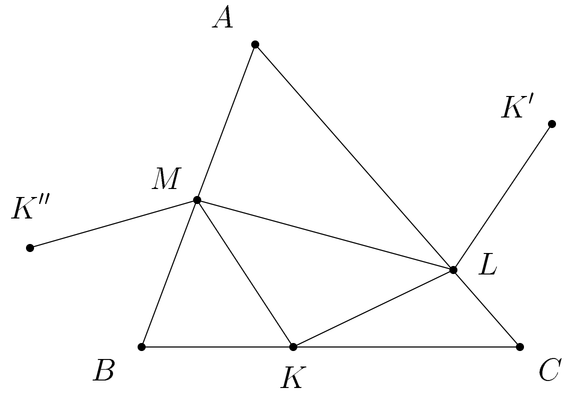
Lahendus 1. Peegeldame punkti K sirgete CA ja AB suhtes vastavalt punktideks K' ja K'' (vt joonis 5).

Siis ilmselt

$$P_{\triangle KLM} = K'L + LM + MK''$$

ja fikseeritud punkti K korral on see suurus minimaalne, kui punktid L ja M asuvad sirgel $K'K''$. Sel juhul saame punkti L jaoks

$$\angle ALM = \angle K'LC = \angle KLC,$$



Joonis 5

samuti punkti M jaoks $\angle AML = \angle KMB$. Millise punkti K korral on lõigu $K'K''$ pikkus minimaalne? Võrduste $\angle K'AC = \angle KAC$ ning $\angle K''AB = \angle KAB$, tõttu ei sõltu nurk $\angle K'AK'' = 2\angle BAC$ punkti K valikust. Lisaks leiab alati aset $AK' = AK = AK''$, seega on kõik kolmnurgad $K'AK''$ iga punkti K valiku korral võrdhaarsed ja sarnased. Lõik $K'K''$ on lühim parajasti siis, kui seda on lõik $AK' = AK$, st AK on kolmnurga ABC kõrgus.

Lahendajale jääb koduseks ülesandeks tõestada, et saadud võrdustest $\angle ALM = \angle KLC$ ja $\angle AML = \angle KMB$ järeldub, et ka lõigud BL ja CM on kolmnurga ABC kõrgused.

Lahendus 2. Peegeldame kolmnurka ABC järgemööda külgede CA, BC, AB, CA ja BC suhtes ning saame nii kuuest kolmnurgast koosneva "ahela". Ahela esimese ja viimase kolmnurga küljed AB on paralleelsed ja orienteeritud sama pidi, kolmnurga KLM küljed moodustavad aga peegeldamiste tulemusel kuuest lülist koosneva murdjoone, mille pikkus on $2P_{\triangle KLM}$. Niisiis on kolmnurga KLM ümbermõõt vähim, kui saadud murdjoon on sirglõik. Jällegi on kodune ülesanne tõestada, et see on nii parajasti siis, kui punktid K, L, ja M on vastavalt tippudest A, B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid.

56. *Vastus.* See on niisugune punkt P, mille korral

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$$

(vt joonis 6).

Lahendus. Pöörame kolmnurka BPC punkti C ümber 60° võrra nii, et punktide B ja P kujutised B' ja P' jäävad sirgest BC teisele poole kui punkt A. Siis

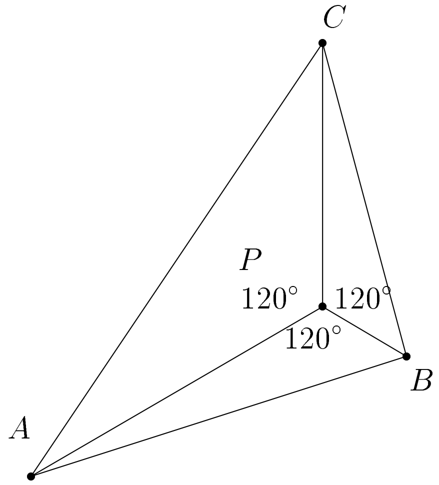
$$PA + PB + PC = AP + PP' + P'B',$$

murdjoone $APP'B'$ pikkus on aga minimaalne, kui punktid P ja P' asuvad sirgel AB'. Et kolmnurk $PP'C$ on võrdkülgne, siis $\angle PP'C = 60^\circ$ ja

$$\begin{aligned}\angle BPC = \angle B'P'C = 180^\circ - \angle PP'C = \\ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.\end{aligned}$$

Samuti

$$\angle CPA = 180^\circ - \angle P'PC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



Joonis 6

ja järelikult ka $\angle APB = 120^\circ$.

57. Ülesande tingimustest järeldub, et kolmnurgad BCD ja EFA on võrdkülgsed ja kolmnurgad ABD ja DEA võrdhaarsed. Seega on sirge BE nelinurga $ABDE$ sümmeetriatelg. Olgu punkti C peegeldus sellest teljest C' ning punkti F peegeldus samast teljest F'. Kuna $\angle AC'B + \angle BGA = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, siis on punktid A, C', B, G ühel ringjoonel ja Ptolemaiose teoreemi põhjal (vt jaotis 2.7) saame

$$AB \cdot C'G = GB \cdot AC' + BC' \cdot AG.$$

Kuna $AB = AC' = BC'$, saame viimasest võrdusest

$$C'G = GB + AG.$$

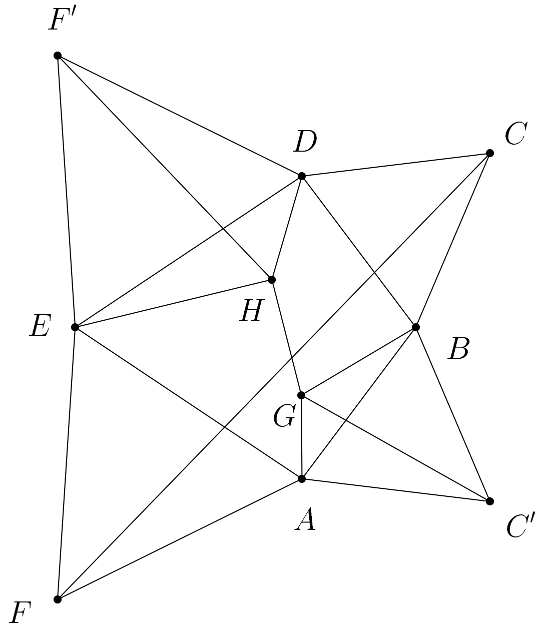
Analoogiliselt saab tõestada võrduse

$$F'H = DH + HE.$$

Nüüd võime kirjutada

$$CF = C'F' \leqslant C'G + GH + HF' = GB + AG + GH + DH + HE,$$

mida oligi tarvis tõestada (vt joonis 7).



Joonis 7

58. Olgu kuubi ühe tipu juurest lähtuvate servadega määratud vektorid $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ja $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Lihtne on näha, et kuubi projektsioon xy-tasandile koosneb kolmest rööpkülikust, mis tekivad kolme tahu projekteerimisel, kusjuures nende tahkude külgede vektorid on vastavalt $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ ning $\overrightarrow{c}$ ja $\overrightarrow{a}$.
Leiame näiteks vektoritest $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ moodustatud tahu xy-tasandile projekteerimisel tekkiva rööpküliku pindala. Rööpküliku küljed on vektorid $\overrightarrow{a}_{xy} = (a_1, a_2, 0)$ ja $\overrightarrow{b}_{xy} = (b_1, b_2, 0)$ ning nendele ehitatud rööpküliku pindala on võrdne nende vektorkorrutise

$$\overrightarrow{a}_{xy} \times \overrightarrow{b}_{xy} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

pikkusega. Viimane vektor on aga ilmselt vektorkorrutise $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ projektsioon z-teljele, lühidalt

$$\overrightarrow{a}_{xy} \times \overrightarrow{b}_{xy} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})_z.$$

Analoogiliselt saame $\overrightarrow{c}_{xy} \times \overrightarrow{a}_{xy} = (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})_z$ ja $\overrightarrow{b}_{xy} \times \overrightarrow{c}_{xy} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})_z$. Niisiis huvitab meid vektorite $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})_z$, $(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a})_z$ ja $(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})_z$ summa pikkus. Paneme tähele, et kui valida vektorid $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ õige orientatsiooniga, kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \overrightarrow{c}, \\ \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{b}, \\ \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} &= \overrightarrow{a}, \end{aligned}$$

sest näiteks $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ on vektor, mis on risti vektoritega $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ ning mille pikkus võrdub neile ehitatud rööpküliku (antud juhul ühikruudu) pindalaga – aga see on õige orientatsiooni korral täpselt vektor $\overrightarrow{c}$. Niisiis huvitab meid suuruse

$$|\overrightarrow{a}_z| + |\overrightarrow{b}_z| + |\overrightarrow{c}_z|$$

maksimaalne väärtus. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et vektorite $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{c}$ z-koordinaadid on mittenegatiivsed, millisel juhul saame kirjutada võrduse

$$|\overrightarrow{a}_z| + |\overrightarrow{b}_z| + |\overrightarrow{c}_z| = |\overrightarrow{a}_z + \overrightarrow{b}_z + \overrightarrow{c}_z| = |(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})_z|.$$

Vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ vastab aga antud ühikkuubi peadiagonaalile, mille pikkus on $\sqrt{3}$. Kuna tema projektsiooni maksimaalne väärtus z-teljele ei saa olla suurem diagonaali enda pikkusest, ongi otsitavaks maksimaalseks väärtuseks $\sqrt{3}$.

59. Ülesande 1. osa tõestamiseks uurime suuruste $d(X, BC)$ ja $d(X, CA) + d(X, AB)$ käitumist, kui punkt X liigub mööda lõiku EF ühtlase kiirusega punktist E punkti F. Kui $X = E$ ja $X = F$, siis ilmselt $d(X, BC) = d(X, CA) + d(X, AB)$. Teisalt on selge, et punkti X liikumisel mööda lõiku EF muutuvad suurused $d(X, BC)$ ja $d(X, CA) + d(X, AB)$ ajas lineaarselt. Kui aga kahe lineaarse suuruse väärtused langevad kokku kahel ajahetkel, siis peavad need suurused kogu aeg võrdsed olema.

Tõestatud osa kolm korda kasutades saame, et kehtivad seosed

$$\begin{aligned} d(X, BC) &= d(X, CA) + d(X, AB), \\ d(Y, CA) &= d(Y, AB) + d(Y, BC), \\ d(Z, AB) &= d(Z, BC) + d(Z, CA). \end{aligned}$$

Teisest küljest kehtivad ka võrratused

$$\begin{aligned} XY &\geqslant d(Y, CA) - d(X, CA), \\ YZ &\geqslant d(Z, AB) - d(Y, AB), \\ ZX &\geqslant d(X, BC) - d(Z, BC). \end{aligned}$$

Esimene võrratus näiteks väidab, et lõik XY on vähemalt sama pikk, kui tema projektsioon küljega CA risti olevale sirgele.

Ülaltoodud kolme võrdust ja kolme võrratust kombineerides saamegi ülesande 2. osa väite.

60. Olgu lõigule B_1C_1 konstrueeritud rööpkülik B_1C_1DE (kus $\overrightarrow{C_1D} = \overrightarrow{AM}$). Lõigaku sirge AM lõike B_1C_1 ja DE vastavalt punktides F ja G. Siis

$$S_{AMDC_1} + S_{AMEB_1} = S_{FGDC_1} + S_{FGEB_1} = S_{B_1C_1DE}.$$

61. Paneme tähele, et $AC_1v = S_{AMDC_1}$, $AB_1w = S_{AMEB_1}$ ja B_1C_1x võrdub lõikudele B_1C_1 ja AM ehitatud ristküliku pindalaga. Viimane aga ei ole kindlasti väiksem samadele lõikudele ehitatud suvalise rööpküliku pindalast.

62. Võttes võrratuses (6) $AB_1 = AC$ ja $AC_1 = AB$, saame $cv + bw \leqslant ax$ ehk $x \geqslant \frac{c}{a}v + \frac{b}{a}w$. Liites sellele võrratusele kaks analoogilist on tulemuseks

$$x + y + z \geqslant \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) u + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) v + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) w \geqslant 2(u + v + w).$$

63. Võttes võrratuses (6) $AB_1 = AB$ ja $AC_1 = AC$, saame $bv + cw \leqslant ax$. Liites sellele võrratusele kaks analoogilist saamegi vajaliku võrratuse.

64. Eelmises ülesandes tõestatud võrratusest $bv + cw \leqslant ax$ järeldub $xu \geqslant \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$. Jääb vaid liita sellele võrratusele kaks analoogilist ja kasutada võrratusi $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ jt.

65. Valime kuusnurga sees punktid M, N, P nii, et nelinurgad $MDEF$, $NFAB$ ja $PBCD$ on rööpkülikud. Olgu XYZ kolmnurk, mis moodustub punkte B, D, F läbivatest ja vastavalt lõikudega FA, BC, DE risti olevatest sirgetest nii, et punkt B asub sirgel YZ, punkt D sirgel ZX ja punkt F sirgel XY. Paneme tähele, et kolmnurgad MNP ning XYZ on sarnased (vt joonis 8).

Kolmnurgad DEF ja DMF on kongruentsed, järelikult on nende ümberringjoonte raadiused võrdsed. Samas kuna $\angle MDX = \angle MFX = 90°$, siis asuvad punktid D, M, F, X ühel ringjoonel diameetriga XM ja järelikult $XM = 2R_E$. Analoogiliselt saame $YN = 2R_A$ ja $ZP = 2R_C$. Ülesande võrratuse saab siis kirjutada kujul

$$XM + YN + ZP \geqslant BN + BP + DP + DM + FM + FN. \tag{9}$$

Tähistades kolmnurga XYZ külgede pikkused loomulikul viisil x, y, z, saame analoogiliselt Erdős-Mordelli võrratuse tõestusega võrratused

$$\begin{aligned} XM &\geqslant \frac{z}{x}DM + \frac{y}{x}FM, \\ YN &\geqslant \frac{x}{y}FN + \frac{z}{y}BN, \\ ZP &\geqslant \frac{y}{z}BP + \frac{x}{z}DP. \end{aligned}$$

Neid liites kehtib võrratus

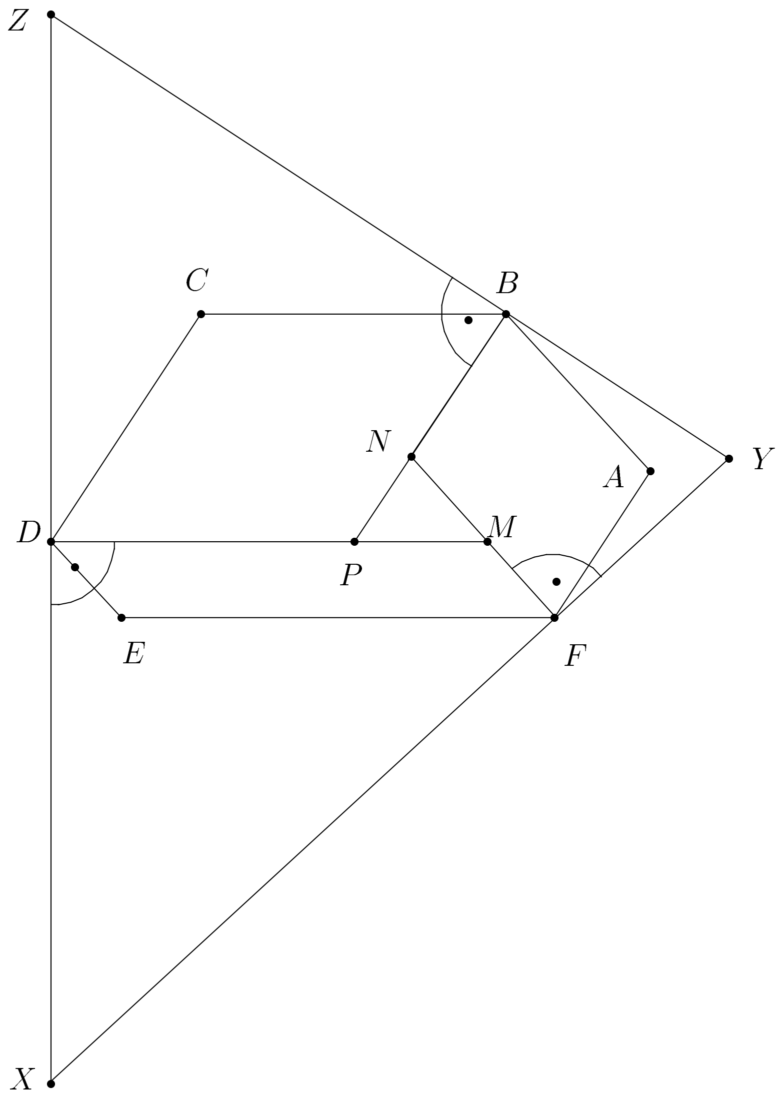
$$XM + YN + ZP \geqslant \frac{z}{x}DM + \frac{y}{x}FM + \frac{x}{y}FN + \frac{z}{y}BN + \frac{y}{z}BP + \frac{x}{z}DP.$$

Tuletamaks saadud võrratusest võrratust (9), paneme tähele, et kehtib võrdus

$$\frac{y}{z}BP + \frac{z}{y}BN = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP + BN}{2}\right) + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP - BN}{2}\right).$$

Olgu kolmnurkade XYZ ja MNP sarnasustegur r, siis

$$r = \frac{FN - FM}{z} = \frac{BN - BP}{x} = \frac{DP - DM}{y}.$$



Joonis 8

Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$\begin{aligned}\frac{y}{z}BP + \frac{z}{y}BN &= \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{BP+BN}{2}\right) + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)\cdot\frac{-rx}{2} \geqslant \\ &\geqslant BP + BN - \frac{r}{2}\left(\frac{yx}{z} - \frac{zx}{y}\right).\end{aligned}$$

Liites sellele võrratusele kaks analoogilist ning pannes tähele, et viimased liikmed koonduvad välja, olemegi vajaliku võrratuse tõestanud.

66. Ilmselt järeldub võrratusest $a > b$ võrratus $\alpha > \beta$ ja võrratusest $b > a$ võrratus $\beta \geqslant \alpha$. Järelikult kehtib igal juhul võrratus $(a-b)(\alpha-\beta) \geqslant 0$, millest järeldub $a\alpha + b\beta \geqslant a\beta + b\alpha$ ja pärast jagamist suurusega $\alpha\beta$ ka

$$\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\alpha} \geqslant \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}.$$

Analoogiliselt saame võrratused

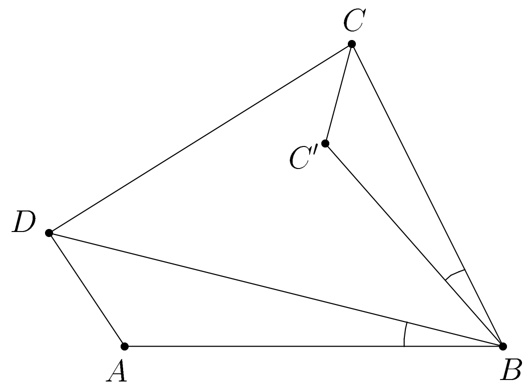
$$\frac{a}{\gamma} + \frac{c}{\alpha} \geqslant \frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\gamma}$$

ning

$$\frac{b}{\gamma} + \frac{c}{\beta} \geqslant \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}.$$

Nende kolme võrratuse liitmisel saamegi ülesande võrratuse.

67. Vaatleme sellist pöördehomoteetiat punkti B ümber, mis viib punkti D punktiks A; selle pöörde nurk on siis $\alpha = \angle ABD$ ja kordaja $k = \dfrac{AB}{BD}$. Punkti C kujutis selle pöördehomoteetia abil olgu C' (vt joonis 9).



Joonis 9

Kuna kolmnurgad ABC' ja DBC on sarnased, saame võrduse $\frac{AB}{AC'} = \frac{BD}{CD}$ ning järelikult

$$AC' = \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Kuna kehtivad

$$\angle C'BC = \alpha = \angle ABD, \qquad \frac{C'B}{BC} = k = \frac{AB}{BD},$$

siis on ka kolmnurgad $C'BC$ ja ABD sarnased, järelikult saame $\frac{BC}{C'C} = \frac{BD}{AD}$ ning

$$C'C = \frac{BC \cdot AD}{BD}.$$

Kolmnurgavõrratusest punktide A, C ja C' jaoks saame

$$AC \leqslant AC' + C'C = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD},$$

millest pärast korrutamist suurusega BD järeldubki vajalik võrratus.
Võrdus kehtib parajasti siis, kui punkt C' asub lõigul AC, see aga tähendab, et kehtivad võrdused

$$\angle BAC = \angle BAC' = \angle BDC,$$

st nelinurk $ABCD$ on kõõlnelinurk.

68. Kui nelinurk $ABCD$ on mittekumer, peab üks tema tippudest (näiteks C) asuma kolme ülejäänu poolt moodustatud kolmnurga sisepiirkonnas. Peegeldame punkti C sirge BD suhtes punktiks C'. Ilmselt kehtivad seosed

$$\begin{aligned} BC &= BC', \\ CD &= C'D, \\ AC &< AC'. \end{aligned}$$

Kuna nelinurk $ABC'D$ on kumer, siis kehtib tema jaoks Ptolemaiose võrratus ja järelikult saame

$$AC \cdot BC < AC' \cdot BD \leqslant AB \cdot C'D + BC' \cdot AD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

69. Kasutame inversiooni keskpunktiga D ja suvalise (ringi või sfääri) raadiusega $r > 0$. Olgu punktide A, B, C kujutised vastavalt A', B', C'. Kolmnurgavõrratusest kolme viimase punkti jaoks teame

$$A'B' + B'C' \geqslant A'C'. \tag{10}$$

Lugejale jääb näpuharjutuseks tõestada, et inversiooni korral avaldub lõigu XY kujutise pikkus valemiga

$$X'Y' = \frac{r^2 \cdot XY}{DX \cdot DY}.$$

Kasutades seda seost võrratuses (10), saame

$$\frac{r^2 \cdot AB}{DA \cdot DB} + \frac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC} \geqslant \frac{r^2 \cdot AC}{DA \cdot DC},$$

millest pärast korrutamist suurusega $DA \cdot DB \cdot DC/r^2$ järeldubki vajalik võrratus.
Võrdus kehtib vaid siis, kui punkt B' asub samal sirgel punktidega A' ja C' nende vahel. See aga tähendab, et enne inversiooni asusid punktid A, B, C ja D kas ühel sirgel või ühel ringjoonel. Kuna esimene variant on ülesande tingimustega välistatud, jääb järele vaid teine variant.

70. Tähistame $a = CE$, $c = EA$ ja $e = AC$. Rakendades Ptolemaiose teoreemi nelinurga $ABCE$ jaoks saame

$$BC(a+c) = BC(CE + AE) = AB \cdot CE + BC \cdot AE \geqslant AC \cdot BE = BE \cdot e,$$

millest järeldub võrratus

$$\frac{BC}{BE} \geqslant \frac{e}{a+c}.$$

Analoogiliselt kehtivad võrratused

$$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{a}{c+e}, \quad \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{c}{e+a}.$$

Nüüd saame aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelisest seosest

$$\begin{aligned}
\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} &\geqslant \frac{e}{a+c} + \frac{a}{c+e} + \frac{c}{e+a} = \\
&= (a+c+e)\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{c+e} + \frac{c}{e+a}\right) - 3 \geqslant \\
&\geqslant \frac{9(a+c+e)}{(a+c)+(c+e)+(e+a)} - 3 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

71. Olgu E ja F sellised punktid, et $BCDE$ ja $BCAF$ (pane tähele tippude järjekorda!) on rööpkülikud. Siis on rööpkülik ka $EDAF$. Kehtivad võrdused

$$AF = ED = BC,\ EF = AD,\ EB = CD,\ BF = AC.$$

Rakendades Ptolemaiose võrratust nelinurkadele $ABEF$ ja $AEBD$, saame

$$\begin{aligned}
AB \cdot AD + BC \cdot CD &= AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant \\
&\geqslant AE \cdot BF = AE \cdot AC; \\
BD \cdot AE + AD \cdot CD &= BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant \\
&\geqslant AB \cdot ED = AB \cdot BC.
\end{aligned}$$

Siit järeldub nüüd

$$\begin{aligned}
& DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = \\
= \; & DB(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant \\
\geqslant \; & DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot CA = \\
= \; & AC(BD \cdot AE + AD \cdot CD) \geqslant \\
\geqslant \; & AC \cdot AB \cdot BC.
\end{aligned}$$

Võrdus kehtib parajasti siis, kui nelinurgad $ABEF$ ja $AEBD$ on kõõlnelinurgad, st punktid A, B, D, E, F asuvad ühel ringjoonel. Kuna $EDAF$ on rööpkülik, siis tegelikult peab ta olema koguni ristkülik ja järelikult $AD \perp ED$. Kuna $ED \parallel BC$, siis $AD \perp BC$ ja punkt D asub kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgusel. Kuna $AEBD$ on kõõlnelinurk, siis $\angle ABE = \angle ADE = 90^\circ$. Järelikult $AB \perp BE$, millest saame $AB \perp CD$, seega asub punkt D ka kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusel.

72. Olgu kolmnurga tippude A, B, C vastaskülgede pikkused vastavalt a, b, c. Me näitame, et antud avaldis saavutab minimaalse väärtuse kui $P = G$. Selle väärtuse leidmiseks kasutame Stewarti teoreemi, arvutame mediaanide AL, BM, CN pikkused ning arvestame, et $AG = \frac{2}{3}AL$, $BG = \frac{2}{3}BM$, $CG = \frac{2}{3}CN$. Kokkuvõttes saame

$$\begin{aligned}
AG^2 + BG^2 + CG^2 &= \frac{1}{9}[(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2c^2 + 2a^2 - b^2) \\
&+ (2a^2 + 2b^2 - c^2)] = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.
\end{aligned}$$

Tõestamaks, et punkt G annab uuritavale avaldisele miinimumväärtuse, kasutame Ptolemaiose teoreemi. Selleks tuleb tuua sisse üks ringjoon. See ringjoon peaks olema võimalikult tihedalt seotud ülesande avaldisega ja kuna selles avaldises sisaldub hulk lõigupikkusi, tekib mõte sobitada neid lõike ringjoone kõõludeks. Valime nendeks kõõludeks BG ja CG, st joonestame ringjoone S läbi punktide B, C, G.

Ptolemaiose võrratuse kasutamiseks läheb vaja veel neljandat punkti, teisest küljest on hetkel mängust täiesti väljas punkt A. Valime siis ringjoonel punkti K kui sirge AG teise lõikepunkti ringjoonega S. Nüüd saame tasandi suvalise punkti P korral kirjutada võrratuse

$$PK \cdot BC \leqslant BP \cdot CK + BK \cdot CP, \tag{11}$$

kusjuures võrdus kehtib parajasti siis, kui punkt P asub ringjoonel. Viimases võrratuses on võrreldes nõutava võrratusega juba olemas lõigud BP ja CP, kuid CK ja BK asemel peaks vastavalt olema BG ja CG. Ainus reaalne võimalus neid sinna saada oleks korrutada võrratus (11) läbi suurusega

$$\frac{BG}{CK} = \frac{CG}{BK}, \tag{12}$$

seda muidugi juhul kui niisugune võrdus üldse kehtib. Samuti peaks suhtega (12) korrutamine tegema midagi võrratuse (11) vasaku poolega. Kuna suurus PK pole kolmnurga ABC poolt üheselt määratud, on reaalne otsida ainult suhet stiilis

$$\frac{BG}{CK} = \frac{CG}{BK} = \frac{*}{BC}.$$

Me näitame, et kehtivad võrdused

$$\frac{BG}{CK} = \frac{CG}{BK} = \frac{AG}{BC}. \tag{13}$$

Selleks tähistame $\angle BCK = \theta$, $\angle CKB = \chi$, $\angle KBC = \varphi$. Siis on lihtne näha, et $\angle CGL = \varphi$, $\angle BGL = \theta$, $\angle BGN = \chi$, $\angle AGN = \varphi$. Rakendades siinusteoreemi kolmnurkades AGN ja BGN saame seose

$$\frac{BG}{CG} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$$

ning rakendades siinusteoreemi kolmnurkades BGL ja CGL saame seose

$$\frac{AG}{BG} = \frac{\sin\chi}{\sin\varphi}.$$

Arvestades veel, et $BK = 2R\sin\theta$, $CK = 2R\sin\varphi$ ja $BC = 2R\sin\chi$, saamegi võrdused (13).
Korrutades võrratust (11) suhetega (13), saame

$$PK \cdot AG \leqslant BP \cdot BG + CG \cdot CP.$$

Liites võrratuse mõlemale poolele suuruse $AP \cdot AG$ saame

$$(AP + PK) \cdot AG \leqslant AP \cdot AG + BP \cdot BG + CG \cdot CP.$$

Kuna kolmnurgavõrratusest $AP+PK \geqslant AK$, oleme tõestanud, et iga punkti P korral kehtib võrratus

$$AK \cdot AG \leqslant AP \cdot AG + BP \cdot BG + CG \cdot CP,$$

kusjuures võrdus kehtib, kui punkt P asub ringjoonel S ning lõigul AK, st $P = G$.

73. Tähistame antud nelinurka $ABCD$, kusjuures $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ ja $DA = d$. Olgu punkt B' punkti B peegeldus diagonaali AC keskristsirgest. Siis on nelinurga $AB'CD$ küljed läbimise järjekorras b, a, c, d, samuti kehtib ilmselt $S_{ABCD} = S_{AB'CD}$. Seega

$$S_{ABCD} = S_{AB'CD} = S_{B'CD} + S_{DAB'} \leqslant \frac{1}{2}ac + \frac{1}{2}bd.$$

Võrratus kehtib parajasti siis, kui $\angle B'CD = \angle DAB' = 90^\circ$, kuna aga need on nelinurga $AB'CD$ vastasnurgad, siis on $AB'CD$ kõõlnelinurk. Nelinurga $ABCD$ saab siis joonestada samasse ringi; tema diagonaalide ristseisu näitamine on lugejale kodune ülesanne.

74. Lõika suuremat hulknurka väiksema hulknurga külgedega määratud sirgetega ning kasuta iga lõike korral kolmnurgavõrratust.

75. Eelmisest ülesandest järeldub (kuidas?) järgmine väide: kui punkt M asub kumera nelinurga $ABCD$ sisepiirkonnas, siis $MA + MB < AD + DC + CB$.

Ülesande lahendamiseks jagame kolmnurga kesklõikudega neljaks kongruentseks väikeseks kolmnurgaks; olgu D, E, F vastavalt külgede BC, CA ja AB keskpunktid. Kolmnurga ABC iga sisepunkt asub vähemalt kahes kumeras nelinurgas nelinurkade $ABDE$, $BCEF$ ja $CAFD$ hulgast. Asugu M näiteks nelinurkades $ABDE$ ja $BCEF$. Siis ülalmainitud väite põhjal saame võrratused

$$\begin{aligned} MA + MB &< BD + DE + EA, \\ MB + BC &< CE + EF + FB. \end{aligned}$$

Neid võrratusi liites saame

$$MB + (MA + MB + MC) < AB + BC + CA,$$

millest järeldubki ülesande võrratus.

76. Vastavalt $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$ korral $|a - b + c| \leqslant h$, $|c| \leqslant h$ ning $|a + b + c| \leqslant h$. Niisiis $2|a+c| = |(a-b+c)+(a+b+c)| \leqslant |a-b+c|+|a+b+c| \leqslant 2h$, millest $|a+c| \leqslant h$. Nüüd $|a| = |(a+c)-c| \leqslant |a+c|+|c| \leqslant 2h$ ja $2|b| = |(a+b+c)-(a-b+c)| \leqslant |a+b+c|+|a-b+c| \leqslant 2h$, millest $|b| \leqslant h$. Saadu liitmisel jõuame nõutava võrratuseni.

77. Olgu arvud kirjutatud ringjoonele järjekorras $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_k = n, a_{k+1}, \ldots, a_n$. Siis kasutades ülesannet 2 saame

$$\begin{aligned} & |1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_k - n| + |n - a_{k+1}| + \ldots + |a_n - 1| \geqslant \\ \geqslant\ & |1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_k - n| + |n - a_{k+1} + \ldots + a_n - 1| = \\ =\ & |1 - n| + |n - 1| = 2n - 2. \end{aligned}$$

Teisest küljest on väärtus $2n-2$ alati saavutatav, kui kirjutada arvud $1, 2, \ldots, n$ ringjoonele kasvavas järjekorras.

78. Antud tingimusi ruutu tõstes ning liites saame võrratuse

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leqslant 0,$$

millest järeldub $a + b + c = 0$.

79. Kasuta aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust.

80. *Lahendus 1.* Rakenda Muirheadi võrratust vektorite $(5, 0)$ ja $(3, 2)$ jaoks.

Lahendus 2. Tegurdades saame ülesande võrratusega samaväärse võrratuse

$$(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geqslant 0.$$

Nüüd jääb läbi vaadata juhud $a \geqslant b$ ja $a < b$, mõlemal juhul võrratus kehtib.

81. Kui üks arvudest a, b, c on võrdne nulliga, kehtib võrratus triviaalselt. Vastasel juhul jagame mõlemad võrratuse pooled läbi arvuga abc. Võrratuse vasak pool omandab siis kuju

$$\begin{aligned} &\frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{a+b}{b} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \\ = \;& 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqslant 8, \end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

82. *Lahendus 1.* Poolsirgel $(0, \infty)$ kumera funktsiooni $f(x) = x \ln x$ kasutamine annab võrratuse $a \ln a + b \ln b + c \ln c \geqslant (a+b+c) \ln \dfrac{a+b+c}{3}$, millest potentseerimise ja aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse tarvitamise abil saame ülesandes nõutu.

Lahendus 2. Tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geqslant \frac{a+b+c}{3} \cdot \ln(abc),$$

mis on omakorda samaväärne võrratusega

$$\frac{a \ln a + b \ln b + c \ln c}{3} \geqslant \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3},$$

viimane võrratus aga kehtib Tšebõšovi võrratuse põhjal (üldisust kitsendamata võime eeldada $a \leqslant b \leqslant c$, siis ka $\ln a \leqslant \ln b \leqslant \ln c$).

83. Võttes kasutusele muutujatest x, y, z sümmeetriliste põhipolünoomide tähistena σ_1, σ_2 ja σ_3 (siin $\sigma_2 = 1$), saame vasakule poole $\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 4\sigma_3$. Seega tuleb näidata, et $\sigma_3 \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{9}$. Viimane võrratus aga järeldub sellest, et $1 = \sigma_2 \geqslant 3\sqrt[3]{\sigma_3^2}$.

84. Kui funktsioon f on kumer piirkonnas I ja $x \leqslant y \leqslant z$, $x < z$, $x, y, z \in I$, siis

$$(y - z)f(x) + (z - x)f(y) + (x - y)f(z) \leqslant 0.$$

Seda võrratust saab lihtsasti põhjendada, võttes $p = \dfrac{z-y}{z-x}$ ja $q = \dfrac{y-x}{z-x}$. Siis funktsiooni f kumeruse tõttu

$$f(y) = f(px + qz) \leqslant pf(x) + qf(z),$$

mis annab esitatud väite. Valides nüüd $f(x) = -\ln x$, mis on $f''(x) \geqslant 0$ tõttu kumer piirkonnas $(0, \infty)$, saame $(x, y, z) = (a, b, c)$ ja $(x, y, z) = (a, c, d)$ korral vastavalt

$$\begin{aligned} &a^b b^c c^a \leqslant a^c b^a c^b, \\ &a^c c^d d^a \leqslant a^d c^a d^c, \end{aligned}$$

mille korrutamisel saame nõutava võrratuse.

85. *Lahendus 1.* Tõestatav võrratus on samaväärne võrratusega

$$a^2bc + ab^2c + abc^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4,$$

mis on erijuht Muirheadi võrratusest. Tõepoolest, $(4, 0, 0) \succ (2, 1, 1)$, sest $4 \geqslant 2$, $4+0 \geqslant 2+1$ ja $4 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1$.

Lahendus 2. Defineerime kolm vektorit $X = (a^2, b^2, c^2)$, $Y = (bc, ca, ab)$ ja $Z = (b^2, c^2, a^2)$ ning uurime nende käitumist skalaarkorrutise suhtes. Ilmselt

$$X^2 - 2XZ + Z^2 = (X - Z)^2 \geqslant 0$$

(kontrolli, et toodud võrdus kehtib!) ja järelikult $X^2 + Z^2 \geqslant 2XZ$. Samas $XZ = Y^2$ ning $X^2 = Z^2$ (kontrolli!) ja järelikult

$$2X^2 \geqslant 2Y^2,$$

millest järeldubki tõestatav võrratus.

86. Näita, et

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}},$$

analoogiliselt ülejäänud kahe murru jaoks. Saadud võrratuste paremate poolte summa on 1.

87. Eraldame liidetavad $x^3 + y^3$ võrduse $x^9 + y^9 = (x^6 + x^3y^3 + y^6)(x^3 + y^3) - 2x^3y^3(x^3 + y^3)$ abil:

$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} = x^3 + y^3 - \frac{2x^3y^3(x^3 + y^3)}{x^6 + x^3y^3 + y^6} \geqslant x^3 + y^3 - \frac{2(x^3 + y^3)}{3} = \frac{x^3 + y^3}{3},$$

analoogiliselt ülejäänud kahe murru jaoks. Nüüd kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

$$\frac{x^3 + y^3 + y^3 + z^3 + z^3 + x^3}{3} \geqslant 2 \cdot xyz = 2.$$

88. Cauchy võrratusest saame

$$\sqrt{x+y+z}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{y-1}{y}} \geqslant \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Kuna ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{y-1}{y}=1,$$

on ülesande väide tõestatud.

89. Kuna $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, siis

$$\begin{aligned} & \frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \\ \leqslant\ & \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} = \\ =\ & \frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}. \end{aligned}$$

Tõestamaks, et $3(x+y+z) \leqslant 6+x^3+y^3+z^3$, piisab veenduda, et $t^3-3t+2=(t-1)^2\cdot(t+2) \geqslant 0$, kui $0 \leqslant t \leqslant 1$. Viimane väide on aga ilmselt tõene koguni kõigi $t \geqslant -2$ jaoks.

90. Tähistame võrratuse vasaku poole tähega S. Siis Cauchy võrratusest saame

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S \geqslant (x+y+z)^2$$

ehk $S \geqslant \dfrac{x+y+z}{2}$. Aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest saame

$$S \geqslant \frac{x+y+z}{3}\cdot\frac{3}{2} \geqslant \sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

91. Tõestatav võrratus taandub muutujavahetusega $x=\dfrac{1}{a}$, $y=\dfrac{1}{b}$, $z=\dfrac{1}{c}$ ülesandele 90.

92. Tehes asenduse $a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\gamma$, jääb tõestada võrratus

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$$

teravnurkade α, β, γ jaoks. Ülesande tingimus saab kuju

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma.$$

See tingimus on samaväärne tingimusega $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (tõesta!), seega on antud ülesanne taandatud ülesandele 118.

93. Olgu $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ja $\sigma_3 = abc = 1$. Siis AK-GK abil $\sigma_1 \geqslant 3$ ja $\sigma_2 \geqslant 3$. Viime nüüd mõlemal pool ühisele nimetajale ja avaldame nii lugejad kui nimetajad sümmeetriliste põhipolünoomide polünoomina. Saame

$$\frac{3+4x+y+x^2}{2x+y+x^2+xy} \leqslant \frac{12+4x+y}{9+4x+2y},$$

mis on samaväärne võrratusega

$$3x^2y + xy^2 + 6xy + 5x^2 - y^2 - 24x - 3y - 27 \geqslant 0.$$

Kirjutades viimase võrratuse kujul

$$\begin{aligned} &\left(\frac{5}{3}x^2y - 5x^2\right) + \left(\frac{xy^2}{3} - y^2\right) + \left(\frac{xy^2}{3} - 3y\right) + \left(\frac{4}{3}x^2y - 12x\right) + \\ &= \left(\frac{xy^2}{3} - 3x\right) + (3xy - 9x) + (3xy - 27) \geqslant 0, \end{aligned}$$

näeme, et $x, y \geqslant 3$ tõttu on kõik liidetavad vasakul pool mittenegatiivsed ning võrratus kehtib.

94. Otsene läbikorrutamine annab võrratuse

$$\sum_{\text{sym}} 4x^5y - x^4y^2 - 3x^3y^3 + x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z^2 \geqslant 0,$$

kusjuures summa võetakse üle kõigi permutatsioonide arvudest x, y, z (näiteks liikme x^3y^3 kordaja on -6, liikme $x^2y^2z^2$ kordaja aga 6). Schuri võrratusest

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geqslant 0$$

(vt. ülesanne 109) saame avaldisega $2xyz$ korrutamisel $\sum_{\text{sym}} x^4yz - 2x^3y^2z + x^2y^2z \geqslant 0$, õnnestub ka näiteks Muirheadi võrratuse abil saada $\sum_{\text{sym}} (x^5y - x^4y^2) + 3(x^5y - x^3y^3) \geqslant 0$. Nende kahe võrratuse liitmine annab nõutava tulemuse.

95. Olgu s_i i-elemendiliste alamhulkade elementide korrutiste aritmeetiline keskmine hulgal $\{a, b, c, d\}$. Siis tuleb näidata, et $3s_2 + s_3 = 4 \Rightarrow s_1 \geqslant s_2$. Oletame vastuväiteliselt, et $s_1 < s_2$. Schuri võrratuses asendades s_3 avaldise, saame

$$3s_1^3 + 4 \geqslant (4s_1 + 3)s_2 > 4s_1^2 + 3s_1.$$

Siit tegurdame $(3s_1 - 4)(s_1^2 - 1) > 0$. Esimene tegur $3s_1 - 4 < 3s_2 - 4 = -s_3 < 0$, teine tegur $s_1^2 \geqslant s_2 > s_1$, kasutasime Maclaurini võrratust. Siit järeldub, et $s_1^2 - 1 > 0$ ning korrutis on negatiivne, vastuolu. Võrdus kehtib parajasti juhul, kui $s_1 = s_2 = s_3 = 1$.

96. *Lahendus 1.* Kasutame Jenseni võrratust funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ jaoks, mis on kumer reaaltelje kogu positiivses osas. Esimene võrratus järeldub võrratusest

$$\frac{f(a+b)+f(b+c)+f(c+a)}{3} \geqslant f\left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right).$$

Teise võrratuse saame, kui liidame võrratuse

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ja kaks ülejäänud analoogilist võrratust.

Lahendus 2. Kasutame vasakpoolse võrratuse tõestamiseks aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust:

$$\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}} \leqslant \frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3},$$

millest järeldub tõestatav võrratus. Parempoolse võrratuse põhjendamiseks kasutame kehtivat võrratust $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, millest

$$\frac{1}{a+b} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

analoogiliselt ka arvude $\frac{1}{b+c}$ ja $\frac{1}{c+a}$ jaoks, mille liitmisel saame nõutava võrratuse.

97. Jagame võrratuse mõlemaid pooli suurusega $\sqrt{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = 1$. Võrratuse vasak pool omandab siis kuju

$$\frac{1+a_1}{\sqrt{a_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1+a_n}{\sqrt{a_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\sqrt{a_n}\right) \geqslant 2^n,$$

mida oligi tarvis tõestada.

98. Vaatleme summat S_k. Arv a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ esineb $\binom{n-1}{k-1}$ liidetavas, k-kaupa võetud korrutisi on aga $\binom{n}{k}$. Seega aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse kohaselt

$$S_k \geqslant \binom{n}{k} \sqrt[\binom{n}{k}]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\binom{n-1}{k-1}}} = \binom{n}{k}(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{k}{n}},$$

samal moel

$$S_{n-k} = \binom{n}{k}(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Nende kahe võrratuse korrutamine annab tõestatava võrratuse.

99. Vasakul pool on $1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, seega tuleb tõestada võrratus

$$\frac{1}{n-1} \leqslant \sum \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Cauchy-Bunjakovski võrratus annab nüüd $\sum_{i=1}^{n}(1-a_i) = n-1$ tõttu soovitud tulemuse.

100. Oletame vastuväiteliselt, et kehtib võrratus

$$x_1 + \ldots + x_n > \frac{x_1}{y_1} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}.$$

Liites selle võrratuse ülesandes antud võrratusega, saame

$$2(x_1 + \ldots + x_n) > x_1\left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right) + \ldots + x_n\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right),$$

mis annab vastuolu ülesandega 79.

101. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, siis järelikult ka $\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$. Tšebõšovi võrratusest saame

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\right) \geqslant$$

Kasutades astmekeskmiste vahelist võrratust järkude 1 ja -2 jaoks, kehtib võrratus

$$\ldots \geqslant \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Cauchy võrratusest saame

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \sqrt{n}.$$

Järelikult

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}.$$

102. Tšebõšovi võrratuse kohaselt

$$\frac{1}{a_1(1+a_1)}+\frac{1}{a_2(1+a_2)}+\ldots+\frac{1}{a_n(1+a_n)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right),$$

mis pärast võrduse $\dfrac{1}{a_i(1+a_i)}=\dfrac{1}{a_i}-\dfrac{1}{1+a_i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, kasutamist annab tõestatava võrratuse. Teame, et võrdus kehtib parajasti juhul $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

103. Tähistame $a_i=\dfrac{1}{1+x_i}$, siis $x_i=\dfrac{1-a_i}{a_i}$ ja $a_1+\ldots+a_n=1$. Siis saame iga $i=1,\ldots,n$ korral

$$\frac{1-a_i}{n-1}=\frac{a_1+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_n}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Korrutades need n võrratust, saame

$$\frac{\prod_i(1-a_i)}{(n-1)^n}\geqslant\prod_i\sqrt[n-1]{a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n}=\prod_i a_i.$$

Järelikult

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n=\prod_i\frac{1-a_i}{a_i}\geqslant(n-1)^n.$$

104. Tšebõšovi võrratuse abil pole vaadeldav avaldis väiksem kui

$$\frac{x_1^5+x_2^5+\ldots+x_n^5}{n}\cdot\left(\frac{1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{1}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\geqslant\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\cdot\frac{n^2}{(n-1)\sqrt{n}}=\frac{1}{n(n-1)},$$

võrdus kehtib vaid juhul $x_i=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

105. Olgu $\dfrac{y_1}{x_1}=\alpha_1$, $\dfrac{y_2}{x_2}=\alpha_2$, $\ldots$, $\dfrac{y_n}{x_n}=\alpha_n$, siis vastavalt ülesande tingimustele $\alpha_1\geqslant 1$, $\alpha_1\alpha_2\geqslant 1$, $\ldots$, $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\geqslant 1$. Meil on vaja tõestada, et

$$S=x_1(\alpha_1-1)+x_2(\alpha_2-1)+\ldots+x_n(\alpha_n-1)\geqslant 0.$$

Tähistame iga $i=1,2,\ldots,n$ korral $S_i=(\alpha_1-1)+\ldots+)\alpha_i-1)$, siis

$$S=x_1S_1+x_2(S_2-S_1)+\ldots+x_n(S_n-S_{n-1})=$$
$$=S_1(x_1-x_2)+S_2(x_2-x_3)+\ldots+S_{n-1}(x_{n-1}-x_n)+S_nx_n.$$

Et tegurid $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$, ... , $x_{n-1} - x_n$ ja x_n on kõik mittenegatiivsed, piisab tõestada, et $S_i \geqslant 0$ mistahes $i = 1, 2, \ldots, n$ korral. See järeldub positiivsete arvude aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest:

$$S_i = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) - i \geqslant i \cdot \sqrt[i]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i} - i \geqslant i \cdot 1 - i = 0.$$

106. Tähistades $x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}$, $y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}$ ja $z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$, tuleb pärast esialgse võrratuse teisendamist tõestada võrratus

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2(x + y + z)$$

eeldusel $xyz = 1$. Viies vasakul ühisele nimetajale, saame võrratuse

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3 \geqslant 2(x + y + z),$$

mis $x + y + z \geqslant 3$ ja $xy + yz + zx \geqslant 3$ tõttu kehtib.

107. Ülimalt üks arvudest $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ on negatiivne, sest suvalised kaks neist annavad liites positiivse summa. Kui nende seas on täpselt üks negatiivne, kehtivad võrratused $uvw \leqslant 0 < xyz$ ja ülesande väide on tõestatud. Vaatleme juhtu $u, v, w \geqslant 0$. Siis saame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leqslant \frac{1}{2}[(x - y + z) + (y - z + x)] = x.$$

Analoogiliselt $\sqrt{vw} \leqslant y$ ja $\sqrt{wu} \leqslant z$. Kolme võrratust korrutades saamegi $uvw \leqslant xyz$, nagu tarvis.

108. Paneme tähele, et

$$(a + b + c + d + e)^2 - 4(ab + bc + cd + de + ea) = (a - b + c - d + e)^2 +$$
$$+ 4ad + 4be - 4ae = (a - b + c - d + e)^2 + 4ad + 4e(b - a).$$

See avaldis ei muutu arvude a, b, c, d, e mistahes *tsüklilisel* ümbernimetamisel. Seetõttu võime üldisust kitsendamata eeldada, et $b \geqslant a$. Sellisel juhul on aga antud avaldise väärtus ilmselt positiivne.

109. Kuna võrratuse vasakul poolel olev avaldis on muutujate suhtes täielikult sümmeetriline, võime eeldada, et $x \geqslant y \geqslant z > 0$; siis on kolmas liidetav kohe mittenegatiivne. Kahe esimese summa võib kirjutada kujul $(x - y)(x + y - z)$, mis on samuti mittenegatiivne.

110. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et kui üks võrratuse vasaku poole teguritest on negatiivne, siis ülejäänud tegurid peavad olema positiivsed. Tõepoolest, kui näiteks $a - 1 + \frac{1}{b} < 0$, siis järelikult $a < 1$ ja $\frac{1}{b} < 1$, mis omakorda tähendab, et $\frac{1}{a} > 1$ ja $b > 1$ ning ülejäänud tegurid peavad olema positiivsed. Seega kui üks tegur on mittepositiivne, kehtib ülesande väide triviaalselt.

Jääb üle vaadelda juhtu, kus kõik tegurid on positiivsed. Esitame tõestatava võrratuse vasaku poole kahel erineval kujul kujul:

$$(a - 1 + ac)(b - 1 + ab)(c - 1 + bc)$$

ja

$$\left(\frac{ab - b + 1}{b}\right)\left(\frac{bc - c + 1}{c}\right)\left(\frac{ac - a + 1}{a}\right)$$

ehk

$$(ab - b + 1)(bc - c + 1)(ac - a + 1).$$

See suurus ei ületa arvu 1 parajasti siis, kui seda ei tee tema ruut. Hindame tõestatava võrratuse vasaku poole ruutu, korrutades tema kaks esitust:

$$\begin{aligned}
& (a - 1 + ac)(b - 1 + ab)(c - 1 + bc) \times \\
& \times (ab - b + 1)(bc - c + 1)(ac - a + 1) = \\
= \; & [(a - 1 + ac)(ac - a + 1)] \times [(b - 1 + ab)(ab - b + 1)] \times \\
& \times [(c - 1 + bc)(bc - c + 1)] = \\
= \; & (a^2c^2 - (a-1)^2)(a^2b^2 - (b-1)^2)(b^2c^2 - (c-1)^2) \leqslant \\
\leqslant \; & a^2c^2 \cdot a^2b^2 \cdot b^2c^2 = a^4b^4c^4 = 1^4 = 1,
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

Lahendus 2. Paneme tähele, et antud võrratus pole homogeenne (*homogeensus* tähendab, et suvalise muutujate permutatsiooni korral saame sama võrratuse). Seda viga võib parandada sobiva muutujavahetusega. Asendusega $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, taandub käesolev ülesanne ülesandele 107.

111. Võrratuse vasakul pool on summa $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2$, mis pole võrratuse $AK \geqslant GK$ kohaselt väiksem kui $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} i^2} = (n!)^{\frac{2}{n}}$. Võrdus kehtib, kui $1 = 2 = \ldots = n$, s.t. vaid juhul $n = 1$.

112. a) Võrduse

$$(x_i - n)(x_i - n + 1) = x_i^2 - (2n-1)x_i - n + n^2$$

kasutamisel iga $1 \leqslant i \leqslant n$ korral saame, et järjestikuste täisarvude korrutiste summa on mittepositiivne. Kahe järjestikuse täisarvu korrutis on aga alati mittenegatiivne, olles võrdne nulliga vaid juhul, kui vähemalt üks arvudest on null. Seega saame, et $x_i = n$ või $x_i = n-1$ mistahes $1 \leqslant i \leqslant n$ korral.
b) Ülesande väite põhjendavad nüüd võrratused

$$\begin{aligned} &n^2 < n \cdot (n-1) + n + 1 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n + 1 \leqslant \\ &\leqslant n \cdot n + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

113. *Lahendus 1.* Hindame liikmeti:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \leqslant n \cdot \frac{1}{n} = 1, \\ &\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{3n-1} \leqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \\ &\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \ldots + \frac{1}{4n-1} \leqslant n \cdot \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}, \\ &\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} + \ldots + \frac{1}{5n-1} \leqslant n \cdot \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Saadud võrratuste liitmine annab nõutava võrratuse.

Lahendus 2. Juhul $n = 1$ kehtib võrdus. Kui $n > 1$, siis funktsiooni $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mittekasvavuse tõttu lõigul $[n-1, 5n-1]$ kehtib

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{5n-1} \leqslant \int_{n-1}^{5n-1} \frac{dx}{x} = \ln(5n-1) - \ln(n-1) = \ln\frac{5n-1}{n-1}.$$

Kuna logaritmitav on väiksem kui arv 8, siis saadud võrratuse parem pool on väiksem kui

$$\ln 8 < 2\frac{1}{12}.$$

114. Olgu $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x}$. Paneme tähele, et funktsioon f on lõigul $[1, n]$ mittekasvav; pidades silmas, et

$$\begin{aligned} &\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} = \\ &= \ln x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln x - \ln\sqrt{x^2+1} + C = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C, \end{aligned}$$

saame kirjutada

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n) \leqslant \int_1^n f(x)dx = \ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2} + \ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

mistõttu

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n) < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1+\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

115. Kuna funktsioon $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ on lõigul $[2,n]$ mittekasvav, siis

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^3} \leqslant \int_2^n \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{8} < \frac{1}{8}$$

ning seepärast

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = 1+\frac{1}{8}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^3} < 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{5}{4}.$$

116. Kehtib valem

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{k\ \text{juuremärki}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}},$$

mille tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Seega on keskmine avaldis võrdne

$$2^n\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

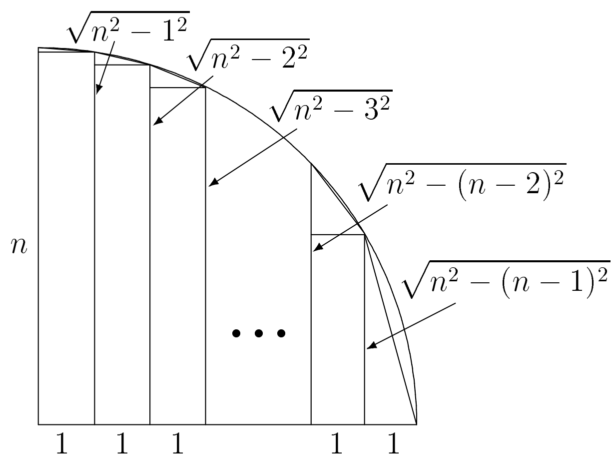
ning jäävad tõestada võrratused

$$\frac{1}{2^n} < \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^{n+1}},$$

mille kehtivus järeldub teoreemist 14.

117. a) Vaatleme veerandit ringist raadiusega n ning paigutame sellesse paralleelselt ühe sektorit piirava raadiusega ristkülikud laiusega 1 ühik nii, et ristküliku üks tipp asuks ringjoone kaarel (vt joonis 10). Siis on Pythagorase teoreemi kohaselt ristkülikute pikkused $\sqrt{n^2-1^2}$, $\sqrt{n^2-2^2}$, ... , $\sqrt{n^2-(n-1)^2}$ ühikut ning ristkülikute pindalade summa ei ületa suurust $\dfrac{\pi}{4}\cdot n^2 < \dfrac{4}{5}\cdot n^2$.

b) Lisame ristkülikute kohale veel kolmnurgad nagu näidatud joonisel. Nende pindalade summa on parajasti $\dfrac{n}{2}$.



Joonis 10

118. Et koosinusfunktsioon on lõigul $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ nõgus, saame kasutada Jenseni võrratust muutujate α, β, γ jaoks, valides $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3}\cos\alpha + \frac{1}{3}\cos\beta + \frac{1}{3}\cos\gamma \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

millest järeldubki tõestatav võrratus.

119. Avaldame

$$\begin{aligned}
&S_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2} = S_{AA_1A_2} + S_{A_2B_1C} + S_{BB_1B_2} + S_{AB_2C_1} + S_{CC_1C_2} + S_{A_1BC_2} - \\
&- 2S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot(a^2\sin\angle A + (a+b)^2\sin\angle C + b^2\sin\angle B + \\
&+ (b+c)^2\sin\angle A + c^2\sin\angle C + (a+c)^2\sin\angle B - 2ab\sin\angle C).
\end{aligned}$$

Seega tuleb tõestada võrratus

$$\begin{aligned}
&a^2\sin\angle A + (a+b)^2\sin\angle C + b^2\sin\angle B + (b+c)^2\sin\angle A + \\
&+ c^2\sin\angle C + (a+c)^2\sin\angle B \geqslant 15ab\sin\angle C,
\end{aligned}$$

ehk korrutamisel suurusega $\frac{c}{\sin\angle C}$ saadud samaväärne võrratus (kasutame siinusteoreemi)

$$a^3 + a^2c + 2abc + b^2c + b^3 + ab^2 + 2abc + ac^2 + c^3 + a^2b + 2abc + bc^2 \geqslant 15abc,$$

mis on omakorda samaväärne võrratusega

$$(a^3+b^3+c^3) + (a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) \geqslant 9abc,$$

viimane võrratus aga aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelise võrratuse kohaselt kehtib.

120. *Lahendus 1.* Arvutame vaadeldava korrapärase n-nurga pindala kahel viisil:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2 \tan \frac{\pi}{n}}.$$

Arvestades, et

$$(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} \right) \geqslant n^2$$

ning $0 < x < \frac{\pi}{2}$ korral $0 < x < \tan x$, saame

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} \geqslant n^2 \cdot \frac{2 \tan \frac{\pi}{n}}{na} > n^2 \cdot \frac{2}{na} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{a}.$$

Lahendus 2. Arvutame vaadeldava korrapärase n-nurga pindala kahel viisil:

$$S = n \cdot \frac{ar}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (h_1 + h_2 + \ldots + h_n).$$

Kasutades aritmeetilise ja harmoonilise keskmise vahelist võrratust, saame

$$\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n}} \leqslant \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_n}{n} = \frac{2S}{na} = r.$$

Hulknurga ümbermõõdu ja tema siseringjoone ümbermõõdu võrdlemisel saame $na > 2\pi r$. Seega

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \ldots + \frac{1}{h_n} \geqslant \frac{n}{r} > \frac{2\pi}{a}.$$

121. Lahendame ülesande induktsiooniga hulga S punktide erinevate z-koordinaatide arvu järgi.

Kui erinevaid koordinaate on ainult üks (st kõik punktid asuvad ühel xy-tasandiga paralleelsel tasandil), siis on $|S| = |S_z|$ ning $|S| \leqslant |S_x| \cdot |S_y|$ ja ülesande väide kehtib.

Kui aga erinevaid z-koordinaate on rohkem, jagame hulga S mingi xy-tasandiga paralleelse tasandiga kaheks mittelõikuvaks mittetühjaks alamhulgaks T ja U. Ilmselt $|S| = |T| + |U|$, $|S_x| = |T_x| + |U_x|$ ja $|S_y| = |T_y| + |U_y|$. Induktsiooni eelduse põhjal võime kirjutada

$$|S| = |T| + |U| \leqslant \sqrt{|T_x| \cdot |T_y| \cdot |T_z|} + \sqrt{|U_x| \cdot |U_y| \cdot |U_z|}.$$

Teisest küljest $|T_z|, |U_z| \leqslant |S_z|$ ning rakendades Cauchy võrratust suurustele $\sqrt{T_x}$, $\sqrt{T_y}$, $\sqrt{U_x}$ ja $\sqrt{U_y}$ saame kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
|S| &= |T| + |U| \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{|T_x| \cdot |T_y| \cdot |T_z|} + \sqrt{|U_x| \cdot |U_y| \cdot |U_z|} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{|S_z|} \left(\sqrt{|T_x| \cdot |T_y|} + \sqrt{|U_x| \cdot |U_y|} \right) \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{|S_z|} \sqrt{(|T_x| + |U_x|) \cdot (|T_y| + |U_y|)} = \\
&= \sqrt{|S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|}.
\end{aligned}$$

122. Vaatleme kõigepealt juhtu $\alpha \in [0, \pi/2)$. Kasutades võrratust $\sin x < x$ argumendi väärtuse $x = \cos\alpha > 0$ korral, saame $\sin(\cos\alpha) < \cos\alpha$. Teisest küljest kuna $\cos x$ kahaneb poollõigul $[0, \pi/2)$ ja samal poollõigul $\alpha \geqslant \sin\alpha$, kehtib ka $\cos\alpha \leqslant \cos(\sin\alpha)$. Kokkuvõttes saame

$$\sin(\cos\alpha) < \cos\alpha \leqslant \cos(\sin\alpha),$$

mistõttu ülesande väide kehtib vaadeldaval poollõigul. Kui $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, siis

$$\sin(\cos\alpha) \leqslant 0 < \cos(\sin\alpha)$$

ja nii oleme vajaliku võrratuse tõestanud kõigi $\alpha \in [0, \pi]$ korral. Kuna $\sin(\cos\alpha)$ ja $\cos(\sin\alpha)$ on paarisfunktsioonid, saame ülesande väite kehtivuse lõigu $[-\pi, \pi]$ jaoks, aga kuna on mõlema vaadeldava funktsiooni periood on 2π, järeldub sellest vajalik võrratus ka kõigi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral.

123. Kuna positiivsete reaalarvude a, b, c korral

$$\begin{aligned}
&3\sqrt[3]{a \cdot 4b \cdot 16c} \leqslant a + 4b + 16c, \\
&2\sqrt{3a \cdot 12b} \leqslant 3a + 12b,
\end{aligned}$$

siis nende ja $12a \leqslant 12a$ liitmisel saame võrratuse, mille jagamine arvuga 4 annab ülesandes nõutu.

124. Kasuta aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelist võrratust arvupaaride $\left(x_1^2, \dfrac{x_2^2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2x_2^2}{3}, \dfrac{x_3^2}{2}\right)$, $\left(\dfrac{x_3^2}{2}, \dfrac{2x_4^2}{3}\right)$ ja $\left(\dfrac{x_4^2}{3}, x_5\right)$ korral.

125. Cauchy-Bunjakovski võrratusest $a_i + \dfrac{1}{b_i} \leqslant \sqrt{(a_i^2 + 1)\left(1 + \dfrac{1}{b_i^2}\right)}$ mistahes $1 \leqslant i \leqslant n$ korral. Korrutades need võrratused, saame paremale poole suuruse

$$\sqrt{(a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdots(a_n^2+1)\left(1+\frac{1}{b_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{b_2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n^2}\right)},$$

mille väärtus ei sõltu arvude $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ümberjärjestamise viisist. Kuna juhul $a_i = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, kehtib võrdus, on saadud suurus tõepoolest vaadeldava avaldise maksimaalne võimalik väärtus.

126. Vasakpoolne võrratus on samaväärne võrratusega

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \leqslant \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)},$$

mis õnnestub muutujavahetuse $v = \frac{1}{2}(b-a)$, mis annab $b+a = 2(a+v)$, abil teisendada kujule

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^n = \frac{(a+2v)^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)} - (a+v)^n =$$

$$= \frac{1}{2v(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-1+k}(2v)^k\right) - (a+v)^n =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-(k-1)}(2v)^{k-1}\right) - (a+v)^n =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}a^{n-k}(2v)^k\right) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}v^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}a^{n-k}(2v)^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}v^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{k+1}-1\right)\binom{n}{k}a^{n-k}v^k \geqslant 0,$$

viimase võrratuse juures pidasime silmas, et $2^k \geqslant 1+k$.

Olgu $0 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$. Parempoolse võrratuse tõestamiseks kasutame Muirheadi võrratust vektorite $(n,0) \succ (n-j, j)$ jaoks, siit saame

$$b^n + a^n \geqslant b^{n-j}a^j + b^j a^{n-j}.$$

Seega juhul, kui $n = 2k+1$,

$$b^n + b^{n-1}a + \ldots + ba^{n-1} + a^n = \sum_{i=0}^{k}(b^{n-i}a_i + b_i a_{n+i}) \leqslant$$

$$\leqslant (k+1)(b^n + a^n) = \frac{n+1}{2}(b^n + a^n),$$

ja juhul kui $n = 2k$,

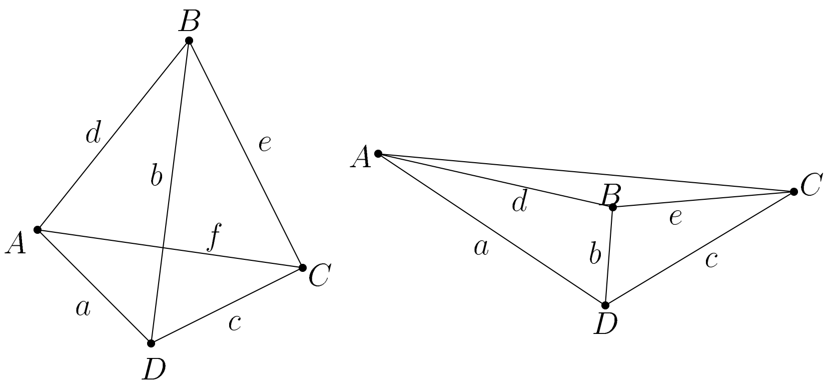
$$b^n + b^{n-1}a + \ldots + ba^{n-1} + a^n = \sum_{i=0}^{k-1}(b^{n-i}a_i + b_i a_{n+i}) + b^k a^k \leqslant$$

$$\leqslant k(b^n + a^n) + \frac{b^n + a^n}{2} = \frac{n+1}{2}(b^n + a^n),$$

kasutasime ka aritmeetilise-geomeetrilise keskmise vahelist võrratust.

127. Vaatleme kolmnurka ABC, kus $|AB| = a$, $|BC| = c$ ning $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$. Märgime sisenurga ABC poolitajal punkti D nii, et $|BD| = b$. Nüüd on ülesande väiteks kolmnurga ACD võrratus. Võrdus kehtib parajasti juhul, kui punkt D asetseb lõigul AB. Sel korral $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$, mis jagatuna suurusega $\frac{\sqrt{3}}{2}$ tähendab, et $ac = ab + bc$, ehk $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

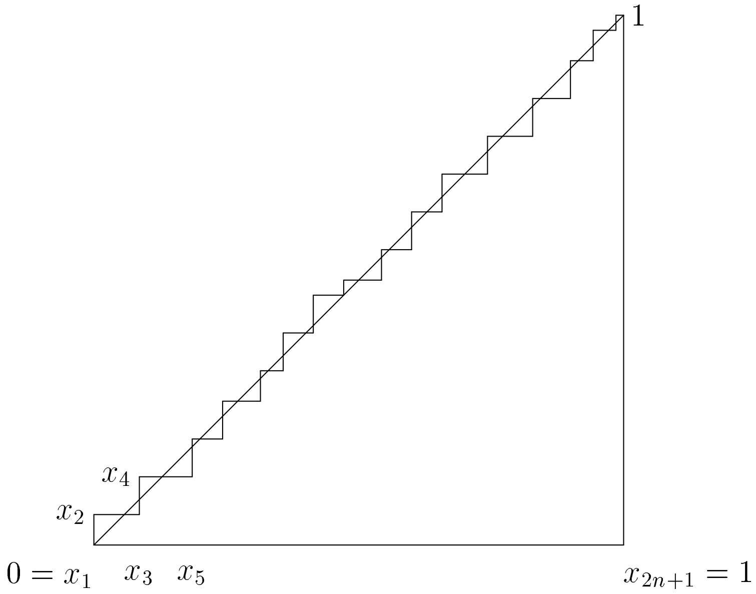
128. Tähistame $d = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$, $e = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$ ja $f = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}$ ning vaatleme ühise otspunktiga D lõike AD, BD ja CD, kus $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$, $\angle ADB = \angle BDC = \frac{\pi}{3}$ ja $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$. Rakendades koosinusteoreemi kolmnurkadele ABD, BCD ja ACD, saame $|AB| = d$, $|BC| = e$ ja $|AC| = f$. Punkt B võib seejuures paikneda kolmnurgast ACD väljaspool või selle sees või rajajoonel (vt joonis 11) .



Joonis 11

Esimesel juhul langeb tõestatav võrratus $cd+ae \geqslant bf$ kokku Ptolemaiose võrratusega kumera nelinurga $ABCD$ jaoks. Teisel juhul kolmnurgast ACD $\angle BAD \leqslant \frac{\pi}{3}$ ning $\angle BCD \leqslant \frac{\pi}{3}$, mistõttu $\angle ABD \geqslant \frac{\pi}{3}$, $\angle CBD \geqslant \frac{\pi}{3}$ ning $a \geqslant d$, $c \geqslant e$ ja $a + c \geqslant d + e$. Samuti $d \geqslant b$, $e \geqslant b$ ning seega $cd \geqslant cb$, $ae \geqslant ab$. Nüüd $cd + ae \geqslant cb + ab = b(a + c) \geqslant b(d + e) \geqslant bf$.

129. Vaatleme joonist 12. Suure kolmnurga pindala on $\frac{1}{2}$ ühikut, tulpade pindalade summa on võrratusmärkide vahel olev avaldis. Kasutades tingimust $x_i - x_{i-1} \leqslant h$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, saame, et väikeste kolmnurkade pindalade summa ei ületa $\frac{h}{2}$. Samuti pole võimalik olukord, kus ühel pool kaldjoont väikesi kolmnurki üldse pole, seega kehtivad ranged võrratused.



Joonis 12

5 Ühest algebralisest võrratusest

2001.-2002. õppeaasta Eesti sügisesel lahtisel matemaatikavõistlusel anti järgmine ülesanne.

Olgu n mingi positiivne täisarv. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positiivsed reaalarvud ning $b_1, \ldots, b_n$ samad arvud mingil viisil ümberjärjestatult. Tõesta, et:

1. $\left(a_1 + \dfrac{1}{b_1}\right) \cdot \left(a_2 + \dfrac{1}{b_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \dfrac{1}{b_n}\right) \geqslant 2^n$*;*
2. *kui ülaltoodud võrratuses kehtib võrdus ning n on paaritu arv, siis vähemalt üks arvudest a_i on võrdne 1-ga.*

On selge, et kui õpilane pole elus ühtki võrratust näinud, ei oska ta selle ülesande kallal suurt midagi peale hakata. Eeldame siis edasises, et mõnda lihtsamat põhivõrratust olümpiaadile tulnu siiski teab ja et ta pärast ülesande läbilugemist esimesest ehmatusest enne üle saab, kui lahendamiseks ettenähtud aeg otsa lõppeb.

Niisiis. Ülesande sõnastus räägib mingite arvude ja mingite pöördarvude summast, samuti figureerib võrratuses olulisel kohal arv 2. "Kas ma tean mõnda võrratust, mis seoks arve, pöördarve ja arvu 2?" mõtleb õpilane. Veidi lage puurinult tuleb talle meelde:

Iga positiivse reaalarvu a korral kehtib võrratus $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2.$

Ahhaa! See tähendab, et kui a_i-dest b_i-sid meisterdades juhtumisi midagi ümber ei paigutatagi (st iga i korral $a_i = b_i$), siis ongi ülesande esimene osa lahendatud, sest n võrratust kokku korrutades saame täpselt õige asja. Mida aga teha siis, kui mõned arvud on ikkagi vahetatud? Äkki õnnestub tõestada võrratus

$$\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) \geqslant \left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right),$$

mis annaks soovitud tulemuse kohe kätte? Osutub aga, et nii lihtsalt see ei käi. Valides $n = 2$, $a_1 = b_2 = 2$ ja $a_2 = b_1 = \frac{1}{2}$, saame, et

$$\begin{aligned}\left(2 + \frac{1}{1/2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot 1 = 4,\\ \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2}\right) &= 2,5 \cdot 2,5 = 6,25,\end{aligned}$$

järelikult ülaltoodud võrratust tõestada ei õnnestuks. Sellele järeldusele jõudnult lööb nõutu õpilane ülesandele käega ega püüagi oma ideed edasi arendada. Asjata! Osutub, et võrratuse $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ abil saab ülesande esimese osa lahendada vähemalt kahel erineval moel!

Lahendus 1.1. Selleks, et saada aru, mis õigupoolest tekstis toodud tingimuste korral toimub, on sageli kasulik tingimusi mõne väikese n väärtuse jaoks lahti kirjutada. Võtame siis $n = 3$ ja katsetame kolme arvu (olgu need x, y ja z) erinevaid järjestusi b_i-dena. Saame:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) &= xyz + \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{x}{yz} + \frac{yz}{x} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} + \frac{1}{xyz};\\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{y}\right) &= xyz + x + x + \frac{x}{yz} + \frac{yz}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xyz};\\ \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) &= xyz + y + x + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xyz}.\end{aligned}$$

Silma hakkab järgmine reegel: iga liikme jaoks sadavas 8 liikme summas leidub samas summas talle ka pöördarv. Kui õnnestuks tõestada, et alati saab kõik 2^n arvu jagada arvu-pöördarvu paaridesse, saaks kõigi paaride korral eraldi kasutada võrratust $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ ja kuna paare on $2^n : 2 = 2^{n-1}$ tükki, saame tulemuseks

$$\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left(c_i + \frac{1}{c_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{2^{n-1}} 2 = 2^n,$$

kus c_i tähistavad lahtikorrutamisel tekkinud liikmeid.

Veel on vaja aru saada, miks sellised paarid tekivad. Paneme tähele, et lahtikorrutamisel tuleb iga liidetava saamiseks igast sulust valida üks liige kahest. Vajaliku paarilise-pöördarvu saame siis, kui valime korrutisse igast sulust teise liikme. Miks? Paneme tähele, et

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \frac{1}{b_1} \cdot \frac{1}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b_n} = 1,$$

seega kuidas me ka ei grupeeriks arve $a_1, a_2, \ldots, a_n, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}$ kahte alamhulka, on vastavate alamhulkade elementide korrutised alati teineteise pöördarvud.

Lahendus 1.2. Paneme tähele, et

$$\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) = \frac{a_1 b_1 + 1}{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n b_n + 1}{b_n}. \tag{14}$$

Kui võrduse paremal pool olevate murdude nimetajates oles arvud $a_i b_i$, saaksime muutujavahetusega $d_i = a_i b_i$ vähendada ülesandes esinevate tundmatute suuruste arvu $2n$-ilt n-ile ja loodetavasti muutub ülesanne siis lihtsamaks. Kuidas seda teha? Paneme tähele, et

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n. \tag{15}$$

Seega saame võrduse (14) paremat poolt ruutu tõstes

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1 b_1 + 1}{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n b_n + 1}{b_n}\right)^2 &= \frac{(a_1 b_1 + 1)^2 \cdot \ldots \cdot (a_n b_n + 1)^2}{(b_1 \cdot \ldots \cdot b_n)^2} = \\
&= \frac{(a_1 b_1 + 1)^2 \cdot \ldots \cdot (a_n b_n + 1)^2}{(b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \cdot (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)} = \\
&= \frac{(a_1 b_1 + 1)^2 \cdot \ldots \cdot (a_n b_n + 1)^2}{a_1 b_1 \cdot \ldots \cdot a_n b_n} = \\
&= \frac{(a_1 b_1 + 1)^2}{a_1 b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{(a_n b_n + 1)^2}{a_n b_n}.
\end{aligned}$$

Nüüd piisab tõestada, et iga positiivse reaalarvu d korral kehtib võrratus

$$\frac{(d+1)^2}{d} \geqslant 4,$$

sest korrutades n sellist võrratust $d_i = a_i b_i$ korral, on tulemuseks

$$\left(\left(a_1 + \frac{1}{b_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)\right)^2 \geqslant 4^n = (2^n)^2,$$

mida juurides saamegi vajaliku võrratuse. Kõnealune võrratus d jaoks aga ilmselt kehtib, sest

$$\begin{aligned}
(d-1)^2 &\geqslant 0, \\
d^2 - 2d + 1 &\geqslant 0, \\
d^2 + 2d + 1 &\geqslant 4d, \\
(d+1)^2 &\geqslant 4d, \\
\frac{(d+1)^2}{d} &\geqslant 4.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et toodud kahes lahenduses ei kasutatud sisuliselt eeldust, et arvud b_i on saadud arvudest a_i ümberjärjestamise teel: piisaks kui eeldada lihtsalt võrduse (15) kehtivust.

Ideed üritada võrratuse lahendamisel liitmist korrutamisega asendada kasutab ära ka aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy},$$

lisaks esineb selles ka vajalik arv 2. Tõepoolest, sellele ideele saab ehitada veel ühe lahenduse vaadeldava ülesande 1. osale.

Lahendus 1.3. Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist võrratust:

$$\begin{aligned}\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right) &\geqslant 2\cdot\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\cdot\ldots\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{a_n}{b_n}} = \\ &= 2^n\cdot\sqrt{\frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot\ldots\cdot b_n}} = 2^n.\end{aligned}$$

*Lahendus 1.4.** Kuna funktsioon $\ln(x)$ on nõgus (st iga positiivse x_1 ja x_2 väärtuse korral kehtib võrratus $\ln(x_1)+\ln(x_2) \leqslant 2\ln\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$), saame kasutada Jenseni võrratust. Olgu tõestatava võrratuse vasak pool C, siis Jenseni võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}\ln(C) &= \ln\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)+\ldots+\ln\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\ln(2a_1)+\ln\left(\frac{2}{b_2}\right)+\ldots+\ln(2a_n)+\ln\left(\frac{2}{b_n}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(2^{2n}\cdot\frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot\ldots\cdot b_n}\right) = \ln(2^n),\end{aligned}$$

järelikult $C \geqslant 2^n$.

Asume nüüd uurima, mis toimub ülesande 2. osas.

Lahendus 2.1. Esimene küsimus, mis iga lahendaja peas ilmselt tekib, on: "Milleks läheb vaja eeldust n-i paaritusest?" ja tegelikult üldse: me teame ju, et võrratuses $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ kehtib võrdus parajasti siis, kui $a=1$, seega ehk õnnestub kuidagi tõestada, et kõik ülesande avaldise n tegurit peavad võrduma 2-ga ja kõik tundmatud 1-ga? Proovime, mis juhtub $n=2$ korral, kui $b_1=a_2$ ja $b_2=a_1$:

$$\left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\left(a_2+\frac{1}{a_1}\right) = a_1a_2+1+1+\frac{1}{a_1a_2} = 2+a_1a_2+\frac{1}{a_1a_2}.$$

Viimase avaldise väärtus on $2^2=4$ parajasti siis, kui $a_1a_2=1$ ehk $a_1=\frac{1}{a_2}$, seega võib mingi paarisarvulise n väärtuse korral juhtuda nii, et ühegi tundmatu väärtus pole 1 (vt ka ülaltoodud näidet, kus $a_1=2$ ja $a_2=\frac{1}{2}$). Paneme tähele, et samasuguse näite saame konstrueerida tegelikult iga paarisarvu n jaoks. Näiteks $n=6$ korral võime vaadelda avaldist

$$\left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\left(a_2+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(a_3+\frac{1}{a_4}\right)\cdot\left(a_4+\frac{1}{a_3}\right)\cdot\left(a_5+\frac{1}{a_6}\right)\cdot\left(a_6+\frac{1}{a_5}\right) \qquad (16)$$

ja kasutada ülaltoodud arutelu kolm korda. Niisugune väiksematele juhtudele taandamise võte osutub vaadeldava ülesande lahendamisel väga kasulikuks.

Arutluste paremaks esitamiseks eeldame nüüd, et tähiste b_i asemele on kirjutatud need a_j-d, millest vastavad b_i-d saadud on, nii nagu avaldises (16). Paneme tähele, et indeksid i hakkavad selles avaldises "tsükleid" moodustama, näiteks avaldises (16) on tsükliteks $(1, 2)$, $(3, 4)$ ja $(5, 6)$, avaldises

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) \cdot \left(a_4 + \frac{1}{a_2}\right)$$

aga (1) ja $(2, 3, 4)$. Sama moodi nagu ülalpool kirjeldatud, võime iga ümberpaigutuse korral igale tsüklile vastavat avaldise osa alati eraldi käsitleda, sest mingile tsüklile vastavas avaldise osas esinevad muutujad ei esine teistele tsüklitele vastavates avaldise osades.

Kui ümberpaigutuses esineb üheelemendiline tsükkel (st mingi indeksi i väärtuse korral on b_i saadud a_i-st), siis peab lahendust 1.3 järgides võrratuses $a_i + \dfrac{1}{a_i} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\dfrac{a_i}{a_i}} = 2$ kehtima võrdus ja järelikult $a_i = 1$. Mis aga saab siis, kui üheelemendilist tsüklit ei ole?

Paneme tähele, et iga indeks kuulub täpselt ühte tsüklisse ja kuna n on paaritu arv, siis peab ka vähemalt ühe tsükli pikkus olema paaritu. Vajadusel tundmatuid ümber tähistades võime eeldada, et sellele tsüklile vastav avaldiseosa on

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_{k-1} + \frac{1}{a_k}\right) \cdot \left(a_k + \frac{1}{a_1}\right), \qquad (17)$$

kus k on paaritu. Selleks, et võrratustes

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{a_2} &\geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \\ a_2 + \frac{1}{a_3} &\geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}, \\ &\cdots \\ a_{k-1} + \frac{1}{a_k} &\geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}, \\ a_k + \frac{1}{a_1} &\geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a_k}{a_1}} \end{aligned}$$

kehtiksid võrdused, peavad kehtima võrdused

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{a_2}, \\ a_2 &= \frac{1}{a_3}, \\ &\cdots \\ a_{k-1} &= \frac{1}{a_k}, \\ a_k &= \frac{1}{a_1}. \end{aligned}$$

Seega saame

$$a_1 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1/a_3} = a_3 = \frac{1}{a_4} = \frac{1}{1/a_5} = a_5 = \ldots.$$

Kuna k on paaritu arv, saame sellest võrduste ahelast $a_1 = a_k$ ja järelikult

$$a_1 = a_k = \frac{1}{a_1},$$

millest tulenebki $a_1 = 1$.

Ülesande teise osa lahendust saab üles ehitada ka esimese osa lahendustele 1.1 ja 1.2.

Lahendus 2.2. Järgides lahendust 1.1 piisab veenduda, et paaritu pikkusega tsüklile vastavat avaldist (17) lahti korrutades jääb saadavasse 2^k liikme summasse sisse liige a_1 (millest lahenduse 1.1 põhjal järeldub, et summas peab leiduma ka liige $\frac{1}{a_1}$, järelikult kehtib võrratuses $a_1 + \frac{1}{a_1} \geqslant 2$ võrdus ja $a_1 = 1$). Et see tõepoolest nii on, võime näha järgmisest võrdusest:

$$a_1 = a_1 \cdot \frac{1}{a_3} \cdot a_3 \cdot \frac{1}{a_5} \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_k} \cdot a_k.$$

Lahenduse 1.2 põhjal teise ülesandeosa tõestamine jääb lugejale koduseks ülesandeks. Lõpetuseks esitame aga veel ühe (ja võibolla kõige elegantsema) lahenduse.

Lahendus 2.3. Mitmest ülaltoodud esimese osa tõestusest (nt lahendused 1.3 ja 1.4) järeldub, et võrdus kehtib parajasti siis, kui iga i korral $a_i = \frac{1}{b_i}$. Oletame, et a_i-de seas on k arvu, mis ületavad suuruselt 1. Kuna arvud b_i on saadud a_i-de ümberpaigutusena, peab võrduste $a_i = \frac{1}{b_i}$ tõttu arvude a_i seas leiduma ka k arvu, mis on väiksemad kui 1. Järelikult erineb $2k$ arvu arvust 1 ning kuna n on paaritu, peab leiduma selline indeks i, et $a_i = 1$.

Mitmed artiklis kasutatud ideed (ka valed!) pärinevad olümpiaadil osalenute töödest; neile kuulub autori tänu materjali rikastamise eest.