I peatükk.
Mõõduga ruumid

§ 1. Sissejuhatus

Hulkasid, mille elementideks on mingi etteantud hulga alamhulgad, nimetame edaspidi *((alam)hulkade) kogumiteks.* Hulga X kõigi alamhulkade kogumit tähistame sümboliga $\mathcal{P}(X)$. Funktsioone, mille määramispiirkonnaks on mingi alamhulkade kogum, nimetame *hulgafunktsioonideks.*

1.1. Hulkade "mõõtmine"

Mõõduteooria (ja integraaliteooria) teke on motiveeritud vajadusega "mõõta" etteantud hulga alamhulki. Toome mõned esimesena pähetulevad näited niisuguse "mõõtmise" kohta.

- Tasandilise kujundi pindala leidmine — hulga $\mathbb{R}^2$ alamhulkade "mõõtmine".
- Ruumilise keha ruumala leidmine — hulga $\mathbb{R}^3$ alamhulkade "mõõtmine".
- Ruumilise keha massi leidmine — hulga $\mathbb{R}^3$ alamhulkade "mõõtmine".
- Antud juhusliku katse puhul mingi sündmuse tõenäosuse leidmine — selle juhusliku katse elementaarsündmuste hulga alamhulkade "mõõtmine".

Kõigi näitena toodud "mõõtmiste" puhul tuleb meil lahendada kaks ülesannet. Kui meil on vaja "mõõta" hulga X alamhulki, siis me peame

(1) defineerima, mida antud kontekstis "mõõtmine" tähendab, s.t. eraldama välja teatava alamhulkade kogumi $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ — niisuguste alamhulkade kogumi, mida me oskame "mõõta" (nn. "mõõtuvate" alamhulkade kogumi) — ning defineerima hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, mis seab igale alamhulgale $A \in \mathfrak{A}$ vastavusse tema "mõõdu" $\mu(A)$;

(2) leidma tõhusad vahendid "mõõtuvate" alamhulkade "mõõtude" väljarehkendamiseks konkreetsetel juhtudel.

Sündmuste käigust ette rutates olgu öeldud, et esimene ülesanne sunnib meid sisse tooma *mõõdu* mõiste, teine aga *integraali* mõiste.

Illustreerime kirjeldatud kahest etapist koosnevat "mõõtmisprotseduuri" tasandilise kujundi pindala leidmise ülesande varal.

1.1.1. Tasandilise kujundi pindala mõiste

Meenutame, kuidas matemaatilise analüüsi kursuses defineeritakse tasandilise kujundi pindala. Mõisteid "tasand" ja "ruum $\mathbb{R}^2$", samuti mõisteid "tasandiline kujund" ja "ruumi $\mathbb{R}^2$ alamhulk" kasutame me järgnevas sünonüümidena.

Definitsioon 1.1. *Hulkkülikuks* nimetatakse kinnist lihtsat murdjoont. *Hulknurgaks* nimetatakse tasandi osa, mida piirab hulkkülik. *Hulknurksummaks* nimetatakse lõpliku arvu hulknurkade ühendit.

Hulknurksumma pindala saab defineerida loomulikul viisil: hulknurksumma on esitatav lõpliku arvu paarikaupa lõikumatute sisemustega kolmnurkade ühendina, tema pindala defineeritakse kui nende kolmnurkade pindalade summa. (Kolmnurga pindala defineeritakse nagu elementaargeomeetrias: "alus korda kõrgus jagada kahega".) Hulknurksumma $Q \subset \mathbb{R}^2$ pindala tähistame me sümboliga $S(Q)$.

Tasandilise kujundi pindala defineeritakse hulknurksumma pindala kaudu.

Definitsioon 1.2. Olgu $K \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Arvu

$$\overline{S}(K) = \inf\{S(Q)\colon\ Q \text{ on hulknurksumma, } Q \supset K\}$$

nimetatatakse kujundi K *Jordani*[1] *välismõõduks*. Arvu

$$\underline{S}(K) = \begin{cases} \sup\bigl\{S(Q)\colon\ Q \text{ on hulknurksumma, } Q \subset K\bigr\}, & \text{kui } K^\circ \neq \emptyset, \\ 0, & \text{kui } K^\circ = \emptyset, \end{cases}$$

nimetatakse kujundi K *Jordani sisemõõduks*. (Sümbol K° tähistab hulga K sisemust. Märgime, et $K^\circ \neq \emptyset$ parajasti siis, kui leidub hulknurksumma, mis sisaldub hulgas K.)

Märkus 1.1. Alternatiivne võimalus Jordani sise- ja välismõõdu defineerimiseks on asendada definitsioonis 1.2 hulknurksummad *koordinaatristküliksummadega* (koordinaatristküliksumma on niisuguste ristkülikute lõplik ühend, mille küljed on paralleelsed koordinaattelgedega) või *diaadiliste ruutude* lõplike ühenditega (vt. § IV.4). Jordani sise- ja välismõõdu mõistete sisu jääb seejuures samaks.

Kui $\overline{S}(K) = \underline{S}(K)$, siis öeldakse, et kujund K on *Jordani mõttes mõõtuv*. Arvu

$$S(K) = \overline{S}(K) = \underline{S}(K)$$

nimetatakse sel juhul kujundi K *pindalaks* ehk *Jordani mõõduks*.

Jordani mõõdu mõistel on üks oluline puudus: *Jordani mõttes mõõtuvaid hulki on liiga vähe.* Vajadus omistada pindala ka Jordani mõttes mittemõõtuvatele hulkadele motiveerib meid Jordani mõõdu mõistet üldistama.

[1] Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922) — prantsuse matemaatik.

Märkus 1.2. Jordani mõõt ruumi $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) alamhulkade jaoks defineeritakse analoogiliselt juhuga $m = 2$. Seejuures võib Jordani sise- ja välimõõdu definitsiooni 1.2 üldistuses juhu $m \in \mathbb{N}$ jaoks kasutada *hulktahuksummasid* (hulktahuksumma on hulknurksumma loomulik üldistus juhu $m \geqslant 2$ jaoks), *koordinaatristtahuksummasid* (koordinaatristtahuksumma on koordinaatristküliksumma loomulik üldistus juhu $m \in \mathbb{N}$ jaoks) või *diaadiliste kuupide* ühendeid (vt. § III.4).

1.1.2. Riemanni[2] integraali mõiste

Vajadus rehkendada konkreetsetel juhtudel välja tasandilise kujundi pindala viib meid *Riemanni integraali* mõisteni. Riemanni integraal on tõhus matemaatiline tööriist *kõvertrapetsi* pindala arvutamiseks. Meenutame, et kui f on lõigus $[a,b]$ määratud mittenegatiivne funktsioon, siis tasandi punktihulka

$$\big\{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$$

nimetatakse *kõvertrapetsiks.*

Meenutame, kuidas defineeritakse Riemanni integraal.

Olgu $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Tähistame sümboliga T lõigu $[a,b]$ tükelduse punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N})$$

ning

$$M_j = \sup\big\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\big\}, \quad j = 1,\ldots,n, \qquad S(T) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),$$

$$m_j = \inf\big\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\big\}, \quad j = 1,\ldots,n, \qquad s(T) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}).$$

Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse (lõigu $[a,b]$ tükeldusele T vastavateks) funktsiooni f *Darboux*[3] *ülemsummaks* ja funktsiooni f *Darboux' alamsummaks.*

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et

- lõigu $[a,b]$ suvaliste tükelduste ja T ja T' korral

  $$S(T) \geqslant s(T'),$$

  s.t. *ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem ühestki Darboux' alamsummast.*

Siit järeldub, et

- funktsiooni f kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk lõigus $[a,b]$ on alt tõkestatud (alumiseks tõkkeks on funktsiooni f suvaline Darboux' alamsumma selles lõigus);

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) — saksa matemaatik.
[3]Jean Gaston Darboux (1842–1917) — prantsuse matemaatik.

- funktsiooni f kõikvõimalike Darboux' alamsummade hulk lõigus $[a,b]$ on ülalt tõkestatud (ülemiseks tõkkeks on funktsiooni f suvaline Darboux' ülemsumma selles lõigus).

Definitsioon 1.3. Tähistame

$$\overline{D}\text{-}\int_a^b f := \inf\big\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus}\big\},$$
$$\underline{D}\text{-}\int_a^b f := \sup\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus}\}.$$

Märkus 1.3. Rõhutame, et pidevuse aksioomi põhjal on need inf ja sup lõplikud.

Arvusid $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ nimetatakse vastavalt *Darboux' ülemiseks integraaliks* ja *Darboux' alumiseks integraaliks* funktsioonist f (üle lõigu $[a,b]$).

Niisiis,

- Darboux' ülemine integraal funktsioonist f üle lõigu $[a,b]$ on funktsiooni f kõikvõimalike (lõigu $[a,b]$ tükeldustele vastavate) Darboux' ülemsummade hulga alumine raja;

- Darboux' alumine integraal funktsioonist f üle lõigu $[a,b]$ on funktsiooni f kõikvõimalike (lõigu $[a,b]$ tükeldustele vastavate) Darboux' alamsummade hulga ülemine raja.

On ilmne, et *lõigu $[a,b]$ suvalise tükelduse T korral*

$$S(T) \geqslant \overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant s(T).$$

Definitsioon 1.4. Kui $\overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f$, siis öeldakse, et funktsioon f on *Riemanni mõttes integreeruv* lõigus $[a,b]$. Darboux' integraalide $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ ühist väärtust nimetatakse sel juhul *Riemanni integraaliks* funktsioonist f (üle lõigu $[a,b]$) ja tähistatakse sümboliga

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad R\text{-}\int_a^b f \quad \text{või lihtsalt} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad \int_a^b f.$$

Niisiis, kui funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, siis

$$R\text{-}\int_a^b f = \overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f.$$

Lihtne on veenduda, et

- *kui funktsioon f on mittenegatiivne lõigus $[a,b]$, siis f on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$ parajasti siis, kui kõvertrapets*

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$$

  on Jordani mõttes mõõtuv. Sellisel juhul $R\text{-}\int_a^b f = S(\mathcal{D})$, s.t. $R\text{-}\int_a^b f$ on kõnealuse kõvertrapetsi pindala.

Riemanni integraalil on kaks olulist puudust.

- Riemanni mõttes integreeruvaid funktsioone on liiga vähe — Riemanni integraal on defineeritud vaid lõigus tõkestatud funktsioonide jaoks. Samas leidub ka lõigus tõkestatud funktsioone, mis pole Riemanni mõttes integreeruvad selles lõigus. (Klassikaline näide niisugusest funktsioonist on Dirichlet'[4] funktsioon.)

- Riemanni integraal käitub piirväärtuste suhtes ebastabiilselt. Üldjuhul, isegi siis, kui piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} R\text{-}\int_a^b f_n$ ja piirfunktsioon $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ eksisteerivad,
$$\lim_{n\to\infty} R\text{-}\int_a^b f_n \neq R\text{-}\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$
s.t. üldjuhul me ei saa Riemanni integraalis piirväärtusega integraali märgi alla minna.

Märkus 1.4. Kui me oskaksime "mõistlikul viisil" defineerida iga alamhulga $E \subset \mathbb{R}$ jaoks tema "pikkuse" $\lambda(E)$, s.t. me oskaksime defineerida hulgafunktsiooni $\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimust
$$E_1,\ldots,E_n \subset \mathbb{R}\ \ (n\in\mathbb{N}),\ E_i\cap E_j=\emptyset,\ i\neq j, \quad \Longrightarrow \quad \lambda\Big(\bigcup_{j=1}^n E_j\Big)=\sum_{j=1}^n \lambda(E_j),$$
siis saaksime me defineerida lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsiooni f Darboux' summad mitte ainult selle lõigu tükelduste jaoks osalõikudeks, vaid lõigu $[a,b]$ suvalise tükelduse jaoks: kui T on lõigu $[a,b]$ tükeldus (suvalisteks) alamhulkadeks $E_1,\ldots,E_n \subset [a,b]$ $(n\in\mathbb{N})$ (s.t. $E_1,\ldots,E_n\subset[a,b]$ on paarikaupa lõikumatud alamhulgad, mille ühend on $[a,b]$), siis saaksime defineerida "Darboux' summad"
$$S(T)=\sum_{j=1}^n \sup_{z\in E_j} f(z)\ \lambda(E_j) \quad \text{ja} \quad s(T)=\sum_{j=1}^n \inf_{z\in E_j} f(z)\ \lambda(E_j).$$
"Darboux' integraalid" ja funktsiooni f "integreeruvuse" defineeriksime siis analoogiliselt traditsioonilise juhuga:
$$\overline{D}\text{-}\int_a^b f := \inf\big\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus (suvalisteks alamhulkadeks)}\big\},$$
$$\underline{D}\text{-}\int_a^b f := \sup\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus (suvalisteks alamhulkadeks)}\};$$
funktsiooni f loeksime "integreeruvaks", kui $\overline{D}\text{-}\int_a^b f = \underline{D}\text{-}\int_a^b f$; "integraali" funktsioonist f üle lõigu $[a,b]$ defineeriksime sel juhul kui tema "Darboux' integraalide" ühise väärtuse. (Et niisugusel "integraalil" oleks vähegi mõistlik geomeetriline sisu, tuleks "hulga pikkus" λ defineerida nii, et iga lõigu $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ korral $\lambda([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$).

Pseudoteoreem. *Iga lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon on märkuses defineeritud integreeruvuse mõttes integreeruv.*

Moraal eelnevast pseudoteoreemist on järgmine: mida rohkem hulga $\mathbb{R}$ alamhulki me oskame mõistlikul viisil "mõõta", seda paremate omadustega integraali me saaksime defineerida.

[4]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) — prantsuse matemaatik.

Miks me kasutame siin eesliidet "pseudo"? Aga sellepärast, et selle teoreemi üks oluline eeldus — võimalikkus defineerida "mõistlikul viisil" reaalarvude alamhulkade "pikkust" — on meil tõestamata. Kuigi selline hulga "pikkuse" "mõistlik" defineerimine on võimalik (sellel küsimusel peatume põgusalt käesoleva peatüki paragrahvis 5), ei kasutata Riemanni integraali üldistamisel eespool kirjeldatud skeemi. Põhjus on siin selles, et soovitav oleks saada integraali defineerimiseks skeem, mille loomulik üldistus võimaldaks defineerida integraali ka ruumides $\mathbb{R}^m$, kus $m \geqslant 2$. Juhul $m = 2$ ülaltoodud skeem rakendub — hulga pindala on võimalik "piisavalt mõistlikul viisil" defineerida kõigi alamhulkade $E \subset \mathbb{R}^2$ jaoks; niisiis saab loomulikul viisil defineerida ka tasandi tõkestatud alamhulgal määratud tõkestatud funktsiooni "Darboux' summad" ning seega ka integraal — juhul $m \geqslant 3$ see skeem aga enam ei rakendu: $m \geqslant 3$ korral pole ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulkade "ruumala" võimalik "piisavalt mõistlikul viisil" defineerida (see järeldub käesoleva paragrahvi teoreemist 1.2 — Banach–Tarski paradoksist).

Pseudoteoreemi tõestus. Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Lihtne on veenduda, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$. ("Darboux' integraalid" $\overline{D}\text{-}\int_a^b f$ ja $\underline{D}\text{-}\int_a^b f$ on siin defineeritud nii, nagu märkuses.)

Ülesanne 1.1. Veenduda, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \geqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$.

Seega jääb funktsiooni f integreeruvuseks näidata, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f \leqslant \underline{D}\text{-}\int_a^b f$. Selleks valime arvud $m, M \in \mathbb{R}$ selliselt, et iga $x \in [a,b]$ korral $m \leqslant f(x) < M$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulgad

$$E_j^n = \left\{x \in [a,b]\colon\ m + (j-1)\,\tfrac{M-m}{n} \leqslant f(x) < m + j\,\tfrac{M-m}{n}, \quad j \in \{1,\dots,n\}\right\},$$

ning tähistame sümboliga T_n lõigu $[a,b]$ tükelduse hulkadeks $E_1^n, \dots, E_n^n$. Siis suvaliste $n \in \mathbb{N}$ ja $j \in \{1,\dots,n\}$ korral

$$\begin{aligned}
\overline{D}\text{-}\int_a^b f - \underline{D}\text{-}\int_a^b f &\leqslant S(T_n) - s(T_n) = \sum_{j=1}^n \sup_{z\in E_j^n} f(z)\ \lambda(E_j^n) - \sum_{j=1}^n \inf_{z\in E_j^n} f(z)\ \lambda(E_j^n) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^n \left(m + j\,\frac{M-m}{n}\right)\lambda(E_j^n) - \sum_{j=1}^n \left(m + (j-1)\,\frac{M-m}{n}\right)\lambda(E_j^n) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{M-m}{n}\,\lambda(E_j^n) = \frac{M-m}{n}\sum_{j=1}^n \lambda(E_j^n) = \frac{M-m}{n}\,\lambda\left(\bigcup_{j=1}^n E_j^n\right) \\
&= \frac{M-m}{n}\,\lambda\big([a,b]\big) = \frac{M-m}{n}\,(b-a),
\end{aligned}$$

millest protsessis $n \to \infty$ järeldub, et $\overline{D}\text{-}\int_a^b f - \underline{D}\text{-}\int_a^b f \leqslant 0$, nagu soovitud. □

1.2. Jordani mõõdu mõiste laiendamise mittevõimalikkus ruumi $\mathbb{R}^m$ kõigile alamhulkadele

Olgu $m \in \mathbb{N}$. Selles punktis seame endale eesmärgiks üldistada Jordani mõõdu mõiste ruumi $\mathbb{R}^m$ kõigile alamhulkadele. Märgime, et

- juhul $m = 1$ tähendab see hulga "pikkuse" mõiste üldistamist sirge kõigile alamhulkadele;
- juhul $m = 2$ tähendab see kujundi pindala mõiste üldistamist kõigile tasandilistele kujunditele;

- juhul $m = 3$ tähendab see keha ruumala mõiste üldistamist kõigile ruumilistele kehadele.

Teisisõnu, meie eesmärk on defineerida hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ selliselt, et

(1) iga Jordani mõttes mõõtuva hulga $E \subset \mathbb{R}^m$ korral oleks $\mu(E)$ hulga E Jordani mõõt (s.t. μ on Jordani mõõdu *jätk* kõigi alamhulkade kogumile $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$);

(2) hulgafunktsiooni μ omadused vastaksid võimalikult täpselt meie eelmatemaatilisele ettekujutusele hulga "pikkuse"/pindala/ruumala omadustest.

Milline on meie eelmatemaatiline ettekujutus neist omadustest? Igati loomulik on nõuda, et hulgafunktsioon μ rahuldaks järgmisi tingimusi:

1° μ on *loenduvalt aditiivne* (ehk *σ-aditiivne*), s.t.

$$E_j \subset \mathbb{R}^m,\ j \in \mathbb{N},\ \ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j, \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j);$$

2° μ on *invariantne nihete, pöörete ja peegelduste suhtes*, s.t.

$$E, F \subset \mathbb{R}^m,\ E \cong F \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = \mu(F)$$

(siin valem $E \cong F$ tähendab, et hulgad E ja F on *kongruentsed,* s.t. hulk E on teisendatav hulgaks F nihete, pöörete ja peegelduste abil);

3° $\mu\Big(\underbrace{[0,1) \times [0,1) \times \cdots \times [0,1)}_{m \text{ tegurit}}\Big) = 1.$

Märkus 1.5. *Poollahtine ühikkuup* $\overbrace{[0,1) \times [0,1) \times \cdots \times [0,1)}^{m \text{ tegurit}}$ on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures tema Jordani mõõt on 1; niisiis, kui $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ on Jordani mõõdu jätk, siis kehtib 3°. Teiselt poolt, pole raske tõestada, et kui $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$ rahuldab tingimusi 1° ja 3° ning on nihke suhtes invariantne (s.t. rahuldab teoreemi 1.1 tingimust 2°°), siis μ on Jordani mõõdu jätk.

Unistada on tore, aga elu on karm. Järgnev teoreem purustab meie unelmad.

Teoreem 1.1. *Ei eksisteeri niisugust hulgafunktsiooni* $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$*, mis rahuldab tingimusi* 1°*,* 3° *ja*

2°° μ *on* invariantne nihete suhtes*, s.t.*

$$\mu(E + x) = \mu(E) \quad \textit{suvaliste } E \subset \mathbb{R}^m \textit{ ja } x \in \mathbb{R}^m \textit{ korral.}$$

Meenutame, et kui $E \subset \mathbb{R}^m$ ja $x \in \mathbb{R}^m$, siis hulga E nihe $E + x$ on defineeritud võrdusega $E + x := \{z + x\colon\ z \in E\} \subset \mathbb{R}^m$.

Teoreemi 1.1 tõestus. Jälgitavuse huvides esitame teoreemi tõestuse vaid juhu $m = 1$ jaoks. Juhtudel $m \geqslant 2$ on tõestus analoogiline.

Defineerime hulgas $[0,1)$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgmiselt:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q} \qquad \big(x, y \in [0,1)\big).$$

Ülesanne 1.2. Tõestada, et $\sim$ on ekvivalentsiseos hulgas $[0,1)$.

Vaatleme faktorhulka $[0,1)/\sim$. Olgu $N \subset [0,1)$ mingi selline hulk, mis sisaldab faktorhulga $[0,1)/\sim$ igast ekvivalentsiklassist ühe ja ainult ühe elemendi (märgime, et valikuaksioomi põhjal niisugune hulk N eksisteerib). Tähistame iga $q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ korral

$$N_q = \Big\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1-q)\Big\} \cup \Big\{x + q - 1\colon\ x \in N \cap [1-q, 1)\Big\}.$$

(Piltlikult väljendudes saame hulga N_q järgmiselt: kõigepealt nihutame hulga N arvteljel q ühiku võrra paremale; seejärel aga nihutame selle osa hulgast N, mis esialgse nihutamise järel jäi väljapoole poollõiku $[0,1)$, ühe ühiku võrra vasakule tagasi.) Paneme tähele, et

(1) $\displaystyle\bigcup_{q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} N_q = [0,1);$

(2) $q, r \in [0,1) \cap \mathbb{Q},\ q \neq r \quad \Longrightarrow \quad N_q \cap N_r = \emptyset.$

***Ülesanne 1** (2+3 p.)**.** Tõestada väited (1) ja (2).

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et eksisteerib funktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, mis rahuldab tingimusi 1°, $2^{\circ\circ}$ ja 3°. Paneme tähele, et sel juhul

$$\mu(N_q) = \mu(N) \quad \text{iga } q \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \text{ korral.}$$

Tõepoolest, mistahes $q \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ korral

$$\begin{aligned}
\mu(N_q) &= \mu\Big(\big\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1-q)\big\} \cup \big\{x + q - 1\colon\ x \in N \cap [1-q, 1)\big\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\Big) \\
&= \mu\Big(\big\{x + q\colon\ x \in N \cap [0, 1-q)\big\}\Big) + \mu\Big(\big\{x + q - 1\colon\ , x \in N \cap [1-q, 1)\big\}\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots \\
&= \mu\Big(N \cap [0, 1-q)\Big) + \mu\Big(N \cap [1-q, 1)\Big) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \cdots \\
&= \mu\Big(\big(N \cap [0, 1-q)\big) \cup \big(N \cap [1-q, 1)\big) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\Big) \\
&= \mu(N).
\end{aligned}$$

Ülesanne 1.3. Tõestada, et $\mu(\emptyset) = 0$. (Märgime, et käesoleva tõestuse seisukohalt on see ülesanne tarbetu.)

Seega

$$1=\mu\Big([0,1)\Big)=\mu\left(\bigcup_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} N_q\right)=\sum_{q\in[0,1)\cap\mathbb{Q}}\mu(N_q)=\begin{cases}0, & \text{kui } \mu(N)=0;\\ \infty, & \text{kui } \mu(N)>0.\end{cases}$$

Saadud vastuolu tõestab teoreemi. □

Niisiis, meie maksimuprogramm — defineerida tingimusi 1°–3° rahuldav Jordani mõõdu jätk $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)\to[0,\infty]$ — jääb (objektiivsetel asjaoludel) täitmata. Kuna Jordani mõõdu eventuaalse jätku $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)\to[0,\infty]$ puhul me omadustest 2° ja 3° loobuda ei raatsi, siis ei jää meil ilmselt muud üle, kui nõrgendada tingimust 1°, näiteks nõudes, et see jätk rahuldaks järgmist tingimust:

1°° μ on *aditiivne,* s.t.

$$E,F\subset\mathbb{R}^m,\ \ E\cap F=\emptyset \quad\Longrightarrow\quad \mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F).$$

Märkus 1.6. Järgmises peatükis integraali omadusi uurides mõistame, et idee asendada siin tingimus 1° nõrgema tingimusega 1°° pole eriti hea — selle arvelt kannataksid integraali omadused. See on üks põhjusi, miks me selle idee varsti hülgame.

Osutub, et juhtudel $m=1$ ja $m=2$ niisugune Jordani mõõdu jätk $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)\to[0,\infty]$, mis rahuldab tingimusi 1°°, 2° ja 3°, tõepoolest eksisteerib (põgusalt peatume me sel teemal käesoleva peatüki paragrahvis 5), kuid, nagu järeldub järgnevast teoreemist, juhtudel $m\geqslant 3$ mitte.

Teoreem 1.2 (Banach[5]–Tarski[6] paradoks, 1924)**.** *Olgu $m\geqslant 3$ ning olgu tõkestatud hulgad $A,B\subset\mathbb{R}^m$ sellised, et $A^\circ,B^\circ\neq\emptyset$ (teisisõnu, hulkadel A ja B leidub sisepunkte). Siis leiduvad naturaalarv $n\in\mathbb{N}$ ja alamhulgad*

$$A_1,A_2,\dots,A_n\subset A \quad \textit{ja} \quad B_1,B_2,\dots,B_n\subset B$$

selliselt, et

(1) $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$, $\bigcup_{j=1}^n A_j=A$;

(2) $B_i\cap B_j=\emptyset$, $i\neq j$, $\bigcup_{j=1}^n B_j=B$;

(3) $A_j\cong B_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$ *(s.t. hulgad A_j ja B_j on omavahel kongruentsed).*

BANAC–TARSKI PARADOKSI TÕESTUS on siin esitamiseks liiga pikk ja algebraline. □

Banach–Tarski paradoksi sobib iseloomustama sõna *kontraintuitiivne.* Näiteks, kui võtta A rolli mingi väike kera ja B rolli mingi suur kera ruumis $\mathbb{R}^3$, siis teoreem 1.2 ütleb, et me saame lõhkuda A — väikese kera — lõplikuks arvuks tükkideks, millest (vajaduse korral asendades mõne tüki tema peegeldusega) on võimalik kokku

[5]Stefan Banach (1892–1945) — poola matemaatik.
[6]Alfred Tarski (1902–1983) — poola matemaatik.

laduda B — suur kera! Vastuolu meie eelmatemaatiliste ootustega ruumi $\mathbb{R}^3$ struktuuri suhtes tekib siin ilmselt sellest, et väikese kera tükkidest suurt kera kokku ladudes tekiks meile justkui ei tea kust ruumala juurde. Tegelikult siin aga mingit vastuolu ei ole: osal tükkidest ei tarvitse ruumala olla. Nimelt, ruumala pole mitte ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulkade meist sõltumatult eksisteeriv omadus, vaid hulgafunktsioon ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulkadel, mille me ise peame defineerima. Banach–Tarski paradoks ütleb meile, et sellise hulgafunktsiooni, mis vastaks meie ootustele ruumala omaduste suhtes, määramispiirkond ei saa olla $\mathbb{R}^3$ kõigi alamhulkade kogum: kui me tahame, et ruumala omadused vastaksid meie eelmatemaatilistele ootustele, siis tuleb osa ruumi $\mathbb{R}^3$ alamhulki jätta ilma ruumalata.

Ülesanne 1.4. Järeldada teoreemist 1.2, et kui $m \geqslant 3$, siis ei eksisteeri niisugust Jordani mõõdu jätku $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \to [0,\infty]$, mis rahuldab tingimusi $1^{\circ\circ}$, 2° ja 3°.

Olukord tekitab nõutust. Mida teha? Ei jää muud üle, kui

- *tuleb loobuda nõudest, et tingimusi* 1°–3° *rahuldav Jordani mõõdu jätk oleks defineeritud ruumi* $\mathbb{R}^m$ *kõigi alamhulkade kogumil* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ *ning piirduda Jordani mõõdu jätkamisega kogumi* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ *mingile alamkogumile, mis sisaldaks olulisemaid praktikas ettetulevaid ruumi* $\mathbb{R}^m$ *alamhulki.*

Selliselt püsitatud eesmärgini me ka jõuame. Käesoleva loengukursuse I peatükis konstrueerime Jordani mõõdu soovitud omadustega jätku kogumi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ küllalt suurele alamkogumile juhul $m = 1$, III peatükis konstrueerime ta juhul $m \geqslant 2$. Seejuures hõlmab meie teooriaarendus hoopis laiemat konteksti kui ruum $\mathbb{R}^m$ — me vaatleme hulgafunktsioone abstraktsetel hulkadel (seda eelkõige tõenäosusteooria, aga ka mitmete teiste matemaatika valdkondade, näiteks funktsionaalanalüüsi vajadusi silmas pidades). Loengukursuse II peatükis defineerime Riemanni integraali üldistuse (samuti hoopis laiemas kontekstis kui ruum $\mathbb{R}^m$) — *Lebesgue'i*[7] *integraali,* mille omadused on oluliselt paremad, kui Riemanni integraalil.

[7] Henri Léon Lebesgue (1875–1941) — prantsuse matemaatik.

§ 2. σ-algebrad

Selles paragrahvis tutvume teatavat tüüpi kogumitega — *algebrate* ja *σ-algebratega.* Märgime, et meie teooriaarenduses alates järgmisest paragrahvist keskset rolli mängivate hulgafunktsioonide — *mõõtude* — määramispiirkonnaks on just nimelt seda tüüpi kogumid.

2.1. σ-algebra mõiste

Olgu X mingi hulk.

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on (hulga X alamhulkade) *algebra,* kui

A1° $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;

A2° $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A^c \in \mathfrak{A}$;

A3° $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Järgnevalt loetleme mõned algebrate põhiomadused.

Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Siis

A4° $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathfrak{A}$;

A5° $A, B \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathfrak{A}$;

A6° $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}, \ \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$.

Omaduste A4° ja A5° tõestuseks märgime, et De Morgani[8] valemite põhjal

$$A \cap B = \left[(A \cap B)^c\right]^c = [A^c \cup B^c]^c \quad \text{ja} \quad A \setminus B = A \cap B^c.$$

Omadus A6° järeldub omadustest A3° ja A4° induktsiooni teel.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on (hulga X alamhulkade) *σ-algebra,* kui

A1° $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;

A2° $A \in \mathfrak{A} \Longrightarrow A^c \in \mathfrak{A}$;

A3°° $A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.

Ülesanne 2.1. Tõestada, et iga σ-algebra on algebra.

Olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. Kuna iga σ-algebra on algebra, siis rahuldab $\mathfrak{A}$ tingimusi A4°–A6°. Lisaks sellele

[8]Augustus De Morgan (1806–1871) — inglise matemaatik.

A6°° $A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N}, \implies \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}.$

Omaduse A6°° tõestuseks märgime, et De Morgani valemite põhjal

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left[\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right]^c = \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right]^c.$$

Ülesanne 2.2. Olgu $\mathfrak{A}$ algebra. Tõestada, et

(a) kui kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \quad \implies \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A},$$

siis $\mathfrak{A}$ on σ-algebra;

(b) kui kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, \quad \implies \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A},$$

siis $\mathfrak{A}$ on σ-algebra.

Definitsioon 2.3. Paari $(X, \mathfrak{A})$, kus X on mingi hulk ning kogum $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra, nimetatakse *mõõtuvaks ruumiks.* σ-algebra $\mathfrak{A}$ hulki nimetatakse $\mathfrak{A}$-*mõõtuvateks hulkadeks* (või, kui σ-algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, ka lihtsalt *mõõtuvateks hulkadeks*).

Järgnevalt toome mõned lihtsad näited algebratest ja σ-algebratest.

Näide 2.1. Olgu X mingi hulk. Siis

(a) kogum $\{\emptyset, X\}$ on hulga X alamhulkade σ-algebra;

(b) kogum $\mathcal{P}(X)$ on hulga X alamhulkade σ-algebra;

(c) hulga X kõigi lõplike ja *koolõplike* alamhulkade kogum

$$\mathcal{F}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon\ A \text{ on lõplik või } A^c \text{ on lõplik}\}$$

on hulga X alamhulkade algebra.

Ülesanne 2.3. Tõestada, et hulga X lõplike ja koolõplike alamhulkade kogum $\mathcal{F}(X)$ on σ-algebra parajasti siis, kui hulk X on lõplik.

Näpunäide. Iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva alamhulga.

2.2. Alamhulkade kogumi poolt genereeritud σ-algebra

Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

Definitsioon 2.4. Vähimat hulga X alamhulkade σ-algebrat, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$, nimetatakse *kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud σ-algebraks.*

Kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud σ-algebrat tähistame edaspidi sümboliga $\sigma(\mathcal{E})$.

Siinkohal kerkib loomulik küsimus σ-algebra definitsiooni korrektsusest. Täpsemalt:

(1) Kas niisuguseid hulga X alamhulkade σ-algebraid, mis sisaldavad kogumit $\mathcal{E}$, üleüldse leidub?

(2) Kas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga X alamhulkade σ-algebrate hulgas on olemas vähim, s.t. niisugune, mis sisaldub igas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavas σ-algebras?

Vastus neile mõlemale küsimusele on jaatav:

(1) Hulga X kõigi alamhulkade kogum $\mathcal{P}(X)$ on σ-algebra, kusjuures $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

(2) Kõigi kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga X alamhulkade σ-algebrate ühisosa on σ-algebra, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$. See ühisosa on vähim kogumit $\mathcal{E}$ sisaldav σ-algebra, sest ta sisaldub igas kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavas hulga X alamhulkade σ-algebras.

Ülesanne 2.4. Tõestada, et kõigi kogumit $\mathcal{E}$ sisaldavate hulga X alamhulkade σ-algebrate ühisosa on σ-algebra, mis sisaldab kogumit $\mathcal{E}$.

Niisiis,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \text{ on } \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{E} \subset \mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)}} \mathfrak{A}.$$

Edasises kasutame me korduvalt järgmist lihtsat lemmat.

Lemma 2.1. *Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathfrak{A}$ hulga X alamhulkade σ-algebra. Kui kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ rahuldab tingimust $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}$, siis ka $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}$.*

TÕESTUS. Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}$. Kuna $\mathfrak{A}$ on σ-algebra, siis $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$, seega $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. $\square$

2.3. Boreli[9] σ-algebra

Definitsioon 2.5. Topoloogilise ruumi X lahtiste hulkade kogumi poolt genereeritud σ-algebrat nimetatakse *ruumi X Boreli σ-algebraks.* Ruumi X Boreli σ-algebra hulki nimetatakse selle ruumi *Boreli hulkadeks.*

Ruumi X Boreli σ-algebrat tähistame edaspidi sümboliga $\mathcal{B}_X$. Ruumi X kõigi lahtiste hulkade kogumit tähistame edaspidi sümboliga τ_X; niisiis definitsiooni kohaselt $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X)$.

Ülesanne 2.5. Tõestada, et topoloogilise ruumi X kinniste alamhulkade kogum $\mathcal{F}_X$ genereerib ruumi X Boreli σ-algebra, s.t. $\sigma(\mathcal{F}_X) = \mathcal{B}_X$.

Järgnevalt tutvustame topoloogilise ruumi Boreli hulkade hierarhiat kirjeldavat terminoloogiat.

Definitsioon 2.6. Olgu X topoloogiline ruum.

Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on *hulk tüüpi G_δ* (ehk *G_δ-tüüpi hulk* ehk lihtsalt G_δ), kui ta on esitatav ruumi X lahtiste alamhulkade loenduva ühisosana, s.t.

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \qquad \text{kus } U_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in \mathbb{N}, \text{ on ruumi } X \text{ lahtised alamhulgad.}$$

Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on *hulk tüüpi F_σ* (ehk *F_σ-tüüpi hulk* ehk lihtsalt F_σ), kui ta on esitatav ruumi X kinniste alamhulkade loenduva ühendina, s.t.

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j, \qquad \text{kus } H_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in \mathbb{N}, \text{ on ruumi } X \text{ kinnised alamhulgad.}$$

Märkus 2.1. Terminid G_δ ja F_σ võttis kasutusele juba Hausdorff[10]: tähtedega "G" ja "F" tähistas ta vastavalt lahtiseid ja kinniseid hulki (tähed "G" ja "F" tulenevad vastavalt saksakeelsest terminist "Gebiet" (piirkond) ja prantsuskeelsest terminist "fermé" (kinnine)); indeksid "δ" ja "σ" aga viitavad vastavalt saksakeelsetele terminitele "Durchschnitt" (ühisosa) ja "Summe" (summa).

Boreli hulkade edasine klassifikatsioon järgib sama printsiipi:
$G_{\delta\sigma}$ on G_δ-de loenduv ühend,
$F_{\sigma\delta}$ on F_σ-de loenduv ühisosa jne.
Rõhutame, et see klassifikatsioon ei ole ammendav. (Selle ammendavuse küsimusega tegeleme me käesoleva paragrahvi lisas).

Selles punktis kirjeldame me ruumi $\mathbb{R}$ Boreli σ-algebrat. Selleks on aga otstarbekas esmalt õppida veidi paremini tundma ruumi $\mathbb{R}$ lahtiste hulkade struktuuri.

Edasises mõistame me mõiste "vahemik" all lisaks tõkestatud vahemikele ka tõkestamata vahemikke, s.t. vahemikeks nimetame me hulkasid

$$(a, b), \quad (c, \infty), \quad (-\infty, d), \quad (-\infty, \infty) \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b.$$

[9]Félix Edouard Justin Emile Borel (1871–1956) — prantsuse matemaatik.
[10]Felix Hausdorff (1868–1942) — saksa matemaatik.

Teoreem 2.2. *Ruumi $\mathbb{R}$ mistahes mittetühi lahtine hulk esitub paarikaupa lõikumatute vahemike ülimalt loenduva ühendina.*

Kuna iga vahemik on esitatav tõkestatud vahemike loenduva ühendina, siis järeldub teoreemist 2.2

Järeldus 2.3. *Ruumi $\mathbb{R}$ mistahes mittetühi lahtine hulk esitub tõkestatud vahemike loenduva ühendina.*

TEOREEMI 2.2 TÕESTUS. Olgu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ mittetühi lahtine hulk. Defineerime iga $x \in \mathcal{U}$ korral

$$a_x = \inf\Big\{a \in \mathbb{R}\colon\ (a, x] \subset \mathcal{U}\Big\},$$
$$b_x = \sup\Big\{b \in \mathbb{R}\colon\ [x, b) \subset \mathcal{U}\Big\}.$$

Märgime, et a_x ja b_x on korrektselt defineeritud, sest niisugused $a, b \in \mathbb{R}$, $a < x < b$, mille korral $(a, b) \subset \mathcal{U}$, eksisteerivad (tõepoolest, hulga $\mathcal{U}$ lahtisuse tõttu on x hulga $\mathcal{U}$ sisepunkt ning seega leidub $\varepsilon > 0$ selliselt, et $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathcal{U}$). Seejuures võib juhtuda, et $a_x = -\infty$ ja/või $b_x = \infty$.

Paneme tähele, et suvalise $x \in \mathcal{U}$ korral

(1) $(a_x, b_x) \subset \mathcal{U}$;

(2) (a_x, b_x) on suurim punkti x sisaldav vahemik, mis sisaldub hulgas $\mathcal{U}$.

Ülesanne 2.6. Tõestada, väited (1) ja (2).

Tähistame $I_x = (a_x, b_x)$, $x \in \mathcal{U}$. Paneme tähele, et suvaliste $x, y \in \mathcal{U}$ korral kas $I_x = I_y$ või $I_x \cap I_y = \emptyset$.

Tõepoolest, olgu $x, y \in \mathcal{U}$ sellised, et $I_x \neq I_y$. Oletame vastuväiteliselt, et $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. Siis kehtib vähemalt üks järgmistest rangetest sisalduvustest:

$$I_x \underset{\neq}{\subset} I_x \cup I_y \quad \text{või} \quad I_y \underset{\neq}{\subset} I_x \cup I_y.$$

Kuna $I_x \cup I_y$ kui lõikuvate vahemike ühend on vahemik, siis esimesel juhul poleks I_x suurim punkti x sisaldav hulgas $\mathcal{U}$ sisalduv vahemik, teisel juhul aga poleks I_y suurim punkti y sisaldav hulgas $\mathcal{U}$ sisalduv vahemik.

Kuna iga $x \in \mathcal{U}$ korral sisaldab vahemik I_x mingi ratsionaalarvu, siis

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} I_x = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}} I_x.$$

Defineerime hulgas $\mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$ ekvivalentsiseose ρ järgmiselt:

$$x \;\rho\; y \quad :\Longleftrightarrow \quad I_x = I_y, \qquad x, y \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}.$$

Ülesanne 2.7. Tõestada, et ρ on ekvivalentsiseos hulgas $\mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$.

Olgu $N \subset \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}$ mingi selline hulk, mis sisaldab faktorhulga $(\mathcal{U} \cap \mathbb{Q})/\rho$ igast ekvivalentsiklassist ühe ja ainult ühe elemendi (märgime, et valikuaksioomi põhjal niisugune hulk N eksisteerib). Siis

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathbb{Q}} I_x = \bigcup_{x \in N} I_x.$$

Olemegi esitanud hulga $\mathcal{U}$ paarikaupa lõikumatute vahemike ülimalt loenduva ühendina (sest kogumi $\{I_x\colon\ x \in N\}$ vahemikud on paarikaupa lõikumatud ja hulga N võimsus on ülimalt loenduv). $\square$

***Ülesanne 2** (6 p.)**.** Tõestada, et separaablis meetrilises ruumis on iga mittetühi lahtine hulk esitatav lahtiste kerade ülimalt loenduva ühendina.

Teoreem 2.4. *Igaüks järgmistest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade kogumitest genereerib ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade Boreli σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \big\{(a,b)\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_2 &= \big\{[a,b)\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_3 &= \big\{[a,b]\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_4 &= \big\{(a,b]\colon\ -\infty < a < b < \infty\big\};\\
\mathcal{E}_5 &= \big\{(-\infty,b]\colon\ b \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_6 &= \big\{(-\infty,b)\colon\ b \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_7 &= \big\{[a,\infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\};\\
\mathcal{E}_8 &= \big\{(a,\infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}.
\end{aligned}$$

Teoreemi 2.4 tõestus tugineb järeldusele 2.3 ja lemmale 2.1.

TEOREEMI 2.4 TÕESTUSEKS. piisab näidata, et

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \overset{(1)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_1) \overset{(2)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_2) \overset{(3)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_3) \overset{(4)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_4) \overset{(5)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_5) \overset{(6)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_6) \overset{(7)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_7) \overset{(8)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_8) \overset{(9)}{\subset} \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

(1). Kuna järelduse 2.3 põhjal on ruumi $\mathbb{R}$ iga mittetühi lahtine hulk esitatav tõkestatud vahemike loenduva ühendina, siis $\tau_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (sümbol $\tau_{\mathbb{R}}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}$ lahtiste alamhulkade kogumit) ning järelikult lemma 2.1 põhjal ka $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\tau_{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$.

(2). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (2) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \tfrac{b-a}{2n}, b) \in \sigma(\mathcal{E}_2).$$

(4). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (4) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_3 \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \tfrac{1}{n}, b] \in \sigma(\mathcal{E}_4).$$

(5). Lemma 2.1 põhjal piisab sisalduvuse (5) tõestuseks näidata, et $\mathcal{E}_4 \subset \sigma(\mathcal{E}_5)$. Viimane sisalduvus aga kehtib, sest suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\mathcal{E}_5).$$

Ülesanne 2.8. Tõestada sisalduvused (3) ja (6)–(9).

□

2.4. Üks edasise teooriaarenduse seisukohalt oluline näide ühest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade algebrast

Käesoleva paragrahvi lõpetame näitega ühest ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade algebrast, mis etendab olulist osa meie edasises teooriaarenduses.

Näide 2.2. Tähistame

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a, b),\ [c, \infty),\ (-\infty, d),\ (-\infty, \infty) : \ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \ \ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa mittelõikuvate hulkade lõplike ühendite kogum.

Näitame, et $\mathcal{B}$ on algebra. Seda võib teha algebra aksioomide A1°–A3° vahetu kontrollimise teel, mis on aga küllaltki tülikas (kuigi lihtne). Seepärast on otstarbekam tõestada eelnevalt üks abitulemus, mida me vajame ka käesoleva konspekti III peatükis.

Definitsioon 2.7. Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$.

Öeldakse, et kogum $\mathcal{G}$ on *poolalgebra*, kui

SA1° $\emptyset \in \mathcal{G}$;

SA2° $A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$;

SA3° iga $A \in \mathcal{G}$ korral leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) selliselt, et

$$A^c = \bigcup_{j=1}^{n} B_j,$$

s.t. kogumi $\mathcal{G}$ iga hulga täiend esitub kogumi $\mathcal{G}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõpliku ühendina.

Lihtne on veenduda, et kogum $\mathcal{H}$ on poolalgebra.

Teoreem 2.5. *Olgu X mingi hulk ning olgu kogum $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ poolalgebra. Siis kogum*

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \quad n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G},\, A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j \right\}$$

on algebra.

Teisisõnu, poolalgebra paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogum on algebra.

Kuna kogum $\mathcal{H}$ on poolalgebra, siis järeldub teoreemist 2.5, et kogum $\mathcal{B}$ on algebra. Seejuures $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Teoreemi 2.5 tõestus.

Ülesanne 2.9. Tõestada teoreem 2.5.

Näpunäide. Kõigepealt veenduda, et kui $A, B \in \mathcal{A}$, siis ka $A \cap B \in \mathcal{A}$.

$\square$

2.5. Harjutusülesandeid

Ülesanne 2.10. Olgu $X, Y \neq \emptyset$ ning olgu $f\colon X \to Y$.

[A] Olgu $E, E_j \subset Y$, $j \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) $f^{-1}(E^c) = \big(f^{-1}(E)\big)^c$;

(b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(E_j)$.

[B]

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{C} := \big\{f^{-1}[E]\colon\ E \in \mathfrak{B}\big\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{E \in \mathfrak{B}\colon\ f^{-1}[E] \in \mathfrak{A}\big\}$$

on σ-algebrad;

(b) Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Tähistame

$$\mathcal{F} := \big\{f^{-1}[E]\colon\ E \in \mathcal{E}\big\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{C} := \big\{f^{-1}[E]\colon\ E \in \sigma(\mathcal{E})\big\}.$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{C}$.

Ülesanne 2.11. Olgu X mingi hulk ning olgu $Y \subset X$.

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{C} := \big\{E \in \mathfrak{A}\colon\ E \cap Y \in \mathfrak{B}\big\} \subset \mathcal{P}(X) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{D} := \big\{E \cap Y\colon\ E \in \mathfrak{A}\big\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

on σ-algebrad.

(b) Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Tähistame

$$\mathcal{F} := \big\{E \cap Y\colon\ E \in \mathcal{E}\big\} \subset \mathcal{P}(Y) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{D} := \big\{E \cap Y\colon\ E \in \sigma(\mathcal{E})\big\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.

Ülesanne 2.12. Olgu (X, τ_X) topoloogiline ruum ning olgu $Y \subset X$. Üldise topoloogia kursusest teame, et siis Y on topoloogine ruum nn. alamruumi topoloogia

$$\tau_Y := \{U \cap Y \colon U \in \tau_X\}$$

suhtes. Tõestada, et

$$\mathcal{B}_Y = \{E \cap Y \colon E \in \mathcal{B}_X\}.$$

(Sümbolid $\mathcal{B}_X$ ja $\mathcal{B}_Y$ tähistavad vastavalt ruumide X ja Y Boreli σ-algebraid, s.t. $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X)$ ja $\mathcal{B}_Y = \sigma(\tau_Y)$).

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 2.11, (b).

Ülesanne 2.13. Olgu X ja Y mingid hulgad. Meenutame, et hulkade X ja Y otsekorrutis $X \times Y$ on defineeritud võrdusega

$$X \times Y := \big\{(x, y) \colon x \in X,\, y \in Y\big\},$$

s.t. $X \times Y$ on kõikvõimalike järjestatud paaride (x, y) hulk, kus $x \in X$ ja $y \in Y$.

Kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$ ja $x \in X$, siis hulga E x-lõige E_x on defineeritud võrdusega

$$E_x := \{y \in Y \colon (x, y) \in E\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

[A] Olgu $E, E_j \in \mathcal{P}(X \times Y)$, $j \in \mathbb{N}$, ning olgu $x \in X$. Tõestada, et

$$(E_x)^c = (E^c)_x \qquad \text{ja} \qquad \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)_x.$$

[B] Olgu $x \in X$.

(a) Olgu kogumid $\mathfrak{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ ja $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ σ-algebrad. Tõestada, et kogumid

$$\mathcal{G} := \big\{E \in \mathfrak{C} \colon E_x \in \mathfrak{B}\big\} \subset \mathcal{P}(X \times Y) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{E_x \colon E \in \mathfrak{C}\big\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

on σ-algebrad.

(b) Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$. Tähistame

$$\mathcal{F} := \big\{E_x \colon E \in \mathcal{E}\big\} \subset \mathcal{P}(Y) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D} := \big\{E_x \colon E \in \sigma(\mathcal{E})\big\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Tõestada, et $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$.

Ülesanne 2.14. Olgu $A \subset \mathbb{R}$ ning olgu $r \in \mathbb{R}$. Meenutame, et hulga A nihe $A + r$ ja kordne rA on defineeritud vastavalt võrdustega

$$A + r := \{a + r \colon a \in A\} \quad \text{ja} \quad rA := \{ra \colon a \in A\}.$$

[A] Olgu $A, A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, ning olgu $r \in \mathbb{R}$. Tõestada, et

(a)

$$(A + r)^c = A^c + r \quad \text{ja} \quad \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + r = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j + r)$$

(NÄPUNÄIDE: $x \in A + r$ parajasti siis, kui $x - r \in A$);

(b) kui $r \neq 0$, siis

$$(rA)^c = rA^c \quad \text{ja} \quad r\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (rA_j)$$

(NÄPUNÄIDE: $r \neq 0$ korral $x \in rA$ parajasti siis, kui $\frac{x}{r} \in A$).

[B] Tõestada, et ruumis $\mathbb{R}$ iga Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad.

NÄPUNÄIDE. Veenduda, et kogum $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \colon E + r \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ ja } rE \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \text{ iga } r \in \mathbb{R} \text{ korral}\}$ on σ-algebra, kusjuures $\mathcal{E}$ sisaldab σ-algebrat $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ genereeriva kogumi $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

§ 3. Mõõdud

3.1. Mõõdu mõiste ja põhiomadused

Olgu X mingi hulk ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra.

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on *aditiivne*, kui

M1° $A, B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$

Aditiivse hulgafunktsiooni olulisemad omadused on formuleeritud järgnevas teoreemis.

Teoreem 3.1. *Olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Siis*

M0° *kui leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A) < \infty$ (s.t. μ ei ole samaselt võrdne lõpmatusega), siis*

$$\mu(\emptyset) = 0;$$

vastasel korral

$$\mu(\emptyset) = \infty;$$

M1°' *kui hulgad $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ on paarikaupa lõikumatud, siis*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j);$$

M2° *μ on* monotoonne, *s.t.*

$$A, B \in \mathfrak{A},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B);$$

M3° *μ on* subtraktiivne, *s.t.*

$$A, B \in \mathfrak{A},\ A \subset B,\ \mu(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A);$$

M4° *μ on* subaditiivne, *s.t.*

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}\ (n \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Tõestus. M0°. Eksisteerigu hulk $A \in \mathfrak{A}$, mille korral $\mu(A) < \infty$. Kuna hulgafunktsioon μ on aditiivne, siis

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset),$$

millest võrratuse $\mu(A) < \infty$ tõttu järeldub, et $\mu(\emptyset) = 0$.

Omadus M1°' järeldub hulgafunktsiooni μ aditiivsusest induktsiooni teel.

M2°. Olgu $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$. Siis

$$\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(B).$$

M3°. Olgu $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$. Siis

$$\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(B),$$

järelikult

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

M4°. Olgu $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Tähistame

$$B_1 = A_1 \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right), \; j = 2, \ldots, n.$$

Siis $\bigcup_{j=1}^n A_j = \bigcup_{j=1}^n B_j$, kusjuures hulgad $B_1, \ldots, B_n$ on paarikaupa lõikumatud ning $B_j \subset A_j$, $j = 1 \ldots, n$. Seega

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

□

Ülesanne 3.1. Tõestada, et kui hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ on aditiivne ning paarikaupa lõikumatud hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, on sellised, et $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}$, siis

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \geqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ on *σ-aditiivne* (ehk *loenduvalt aditiivne*), kui

M1°° $\quad A_j \in \mathfrak{A},\, j \in \mathbb{N},\, A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j,\, \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A} \implies \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$

Märgime, et kui algebra $\mathfrak{A}$ on σ-algebra, siis tähendab tingimus "μ on σ-aditiivne", et kehtib implikatsioon

$$A_j \in \mathfrak{A},\, j \in \mathbb{N},\; A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j, \quad \implies \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j),$$

sest sel juhul suvaliste $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, korral alati $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathfrak{A}$.

Ülesanne 3.2. Tõestada, et σ-aditiivne hulgafunktsioon on aditiivne.

Kuna σ-aditiivne hulgafunktsioon on aditiivne, siis on σ-aditiivsel hulgafunktsioonil μ aditiivse hulgafunktsiooni omadused M0°–M4°. Ülejäänud σ-aditiivse hulgafunktsiooni olulisemad omadused on formuleeritud järgnevas teoreemis.

Teoreem 3.2. *Olgu hulgafunktsioon* $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ σ*-aditiivne. Siis*

M4$^{\circ\circ}$ μ *on* loenduvalt subaditiivne*, s.t.*

$$A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j);$$

M5° *kui hulgad* $A_j \in \mathfrak{A}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, on sellised, et*

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \quad ja \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}, \tag{3.1}$$

siis

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n); \tag{3.2}$$

M6° *kui hulgad* $A_j \in \mathfrak{A}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, on sellised, et*

$$\mu(A_1) < \infty, \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \quad ja \quad \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}, \tag{3.3}$$

siis

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{3.4}$$

TÕESTUS. M4$^{\circ\circ}$. Olgu hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$. Tähistame

$$B_1 = A_1 \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right),\ j \in \mathbb{N},\ j \geqslant 2.$$

Siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, kusjuures hulgad B_j, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud ning $B_j \subset A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Seega

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

M5°. Rahuldagu hulgad A_j, $j \in \mathbb{N}$, eeldusi (3.1). Tähistame

$$A_0 = \emptyset \quad \text{ja} \quad B_j = A_j \setminus A_{j-1},\ j \in \mathbb{N}.$$

Siis $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, kusjuures hulgad B_j, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud; seega

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

M6°. Rahuldagu hulgad A_j, $j \in \mathbb{N}$, eeldusi (3.3). Kuna

(1) De Morgani valemite põhjal $\mu\big(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\big) = \mu\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_j)\big)$;

(2) sisalduvuste $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ tõttu $A_1 \setminus A_1 \subset A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \setminus A_3 \subset \ldots$ ning järelikult omaduse M5° põhjal $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \setminus A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)$,

siis

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu\left(A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)\\ &= \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_j)\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n)\\ &= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty}\Big(\mu(A_1) - \mu(A_n)\Big) = \mu(A_1) - \Big(\mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

□

Märkus 3.1. On ilmne, et võrdus (3.4) jääb kehtima, kui asendada eeldustes (3.3) tingimus "$\mu(A_1) < \infty$" nõrgema tingimusega "mingi $j_0 \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A_{j_0}) < \infty$". Käesoleva punkti viimasest ülesandest näeme, et selle tingimuse mitte kehtides ei tarvitse enam kehtida ka võrdus (3.4).

Ülesanne 3.3. Olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Tõestada, et

(a) kui μ rahuldab tingimust M5°, siis μ on σ-aditiivne;

(b) kui μ on lõplik ja rahuldab tingimust M6°, siis μ on σ-aditiivne.

Definitsioon 3.3. Hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ nimetatakse *mõõduks,* kui

M0°° $\mu(\emptyset) = 0$;

M1°° μ on σ-aditiivne.

Definitsioon 3.4. Kolmikut $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kus X on mingi hulk, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on algebra ning $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on mõõt, nimetatakse *eelmõõduga ruumiks.* Mõõtu μ nimetatakse seejuures ka *eelmõõduks.*

Kolmikut $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kus X on mingi hulk, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on σ-algebra ning $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on mõõt, nimetatakse *mõõduga ruumiks.*

Kui $\mu(X) = 1$, siis nimetatakse mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *tõenäosusruumiks.* Mõõtu μ nimetatakse sel juhul *tõenäosusmõõduks.*

Kui $\mu(X) < \infty$, siis öeldakse, et (eel)mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *lõplik.* Sel juhul öeldakse ka, et mõõt μ on *lõplik.*

Öeldakse, et (eel)mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *σ-lõplik,* kui hulk X on esitatav kujul

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \quad \text{kus } A_j \in \mathfrak{A} \text{ ja } \mu(A_j) < \infty,\ j \in \mathbb{N}.$$

Sel juhul öeldakse ka, et mõõt μ on *σ-lõplik.*

Ülesanne 3.4. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ σ-lõplik eelmõõduga ruum. Tõestada, et

(a) leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, nii, et $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$;

(b) leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, nii, et $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Ülesanne 3.5. Tuua näide mõõduga ruumist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ning hulkadest $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, mis rahuldavad tingimusi $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ ja $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$, kuid mitte tingimust (3.4).

Näpunäide. Tutvuda kõigepealt näitega 3.1.

3.2. Näiteid mõõduga ruumidest

Näide 3.1. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum.
Defineeerime hulgafunktsiooni $c\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ seosega

$$c(A) = \begin{cases} 0, & \text{kui } A = \emptyset; \\ \text{hulga } A \text{ elementide arv}, & \text{kui hulk } A \text{ on lõplik}; \\ \infty, & \text{kui hulk } A \text{ on lõpmatu}; \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Lihtne on kontrollida, et c on mõõt.

Ülesanne 3.6. Tõestada, et hulgafunktsioon c on mõõt.

Mõõtu c nimetatakse *loendamismõõduks*.

Näide 3.2. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $x \in X$.
Defineerime hulgafunktsiooni $\delta_x\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ seosega

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A; \\ 0, & \text{kui } x \notin A; \end{cases} \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Lihtne on kontrollida, et δ_x on mõõt.

Ülesanne 3.7. Tõestada, et hulgafunktsioon δ_x on mõõt.

Mõõtu δ_x nimetatakse *Diraci*[11] *mõõduks* (punktis x) või ka *punktmassiks* (punktis x).

Järgnev näide, mis mängib tähtsat rolli ka edasises teooriaarenduses, on eelmistest juba oluliselt sisukam.

Näide 3.3. Tähistame (nagu ka näites 2.2)

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a,b),\ [c,\infty),\ (-\infty,d),\ (-\infty,\infty) : \ \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \ \ n \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

[11]Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) — inglise matemaatik.

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa mittelõikuvate hulkade lõplike ühendite kogum. Näites 2.2 tõestasime, et $\mathcal{B}$ on algebra.

Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon.

Selles näites konstrueerime ühe mõõdu $\mu_F\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ selliselt, et

$$\mu_F\big([a,b)\big) = F(b) - F(a) \quad \text{suvaliste } a,b \in \mathbb{R},\ a<b, \text{ korral.} \tag{3.5}$$

Niisiis, kui defineerida funktsioon F seosega $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, siis

$$\mu_F\big([a,b)\big) = b - a.$$

Paneme tähele, et, tähistades

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) \quad \text{ja} \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(märgime, et funktsiooni F monotoonsuse tõttu need piirväärtused eksisteerivad), peab tingimust (3.5) rahuldav mõõt μ_F rahuldama tingimusi

$$\begin{aligned}
\mu_F(\emptyset) &= 0,\\
\mu_F\big([a,b)\big) &= F(b) - F(a), \quad a,b\in\mathbb{R},\ a<b,\\
\mu_F\big([c,\infty)\big) &= F(\infty) - F(c), \quad c\in\mathbb{R},\\
\mu_F\big((-\infty,d)\big) &= F(d) - F(-\infty), \quad d\in\mathbb{R},\\
\mu_F\big((-\infty,\infty)\big) &= F(\infty) - F(-\infty).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ülesanne 3.8. Tõestada, et kui μ_F on mõõt algebral $\mathcal{B}$, mis rahuldab tingmust (3.5), siis kehtivad tingimused (3.6).

Defineerimegi kõigepealt hulgafunktsiooni μ_F väärtused kogumi $\mathcal{H}$ hulkadel võrdustega (3.6).

Ülesanne 3.9. Tõestada, et kui paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{H}$ ($n \in \mathbb{N}$) on sellised, et $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{H}$, siis

$$\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu_F(A_j).$$

Jätkame hulgafunktsiooni μ_F algebrale $\mathcal{B}$, defineerides $A \in \mathcal{B}$ korral

$$\mu_F(A) = \sum_{j=1}^n \mu_F(A_j),$$

kus paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{H}$ ($n\in\mathbb{N}$) on sellised, et $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Hulgafunktsiooni μ_F definitsiooni korrektsus ja μ_F aditiivsus järeldub vahetult järgnevast ülesandest. Veelgi enam, sealt järeldub ka, et μ_F on ainus tingimust (3.5) rahuldav aditiivne hulgafunktsioon algebral $\mathcal{B}$.

Ülesanne 3.10. Olgu $\mathcal{S}$ (mingi hulga X alamhulkade) poolalgebra ning rahuldagu hulgafunktsioon $\nu\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ tingimust

$$A_1,\dots,A_n \in \mathcal{S}\ (n\in\mathbb{N}),\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i\neq j,\ \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \nu(A_j).$$

Olgu $\mathcal{A}$ poolalgebra $\mathcal{S}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebra, s.t.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j : \quad n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S},\, A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j \right\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Defineerime hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ seosega

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j), \quad A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A} \quad (n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S},\, A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j).$$

(I) Tõestada, et

(a) μ on korrektselt defineeritud;

(b) μ on aditiivne;

(c) μ on ainus aditiivne hulgafunktsioon algebral $\mathcal{A}$, mille puhul $\mu(A) = \nu(A)$ iga $A \in \mathcal{S}$ korral.

(II) Tõestada, et kui

$$A_j \in \mathcal{S},\, j \in \mathbb{N},\; A_i \cap A_j = \emptyset,\, i \neq j,\; \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S} \quad \Longrightarrow \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j),$$

siis μ on σ-aditiivne.

Teoreem 3.3. *Hulgafunktsioon μ_F on mõõt.*

Teoreemi 3.3 tõestus toetub oluliselt mõõdu regulaarsuse mõistele; me esitame ta käesoleva paragrahvi järgmises punktis.

Definitsioon 3.5. Olgu X mingi hulk ning olgu kogumid $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ sellised, et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Öeldakse, et hulgafunktsioon $\nu\colon \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ on hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *jätk (kogumile $\mathfrak{B}$),* kui

$$\nu(A) = \mu(A) \quad \text{iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Sel juhul öeldakse ka, et hulgafunktsioon $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ on hulgafunktsiooni $\nu\colon \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$ *ahend* (kogumile $\mathfrak{A}$).

Hulgafunktsiooni ν ahendit kogumile $\mathfrak{A}$ tähistatakse sümboliga $\nu|_{\mathfrak{A}}$. Niisiis, kui hulgafunktsioon ν on hulgafunktsiooni $\mu\colon \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ jätk, siis kirjutatakse $\nu|_{\mathfrak{A}} = \mu$.

Järgmises paragrahvis esitame skeemi, kuidas jätkata mõõt μ algebral $\mathfrak{A}$ teatavaks mõõduks selle algebra poolt genereeritud σ-algebral $\sigma(\mathfrak{A})$. Mida see meile annab? Näites 3.3, lähtudes mittekahanevast vasakult pidevast funktsioonist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konstrueerisime teataval algebral $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mõõdu μ_F, mis rahuldab tingimust (3.5). Kui me oskame jätkata mõõdu μ_F mingiks mõõduks algebra $\mathcal{B}$ poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, siis, tähistades selle jätku samuti sümboliga μ_F, saame mõõdu $\mu_F\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, mis rahuldab tingimust (3.5). Niisiis, kui defineerida funktsioon $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ võrdusega $G(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning tähistada $m = \mu_G\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$, siis m on mõõt ruumi $\mathbb{R}$ Boreli σ-algebral $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, mis rahuldab tingimust

$$m\big([a, b)\big) = b - a \quad \text{suvaliste } a, b \in \mathbb{R},\; a < b \text{ korral.}$$

Pole paha, mis?

3.3. Mõõdu regulaarsus

Definitsioon 3.6. Olgu X topoloogiline ruum ning olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Öeldakse, et monotoonne hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,\infty]$ on

- *väljast regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui
$$\rho(E) = \inf\bigl\{\rho(D)\colon \text{ hulga } D \in \mathcal{E} \text{ sisemus } D^\circ \supset E\bigr\}$$
(sel juhul öeldakse ka, et hulk E on (hulgafunktsiooni ρ suhtes) *väljast regulaarne* ehk *väljast ρ-regulaarne*);

- *seest regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui
$$\rho(E) = \sup\bigl\{\rho(C)\colon \text{ hulga } C \in \mathcal{E} \text{ sulund } \overline{C} \text{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E\bigr\}$$
(sel juhul öeldakse ka, et hulk E on (hulgafunktsiooni ρ suhtes) *seest regulaarne* ehk *seest ρ-regulaarne*);

- *regulaarne hulgal* $E \in \mathcal{E}$, kui ta on hulgal E nii väljast kui ka seest regulaarne (sel juhul öeldakse ka, et hulk E on (hulgafunktsiooni ρ suhtes) *regulaarne* ehk *ρ-regulaarne*);

- *regulaarne,* kui ta on regulaarne kogumi $\mathcal{E}$ kõikidel hulkadel.

Märkus 3.2. Kompaktne hulk K Hausdorffi topoloogilises ruumis on kinnine; niisiis $K = \overline{K}$ on Boreli hulk. Siit järeldub, et kui X on Hausdorffi topoloogiline ruum ning kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ sisaldab ruumi X Boreli σ-algebrat (s.t. $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}_X$), siis monotoonne hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0,\infty]$ on

(a) väljast regulaarne hulgal $E \in \mathcal{E}$ parajasti siis, kui
$$\rho(E) = \inf\bigl\{\rho(U)\colon \text{ hulk } U \in \mathcal{E} \text{ on lahtine ja } U \supset E\bigr\};$$

(b) seest regulaarne hulgal $E \in \mathcal{E}$ parajasti siis, kui
$$\rho(E) = \sup\bigl\{\rho(K)\colon \text{ hulk } K \in \mathcal{E} \text{ on kompaktne ja } K \subset E\bigr\}.$$

Märgime, et iga meetriline ruum on Hausdorffi topoloogiline ruum.

Teoreem 3.3 järeldub vahetult järgnevast teoreemist.

Teoreem 3.4. *Olgu X topoloogiline ruum, olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra ning olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ aditiivne hulgafunktsioon. Kui hulgafunktsioon μ on regulaarne, siis ta on σ-aditiivne.*

TÕESTUS.

***Ülesanne 3** (6 p.). Tõestada teoreem 3.4.

□

Järeldamaks teoreemist 3.4, et hulgafunktsioon μ_F näites 3.3 (ja ka teoreemis 3.3) on mõõt, jääb vaid näidata, et μ_F on regulaarne.

Ülesanne 3.11. Tõestada, et hulgafunktsioon $\mu_F\colon \mathcal{B} \to [0,\infty]$ näites 3.3 on regulaarne.

3.4. Mõõduga ruumi täield

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum.

Definitsioon 3.7. Öeldakse, et hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on *μ-hüljatav*, kui leidub hulk $F \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(F) = 0$ ja $N \subset F$.

Kui mõõdu μ roll on kontekstist selge, siis öeldakse μ-hüljatava hulga kohta ka lihtsalt *hüljatav hulk*.

Ruumi X μ-hüljatavate hulkade kogumit tähistame sümboliga $\mathcal{N}(\mu)$ või, kui mõõdu μ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt $\mathcal{N}$. Niisiis

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mu) = \big\{N \in \mathcal{P}(X)\colon \quad \text{leidub hulk } F \in \mathfrak{A},\ \mu(F) = 0, \text{ nii, et } N \subset F\big\}.$$

Definitsiooni kohaselt *hulk on hüljatav parajasti siis, kui ta on mingi nullmõõduga hulga alamhulk.* Seega on ka iga nullmõõduga hulk hüljatav. Juhime tähelepanu, et *hulga hüljatavus ei tähenda üldjuhul, et tema mõõt on null*, sest üldjuhul ei tarvitse μ-hüljatav hulk kuuluda mõõdu μ määramispiirkonda $\mathfrak{A}$. Küll aga järeldub mõõdu monotoonsusest, et *iga mõõtuva (s.t. σ-algebrasse $\mathfrak{A}$ kuuluva) hüljatava hulga mõõt on null.* Niisiis, *hüljatava hulga mõõt kas ei ole määratud või on null.*

Ülesanne 3.12. Tõestada, et hüljatavate hulkade ülimalt loenduv ühend on hüljatav hulk.

Definitsioon 3.8. Öeldakse, et mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on *täielik*, kui $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathfrak{A}$ (s.t. kõik μ-hüljatavad hulgad kuuluvad σ-algebrasse $\mathfrak{A}$). Sel juhul öeldakse ka, et mõõt μ on *täielik*.

On ilmne, et *kui ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik, siis hulga $N \subset X$ hüljatavus tähendab, et $\mu(N) = 0$.*

Teoreem 3.5. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mu)$ (s.t. $\mathcal{N}$ on hulga X kõikide μ-hüljatavate alamhulkade kogum). Tähistame*

$$\overline{\mathfrak{A}} = \big\{A \cup N\colon\ A \in \mathfrak{A},\ N \in \mathcal{N}\big\}$$

ning defineerime hulgafunktsiooni $\overline{\mu}\colon\ \overline{\mathfrak{A}} \to [0, \infty]$ seosega

$$\overline{\mu}(E) = \mu(A), \qquad E \in \overline{\mathfrak{A}},\ E = A \cup N,\ A \in \mathfrak{A},\ N \in \mathcal{N}.$$

Siis

(a) *kogum $\overline{\mathfrak{A}}$ on σ-algebra,*

(b) *σ-algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ on vähim σ-algebra, mis sisaldab nii σ-algebrat $\mathfrak{A}$ kui ka kogumit $\mathcal{N}$ (teisisõnu, $\overline{\mathfrak{A}} = \sigma(\mathfrak{A} \cup \mathcal{N})$);*

(c) *hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on mõõt;*

(d) *mõõt $\overline{\mu}$ mõõdu μ ainus jätk σ-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$;*

(e) *mõõduga ruum $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ on täielik.*

Definitsioon 3.9. Mõõduga ruumi $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ teoreemist 3.5 nimetatakse *mõõduga ruumi* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *täieldiks.* σ-algebrat $\overline{\mathfrak{A}}$ nimetatakse seejuures *σ-algebra $\mathfrak{A}$ täieldiks* (mõõdu μ suhtes) ning mõõtu $\overline{\mu}$ *mõõdu μ täieldiks.*

Teisisõnu, mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täieldiks nimetatakse mõõduga ruumi $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kus

(1) $\overline{\mathfrak{A}}$ on vähim hulga X alamhulkade σ-algebra, mis sisaldab nii σ-algebrat $\mathfrak{A}$ kui ka ruumi X kõiki μ-hüljatavaid alamhulki;

(2) mõõt $\overline{\mu}$ on mõõdu μ jätk σ-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$ (märgime, et teoreemi 3.5 põhjal on niisugune mõõt $\overline{\mu}$ üheselt määratud).

Teoreemi 3.5 tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et $\emptyset \in \overline{\mathfrak{A}}$ (sest $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, kusjuures $\emptyset \in \mathfrak{A}$ ja $\emptyset \in \mathcal{N}$) ning $X \in \overline{\mathfrak{A}}$ (sest $X = X \cup \emptyset$, kusjuures $X \in \mathfrak{A}$ ja $\emptyset \in \mathcal{N}$).

Näitame nüüd, et suvalise $E \in \overline{\mathfrak{A}}$ korral ka $E^c \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Olgu $E \in \overline{\mathfrak{A}}$. Siis leiduvad hulgad $A \in \mathfrak{A}$ ja $N \in \mathcal{N}$ selliselt, et $E = A \cup N$. Kuna hulk N on μ-hüljatav, siis leidub hulk $F \in \mathfrak{A}$, $\mu(F) = 0$, selliselt, et $N \subset F$. Paneme tähele, et

$$E^c = (A \cup N)^c = (A \cup F)^c \cup (F \setminus E).$$

Märkus 3.3. Viimase võrduse kirjapanekul on abiks joonise tegemine.

Ülesanne 3.13. Veenduda, et $(A \cup N)^c = (A \cup F)^c \cup (F \setminus E)$.

Kuna $(A \cup F)^c \in \mathfrak{A}$ ja $F \setminus E \in \mathcal{N}$ (sest $F \setminus E$ on nullmõõduga hulga $F \in \mathfrak{A}$ alamhulk), siis $E^c \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Väite (a) tõestuseks jääb näidata, et kui $E_j \in \overline{\mathfrak{A}}$, $j \in \mathbb{N}$, siis ka $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \overline{\mathfrak{A}}$.

Ülesanne 3.14. Veenduda selles.

(b).

Ülesanne 3.15. Tõestada, et $\overline{\mathfrak{A}} = \sigma(\mathfrak{A} \cup \mathcal{N})$.

(c). Veendume kõigepealt, et hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on korrektselt defineeritud, s.t. $\overline{\mu}(E)$ ei sõltu hulga $E \in \overline{\mathfrak{A}}$ esitusest kujul $E = A \cup N$, kus $A \in \mathfrak{A}$ ja $N \in \mathcal{N}$. Selleks peame veenduma, et kui $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ja $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ on sellised, et $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, siis $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Olgu $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ja $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ sellised, et $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Siis leiduvad hulgad $F_1, F_2 \in \mathfrak{A}$, selliselt, et $\mu(F_1) = \mu(F_2) = 0$ ning $N_1 \subset F_1$ ja $N_2 \subset F_2$. Kuna

$$A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \subset A_2 \cup F_2,$$

siis mõõdu μ monotoonsuse ja subaditiivsuse tõttu

$$\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2 \cup F_2) \leqslant \mu(A_2) + \mu(F_2) = \mu(A_2).$$

Analoogiliselt saame, et ka $\mu(A_2) \leqslant \mu(A_1)$ ning seega $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

Ülesanne 3.16. Tõestada, et hulgafunktsioon $\overline{\mu}$ on mõõt.

(d).

Ülesanne 3.17. Tõestada, et $\overline{\mu}$ on mõõdu μ jätk σ-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$.

Ülesanne 3.18. Tõestada, et $\overline{\mu}$ on mõõdu μ ainus jätk σ-algebrale $\overline{\mathfrak{A}}$.

(e).

Ülesanne 3.19. Tõestada, et $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\overline{\mu})$, s.t. hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on $\overline{\mu}$-hüljatav parajasti siis, kui ta on μ-hüljatav.

Ülesanne 3.20. Tõestada, et mõõduga ruum $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ on täielik.

□

3.5. Harjutusülesandeid

Ülesanne 3.21. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $\mu_1, \mu_2 \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mõõdud. Tõestada, et

(a) $\mu_1 + \mu_2 \colon \mathfrak{A} \ni A \mapsto \mu_1(A) + \mu_2(A) \in [0, \infty]$ on mõõt;

(b) $\mu_1 + \mu_2$ on σ-lõplik parajasti siis, kui μ_1 ja μ_2 on σ-lõplikud.

Ülesanne 3.22. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $A, A_j, B_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) $\mu\big(A \setminus (B_1 \cap B_2)\big) \leqslant \mu(A \setminus B_1) + \mu(A \setminus B_2)$;

(b) $\mu\left(A \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \setminus B_j)$;

(c) $\mu\big((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)\big) \leqslant \mu(A_1 \setminus B_1) + \mu(A_2 \setminus B_2)$;

(b) $\mu\left(\big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\big) \setminus \big(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\big)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j \setminus B_j)$.

Ülesanne 3.23. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, kus X on Hausdorffi topoloogiline ruum, ning olgu $\mu_1, \mu_2 \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ mõõdud. Tõestada, et $\mu_1 + \mu_2$ on regulaarne parajasti siis, kui μ_1 ja μ_2 on regulaarsed.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi X Boreli σ-algebrat.

Ülesanne 3.24. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum, kus X on Hausdorffi topoloogiline ruum, ning olgu $E \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) kui μ on hulgal E seest regulaarne, siis μ on täiendil E^c väljast regulaarne;

(b) kui X on kompaktne ja μ on hulgal E väljast regulaarne, siis μ on täiendil E^c seest regulaarne;

(b') kui μ on hulgal X seest regulaarne ja hulgal E väljast regulaarne, siis μ on täiendil E^c seest regulaarne.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi X Boreli σ-algebrat.

Ülesanne 3.25. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum, kus X on σ-kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum (s.t. Hausdorffi topoloogiline ruum, mis esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina) ning $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$. Tõestada, et kui μ on väljast regulaarne ning lõplik ruumi X kompaktsetel hulkadel, siis μ on regulaarne.

Näpunäide. Kõigepealt veenduda, et kui $K, E \in \mathfrak{A}$, kus K on kompaktne, siis μ on hulgal $K \cap E$ seest regulaarne. Selleks kasutada mõõdu μ väljast regulaarsust hulgal $K \cap E^c$.

Ülesanne 3.26. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum, kus X on Hausdorffi topoloogiline ruum. Tõestada, et

(a) kui μ on hulgal X seest regulaarne, siis

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathfrak{A} \colon\ \mu \text{ on hulgal } A \text{ regulaarne}\}$$

on σ-algebra (selle väite tõestamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi X Boreli σ-algebrat);

(b) kui $\mathfrak{A} = \mathcal{B}_X$ (s.t. μ on lõplik Boreli mõõt) ja μ on ruumi X igal lahtisel hulgal seest regulaarne, siis μ on regulaarne.

***Ülesanne 4** (9 p.)**.** Tõestada, et iga lõplik Boreli mõõt täielikus separaablis meetrilises ruumis on regulaarne.

NÄPUNÄIDE. Ülesande 3.26 põhjal piisab näidata, et lõplik Boreli mõõt täielikus separaablis meetrilises ruumis on igal lahtisel hulgal seest regulaarne. Selleks kasutada Hausdorffi teoreemi.

Ülesanne 3.27. Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) $E \in \overline{\mathfrak{A}}$;

(ii) $E = A \cup N_1$, kus $A \in \mathfrak{A}$, $N_1 \in \mathcal{N}$, $A \cap N_1 = \emptyset$;

(iii) $E = B \setminus N_2$, kus $B \in \mathfrak{A}$, $N_2 \in \mathcal{N}$;

(iv) $E = B \setminus N_3$, kus $B \in \mathfrak{A}$, $N_3 \in \mathcal{N}$, $N_3 \subset B$;

(v) leiduvad $A, B \in \mathfrak{A}$ nii, et $A \subset E \subset B$ ja $\mu(B \setminus A) = 0$.

Ülesanne 3.28. Tõestada, et mõõduga ruum on σ-lõplik parajasti siis, kui tema täield on σ-lõplik.

Ülesanne 3.29. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $X \supset Y \in \mathfrak{A}$. Tähistame

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \colon\ A \in \mathfrak{A}\} \subset \mathcal{P}(Y) \quad \text{ja} \quad \nu = \mu|_{\mathfrak{B}},$$

s.t. $\nu(B) = \mu(B)$, $B \in \mathfrak{B}$. Ülesandest 2.11 teame, et $\mathfrak{B}$ on σ-algebra, seega ν on mõõt. Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ ja $(Y, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\nu})$ vastavalt mõõduga ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ täieldid. Tõestada, et

(a) $\mathcal{N}(\nu) = \{N \cap Y \colon\ N \in \mathcal{N}(\mu)\}$;

(b) $\overline{\mathfrak{B}} = \{E \cap Y \colon\ E \in \overline{\mathfrak{A}}\}$;

(c) $\overline{\nu} = \overline{\mu}|_{\overline{\mathfrak{B}}}$.

Ülesanne 3.30. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum, kus X on Hausdorffi topoloogiline ruum. Tõestada, et μ on regulaarne parajasti siis, kui tema täield $\overline{\mu}$ on regulaarne.

Lahendamisel võib piirduda juhuga, kus $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$, s.t. $\mathfrak{A}$ sisaldab ruumi X Boreli σ-algebrat.

§ 4. Välismõõdud

Kõikjal selles paragrahvis olgu X mingi hulk.

Definitsioon 4.1. Olgu μ_0 mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ning olgu algebra $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$.

Öeldakse, et mõõt $\mu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ on mõõdu μ_0 *jätk* algebrale $\mathfrak{B}$ ja kirjutatakse $\mu|_{\mathfrak{A}} = \mu_0$ (loetakse: μ ahend algebrale $\mathfrak{A}$ on μ_0), kui

$$\mu(A) = \mu_0(A) \quad \text{iga } A \in \mathfrak{A} \text{ korral.}$$

Selles paragrahvis esitame skeemi, kuidas jätkata algebral defineeritud mõõt selle algebra poolt genereeritud σ-algebrale. Selleks on otstarbekas sisse tuua järgnev mõisteteaparatuur.

Definitsioon 4.2. Hulgafunktsiooni $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ nimetatakse *välismõõduks,* kui

OM1° $\lambda(\emptyset) = 0$;

OM2° λ on *monotoonne,* s.t.

$$A, B \in \mathcal{P}(X),\ A \subset B \ \Rightarrow\ \lambda(A) \leqslant \lambda(B);$$

OM3° λ on *loenduvalt subaditiivne,* s.t.

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j), \qquad E_j \in \mathcal{P}(X),\ j \in \mathbb{N}.$$

Lemma 4.1. *Olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ja hulgafunktsioon $\rho\colon \mathcal{E} \to [0, \infty]$ sellised, et*

$$\emptyset, X \in \mathcal{E} \quad \text{ja} \quad \rho(\emptyset) = 0.$$

Siis hulgafunktsioon $\rho^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, mis on defineeritud seosega

$$\rho^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j)\colon\ A_j \in \mathcal{E},\ j \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}, \qquad E \in \mathcal{P}(X),$$

on välismõõt.

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et hulgafunktsiooni ρ^* definitsioon on korrektne, sest iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral leiduvad hulgad $A_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. (Me võime võtta näiteks $A_j = X$, $j \in \mathbb{N}$.)

Vahetult on konrollitav, et $\rho^*(\emptyset) = 0$ ning ρ^* on monotoonne.

Ülesanne 4.1. Tõestada, et $\rho^*(\emptyset) = 0$ ning ρ^* on monotoonne.

Olgu $E_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in \mathbb{N}$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et

$$\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j).$$

Selleks aga piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral

$$\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Valime iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulgad $A_i^j \in \mathcal{E}$, $i \in \mathbb{N}$, selliselt, et

$$E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^j \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leqslant \rho^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ilmselt $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^j = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_i^j$ ning seega

$$\begin{aligned}
\rho^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &= \inf\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \rho(A_k)\colon\ A_k \in \mathcal{E},\ k \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right\} \\
&\leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} \rho(A_i^j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i^j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\rho^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \rho^*(E_j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Olgu $\lambda\colon\ \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ välismõõt.

Definitsioon 4.3. Öeldakse, et hulk $A \in \mathcal{P}(X)$ on λ-*mõõtuv* (ehk välismõõdu λ *suhtes mõõtuv*), kui

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \quad \text{iga } E \in \mathcal{P}(X) \text{ korral.}$$

On selge, et *hulk* $A \in \mathcal{P}(X)$ *on* λ-*mõõtuv parajasti siis, kui*

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) \leqslant \lambda(E) \quad \textit{iga } E \in \mathcal{P}(X),\ \lambda(E) < \infty, \textit{ korral}$$

(sest vastupidine võrratus kehtib välismõõdu subaditiivsuse tõttu alati ning juhul, kui $\lambda(E) = \infty$, kehtib see võrratus triviaalselt).

Hulga X kõigi λ-mõõtuvate alamhulkade kogumit tähistame edaspidi sümboliga $\mathcal{M}(\lambda)$.

Teoreem 4.2 (Carathéodory[12] teoreem)**.** *Olgu* $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *välismõõt. Siis*

(a) $\mathcal{M}(\lambda)$ *on σ-algebra (s.t. kõigi λ-mõõtuvate hulkade kogum on σ-algebra);*

(b) $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ *(s.t. välismõõdu λ ahend kõigi λ-mõõtuvate hulkade σ-algebrale $\mathcal{M}(\lambda)$) on täielik mõõt.*

Tõestus. (a). Tõestamaks, et $\mathcal{M}(\lambda)$ on σ-algebra, piisab näidata, et

(a1) $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra;

(a2) kui hulgad $A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud, siis $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$.

(a1). Kõigepealt paneme tähele, et $\emptyset \in \mathcal{M}(\lambda)$ ning kui $A \in \mathcal{M}(\lambda)$, siis ka $A^c \in \mathcal{M}(\lambda)$.

Ülesanne 4.2. Tõestada, et

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}(\lambda)$;

(2) kui $A \in \mathcal{M}(\lambda)$, siis ka $A^c \in \mathcal{M}(\lambda)$.

Olgu $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$. Veendumaks, et $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra, jääb näidata, et $A \cup B \in \mathcal{M}(\lambda)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda\big(E \cap (A \cup B)\big) + \lambda\big(E \cap (A \cup B)^c\big) = \lambda(E).$$

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Arvestades, et hulgad A ja B on λ-mõõtuvad, saame, et

$$\begin{aligned}
\lambda\big(&E \cap (A \cup B)\big) + \lambda\big(E \cap (A \cup B)^c\big)\\
&= \lambda\big(E \cap (A \cup B) \cap A\big) + \lambda\big(E \cap (A \cup B) \cap A^c\big) + \lambda(E \cap A^c \cap B^c)\\
&= \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c \cap B) + \lambda(E \cap A^c \cap B^c)\\
&= \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c)\\
&= \lambda(E).
\end{aligned}$$

(a2). Olgu hulgad $A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, $j \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud. Väite (a) tõestuseks jääb näidata, et $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) + \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big)^c\right) \leqslant \lambda(E).$$

Selleks paneme esmalt tähele, et kui hulgad $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\lambda\big(E \cap (A \cup B)\big) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B) \quad \text{iga } E \in \mathcal{P}(X) \text{ korral.} \tag{4.1}$$

[12]Constantin Carathéodory (1873–1950) — kreeka päritolu saksa matemaatik.

Tõepoolest, kui hulgad $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\begin{aligned}\lambda\big(E \cap (A \cup B)\big) &= \lambda\big(E \cap (A \cup B) \cap A\big) + \lambda\big(E \cap (A \cup B) \cap A^c\big) \\ &= \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap B).\end{aligned}$$

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Kuna hulgad A_j, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud, siis saame tingimusest (4.1) induktsiooni teel, et

$$\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(E \cap A_j) \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Seega

$$\begin{aligned}\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda(E \cap A_j) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right).\end{aligned}$$

Teiselt poolt

$$\lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right). \tag{4.2}$$

Tõepoolest, kuna $E \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)^c \subset E \cap (\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j)^c \subset E \cap (\bigcup_{j=1}^{n} A_j)^c$, $n \in \mathbb{N}$, ning λ on monotoonne, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\Big)^c\right) \leqslant \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right);$$

niisiis piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right)$ eksisteerib, kusjuures kehtib (4.2).

Seega

$$\begin{aligned}&\lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)^c\right) \\ &\qquad\leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \lim_{n\to\infty} \lambda\left(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\right) \\ &\qquad= \lim_{n\to\infty} \left(\lambda\Big(E \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \lambda\Big(E \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)^c\Big)\right) \\ &\qquad= \lim_{n\to\infty} \lambda(E) \\ &\qquad= \lambda(E),\end{aligned}$$

sest kuna $\mathcal{M}(\lambda)$ on algebra, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{M}(\lambda)$.

(b). Veendumaks, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on mõõt, paneme kõigepealt tähele, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on aditiivne hulgafunktsioon.

Tõepoolest, mistahes $A, B \in \mathcal{M}(\lambda)$, $A \cap B = \emptyset$, korral järeldub λ-mõõtuvuse definitsioonist, et

$$\lambda(A \cup B) = \lambda\big((A \cup B) \cap A\big) + \lambda\big((A \cup B) \cap A^c\big) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Kuna aditiivne hulgafunktsioon on σ-aditiivne parajasti siis, kui ta on loenduvalt subaditiivne, siis $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on mõõt (sest λ (ja seega ka $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$) on loenduvalt subaditiivne ning $\lambda(\emptyset) = 0$).

Veendumaks, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on täielik mõõt, paneme kõigepealt tähele, et kehtib implikatsioon

$$N \in \mathcal{P}(X),\ \lambda(N) = 0 \quad \Longrightarrow \quad N \in \mathcal{M}(\lambda).$$

Tõepoolest, kui $N \in \mathcal{P}(X)$ on selline, et $\lambda(N) = 0$, siis λ monotoonsuse tõttu iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral $\lambda(E \cap N) + \lambda(E \cap N^c) \leqslant \lambda(N) + \lambda(E) = \lambda(E)$; järelikult $N \in \mathcal{M}(\lambda)$.

Ülesanne 4.3. Tõestada, et $\lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ on täielik mõõt.

□

Teoreem 4.3. *Olgu μ mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ja olgu hulgafunktsioon $\mu^*\colon\ \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ defineeritud seosega*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}, \qquad E \in \mathcal{P}(X). \tag{4.3}$$

Siis

(a) *hulgafunktsioon μ^* on välismõõt;*

(b) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ *(s.t. kõik algebra $\mathfrak{A}$ hulgad on μ^*-mõõtuvad);*

(c) $\mu^*|_{\mathfrak{A}} = \mu$ *(s.t. $\mu^*(A) = \mu(A)$ iga $A \in \mathfrak{A}$ korral).*

Seosega (4.3) defineeritud välismõõtu μ^* nimetatakse *mõõduga μ assotsieeruvaks välismõõduks.*

TEOREEMI 4.3 TÕESTUS. Väide (a) järeldub vahetult lemmast 4.1.

(b). Olgu $A \in \mathfrak{A}$. Väite tõestuseks peame näitama, et $A \in \mathcal{M}(\mu^*)$, s.t. iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E). \tag{4.4}$$

Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$ ning olgu hulgad $B_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Tingimuse (4.4) kehtivuseks piisab veenduda, et

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j).$$

Kuna $A \cap B_j, A^c \cap B_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, kusjuures $E \cap A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A \cap B_j$ ja $E \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^\infty A^c \cap B_j$, siis

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A \cap B_j) + \sum_{j=1}^\infty \mu(A^c \cap B_j)\\ &= \sum_{j=1}^\infty \big(\mu(A \cap B_j) + \mu(A^c \cap B_j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^\infty \mu\big((A \cap B_j) \cup (A^c \cap B_j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j).\end{aligned}$$

(c). Olgu $A \in \mathfrak{A}$. Väite tõestuseks peame näitama, et $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Veendumaks, et $\mu(A) \geqslant \mu^*(A)$, tähistame $B_1 = A$ ja $B_j = \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$; siis

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(B_i) \geqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\, j \in \mathbb{N},\, A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\} = \mu^*(A).$$

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\mu(A) \leqslant \mu^*(A)$. Selleks piisab näidata, et kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, on sellised, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, siis $\mu(A) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$.

Tõepoolest, sel juhul

$$\mu(A) \leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\, j \in \mathbb{N},\, A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\} = \mu^*(A).$$

Olgu hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Siis

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A \cap A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A \cap A_j) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

□

Nüüd me oleme võimelised esitama skeemi, kuidas jätkata algebral defineeritud mõõt selle algebra poolt genereeritud σ-algebrale.

Olgu μ_0 mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ning olgu $\mu_0^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mõõduga μ_0 assotsieeruv välismõõt, s.t.

$$\mu_0^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\, j \in \mathbb{N},\, E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\}, \qquad E \in \mathcal{P}(X).$$

Tähistame $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Siis

(a) μ on mõõt (Carathéodory teoreemi põhjal on $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ mõõt; kuna teoreemi 4.3 põhjal $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$, siis ka $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$ (sest $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ on Carathéodory teoreemi põhjal σ-algebra); seega on ka $\mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ mõõt);

(b) μ on mõõdu $\mu_0\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ jätk algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$ (sest teoreemi 4.3 põhjal iga $A \in \mathfrak{A}$ korral $\mu(A) = \mu_0^*(A) = \mu_0(A)$).

Niisiis me oleme jätkanud mõõdu μ_0 algebralt $\mathfrak{A}$ selle algebra poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$.

Mõõtusid $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ ja $\mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ nimetatakse mõõdu μ_0 *Carathéodory-Hahni*[13] *jätkudeks.*

Ülalkirjeldatud skeemi (eel)mõõdu μ_0 jätkamiseks algebralt $\mathfrak{A}$ selle algebra poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$ (ning ka μ_0^*-mõõtuvate hulkade σ-algebrale $\mathcal{M}(\mu_0^*)$) nimetame edaspidi *Carathéodory-Hahni skeemiks.*

Teoreem 4.4 (Hahni jätkamisteoreem). *Olgu μ_0 mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Tähistame $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$. Siis*

(a) *μ on mõõdu μ_0 jätk algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$;*

(b) *kui mõõt $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ on mõõdu μ_0 mingi jätk, siis iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral $\nu(A) \leqslant \mu(A)$; seejuures, kui $\mu(A) < \infty$, siis $\nu(A) = \mu(A)$;*

(c) *kui mõõt μ_0 on σ-lõplik, siis μ on mõõdu μ_0 ainus jätk σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$.*

TÕESTUS. Väide (a) on tõestatud teoreemile eelnevas arutelus.

(b). Olgu $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0,\infty]$ mõõdu μ_0 mingi jätk.

Kõigepealt näitame, et iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Olgu $A \in \sigma(\mathfrak{A})$. Kui hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, on sellised, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, siis

$$\nu(A) \leqslant \nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j);$$

järelikult ka

$$\nu(A) \leqslant \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A},\ j \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j\right\} = \mu_0^*(A) = \mu(A).$$

Olgu nüüd $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ selline, et $\mu(A) < \infty$. Väite tõestuseks jääb näidata, et $\mu(A) \leqslant \nu(A)$. Selleks valime hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, selliselt, et $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu_0(A_j) < \mu_0^*(A) + 1 = \mu(A) + 1 < \infty.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et hulgad A_j, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud.

[13]Hans Hahn (1879–1934) — austria matemaatik.

Tõepoolest, kui tähistada $A_1' = A_1$ ja $A_j' = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 2$, siis $A_j' \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, ja $A_i' \cap A_j' = \emptyset$, kui $i \neq j$; seejuures

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j' \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j') \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) < \mu(A) + 1.$$

Tähistame $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Kuna

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) = \nu(C),$$

siis

$$\mu(A) + \mu(C \setminus A) = \mu(C) = \nu(C) = \nu(A) + \nu(C \setminus A)$$

Kuna eelnevalt tõestatu põhjal $\mu(C \setminus A) \geqslant \nu(C \setminus A)$, siis järeldub siit, et $\mu(A) \leqslant \nu(A)$.

(c). Olgu mõõt μ_0 σ-lõplik ning olgu $\nu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0, \infty]$ mõõdu μ_0 mingi jätk. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et $\nu = \mu$, s.t. $\nu(A) = \mu(A)$ iga $A \in \sigma(\mathfrak{A})$ korral.

Olgu $A \in \sigma(\mathfrak{A})$. Mõõdu μ_0 σ-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, selliselt, et $\mu_0(A_j) < \infty$, $j \in \mathbb{N}$, ja $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$. Seega

$$\begin{aligned}\nu(A) = \nu(A \cap X) &= \nu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \nu(A \cap A_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mu(A \cap A_j) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap A_j\right) = \mu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A \cap X) = \mu(A),\end{aligned}$$

sest iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\mu(A \cap A_j) \leqslant \mu(A_j) = \mu_0(A_j) < \infty$ ning järelikult väite (b) põhjal $\nu(A \cap A_j) = \mu(A \cap A_j)$, $j \in \mathbb{N}$. □

Lause 4.5. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ eelmõõduga ruum ning olgu $\mu_1 = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ja $\mu_2 = \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ (s.t. mõõdud $\mu_1\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0, \infty]$ ja $\mu_2\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0, \infty]$ on (eel)mõõdu μ_0 Carathéodory-Hahni jätkud). Siis $\mu_0^* = \mu_1^* = \mu_2^*$.*

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ eelmõõduga ruum. Carathéodory teoreemist 4.2 ja teoreemist 4.3 teame, et $\big(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}\big)$ on mõõduga ruum, kusjuures $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ on (eel)mõõdu μ_0 jätk. Lausest 4.5 järeldub, et Carathéodory-Hahni skeem ei võimalda mõõtu $\mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$ (ning seega ka (eel)mõõtu μ_0) σ-algebrast $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ enam "kaugemale" jätkata.

Lause 4.5 ning ka järgneva teoreemi 4.6 tõestusel on abiks, kui eelnevalt lahendada

Ülesanne 4.4. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Tõestada, et

(a) iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \inf\big\{\mu(A)\colon\ A \in \mathfrak{A},\ A \supset E\big\} \\ &= \min\big\{\mu(A)\colon\ A \in \mathfrak{A},\ A \supset E\big\};\end{aligned}$$

(b) hulk $N \in \mathcal{P}(X)$ on μ-hüljatav parajasti siis, kui $\mu^*(N) = 0$.

Lause 4.5 tõestus.

Ülesanne 4.5. Tõestada lause 4.5.

Näpunäide. Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $\mu_0^*(E) \geqslant \mu_1^*(E) \geqslant \mu_2^*(E) \geqslant \mu_0^*(E)$. Siin esimese kahe võrratuse tõestuseks kasutada välismõõtude μ_0^*, μ_1^* ja μ_2^* definitsioone ning asjaolu, et $\mu_0 = \mu_0^*|_{\mathfrak{A}}$, $\mu_1 = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ja $\mu_2 = \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)}$. Võrratuse $\mu_2^*(E) \geqslant \mu_0^*(E)$ tõestuseks kasutada ülesannet 4.4, (a).

□

Olgu μ_0 mõõt algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Carathéodory teoreemist ja teoreemist 4.3 järeldub, et mõõt μ_0 on jätkatav mitte ainult algebra $\mathfrak{A}$ poolt genereeritud σ-algebrale $\sigma(\mathfrak{A})$, vaid ka μ_0^*-mõõtuvate hulkade σ-algebrale $\mathcal{M}(\mu_0^*)$, mis sisaldab σ-algebrat $\sigma(\mathfrak{A})$. Tekib loomulik küsimus: milline on σ-algebrate $\sigma(\mathfrak{A})$ ja $\mathcal{M}(\mu_0^*)$ vahekord? Me teame, et alati $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}(\mu_0^*)$, kuid kas on võimalik ka nende σ-algebrate võrdsus? Osalise vastuse sellele küsimusele annab

Teoreem 4.6. *Olgu μ σ-lõplik mõõt σ-algebral $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Siis mõõduga ruum $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)})$ on mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield.*

Teoreemist 4.6 järeldub muuhulgas, et kui σ-lõplik mõõduga ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik, siis $\mathcal{M}(\mu^*) = \mathfrak{A}$ ning seega ei võimalda Carathéodory-Hahni skeem mõõtu μ σ-algebralt $\mathfrak{A}$ enam “kaugemale” jätkata.

Teoreemi 4.6 tõestus.

***Ülesanne 5** (8 p.)**.** Tõestada teoreem 4.6.

Näpunäide. Mugav on kasutada ülesannet 4.4.

□

Järeldus 4.7. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu_0)$ σ-lõplik eelmõõduga ruum. Siis mõõduga ruum $(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)})$ on mõõduga ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})})$ täield.*

Tõestus. Olgu $\mu\colon \sigma(\mathfrak{A}) \to [0, \infty]$ eelmõõdu μ_0 Carathéodory-Hahni jätk. Kuna μ_0 on σ-lõplik, siis ka μ on σ-lõplik, seega teoreemi 4.6 põhjal on $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu^*|_{\mathcal{M}(\mu^*)})$ mõõduga ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu)$ täield. Kuna $\mu = \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ ning lause 4.5 põhjal $\mu^* = \mu_0^*$, siis $(X, \mathcal{M}(\mu_0^*), \mu_0^*|_{\mathcal{M}(\mu_0^*)})$ on ruumi $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu_0^*|_{\sigma(\mathfrak{A})})$ täield. □

Ülesanne 4.6. Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk, olgu $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ välismõõt ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j)\colon\ E_j \in \mathcal{E},\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset E \right\}$$

Tõestada, et hulk $A \subset X$ on λ-mõõtuv parajasti siis, kui iga $E \in \mathcal{E}$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

§ 5. Boreli mõõdud ruumis $\mathbb{R}$

5.1. Boreli mõõdud ruumis $\mathbb{R}$. Lebesgue-Stieltjesi[14] mõõdud

Definitsioon 5.1. *Boreli mõõtudeks* topoloogilises ruumis X nimetatakse mõõtusid, mille määramispiirkonnaks on selle ruumi Boreli σ-algebra $\mathcal{B}_X$.

Tähistame (nagu ka paragrahvides 2 ja 3)

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a,b),\ [c,\infty),\ (-\infty,d),\ (-\infty,\infty):\quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

ning

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j :\quad n \in \mathbb{N},\ A_1,\dots,A_n \in \mathcal{H},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j \right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

s.t. $\mathcal{B}$ on kogumi $\mathcal{H}$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogum. Näites 2.2 tõestasime, et $\mathcal{B}$ on algebra.

Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Tähistame

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) \quad \text{ja} \quad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(märgime, et funktsiooni F monotoonsuse tõttu need piirväärtused eksisteerivad). Defineerime hulgafunktsiooni $\mu_F^0\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ seostega

$$\begin{aligned}
\mu_F^0(\emptyset) &= 0,\\
\mu_F^0\big([a,b)\big) &= F(b) - F(a), \qquad a,b \in \mathbb{R},\ a<b,\\
\mu_F^0\big([c,\infty)\big) &= F(\infty) - F(c), \qquad c \in \mathbb{R},\\
\mu_F^0\big((-\infty,d)\big) &= F(d) - F(-\infty), \qquad d \in \mathbb{R},\\
\mu_F^0\big((-\infty,\infty)\big) &= F(\infty) - F(-\infty)
\end{aligned}$$

ning jätkame selle hulgafunktsiooni algebrale $\mathcal{B}$, defineerides $A \in \mathcal{B}$ korral

$$\mu_F^0(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_F^0(A_j),$$

kus paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{H}$ ($n \in \mathbb{N}$) on sellised, et $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

Näites 3.3 veendusime, et μ_F^0 on mõõt (selles näites kirjutasime lihtsuse mõttes μ_F^0 asemel μ_F).

[14] Thomas Jan Stieltjes (1856–1894) —hollandi matemaatik (viimased kümme aastat oma elust tegutses Prantsusmaal).

Ülesanne 5.1. Tõestada, et mõõt μ_F^0 on σ-lõplik.

Kuna mõõt μ_F^0 on σ-lõplik, siis Hahni teoreemi põhjal on tema Carathéodory-Hahni jätk $\mu_F := {\mu_F^0}^*|_{\sigma(\mathcal{B})}$ tema ainus jätk σ-algebrale $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Mõõtu $\mu_F\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ nimetatame edaspidi *funktsioonile F vastavaks Boreli mõõduks ruumis $\mathbb{R}$.*

Täpse ülevaate mittekahanevate vasakult pidevate funktsioonide $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja ruumi $\mathbb{R}$ Boreli mõõtude vahekorrast annab

Teoreem 5.1. (a) *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Siis leidub parajasti üks mõõt $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ selliselt, et suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral*

$$\mu\big([a,b)\big) = F(b) - F(a).$$

Seejuures $\mu = \mu_F$. Kui $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on mingi selline mittekahanev vasakult pidev funktsioon, et $\mu_G = \mu_F$, siis leidub konstant $C \in \mathbb{R}$ nii, et

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) *Olgu mõõt $\mu\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,\infty]$ selline, et iga tõkestatud hulga $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ korral $\mu(A) < \infty$. Siis on funktsioon*

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big([0,x)\big), & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \\ -\mu\big([x,0)\big), & \text{kui } x < 0, \end{cases}$$

mittekahanev ja vasakult pidev, kusjuures $\mu = \mu_F$.

Tõestus.

Ülesanne 5.2. Tõestada teoreem 5.1.

□

Carathéodory teoreemi kohaselt on ${\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)}$ (s.t. mõõduga μ_F^0 assotsieeruva välismõõdu ${\mu_F^0}^*$ ahend ruumi $\mathbb{R}$ ${\mu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade σ-algebrale $\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)$) täielik mõõt, s.t. $\big(\mathbb{R}, \mathcal{M}({\mu_F^0}^*), {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)}\big)$ on täielik mõõduga ruum.

Tähistame

$$\mathcal{M}_F = \mathcal{M}({\mu_F^0}^*) \quad \text{ja} \quad \overline{\mu}_F = {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}({\mu_F^0}^*)} = {\mu_F^0}^*|_{\mathcal{M}_F}.$$

σ-algebrat $\mathcal{M}_F$ nimetatakse (funktsioonile F vastavaks) *Lebesgue-Stieltjesi σ-algebraks* ning selle σ-algebra hulki (funktsioonile F vastavateks) *Lebesgue-Stieltjesi hulkadeks.* Mõõtu $\overline{\mu}_F$ nimetatakse (funktsioonile F vastavaks) *Lebesgue-Stieltjesi mõõduks.*

Kuna mõõt μ_F^0 on σ-lõplik, siis järelduse 4.7 põhjal on mõõduga ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \overline{\mu}_F)$ mõõduga ruumi $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu_F)$ täield.

Saab näidata, et ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu_F)$ pole kunagi täielik; niisiis alati $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subsetneqq \mathcal{M}_F$ (vt. märkust 5.7).

Kuna mõõt $\overline{\mu}_F$ on Boreli mõõdu μ_F jätk ning seejuures ainus jätk, siis kirjutame edaspidises lihtsuse mõttes $\overline{\mu}_F$ asemel sageli ka μ_F.

Kui $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, siis tähistatakse Lebesgue-Stieltjesi mõõtu $\overline{\mu}_F$ (ning ka Boreli mõõtu $\mu_F = \overline{\mu}_F|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$) sümboliga m ning σ-algebrat $\mathcal{M}_F$ sümboliga $\mathcal{L}$. σ-algebrat $\mathcal{L}$ nimetatakse (ruumi $\mathbb{R}$) *Lebesgue'i σ-algebraks* ning selle σ-algebra hulki (ruumi $\mathbb{R}$) *Lebesgue'i hulkadeks.* Mõõtu m nimetatakse *Lebesgue'i mõõduks* (ruumis $\mathbb{R}$).

Märkus 5.1. Teoreemist 5.1, (a), järeldub, et Lebesgue'i mõõt m on ainus ruumi $\mathbb{R}$ Boreli σ-algebral määratud mõõt, mis rahuldab suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, korral tingimust $m\big([a,b)\big) = b - a$. Lebesgue'i mõõt on ka ainus Lebesgue'i σ-algebral määratud mõõt, mis seda tingimust rahuldab (sest Lebesgue'i σ-algebra on Boreli σ-algebra täield mõõdu m suhtes).

Ülesanne 5.3. Olgu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tõestada, et

(a) $\{a\} \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, kusjuures $m\big(\{a\}\big) = 0$ (s.t. ühepunktiline hulk ruumis $\mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv, kusjuures tema Lebesgue'i mõõt on null);

(b) $m\big([a,b)\big) = m\big((a,b)\big) = m\big((a,b]\big) = m\big([a,b]\big) = b - a$;

(c) $m\big([c,\infty)\big) = m\big((c,\infty)\big) = m\big((-\infty,d)\big) = m\big((-\infty,d]\big) = m\big((-\infty,-\infty)\big) = \infty$;

(d) kui hulk $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on ülimalt loenduv, siis $A \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, kusjuures $m(A) = 0$.

Vahetult Lebesgue-Stieltjesi mõõdu definitsioonist järeldub, et iga $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ korral

$$\begin{aligned}
{\mu_F^0}^*(E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_F^0(B_j)\colon\ B_j \in \mathcal{B},\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty B_j \supset E\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{k=1}^\infty \mu_F^0(A_k)\colon\ A_k \in \mathcal{H},\ k \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty A_k \supset E\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_F^0\big([a_j,b_j)\big)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty [a_j,b_j) \supset E\right\}\\
&= \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_F\big([a_j,b_j)\big)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty [a_j,b_j) \supset E\right\}.
\end{aligned}$$

Lause 5.2. *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Siis iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral*

$$ {\mu_F^0}^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_F\big((a_j,b_j)\big)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty (a_j,b_j) \supset E\right\} =: \nu_F(E). $$

Muuhulgas, iga $E \in \mathcal{M}_F$ korral

$$ \mu_F(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \mu_F\big((a_j,b_j)\big)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty (a_j,b_j) \supset E\right\}. \quad (5.1) $$

Tõestus. Olgu $E \in \mathcal{P}(X)$. Lause tõestuseks piisab näidata, et ${\mu_F^0}^*(E) = \nu_F(E)$.

Kui tõkestatud vahemikud (a_j, b_j), $j \in \mathbb{N}$, on sellised, et $\bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j) \supset E$, siis valides iga $j \in \mathbb{N}$ korral paarikaupa lõikumatud poollõigud $[a_j^i, b_j^i)$, $i \in \mathbb{N}$, nii, et $(a_j, b_j) = \bigcup_{i=1}^\infty [a_j^i, b_j^i)$ (sellised poollõigud ilmselt leiduvad), kehtib sisalduvus $\bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty [a_j^i, b_j^i) \supset E$, seega teoreemile eelneva võrdusteahela põhjal

$$ {\mu_F^0}^*(E) \leqslant \sum_{j,i=1}^\infty \mu_F\big([a_j^i, b_j^i)\big) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \mu_F\big([a_j^i, b_j^i)\big) = \sum_{j=1}^\infty \mu_F\big((a_j, b_j)\big); $$

järelikult ${\mu_F^0}^*(E) \leqslant \nu_F(E)$.

Lause tõestuseks jääb näidata, et $\nu_F(E) \leqslant {\mu_F^0}^*(E)$, milleks, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab näidata, et $\nu_F(E) \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + 2\varepsilon$. Teoreemile eelneva võrdusteahela põhjal leiduvad poollõigud $[a_j, b_j)$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et

$$ \bigcup_{j=1}^\infty [a_j, b_j) \supset E \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^\infty \mu_F\big([a_j, b_j)\big) \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + \varepsilon. $$

Funktsiooni F vasakult pidevuse tõttu leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral $c_j < a_j$ nii, et

$$ F(c_j) > F(a_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}. $$

Nüüd $\bigcup_{j=1}^\infty (c_j, b_j) \supset \bigcup_{j=1}^\infty [a_j, b_j) \supset E$ ning järelikult

$$ \begin{aligned} \nu_F(E) &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu_F\big((c_j, b_j)\big) \leqslant \sum_{j=1}^\infty \mu_F\big([c_j, b_j)\big) = \sum_{j=1}^\infty \big(F(b_j) - F(c_j)\big) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^\infty \Big(F(b_j) - F(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mu_F\big([a_j, b_j)\big) + \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j} \leqslant {\mu_F^0}^*(E) + 2\varepsilon. \end{aligned} $$

□

Erijuhul $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, saame lausest 5.2, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$ {\mu_F^0}^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty (b_j - a_j) \colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j) \supset E \right\} \tag{5.2} $$

ning, muuhulgas, iga $E \in \mathcal{L}$ korral (sümbolid $\mathcal{L}$ ja m tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$)

$$ m(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty (b_j - a_j) \colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j) \supset E \right\}. \tag{5.3} $$

5.2. Lebesgue-Stieltjesi mõõtude regulaarsus

Meenutame (vt. § 3.3), et kui X on topoloogiline ruum ning $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on algebra, siis öeldakse, et mõõt $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on *regulaarne,* kui suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &\overset{(1)}{=} \inf\Big\{\mu(D)\colon \text{ hulga } D \in \mathfrak{A} \text{ sisemus } D^\circ \supset E\Big\}\\ &\overset{(2)}{=} \sup\Big\{\mu(C)\colon \text{ hulga } C \in \mathfrak{A} \text{ sulund } \overline{C} \text{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E\Big\}.\end{aligned}$$

Kui kehtib võrdus (1), siis öeldakse et μ on hulgal E *väljast regulaarne.* Kui kehtib võrdus (2), siis öeldakse et μ on hulgal E on *seest regulaarne.* Kui μ on igal hulgal $E \in \mathfrak{A}$ väljast regulaarne, siis öeldakse, et μ on väljast regulaarne. Kui μ on igal hulgal $E \in \mathfrak{A}$ seest regulaarne, siis öeldakse, et μ on seest regulaarne.

Märkus 5.2. Kompaktne hulk K Hausdorffi topoloogilises ruumis on kinnine; niisiis $K = \overline{K}$ on Boreli hulk. Siit järeldub, et kui X on Hausdorffi topoloogiline ruum ning algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sisaldab kõiki ruumi X Boreli hulki, (s.t. $\mathfrak{A} \supset \mathcal{B}_X$), siis mõõt $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on regulaarne parajasti siis, kui suvalise $E \in \mathfrak{A}$ korral

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\Big\{\mu(U)\colon \text{ hulk } U \subset X \text{ on lahtine ja } U \supset E\Big\}\\ &= \sup\Big\{\mu(K)\colon \text{ hulk } K \subset X \text{ on kompaktne ja } K \subset E\Big\}.\end{aligned}$$

Märgime, et iga meetriline ruum on Hausdorffi topoloogiline ruum.

Teoreem 5.3. *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Lebesgue-Stieltjesi mõõt μ_F on regulaarne.*

Teoreem 5.3 järeldub vahetult järgnevast teoreemist.

Teoreem 5.4. *Olgu X Hausdorffi topoloogiline ruum ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Kui σ-lõplik mõõt $\mu_0\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ on regulaarne, siis ka tema Carathéodory-Hahni jätk $\mu\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0,\infty]$ on regulaarne.*

Märkus 5.3. Kirjeldame alternatiivseid mooduseid mõõtude μ_F regulaarsuse tõestuseks.

(I) Mõõdu μ_F väljast regulaarsus järeldub lausest 5.2 (täpsemalt, valemist (5.1)); μ_F regulaarsus järeldub ülesandest 3.25.

Ülesanne 5.4. Järeldada lausest 5.2 (täpsemalt, valemist (5.1)), et mõõt μ_F on väljast regulaarne. Järeldamaks ülesandest 3.25 mõõdu μ_F regulaarsust, veenduda, et

(a) meetriline ruum $\mathbb{R}$ on σ-kompaktne;

(b) mõõt μ_F on lõplik ruumi $\mathbb{R}$ kompaktsetel hulkadel.

(II) Käesoleva õpiku teoreemis V.2.4 tõestame, et kui lokaalselt kompaktse Hausdorffi ruumi X iga lahtine hulk on σ-kompaktne (s.t. esitub kompaktsete hulkade loenduva ühendina), siis iga Boreli mõõt ruumis X, mis on lõplik kompaktsetel hulkadel, on regulaarne. (Topoloogilist ruumi nimetatakse *lokaalselt kompaktseks,* kui tema igal punktil leidub kompaktne ümbrus.) Teoreemist V.2.4 järeldub ahendi $\mu_F|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ regulaarsus. Mõõdu μ_F regulaarsus järeldub nüüd ülesandest 3.30 (sest μ_F on $\mu_F|_{\mathcal{B}_\mathbb{R}}$ täield).

Ülesanne 5.5. Veenduda, et

(a) meetriline ruum $\mathbb{R}$ on lokaalselt kompaktne;

(b) iga lahtine hulk ruumis $\mathbb{R}$ on σ-kompaktne.

Näpunäide. Väite (b) tõestuseks kasutada teoreemi 2.2 või järeldust 2.3.

TEOREEMI 5.4 TÕESTUS. Olgu σ-lõplik mõõt $\mu_0\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ regulaarne. Veendumaks, et mõõdu μ_0 Carathéodory-Hahni jätk $\mu\colon \mathcal{M}(\mu_0^*) \to [0,\infty]$ on regulaarne, peame näitama, et μ on nii seest kui ka väljast regulaarne. Fikseerime vabalt $E \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$.

(a) Veendumaks, et μ on väljast regulaarne, peame näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $D \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et

$$D^\circ \supset E \quad \text{ja} \quad \mu(D) \leqslant \mu(E) + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Carathéodory-Hahni jätku definitsiooni põhjal leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset E \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mõõdu μ_0 regulaarsuse tõttu leiduvad hulgad $D_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, selliselt, et

$$D_j^\circ \supset A_j \quad \text{ja} \quad \mu_0(D_j) \leqslant \mu_0(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Tähistame $D = \bigcup_{j=1}^\infty D_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$, siis $D^\circ \supset \bigcup_{j=1}^\infty D_j^\circ \supset \bigcup_{j=1}^\infty A_j \supset E$ ning

$$\begin{aligned}\mu(D) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(D_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\mu_0(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \leqslant \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(E) + \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) Veendumaks, et mõõt μ on seest regulaarne, peame näitama, et leiduvad hulgad $C_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$, $j \in \mathbb{N}$, selliselt, et

$$\text{sulundid } \overline{C_j} \text{ on kompaktsed ja } \overline{C_j} \subset E,\ j \in \mathbb{N}, \quad \text{ning} \quad \mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E). \tag{5.4}$$

Selleks piisab näidata, et

(•) *kui $K \in \mathfrak{A}$, $\mu(K) < \infty$, kusjuures $\overline{K}$ on kompaktne, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $C \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et*

$$\textit{sulund } \overline{C} \textit{ on kompaktne ja } \overline{C} \subset E \cap K \quad \textit{ning} \quad \mu(C) > \mu(E \cap K) - \varepsilon.$$

Tõepoolest, mõõdu μ_0 σ-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $A_j \in \mathfrak{A}$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et

$$\mu(A_j) < \infty,\ j \in \mathbb{N}, \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots, \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Mõõdu μ_0 seest regulaarsuse tõttu leidub iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulk $K_j \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$\text{sulund } \overline{K_j} \text{ on kompaktne ja } \overline{K_j} \subset A_j \quad \text{ning} \quad \mu(K_j) > \mu(A_j) - \frac{1}{j}.$$

Kui kehtib väide ($\bullet$), siis saame iga $j \in \mathbb{N}$ korral leida hulga $C_j \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ nii, et

$$\text{sulund } \overline{C_j} \text{ on kompaktne ja } \overline{C_j} \subset E \cap K_j \quad \text{ning} \quad \mu(C_j) > \mu(E \cap K_j) - \frac{1}{j}.$$

Aga nüüd kehtivad sesosed (5.4).

Tõepoolest, kontrollimist vajab vaid, et $\mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$. Selleks märgime, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E \cap K_j = (E \cap A_j) \setminus (A_j \setminus K_j)$, seega ka

$$\mu(C_j) > \mu(E \cap K_j) - \frac{1}{j} \geqslant \mu(E \cap A_j) - \mu(A_j \setminus K_j) - \frac{1}{j} > \mu(E \cap A_j) - \frac{2}{j}.$$

Kuna $\mu(E \cap A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$ (sest $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E \cap A_j$, kusjuures $E \cap A_1 \subset E \cap A_2 \subset \ldots$), siis ka $\mu(C_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \mu(E)$.

Tõestame nüüd väite ($\bullet$). Olgu $K \in \mathfrak{A}$, $\mu_0(K) < \infty$, kusjuures $\overline{K}$ on kompaktne, ning olgu $\varepsilon > 0$. Tõestuse osa (a) põhjal teame, et μ on väljast regulaarne, järelikult leidub hulk $D \in \mathcal{M}(\mu_0^*)$ selliselt, et

$$D^\circ \supset K \setminus E \quad \text{ja} \quad \mu(D) \leqslant \mu(K \setminus E) + \varepsilon.$$

Tähistame $C := K \setminus D$, siis $\overline{C}$ on kompaktne (sest $\overline{C}$ on kompaktse hulga $\overline{K}$ kinnine alamhulk), $C \subset K \cap E$ ning

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \mu(K) - \mu(K \cap D) \geqslant \mu(K) - \mu(D) \\ &> \mu(K) - \mu(K \setminus E) - \varepsilon = \mu(K \cap E) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Teoreem 5.5. *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu $E \in \mathcal{M}_F$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad lahtine hulk $U \supset E$ ja kinnine hulk $H \subset E$ selliselt, et $\mu_F(U \setminus H) < \varepsilon$.*

Tõestus.

Ülesanne 5.6. Tõestada teoreem 5.5.

Näpunäide. Kasutades mõõdu μ_F σ-lõplikkust ning regulaarsust, konstrueerida kõigepealt lahtine hulk $U \supset E$ selliselt, et $\mu_F(U \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$. Analoogiliselt saab leida lahtise hulga $V \supset E^c$ selliselt, et $\mu_F(V \setminus E^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Võtta $H = V^c$.

□

Järgnev lihtne järeldus teoreemist 5.5 kirjeldab Lebesgue-Stieltjesi σ-algebra $\mathcal{M}_F$ hulki.

Meenutame, et kui X on topoloogiline ruum, siis öeldakse, et

- hulk $D \in \mathcal{P}(X)$ on G_δ, kui ta on esitatav ruumi X lahtiste alamhulkade loenduva ühisosana;
- hulk $C \in \mathcal{P}(X)$ on F_σ, kui ta on esitatav ruumi X kinniste alamhulkade loenduva ühendina.

Teoreem 5.6. *Olgu $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$E \in \mathcal{M}_F$;*

(ii) *$E = G \setminus N_1$, kus $G \in \mathcal{M}_F$ on G_δ ja $N_1 \in \mathcal{M}_F$ on selline, et $\mu_F(N_1) = 0$;*

(iii) *$E = H \cup N_2$, kus $H \in \mathcal{M}_F$ on F_σ ja $N_2 \in \mathcal{M}_F$ on selline, et $\mu_F(N_2) = 0$.*

Tõestus. Implikatsioonide (ii)⇒(i) ja (iii)⇒(i) kehtivus on ilmne, sest $\mathcal{M}_F$ on σ-algebra ning seega kinnine hulgateoreetilise vahe ja ühendi võtmise operatsioonide suhtes.

(i)⇒(iii) ja (i)⇒(ii). Olgu $E \in \mathcal{M}_F$. Teoreemi 5.5 põhjal leiduvad iga $j \in \mathbb{N}$ korral lahtine hulk $U_j \supset E$ ja kinnine hulk $H_j \subset E$ nii, et $\mu_F(U_j \setminus H_j) < \frac{1}{j}$. Tähistame

$$G := \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j, \quad N_1 := G \setminus E, \quad H := \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j, \quad N_2 := E \setminus H;$$

siis G on G_δ, $E = G \setminus N_1$, H on F_σ, $E = H \cup N_2$; seega jääb järelduse tõestuseks näidata, et $\mu_F(N_1) = \mu_F(N_2) = 0$.

Ülesanne 5.7. Tõestada, et $\mu_F(N_1) = \mu_F(N_2) = 0$.

□

Teoreem 5.7. *Olgu $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu hulk $E \in \mathcal{M}_F$ selline, et $\mu_F(E) < \infty$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad paarikaupa lõikumatud tõkestatud vahemikud $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) selliselt, et*

$$\mu_F\left(E \triangle \bigcup_{j=1}^{n} (a_j, b_j)\right) < \varepsilon.$$

Meenutame, et hulkade A ja B *sümmeetriline vahe* $A\triangle B$ on defineeritud seosega

$$A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Teoreemi 5.7 tõestus.

Ülesanne 5.8. Tõestada teoreem 5.7.

Näpunäide. Kasutada lauset 5.2 (täpsemalt, valemit (5.1)).

□

5.3. Lebesgue'i hulga nihke ja kordse Lebesgue'i mõõt. Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu

Olgu $E \subset \mathbb{R}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Meenutame, et hulga E *nihe* $E+r$ ja *kordne* rE on defineeritud vastavalt seostega

$$E + r = \{x + r\colon\ x \in E\} \quad \text{ja} \quad rE = \{rx\colon\ x \in E\}.$$

Ülesanne 5.9. Tõestada, et m-hüljatava hulga nihe ja kordne on m-hüljatavad, s.t., kui $E \in \mathcal{N}(m)$ ja $r \in \mathbb{R}$, siis ka $E + r, rE \in \mathcal{N}(m)$.

NÄPUNÄIDE. Kasutada fakti, et (ülesande 4.4, (b), ja teoreemi 4.5 põhjal) $E \in \mathcal{N}(m)$ parajasti siis, kui ${\mu_F^0}^*(E) = 0$, kus $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning võrdust (5.2).

Teoreem 5.8. *Olgu $E \in \mathcal{L}$ ja $r \in \mathbb{R}$. Siis*

(a) *$E + r \in \mathcal{L}$, kusjuures $m(E + r) = m(E)$;*

(b) *$rE \in \mathcal{L}$, kusjuures $m(rE) = |r|\, m(E)$.*

TÕESTUS.

Ülesanne 5.10. Tõestada teoreem 5.8.

NÄPUNÄIDE. Sisalduvuste $E + r \in \mathcal{L}$ ning $rE \in \mathcal{L}$ tõestuseks kasutada asjaolu, et $\mathcal{L}$ on Boreli σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ täield Lebesgue'i mõõdu m suhtes, ning fakte, et ruumis $\mathbb{R}$ Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad ning m-hüljatava hulga nihe ja kordne on m-hüljatavad (vt. ülesandeid 2.14 ning 5.9).

Võrduste $m(E + r) = m(E)$ ja $m(rE) = |r|\, m(E)$ tõestamisel kasutada võrdust (5.3).

□

Kuna Lebesgue'i mõõt m on teoreemi 5.8 põhjal nihke suhtes invariantne ning $m\big([0, 1)\big) = 1$, siis järeldub teoreemist 1.1

Järeldus 5.9. *Eksisteerib Lebesgue'i mõttes mittemõõtuv hulk, s.t. $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Ülesanne 5.11. Tõestada, et kui hulk $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ omab sisepunkte, s.t. $E^\circ \neq \emptyset$, siis hulk E sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga.

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt näidata, et eksisteerib poollõik $[a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$), mis sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga, ning seejärel rakendada teoreemi 5.8.

Kehtib ülesande 5.11 väitest üldisem

Lause 5.10. *Olgu hulk $A \in \mathcal{L}$ selline, et $m(A) > 0$. Siis hulk A sisaldab mingi Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga.*

LAUSE 5.10 TÕESTUSE SKEEM. Üldisust kitsendamata võimne eeldada, et mingi $k \in \mathbb{Z}$ korral $A \subset [k, k+1)$ (põhjendada!) ning, et, veelgi enam, $A \subset [0, 1)$ (põhjendada!). Teoreemi 1.1 tõestuse põhjal võib eeldada, et $A \subset N_q$ mingi $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ korral (põhjendada!), ning et A on kompaktne (sest Lebesgue'i mõõdu regulaarsuse tõttu sisaldab A kompaktse hulga, mille Lebesgue'i mõõt on > 0).

Lause tõestuseks piisab nüüd näidata, et

($\bullet$) leidub $\delta > 0$ nii, et $(-\delta, \delta) \subset A - A$,

sest sel juhul ka $(-\delta, \delta) \subset N_q - N_q$, mis on võimatu (sest ainus hulgas $N_q - N_q$ sisalduv ratsionaalarv on null (põhjendada!)).

Väite ($\bullet$) tõestuseks paneme tähele, et tingimus $(-\delta, \delta) \subset A - A$ on samaväärne tingimusega

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad (A + x) \cap A \neq \emptyset \tag{5.5}$$

(põhjendada!). Nüüd piisab väite ($\bullet$) tõestuseks tõestada

Lemma 5.11. *Olgu X meetriline ruum ning olgu kompaktne hulk $A \subset X$ ja lahtine hulk $U \subset X$ sellised, et $A \subset U$. Siis leidub $\delta > 0$ nii, et*

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad A + x \subset U. \tag{5.6}$$

Tõepoolest, oletame, et lemma on tõestatud. Lebesgue'i mõõdu regulaarsuse tõttu leidub lahtine hulk $U \supset A$ nii, et $m(U) < 2m(A)$. Olgu $\delta > 0$ selline, et kehtib (5.6). Oletame vastuväiteliselt, et väide ($\bullet$) ei kehti. Siis ka (5.5) ei kehti, seega mingi $x \in (-\delta, \delta)$ korral $(A+x) \cap A = \emptyset$. Aga nüüd

$$2m(A) > m(U) \geqslant m\big(A \cup (A+x)\big) = m(A) + m(A+x) = 2m(A),$$

vastuolu.

Ülesanne 5.12. Tõestada lemma 5.11.

□

5.4. Täiendavaid märkusi

Märkus 5.4. Meie defineerisime oma käsitluses Lebesgue-Stieltjesi mõõdud lähtudes *vasakult* pidevatest mittekahanevatest funktsioonidest: kui $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on vasakult pidev mittekahanev funktsioon, siis me defineerisime (üheselt määratud) mõõdu μ_F^0 poolalgebra

$$\mathcal{H} = \Big\{\emptyset,\ [a,b),\ [c,\infty),\ (-\infty,d),\ (-\infty,\infty):\ \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebral, mis rahuldab tingimust $\mu_F^0\big([a,b)\big) = F(b) - F(a)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$; Lebesgue-Stieltjesi mõõdud defineerisime kui selliste mõõtude μ_F^0 Carathéodory-Hahni jätkud (${\mu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade σ-algebrale).

Alternatiivne skeem Lebesgue-Stieltjesi mõõtude defineerimiseks lähtub *paremalt* pidevatest mittekahanevatest funktsioonidest: kui $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on paremalt pidev mittekahanev funktsioon, siis defineeritakse (üheselt määratud) mõõt ν_F^0 poolalgebra

$$\mathcal{H}' = \Big\{\emptyset,\ (a,b],\ (c,\infty),\ (-\infty,d],\ (-\infty,\infty):\ \ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a<b\Big\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite algebral, mis rahuldab tingimust $\nu_F^0\big((a,b]\big) = F(b) - F(a)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$; Lebesgue-Stieltjesi mõõdud defineeritakse kui selliste mõõtude ν_F^0 Carathéodory-Hahni jätkud (${\nu_F^0}^*$-mõõtuvate hulkade σ-algebrale).

Märgime, et kumbki skeem annab tulemuseks ühe ja sama Lebesgue-Stieltjesi mõõtude klassi.

Märkus 5.5. Ajalooliselt defineeris Lebesgue välismõõdu $m^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ seosega

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j)\colon\ a_j, b_j \in \mathbb{R},\ a_j < b_j,\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j) \supset E\right\}, \quad E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

(märgime, et tähistus m^* mingeid vastuolusid endaga kaasa ei too, sest lause 4.5 ja valemi (5.2) põhjal langeb Lebesgue'i poolt defineeritud välismõõt m^* kokku Lebesgue'i mõõduga m assotsieeruva välismõõduga m^*) ja luges hulga $A \subset \mathbb{R}$ mõõtuvaks, kui iga tõkestatud vahemiku $(a,b) \subset \mathbb{R}$ korral

$$m^*\Big((a,b) \cap A\Big) + m^*\Big((a,b) \setminus A\Big) = m^*\Big((a,b)\Big) = b-a.$$

Meie lähtusime oma käsitluses Carathéodory poolt hiljem kasutusele võetud mõistest “antud välismõõdu suhtes mõõtuv hulk”: kui $X \neq 0$ on mingi hulk ja $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on välismõõt, siis hulk $A \subset X$ on λ-mõõtuv, kui iga $E \subset X$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

Lihtne on veenduda, et hulk $A \subset \mathbb{R}$ on Lebesgue'i definitsiooni järgi mõõtuv parajasti siis, kui ta on meie käsitluse järgi Lebesgue'i mõttes mõõtuv, s.t. $A \in \mathcal{L}$, s.t. A on m^*-mõõtuv (võrdus $m^* = {\mu_F^0}^*$, kus $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, järeldub lausest 4.5): kuna $m^*\big((a,b)\big) = b - a$, siis järeldub nende kahe mõõtuvuse definitsiooni samaväärsus ülesandest 4.6.

Ülesanne 4.6. Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk, olgu $\lambda\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ välismõõt ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ selline, et iga $E \in \mathcal{P}(X)$ korral

$$\lambda(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j) \colon\ E_j \in \mathcal{E},\ j \in \mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \supset E \right\}.$$

Tõestada, et hulk $A \subset X$ on λ-mõõtuv parajasti siis, kui iga $E \in \mathcal{E}$ korral

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c) = \lambda(E).$$

Märkus 5.6. Ülesandes 5.3 veendusime, et ruumi $\mathbb{R}$ iga loenduva alamhulga Lebesgue'i mõõt on null. Tekib loomulik küsimus: kas leidub ruumi $\mathbb{R}$ alamhulki, mille Lebesgue'i mõõt on null ning mille võimsus ületab loenduva hulga võimsuse? Vastus sellele küsimusele on jaatav, näide sellisest hulgast on *Cantori hulk.*

Näide 5.1. Tähistame

$$\begin{aligned} &C_1 = [0,1],\\ &C_2 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1],\\ &C_3 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1],\\ &\dots \end{aligned}$$

jne. (Piltlikult väljendudes: kui on antud hulk C_j ($j \in \mathbb{N}$), siis jagame kõik selle hulga lõigud kolmeks pikkuselt võrdseks osaks; hulk C_{j+1} saadakse hulga C_j igast lõigust keskmise vahemiku väljajätmise tagajärjel.) Tähistame $C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$. Hulka C nimetatakse *Cantori hulgaks.* Saab näidata, et

- $\operatorname{card}(C) = \mathfrak{c}$ (s.t. hulga C võimsus on kontiinuumi võimsus);
- $m(C) = 0$ (s.t. Cantori hulga Lebesgue'i mõõt on null).

Märkus 5.7. Saab näidata, et *iga vasakult pideva mittekahaneva funktsiooni* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *korral* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneqq \mathcal{M}_F$. Esitame selle väite tõestuse skeemi.

Lähtuvalt vasakult pidevast mittekahanevast funktsioonist $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstrueeritakse hulk $C_F \subset \mathbb{R}$ nii, et

- $\operatorname{card}(C_F) = \mathfrak{c}$ (s.t. hulga C_F võimsus on kontiinuumi võimsus);
- $\mu_F(C_F) = 0$.

(Hulk C_F on Cantori hulga modifikatsioon, tema konstrueerimisel lähtutakse samuti teatavast lõigust, mida siis hakatakse teatava eeskirja järgi kolmeks jagama ja "keskmisi kolmandikke välja viskama".) Kuna μ_F on täielik mõõt, siis funktsioonile F vastav Lebesgue-Stieltjesi σ-algebra $\mathcal{M}_F$ sisaldab kõik hulga C_F alamhulgad, s.t. $\mathcal{P}(C_F) \subset \mathcal{M}_F$. Seega $\operatorname{card}(\mathcal{M}_F) = \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big)$, sest

$$\operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) = \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(C_F)\big) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{M}_F) \leqslant \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big).$$

Teiselt poolt, saab näidata, et $\operatorname{card}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Niisiis,

$$\operatorname{card}(\mathcal{B}_\mathbb{R}) = \mathfrak{c} = \operatorname{card}(\mathbb{R}) < \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(\mathbb{R})\big) = \operatorname{card}(\mathcal{M}_F),$$

järelikult $\mathcal{M}_F \setminus \mathcal{B}_\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Märkus 5.8. Ruumi $\mathbb{R}$ alamhulk võib olla "topoloogiliselt suur", kuid "mõõduteoreetiliselt väike", samuti ka vastupidi — "topoloogiliselt väike", kuid "mõõduteoreetiliselt suur". Seda asjaolu illustreerib järgnev

Näide 5.2. Iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub lahtine hulk $E \subset [0,1]$, mis on selles lõigus kõikjal tihe ja $m(E) < \varepsilon$. Sellisel juhul hulk $F = [0,1] \setminus E$ on eikusagil tihe (s.t. tal ei ole sisepunkte) ning $m(F) > 1 - \varepsilon$.

Tõepoolest, olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame $E_0 = \mathbb{Q} \cap (0,1)$; siis E_0 on loenduv hulk ning seega me võime ta esitada kujul $E_0 = \{e_j \colon j \in \mathbb{N}\}$. Tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral $E_j = (e_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, e_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) \cap (0,1)$ ning $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Siis hulk $E \subset [0,1]$ on lahtine ruumis $\mathbb{R}$, ta on kõikjal tihe lõigus $[0,1]$ ja

$$m(E) < \sum_{j=1}^\infty m\Big((e_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, e_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}})\Big) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Ülesanne 5.13. Tõestada, et hulk $F = [0,1] \setminus E$ on eikusagil tihe (s.t. tal ei ole sisepunkte) ning $m(F) > 1 - \varepsilon$.

Märkus 5.9. Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu (järelduse 5.9) tõestus tugineb valikuaksioomile (vt. teoreemi 1.1 tõestust). R. M. Solovay tõestas 1970.a., et (populaarselt väljendudes) *ilma valikuaksioomi kasutamata pole Lebesgue'i mõttes mittemõõtuva hulga olemasolu võimalik tõestada* (selle väite täpne matemaatiline formuleering nõuaks süvenemist aksiomaatilise hulgateooria tehnilistesse nüanssidesse; seepärast me jätame ta siinkohal ära toomata).

Märkus 5.10. Lebesgue'i mõõtu saab jätkata nihke suhtes invariantseks mõõduks teatavale ruumi $\mathbb{R}$ alamhulkade σ-algebrale $\mathfrak{A} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{L}$. (Teoreemist 1.1 järeldub siiski, et see σ-algebra $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.)

Märkus 5.11. Lebesgue'i mõõtu saab jätkata ruumi $\mathbb{R}$ kõigi alamhulkade kogumil määratud nihke suhtes invariantseks aditiivseks hulgafunktsiooniks. Teisisõnu, leidub nihke suhtes invariantne aditiivne hulgafunktsioon $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ nii, et $\mu|_\mathcal{L} = m$.

II peatükk.
Lebesgue'i integraal

Kõikjal selles ja järgnevates peatükkides <u>EELDAME VAIKIMISI, ET MÕÕTUVA RUUMI</u> (erijuhul mõõduga ruumi) <u>ALUSEKS OLEV HULK ON MITTETÜHI</u>. Selline kokkulepe võimaldab meil jätta vaatluse alt välja tühja funktsiooni (mille määramispiirkond on tühi hulk ning mis on ühtlasi ainus tühjal hulgal määratud funktsioon), aidates seega oluliselt säästa meie kõigi vaimset tervist.

§ 1. Mõõtuvad funktsioonid

1.1. Mõõtuva funktsiooni mõiste. Lihtsamad mõõtuvuskriteeriumid

Definitsioon 1.1. Olgu $(X,\mathfrak{A})$ ja $(Y,\mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid.

Öeldakse, et funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-*mõõtuv*, kui

$$f^{-1}[B] \in \mathfrak{A} \quad \text{iga hulga } B \in \mathfrak{B} \text{ korral.}$$

(Meenutame, et $f^{-1}[B] = \{x \in X\colon\ f(x) \in B\}$.)

Kui σ-algebrate $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-mõõtuvaid funktsioone ka lihtsalt *mõõtuvateks* funktsioonideks.

Ülesanne 1.1. Olgu $(X,\mathfrak{A})$, $(Y,\mathfrak{B})$ ja $(Z,\mathfrak{C})$ mõõtuvad ruumid. Tõestada, et kui funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-mõõtuv ning funktsioon $g\colon Y \to Z$ on $(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$-mõõtuv, siis funktsioonide f ja g kompositsioon $gf\colon X \to Z$ on $(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$-mõõtuv.

Kontrollimaks, kas etteantud funktsioon $f\colon X \to Y$ on mõõtuv, tuleb definitsiooni kohaselt testida, kas iga hulga $B \in \mathfrak{B}$ originaal funktsiooni f suhtes kuulub σ-algebrasse $\mathfrak{A}$. Järgmine teoreem näitab, et sellisel testimisel piisab piirduda ka väiksema kogumiga kui $\mathfrak{B}$.

Teoreem 1.1. *Olgu $(X,\mathfrak{A})$ ja $(Y,\mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid ning olgu kogum $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$ selline, et $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$ (s.t. σ-algebra $\mathfrak{B}$ on genereeritud kogumi $\mathcal{E}$ poolt). Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon $f\colon X \to Y$ on $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-mõõtuv;*

(ii) *$f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}$ iga $B \in \mathcal{E}$ korral.*

TÕESTUS. (i)⇒(ii) on ilmne, sest $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}$.

(ii)⇒(i). Kehtigu tingimus (ii). Tähistame

$$\mathcal{D} = \{B \in \mathfrak{B}\colon\ f^{-1}[B] \in \mathfrak{A}\}.$$

Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $\mathcal{D}$ on σ-algebra (vt. ülesannet I.2.10, **[B]**, (a)). Aga nüüd $\mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ (sest tingimuse (ii) põhjal $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$). □

Definitsioon 1.2. Olgu X ja Y topoloogilised ruumid.

Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ X \to Y$ on *Boreli mõttes mõõtuv*, kui ta on $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-mõõtuv. (Meenutame, et sümbol $\mathcal{B}_X$ tähistab ruumi X Boreli σ-algebrat.)

Teoreemist 1.1 järeldub

Teoreem 1.2. *Olgu X ja Y topoloogilised ruumid. Iga pidev funktsioon $f\colon\ X \to Y$ on Boreli mõttes mõõtuv.*

TÕESTUS. Olgu funktsioon $f\colon\ X \to Y$ pidev. Tähistame

$$\tau_X = \{A \subset X\colon\ A \text{ on lahtine hulk}\} \quad \text{ja} \quad \tau_Y = \{B \subset Y\colon\ B \text{ on lahtine hulk}\}.$$

Kuna funktsioon on pidev parajasti siis, kui kõigi lahtiste hulkade originaalid tema suhtes on lahtised, siis

$$f^{-1}[B] \in \tau_X \subset \mathcal{B}_X \quad \text{iga } B \in \tau_Y \text{ korral.}$$

Et aga Boreli σ-algebra definitsiooni kohaselt $\mathcal{B}_Y = \sigma(\tau_Y)$ (s.t. ruumi Y Boreli σ-algebra on genereeritud ruumi Y kõigi lahtiste alamhulkade kogumi τ_Y poolt), siis järeldub siit teoreemi 1.1 põhjal, et funktsioon f on Boreli mõttes mõõtuv. □

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Boreli mõttes mõõtuv*, kui ta on $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mõõtuv.

Öeldakse, et funktsioon $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Lebesgue'i mõttes mõõtuv*, kui ta on $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mõõtuv. (Meenutame, et sümbol $\mathcal{L}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebrat.)

Ülesanne 1.2. Tõestada, et kui funktsioon $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Boreli mõttes mõõtuv, siis on ta ka Lebesgue'i mõttes mõõtuv.

Kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ja Y on topoloogiline ruum, siis öeldakse, et funktsioon $f\colon\ X \to Y$ on *Boreli mõttes $\mathfrak{A}$-mõõtuv*, kui ta on $(\mathfrak{A}, \mathcal{B}_Y)$-mõõtuv.

Kui σ-algebra $\mathfrak{A}$ roll on kontekstist selge, siis nimetatakse Boreli mõttes $\mathfrak{A}$-mõõtuvaid funktsioone ka lihtsalt *Boreli mõttes mõõtuvateks* funktsioonideks või *mõõtuvateks* funktsioonideks.

Järeldus 1.3. *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on mõõtuv;*

(ii) $\{x \in X\colon\ f(x) < a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(iii) $\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(iv) $\{x \in X\colon\ f(x) > a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral;*

(v) $\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga* $a \in \mathbb{R}$ *korral.*

TÕESTUS. Paneme kõigepealt tähele, et mis tahes $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}
\big\{x \in X\colon\ f(x) < a\big\} &= f^{-1}\big[(-\infty, a)\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant a\big\} &= f^{-1}\big[(-\infty, a]\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) > a\big\} &= f^{-1}\big[(a, \infty)\big],\\
\big\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant a\big\} &= f^{-1}\big[[a, \infty)\big].
\end{aligned}$$

Igaüks kogumitest

$$\big\{(-\infty, a)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\},\quad \big\{(-\infty, a]\colon\ a \in \mathbb{R}\big\},\quad \big\{(a, \infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\},\quad \big\{[a, \infty)\colon\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

genereerib ruumi $\mathbb{R}$ Boreli σ-algebra (vt. teoreem I.2.4). Seega järeldub väidete (i)–(v) samaväärsus vahetult teoreemist 1.1. □

1.2. Laiendatud reaalarvuliste väärtustega funktsioonid

Edasises hakkame vaatlema laiendatud reaalarvuliste väärtustega — $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega — funktsioone, s.t. funktsioone, mis lisaks reaalarvulistele väärtustele võivad omandada ka väärtusi $-\infty$ ja ∞. (Meenutame, et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.)

Teatavasti on $\overline{\mathbb{R}}$ meetriline ruum kauguse

$$\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \qquad x, y \in \overline{\mathbb{R}}$$

suhtes. Märgime, et kaugusega ρ ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ alamruumis $\mathbb{R}$ defineeritud alamruumi topoloogia $\tau_{(\mathbb{R},\rho)}$ ja ruumi $\mathbb{R}$ loomulik (s.t. eukleidilise kaugusega $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, määratud) topoloogia $\tau_{\mathbb{R}}$ langevad ühte, s.t. ruumis $\mathbb{R}$ on kauguste ρ ja d suhtes ühed ja samad lahtised hulgad.

Ülesanne 1.3. Veenduda, et $\tau_{\mathbb{R}} = \tau_{(\mathbb{R},\rho)}$.

NÄPUNÄIDE. Veenduda, et formaalne ühikoperaator $j\colon\ (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$, $jx = x$, $x \in \mathbb{R}$, ning tema pöördoperaator on pidevad ning kasutada fakti, et lahtise hulga originaal pideva kujutuse suhtes on lahtine.

Edasises tähistame sümbolitega $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ ja $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ vastavalt meetrilise ruumi $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ lahtiste hulkade kogumit ja Boreli σ-algebrat. Osutub, et

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{E \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})\colon\ E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} = \big\{B \cup I\colon\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ I \in \mathcal{P}\big(\{-\infty\}, \{\infty\}\big)\big\}. \quad (1.1)$$

Ülesanne 1.4. Tõestada võrdused (1.1).

NÄPUNÄIDE. Ülesannete 1.3 ja I.2.12 põhjal

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{E \cap \mathbb{R} \colon\ E \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}\}. \tag{1.2}$$

Kuna $\{-\infty\}$ ja $\{\infty\}$ kui meetrilise ruumi $\overline{\mathbb{R}}$ ühepunktilised hulgad on kinnised, siis $\{-\infty\}, \{\infty\} \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ning seega ka $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \big(\{-\infty\} \cup \{\infty\}\big) \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Seega järeldub võrdusest (1.2), et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Saab näidata, et igaüks hulga $\overline{\mathbb{R}}$ alamhulkade kogumitest

$$\mathcal{E}_1 := \big\{[-\infty, a) \colon\ a \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \mathcal{E}_2 := \big\{[-\infty, a] \colon\ a \in \mathbb{R}\big\},$$
$$\mathcal{E}_3 := \big\{(a, \infty] \colon\ a \in \mathbb{R}\big\}, \qquad \mathcal{E}_4 := \big\{[a, \infty] \colon\ a \in \mathbb{R}\big\}$$

genereerib ruumi $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ Boreli σ-algebra.

Ülesanne 1.5. Tõestada, et $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E}_4)$.

NÄPUNÄIDE. Näidata, et

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} \overset{(\bullet)}{\subset} \sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_4) \overset{(\bullet\bullet)}{\subset} \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}.$$

Sisalduvuse $(\bullet)$ tõestuseks piisab näidata, et $\tau_{\overline{\mathbb{R}}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (põhjendada!), milleks omakorda, arvestades, et $U \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ korral $U \cap \mathbb{R} \in \tau_{\mathbb{R}}$, piisab näidata, et $\tau_{\mathbb{R}} \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ (selleks kasutada järeldust I.2.3) ning $\{-\infty\}, \{\infty\} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$. Sisalduvuse $(\bullet\bullet)$ tõestuseks kasutada võrdusi (1.1).

Seega järeldub teoreemist 1.1 (analoogiliselt järelduse 1.3 tõestusega)

Järeldus 1.4. *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *funktsioon f on mõõtuv;*

(ii) $\{x \in X \colon\ f(x) < a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(iii) $\{x \in X \colon\ f(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(iv) $\{x \in X \colon\ f(x) > a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral;*

(v) $\{x \in X \colon\ f(x) \geqslant a\} \in \mathfrak{A}$ *iga $a \in \mathbb{R}$ korral.*

Järeldusi 1.3 ja 1.4 võrreldes näeme, et *funktsioon $f \colon\ X \to \mathbb{R}$ on mõõtuv parajasti siis, kui ta on mõõtuv tõlgendatuna funktsioonina $X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Ülesanne 1.6. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuv funktsioon. Tõestada, et:

(a) $\{x \in X \colon\ a \leqslant f(x) < b\} \in \mathfrak{A}$ suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(b) $\{x \in X \colon\ a < f(x) < b\} \in \mathfrak{A}$ suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(c) $\{x \in X \colon\ a < f(x) \leqslant b\} \in \mathfrak{A}$ suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(d) $\{x \in X \colon\ a \leqslant f(x) \leqslant b\} \in \mathfrak{A}$ suvaliste $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ korral;

(e) $\{x \in X \colon\ f(x) = a\} \in \mathfrak{A}$ iga $a \in \mathbb{R}$ korral;

(f) $\{x \in X \colon\ f(x) = \infty\} \in \mathfrak{A}$;

(g) $\{x \in X \colon\ f(x) = -\infty\} \in \mathfrak{A}$.

Ülesanne 1.7. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f \colon\ X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tõestada, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(i) funktsioon f on mõõtuv;

(ii) $\{x \in X\colon f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(iii) $\{x \in X\colon f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(iv) $\{x \in X\colon f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $\alpha \in \mathbb{Q}$ korral;

(v) $\{x \in X\colon f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathfrak{A}$ iga $a \in \mathbb{Q}$ korral.

Aritmeetilised tehted funktsioonidega $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ defineeritakse punktiviisi. Täpsemalt, funktsioonide f ja g summa $f+g$, vahe $f-g$, korrutis fg ja jagatis f/g on defineeritud võrdustega

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), \quad x \in X,\\ (fg)(x) &= f(x)\, g(x), \quad x \in X,\\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Märgime, et funktsioonid $f+g$, $f-g$ ja f/g ei tarvitse olla määratud kogu ruumis X. (Näiteks summa $f+g$ ei ole määratud parajasti nendes punktides $x \in X$, mille korral $f(x) = \infty$ ja $g(x) = -\infty$ või $f(x) = -\infty$ ja $g(x) = \infty$.)

1.3. Tehted mõõtuvate funktsioonidega

Järgnevast teoreemist nähtub, et mõõtuvate $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioonide hulk on aritmeetiliste tehete suhtes kinnine.

Teoreem 1.5. *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum ning olgu $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuvad funktsioonid. Järgmised funktsioonid on mõõtuvad:*

(a) cf $(c \in \mathbb{R})$*;*

(b) $f+g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(c) $f-g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(d) f^2 *(siin $f^2 = ff$);*

(e) fg*;*

(f) $1/g$ *(eeldusel, et ta on määratud);*

(g) f/g *(eeldusel, et ta on määratud).*

Teoreemi 1.5 väite (e) tõestuse kirjapaneku lihtsustamise huvides on siinkohal otstarbekas sisse tuua hulga karakteristliku funktsiooni mõiste.

Definitsioon 1.4. Olgu X mingi mittetühi hulk ning olgu $E \subset X$.

Funktsiooni $\chi_E\colon X \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in E,\\ 0, & \text{kui } x \notin E, \end{cases} \qquad x \in X,$$

nimetatakse *hulga E karakteristlikuks funktsiooniks* ehk (eriti tõenäosusteoorias) *hulga E indikaatorfunktsiooniks.*

Ülesanne 1.8. Tõestada, et kui $(X,\mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ja $E \subset X$, siis funktsioon χ_E on mõõtuv parajasti siis, kui $E \in \mathfrak{A}$.

Ülesanne 1.9. Olgu $(X,\mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, olgu $A \in \mathfrak{A}$ ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon. Tõestada, et siis ka funktsioon $f\chi_A$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv.

Teoreemi 1.5 tõestus. (a). Olgu $c \in \mathbb{R}$. Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Järelduse 1.4 põhjal piisab funktsiooni cf mõõtuvuseks näidata, et

$$A := \big\{x \in X\colon\ cf(x) < a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Kuna

$$A = \begin{cases} \big\{x \in X\colon\ f(x) < a/c\big\}, & \text{kui } c > 0,\\ \big\{x \in X\colon\ f(x) > a/c\big\}, & \text{kui } c < 0,\\ X, & \text{kui } c = 0 \text{ ja } a > 0,\\ \emptyset, & \text{kui } c = 0 \text{ ja } a \leqslant 0,\end{cases}$$

siis funktsiooni f mõõtuvuse tõttu järelduse 1.4 põhjal igal juhul $A \in \mathfrak{A}$.

(b). Olgu funktsioon $f + g$ määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon\ \ f(x) = \infty \text{ ja } g(x) = -\infty \ \text{ või }\ f(x) = -\infty \text{ ja } g(x) = \infty\big\} = \emptyset.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Tõestamaks, et funktsioon f on mõõtuv, piisab näidata, et

$$A := \big\{x \in X\colon\ f(x) + g(x) < a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Selleks aga piisab näidata, et

$$A = B := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big\{x \in X\colon\ f(x) < q\big\} \cap \big\{x \in X\colon\ g(x) < a - q\big\}$$

(sest funktsioonide f ja g mõõtuvuse tõttu $B \in \mathfrak{A}$).

Sisalduvus $B \subset A$ on ilmne, sest kui $x \in B$, siis mingi $q \in \mathbb{Q}$ korral $f(x) < q$ ja $g(x) < a - q$, seega $f(x) + g(x) < q + a - q = a$, s.t. $x \in A$.

Jääb veel veenduda, et $A \subset B$. Fikseerime vabalt $x \in A$. Näitame, et siis ka $x \in B$, s.t. leidub $q \in \mathbb{Q}$ nii, et

$$f(x) < q \quad \text{ja} \quad g(x) < a - q.$$

Kuna $f(x) + g(x) < a$, siis $f(x) < a - g(x)$, järelikult leidub arv $q \in \mathbb{Q}$ selliselt, et $f(x) < q < a - g(x)$. Kuna aga sel juhul $g(x) < a - q$, siis $x \in B$ ning seega $A \subset B$.

(c). Olgu funktsioon $f - g$ määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon\ \ f(x) = g(x) = \infty \text{ või } f(x) = g(x) = -\infty\big\} = \emptyset.$$

Siis $f - g = f + (-1)g$; seega järeldub funktsiooni $f - g$ mõõtuvus vahetult väidetest (a) ja (b).

(d). Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Tõestamaks, et funktsioon f^2 on mõõtuv, piisab näidata, et

$$A := \Big\{x \in X\colon \ \big(f(x)\big)^2 < a\Big\} \in \mathfrak{A}.$$

Kuna

$$A = \begin{cases} \emptyset, & \text{kui } a \leqslant 0, \\ \Big\{x \in X\colon \ -\sqrt{a} < f(x) < \sqrt{a}\Big\}, & \text{kui } a > 0, \end{cases}$$

siis järelduse 1.4 põhjal igal juhul $A \in \mathfrak{A}$.

(e).

Märgime esmalt, et kui funktsioonid f ja g oleksid lõplikud, siis

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right) \tag{1.3}$$

ning funktsiooni fg mõõtuvus järelduks vahetult väidetest (a), (b), (c) ja (d). Kui aga f ja/või g ei ole lõplik, siis see mõttekäik läbi ei lähe, sest sel juhul pole võrduse (1.3) parem pool määratud. Seepärast tuleb väite (e) tõestuseks üldjuhul seda mõttekäiku veidi modifitseerida.

Tähistame

$$\begin{aligned} A &= \big\{x \in X\colon \ f(x), g(x) \in (-\infty, \infty)\big\}, \\ B &= \big\{x \in X\colon \ f(x)\,g(x) = \infty\big\}, \\ C &= \big\{x \in X\colon \ f(x)\,g(x) = -\infty\big\}, \\ D &= \Big\{x \in X\colon \quad f(x) = \pm\infty \text{ ja } g(x) = 0 \ \text{ või } \ g(x) = \pm\infty \text{ ja } f(x) = 0\Big\}. \end{aligned}$$

Ülesanne 1.10. Tõestada, et $A, B, C, D, E \in \mathfrak{A}$.

Paneme tähele, et hulgad A, B, C, D on paarikaupa lõikumatud, $A \cup B \cup C \cup D = X$ ning

$$f(x)\,g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(\big(f(x) + g(x)\big)^2 - f(x)^2 - g(x)^2\Big), & \text{kui } x \in A, \\ \infty, & \text{kui } x \in B, \\ -\infty, & \text{kui } x \in C, \\ 0, & \text{kui } x \in D, \end{cases}$$

s.t.

$$f\,g = \frac{1}{2}\left((f\,\chi_A + g\,\chi_A)^2 - f^2\,\chi_A - g^2\,\chi_A\right) + \infty\,\chi_B + (-\infty)\,\chi_C.$$

Väidete (a)–(d) ja ülesannete 1.8 ja 1.9 põhjal on funktsioon $f\,g$ mõõtuv.

(f). Olgu funktsioon $1/g$ määratud, s.t. $g(x) \neq 0$, $x \in X$.

Ülesanne 1.11. Tõestada, et funktsioon $1/g$ on mõõtuv.

(g). Olgu funktsioon f/g määratud, s.t.

$$\big\{x \in X\colon \ g(x) = 0 \text{ või } |f(x)| = |g(x)| = \infty\big\} = \emptyset.$$

Siis $f/g = f \cdot 1/g$, seega järeldub funktsiooni f/g mõõtuvus vahetult väidetest (f) ja (e). $\square$

Ülesanne 1.12. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum, olgu $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuvad funktsioonid ning olgu $c \in \mathbb{R}$. Tõestada, et seostega

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{kui summa } f(x)+g(x) \text{ on määratud,} \\ c, & \text{kui summa } f(x)+g(x) \text{ pole määratud,} \end{cases}$$

ja

$$h_2(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & \text{kui jagatis } \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ on määratud,} \\ c, & \text{kui jagatis } \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ pole määratud,} \end{cases}$$

defineeritud funktsioonid $h_1, h_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mõõtuvad.

Olgu X mingi hulk ning olgu $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Defineerime funktsioonid

$$\begin{aligned}
\max\{f,g\}\colon X \ni x &\longmapsto \max\{f(x), g(x)\} \in \overline{\mathbb{R}}, \\
\min\{f,g\}\colon X \ni x &\longmapsto \min\{f(x), g(x)\} \in \overline{\mathbb{R}}, \\
\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon X \ni x &\longmapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \\
\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\colon X \ni x &\longmapsto \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \\
\limsup_{n\to\infty} f_n\colon X \ni x &\longmapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \\
\liminf_{n\to\infty} f_n\colon X \ni x &\longmapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Kui iga $x \in X$ korral eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, siis saame defineerida ka funktsiooni

$$\lim_{n\to\infty} f_n\colon X \ni x \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Siinkohal on otstarbekas meenutada, et jada $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ülemine piirväärtus* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ja *alumine piirväärtus* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ defineeritakse vastavalt võrdustega

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k \quad \text{ja} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

Juhime tähelepanu, et need mõlemad piirväärtused eksisteerivad, sest jada $(\sup_{k\geqslant n} a_k)_{n=1}^\infty$ on mittekasvav ning jada $(\inf_{k\geqslant n} a_k)_{n=1}^\infty$ on mittekahanev; niisiis

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} a_k \quad \text{ja} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

Meenutame, et jada $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \overline{\mathbb{R}}$ osajadade piirväärtusi nimetatakse selle jada osapiirväärtusteks. Saab näidata, et

(1) jada (a_n) ülemine piirväärtus $\limsup_{n\to\infty} a_n$ on selle jada suurim osapiirväärtus;

(2) jada (a_n) alumine piirväärtus $\liminf_{n\to\infty} a_n$ on selle jada vähim osapiirväärtus.

Ülesanne 1.13. Tõestada väited (1) ja (2).

Väidetest (1) ja (2) järeldub, et *jadal* $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \overline{\mathbb{R}}$ *eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui tema ülemine ja alumine piirväärtus on võrdsed, kusjuures sellisel juhul*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Ülesanne 1.14. Veenduda selles.

Märgime veel, et jada $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \overline{\mathbb{R}}$ ülemist piirväärtust ja alumist piirväärtust tähistatakse ka vastavalt sümbolitega

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \text{ja} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Teoreem 1.6. *Olgu* $(X, \mathfrak{A})$ *mõõtuv ruum ning olgu* $f, g, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *mõõtuvad funktsioonid. Siis ka funktsioonid*

$$\max\{f, g\}, \qquad \min\{f, g\}, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

on mõõtuvad. Kui piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *eksisteerib, siis ta on mõõtuv funktsioon.*

Tõestus. (a) Tõestamaks, et funktsioon $\max\{f, g\}$ on mõõtuv, peame näitama, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$A := \big\{x \in X \colon \ \max\{f, g\}(x) \leqslant a\big\} \in \mathfrak{A}.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Kuna

$$A = \big\{x \in X \colon \ \max\{f(x), g(x)\} \leqslant a\big\} = \{x \in X \colon \ f(x) \leqslant a\} \cap \{x \in X \colon \ g(x) \leqslant a\},$$

siis funktsioonide f ja g mõõtuvuse tõttu $A \in \mathfrak{A}$.

(b) Veendumaks, et funktsioon $\min\{f, g\}$ on mõõtuv, paneme tähele, et

$$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}.$$

Teoreemi 1.5, (a), põhjal on funktsioonid $-f$ ja $-g$ mõõtuvad, seega tõestuse osas (a) tõestatu põhjal ka funktsioon $\max\{-f, -g\}$ on mõõtuv ning järelikult teoreemi 1.5, (a), põhjal ka funktsioon $-\max\{-f, -g\}$ on mõõtuv, s.t. funktsioon $\min\{f, g\}$ on mõõtuv.

(c) Tõestamaks, et funktsioon $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ on mõõtuv, peame näitama, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral

$$A := \{x \in X \colon \ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant a\} \in \mathfrak{A}.$$

Fikseerime vabalt $a \in \mathbb{R}$. Kuna

$$A = \{x \in X \colon \ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \colon \ f_n(x) \leqslant a\},$$

siis funktsioonide f_n, $n \in \mathbb{N}$, mõõtuvuse tõttu $A \in \mathfrak{A}$.

(d)

Ülesanne 1.15. Tõestada, et funktsioon $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ on mõõtuv.

(e) Veendumaks, et funktsioon $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv, meenutame, et

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k.$$

Kuna funktsioonid f_k, $k \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad, siis tõestuse osas (c) tõestatu põhjal ka funktsioonid $\sup_{k\geqslant n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad ning järelikult tõestuse osas (d) tõestatu põhjal ka funktsioon $\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k$ on mõõtuv, s.t. funktsioon $\limsup_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv.

(f)

Ülesanne 1.16. Tõestada, et funktsioon $\liminf_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv.

(g) Kui eksisteerib piirväärtus $\lim_{n\to\infty} f_n$, siis

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$$

ning funktsiooni $\lim_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvus järeldub funktsiooni $\limsup_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvusest (või ka funktsiooni $\liminf_{n\to\infty} f_n$ mõõtuvusest). □

1.4. Lihtsad mõõtuvad funktsioonid

Meenutame karakteristliku funktsiooni definitsiooni.

Definitsioon 1.5. Olgu X mingi hulk ning olgu $E \subset X$.
Funktsiooni $\chi_E\colon X \to \mathbb{R}$, kus

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in E, \\ 0, & \text{kui } x \notin E, \end{cases} \qquad x \in X,$$

nimetatakse *hulga E karakteristlikuks funktsiooniks* ehk (eriti tõenäosusteoorias) *hulga E indikaatorfunktsiooniks.*

Ülesanne 1.17. Olgu X mingi hulk ning olgu $A, B, A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$;

(b) kui $A \cap B = \emptyset$, siis $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$.

(c) kui $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, siis $\chi_{\bigcup_{j=1}^\infty A_j} = \sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}$.

Ülesandes 1.8 veendusime, et kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum, siis *hulga $E \in \mathcal{P}(X)$ karakteristlik funktsioon χ_E on mõõtuv parajasti siis, kui hulk E on mõõtuv (s.t. $E \in \mathfrak{A}$).*

Definitsioon 1.6. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum.

- Öeldakse, et funktsioon $\phi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on *lihtne mõõtuv funktsioon*, kui ta on esitatav kujul

$$\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}, \qquad \text{kus } n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ ja } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}. \tag{1.4}$$

Märgime, et teoreemi 1.5 põhjal on lihtne mõõtuv funktsioon tõepoolest mõõtuv. Juhime tähelepanu, et *vastavalt definitsioonile ei saa lihtne mõõtuv funktsioon omandada väärtusi ∞ ega $-\infty$.*

- Esitust (1.4) nimetatakse funktsiooni ϕ *kanooniliseks esituseks,* kui $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$.

On ilmne, et lihtsa mõõtuva funktsiooni kanooniline esitus ei ole üheselt määratud.

- Esitust (1.4) nimetatakse funksiooni ϕ *standardesituseks,* kui
  (1) $A_1, \ldots, A_n \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, ning $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = X$;
  (2) $\alpha_i \neq \alpha_j$, kui $i \neq j$.

Märgime, et kui (1.4) on funktsiooni ϕ standardesitus, siis funktsiooni ϕ väärtuste hulk on $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ning iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral $A_j = \{x \in X \colon \phi(x) = \alpha_j\}$.

Edasises hakkame kasutama järgmisi tähistusi. Olgu X mingi hulk ning olgu $f, g, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Me kirjutame

- $f \geqslant g$ (või $g \leqslant f$), kui $f(x) \geqslant g(x)$ iga $x \in X$ korral; sealhulgas, kui $f(x) \geqslant 0$ iga $x \in X$ korral, siis kirjutame $f \geqslant 0$;
- $f_n \to f$, kui $f_n(x) \to f(x)$ iga $x \in X$ korral;
- $f_n \nearrow f$, kui $f_n(x) \nearrow f(x)$ iga $x \in X$ korral, s.t. $f_n \to f$, kusjuures $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots$ iga $x \in X$ korral.

Teoreem 1.7. *Olgu* $(X, \mathfrak{A})$ *mõõtuv ruum ning olgu* $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \geqslant 0$, *mõõtuv funktsioon. Siis leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid* $\phi_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *nii, et*

(1) $\phi_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;

(2) $\phi_n \nearrow f$;

(3) *kui funktsioon* f *on tõkestatud hulgas* $B \subset X$, *siis* $\phi_n \to f$ *ühtlaselt hulgas* B.

Tõestus. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame

$$E_k^n = \left\{ x \in X \colon \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^{2n} - 2, 2^{2n} - 1,$$

ja $E_{2^{2n}}^n = \left\{ x \in X \colon f(x) \geqslant 2^n \right\}$ ning defineerime

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \chi_{E_k^n}.$$

Siis $\phi_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, on lihtsad mõõtuvad funktsioonid, kusjuures $\phi_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Selgitame veel funktsioonide ϕ_n, $n \in \mathbb{N}$, konstrueerimist. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Poollõik $[0, 2^n)$ jaotatakse 2^{2n} võrdse pikkusega poollõiguks, igaüks pikkusega $\frac{1}{2^n}$:

$$\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \ldots, \left[\frac{2^{2n}-2}{2^n}, \frac{2^{2n}-1}{2^n}\right), \left[\frac{2^{2n}-1}{2^n}, 2^n\right).$$

Olgu $x \in X$. Kui $f(x) < 2^n$, siis $f(x)$ kuulub ühte nendest poollõikudest, ehk, täpsemalt, mingi $k \in \left\{0, 1, 2, \ldots, 2^{2n} - 2, 2^{2n} - 1\right\}$ korral $\frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}$. Sellisel juhul defineeritakse $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Kui aga $f(x) \geqslant 2^n$, siis defineeritakse $\phi_n(x) = 2^n$.

On ilmne, et kui $f(x) < 2^n$, siis $|f(x) - \phi_n(x)| = f(x) - \phi_n(x) < \frac{1}{2^n}$ (vt. joonis ?.?, kus $n = 1$).

Ülesanne 1.18. Tõestada väited (2) ja (3).

□

Definitsioon 1.7. Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk ning olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Defineerime funktsioonid

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{ja} \quad f^- = \max\{-f, 0\}$$

ehk, teisisõnu,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X,$$

ja

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} 0, & \text{kui } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X.$$

Funktsioone f^+ ja f^- nimetatakse vastavalt *funktsiooni f positiivseks ja negatiivseks osaks.*

On selge, et

$$f = f^+ - f^- \quad \text{ja} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

kus *funktsiooni f absoluutväärtus* (ehk *moodul*) $|f|\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on defineeritud seosega

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in X.$$

Ülesanne 1.19. Tõestada, et $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

On ilmne, et kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõduga ruum ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, siis

$$f \text{ on mõõtuv} \iff f^+ \text{ ja } f^- \text{ on mõõtuvad} \implies |f| \text{ on mõõtuv.}$$

Ülesanne 1.20. Tõestada, et

(a) f on mõõtuv $\iff$ f^+ ja f^- on mõõtuvad $\implies$ $|f|$ on mõõtuv;

(b) üldjuhul ei järeldu absoluutväärtuse $|f|$ mõõtuvusest funktsiooni f mõõtuvus.

Järgmisest teoreemist nähtub, et *funktsioon on mõõtuv parajasti siis, kui ta on mingi lihtsate mõõtuvate funktsioonide jada piirväärtus.*

Teoreem 1.8. *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on mõõtuv parajasti siis, kui leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\phi_n \to f$.*

TÕESTUS. *Piisavus* on ilmne, sest teoreemi 1.6 põhjal on mõõtuvate funktsioonide jada piirväärtus mõõtuv funktsioon.

Tarvilikkus. Olgu $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mõõtuv funktsioon. Siis ka funktsioonid f^+ ja f^- on mõõtuvad; järelikult teoreemi 1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi'_n, \phi''_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, selliselt, et $\phi'_n \nearrow f^+$ ja $\psi''_n \nearrow f^-$. Vahed $\phi_n = \phi'_n - \phi''_n$, $n \in \mathbb{N}$, on lihtsad mõõtuvad funktsioonid; seejuures $\phi_n = \phi'_n - \phi''_n \to f^+ - f^- = f$. $\square$

Ülesanne 1.21. Olgu $(X, \mathfrak{A})$ mõõtuv ruum. Tõestada, et $f\colon X \to \mathbb{R}$ on tõkestatud mõõtuv funktsioon parajasti siis, kui leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\phi_n \to f$ ühtlaselt.

1.5. Mõiste "peaaegu kõikjal"

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $V(x)$ mingi väide ruumi X punktide x kohta.

Definitsioon 1.8. Öeldakse, et väide $V(x)$ kehtib *peaaegu kõikjal (ruumis X)* ehk, lühidalt, *p.k. (ruumis X),* kui hulk

$$\{x \in X \colon \text{ väide } V(x) \text{ ei kehti}\}$$

s.t. nende elementide $x \in X$ hulk, mille korral väide $V(x)$ ei kehti, on hüljatav. Sel juhul öeldakse ka, et väide $V(x)$ kehtib *peaaegu kõikide $x \in X$ korral* ehk, lühidalt, *p.k. $x \in X$ korral.*

Olgu $f, g, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Vastavalt mõiste "peaaegu kõikjal" definitsioonile ütleme me, et

- $f(x) = g(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X \colon f(x) \neq g(x)\}$ on hüljatav;
- $f(x) \leqslant g(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X \colon f(x) > g(x)\}$ on hüljatav;
- $f_n(x) \to f(x)$ p.k. ehk $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X \colon f_n(x) \not\to f(x)\}$ on hüljatav
- $f_n(x) \nearrow f(x)$ p.k., kui hulk $\{x \in X \colon f_n(x) \not\nearrow f(x)\}$ on hüljatav.

Me kirjutame

- $f = g$ p.k., kui $f(x) = g(x)$ p.k.;
- $f \leqslant g$ p.k., kui $f(x) \leqslant g(x)$ p.k.;
- $f_n \to f$ p.k., kui $f_n(x) \to f(x)$ p.k.;
- $f_n \nearrow f$ p.k., kui $f_n(x) \nearrow f(x)$ p.k.

Ülesanne 1.22. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Tõestada, et järgmised väited on samaväärsed:

(i) väide $V(x)$ kehtib p.k. ruumis X;

(ii) leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et väide $V(x)$ kehtib iga $x \in A$ korral ja $\mu(A^c) = 0$.

Teoreem 1.9. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, g, f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Järgmised väited kehtivad parajasti siis, kui ruum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on täielik.*

(a) *Kui funktsioon f on mõõtuv ja $f = g$ p.k., siis ka funktsioon g on mõõtuv.*

(b) *Kui funktsioonid f_n, $n \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad ja $f_n \to g$ p.k., siis on ka funktsioon g mõõtuv.*

Tõestus.

Ülesanne 1.23. Tõestada teoreem 1.9.

□

Teoreem 1.10. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ tema täield. Kui funktsioon $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on $\overline{\mathfrak{A}}$-mõõtuv, siis leidub $\mathfrak{A}$-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ selliselt, et $f = g$ p.k. Kui seejuures funktsioon f on p.k. lõplik (s.t. $|f| < \infty$ p.k.), siis saame funktsiooni g valida nii, et $g\colon X \to \mathbb{R}$ (s.t. g on lõplik, s.t. $|g| < \infty$).*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.24. Tõestada teoreem 1.10.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 1.8. Teine võimalus (vist ökonoomsem?) on kasutada ülesannet 1.7.

$\square$

1.6. Harjutusülesandeid

Ülesanne 1.25. Olgu $X \neq \emptyset$ mingi hulk ning olgu $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tõestada, et

(a) $(-f)^+ = f^-$ ja $(-f)^- = f^+$;

(b) kui $\alpha \geqslant 0$, siis $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ ja $(\alpha f)^- = \alpha f^-$;

(c) kui $\alpha \leqslant 0$, siis $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ ja $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$;

(d) kui $A \subset X$, siis $(f\chi_A)^+ = f^+\chi_A$ ja $(f\chi_A)^- = f^-\chi_A$;

(e) $f \geqslant g$ parajasti siis, kui $f^+ \geqslant g^+$ ja $f^- \leqslant g^-$.

Ülesanne 1.26. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, g, h, f_n, g_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et

(a) kui $f = g$ p.k. ja $g = h$ p.k., siis $f = h$ p.k.;

(b) kui f on p.k. lõplik (s.t. $|f| < \infty$ p.k.) ja $g = f$ p.k., siis ka g on p.k. lõplik;

(c) kui f on p.k. lõplik ja g on p.k. lõplik, siis ka $f + g$ on p.k. lõplik;

(d) kui $f_n \to f$ p.k., $g_n \to g$ p.k. ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n = g_n$ p.k., siis $f = g$ p.k.;

(e) kui $f_1 = g_1$ p.k. ja $f_2 = g_2$ p.k., siis $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ p.k.;

(f) $f = g$ p.k. parajasti siis, kui $f^+ = g^+$ p.k. ja $f^- = g^-$ p.k.

§ 2. Integraal mittenegatiivsest funktsioonist

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum. Edaspidi tähistame mittenegatiivsete $\mathfrak{A}$-mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ klassi sümboliga $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ või, kui ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt sümboliga $L^+(\mu)$ või L^+. Niisiis,

$$L^+ = L^+(\mu) = L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) = \big\{f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \,\big|\, f \text{ on } \mathfrak{A}\text{-mõõtuv ja } f \geqslant 0\big\}.$$

Kõikjal edaspidi kogu selle paragrahvi ulatuses on $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning $L^+ = L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

2.1. Integraal lihtsast mõõtuvast funktsioonist $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Definitsioon 2.1. Olgu $\phi \in L^+$ lihtne mõõtuv funktsioon.

(Lebesgue'i) integraal funktsioonist ϕ (üle hulga X) (mõõdu μ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mu(A_j),$$

kus $\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$ on funktsiooni ϕ kanooniline esitus.

Selle definitsiooni korrektsuses (s.t. sõltumatuses funktsiooni ϕ kanoonilisest esitusest) veendume käsiloleva definitsiooni lõpus.

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \int_X \phi(x)\, \mu(dx) = \int_X \phi\, d\mu = \int_X \phi.$$

Kui $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist ϕ üle hulga A (mõõdu μ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A \phi(x)\, d\mu(x) = \int_X \phi\chi_A.$$

Ülesanne 2.1. Tõestada, et $\phi\chi_A$ on lihtne mõõtuv funktsioon.

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_A \phi(x)\, d\mu(x) = \int_A \phi(x)\, \mu(dx) = \int_A \phi\, d\mu = \int_A \phi.$$

Kui ruumi X roll on kontekstist selge, kirjutatakse sümboli $\int_X$ asemel ka lihtsalt $\int$.

Veendume integraali $\int_X \phi(x)\, d\mu(x)$ definitsiooni korrektsuses. Selleks tuleb näidata, et kui $\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \chi_{A_j}$ ja $\phi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \chi_{B_i}$ on funktsiooni ϕ kanoonilised esitused, siis

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mu(A_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, \mu(B_i).$$

Tähistades $A_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j$, $\alpha_0 = 0$, $B_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$, $\beta_0 = 0$, on eelnev võrdus samaväärne võrdusega

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \, \mu(A_j) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(B_i). \tag{2.1}$$

Võrduse (2.1) tõestuseks märgime, et iga $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ korral

$$A_j = A_j \cap X = A_j \cap \bigcup_{i=0}^{m} B_i = \bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i;$$

kuna hulgad $A_j \cap B_0, A_j \cap B_1, \dots, A_j \cap B_m$ on paarikaupa lõikumatud, siis

$$\mu(A_j) = \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{m} A_j \cap B_i\Big) = \sum_{i=0}^{m} \mu(A_j \cap B_i);$$

niisiis

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \, \mu(A_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{m} \mu(A_j \cap B_i) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \alpha_j \, \mu(A_j \cap B_i).$$

Analoogiliselt saame, et

$$\sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(B_i) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_i \, \mu(B_i \cap A_j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} \beta_i \, \mu(A_j \cap B_i).$$

Fikseerides vabalt $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ja $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, jääb võrduse (2.1) tõestuseks seega näidata, et

$$\alpha_j \, \mu(A_j \cap B_i) = \beta_i \, \mu(A_j \cap B_i). \tag{2.2}$$

Selleks paneme tähele, et

- kui leidub $x \in A_j \cap B_i$, siis $\alpha_j = \phi(x) = \beta_i$, seega (2.2) kehtib;
- kui $A_j \cap B_i = \emptyset$, siis $\mu(A_j \cap B_i) = 0$, seega (2.2) kehtib.

Teoreem 2.1. *Olgu $\phi, \psi \in L^+$ lihtsad mõõtuvad funktsioonid. Siis*

(a) $\int c\phi = c \int \phi$ *iga $c \geqslant 0$ korral;*

(b) $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$*;*

(c) *kui $\phi \leqslant \psi$, siis ka $\int \phi \leqslant \int \psi$;*

(d) *hulgafunktsioon $\mu_\phi \colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$, mis on defineeritud võrdusega*

$$\mu_\phi(A) = \int_A \phi, \qquad A \in \mathfrak{A},$$

on mõõt.

Tõestus. Olgu

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{ja} \quad \psi = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i}$$

vastavalt funktsioonide ϕ ja ψ standardesitused.

(a). Olgu $c \geqslant 0$. Siis $c\phi = \sum_{j=1}^{n} c\,\alpha_j\,\chi_{A_j}$ on funktsiooni $c\phi$ kanooniline esitus, seega

$$\int c\phi = \sum_{j=1}^{n} c\,\alpha_j\,\mu(A_j) = c\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\mu(A_j) = c\int \phi.$$

(b) ja (c). Tähistame

$$C_{ij} = A_j \cap B_i, \quad j \in \{1,\dots,n\},\ i \in \{1,\dots,m\}.$$

Paneme tähele, et $C_{ij} \cap C_{kl} = \emptyset$, kui $i \neq k$ või $j \neq l$, ehk, teisisõnu, hulgad C_{ij} on paarikaupa lõikumatud. Seejuures

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}, \quad j \in \{1,\dots,n\}, \qquad \text{ja} \qquad B_i = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}, \quad i \in \{1,\dots,m\}.$$

Nüüd

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \chi_{C_{ij}}$$

ja, analoogiliselt,

$$\psi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_i \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{C_{ij}}$$

on vastavalt funktsioonide ϕ ja ψ kanoonilised esitused; seega

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(C_{ij}) \quad \text{ja} \quad \int \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(C_{ij}). \tag{2.3}$$

Väite (b) tõestuseks paneme tähele, et

$$\phi + \psi = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \chi_{C_{ij}} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{C_{ij}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j + \beta_i) \chi_{C_{ij}}$$

on funktsiooni $\phi + \psi$ kanooniline esitus; seega

$$\int (\phi+\psi) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} (\alpha_j+\beta_i)\,\mu(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(C_{ij}) = \int \phi + \int \psi.$$

Eeldame nüüd, et $\phi \leqslant \psi$. Fikseerides vabalt $j \in \{1,\dots,n\}$ ja $i \in \{1,\dots,m\}$, piisab väite (c) tõestuseks (tänu võrdustele (2.3)) näidata, et

$$\alpha_j\,\mu(C_{ij}) \leqslant \beta_i\,\mu(C_{ij}). \tag{2.4}$$

Selleks märgime, et

- kui leidub $x \in C_{ij}$, siis $\alpha_j = \phi(x) \leqslant \psi(x) = \beta_i$, seega (2.4) kehtib;

- kui $C_{ij} = \emptyset$, siis $\mu(C_{ij}) = 0$, seega (2.4) kehtib.

(d). Kõigepealt paneme tähele, et

$$\mu_\phi(\emptyset) = \int_\emptyset \phi = \int \phi\chi_\emptyset = \int 0 = 0\,\mu(X) = 0.$$

Olgu hulgad $E_i \in \mathfrak{A}$, $i \in \mathbb{N}$, sellised, et $E_i \cap E_j = \emptyset$, kui $i \neq j$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et

$$\mu_\phi\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu_\phi(E_i)$$

ehk, teisisõnu,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \phi = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} \phi.$$

Veendume selles:

$$\begin{aligned}
\int_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \phi &= \int \phi\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\right)\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\chi_{\bigcup_{i=1}^\infty E_i} \\
&= \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j\cap\bigcup_{i=1}^\infty E_i} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mu\left(A_j \cap \bigcup_{i=1}^\infty E_i\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_j \cap E_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^\infty \mu(A_j\cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^n \alpha_j\mu(A_j\cap E_i) = \sum_{i=1}^\infty \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j\cap E_i} \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^\infty \int \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j}\right)\chi_{E_i} = \sum_{i=1}^\infty \int \phi\chi_{E_i} \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} \phi.
\end{aligned}$$

□

Märkus 2.1. Teoreemi 2.1 väitest (b) järeldub muuhulgas, et *kui $\phi \in L^+$ on lihtne mõõtuv funktsioon, siis funktsiooni ϕ mis tahes esituse*

$$\phi = \sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j} \quad (n\in\mathbb{N},\ \alpha_1,\dots,\alpha_n \geqslant 0,\ A_1,\dots,A_n\in\mathfrak{A})$$

korral

$$\int\phi = \int\sum_{j=1}^n \alpha_j\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^n \int \alpha_j\chi_{A_j} = \sum_{j=1}^n \alpha_j\,\mu(A_j).$$

2.2. Integraal funktsioonist $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Toetudes mittenegatiivse lihtsa mõõtuva funktsiooni integraali mõistele, üldistame nüüd integraali mõiste kogu klassile L^+.

Definitsioon 2.2. Olgu $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

(Lebesgue'i) integraal funktsioonist f (üle hulga X) (mõõdu μ järgi) defineeritakse võrdusega

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sup\left\{ \int \phi \;\middle|\; \phi \in L^+ \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \phi \leqslant f \right\}.$$

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, \mu(dx) = \int_X f\, d\mu = \int_X f.$$

Märgime, et lihtsa mõõtuva funktsiooni $f \in L^+$ jaoks annab definitsioon 2.2 sama integraali, mis definitsioon 2.1.

Kui $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist f üle hulga A (mõõdu μ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\chi_A.$$

Seejuures kasutatakse ka tähistusi

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \int_A f(x)\, \mu(dx) = \int_A f\, d\mu = \int_A f.$$

Kui ruumi X roll on kontekstist selge, kirjutatakse sümboli $\int_X$ asemel ka lihtsalt $\int$.

Vahetult definitsioonist järeldub, et

(a) kui $f \in L^+$, siis iga $c \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$, korral $\int cf = c \int f$;

(b) kui $f, g \in L^+$ on sellised, et $f \leqslant g$, siis ka $\int f \leqslant \int g$.

Integraali omadust (b) nimetatakse *integraali monotoonsuseks.*

Ülesanne 2.2. Tõestada väited (a) ja (b).

Olgu $f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$. Märgime, et (isegi siis, kui piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ eksisteerivad) *võrdus $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ ei tarvitse üldjuhul kehtida.*

Näide 2.1. Olgu $f_n = \chi_{[n-1,n)} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis $f_n \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $f_n \to 0$. Kuna $\int_{\mathbb{R}} f_n = m\big([n-1, n)\big) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, siis

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Näide 2.2. Olgu $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Siis $f_n \in L^+(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $f_n \to 0$. Kuna $\int_{\mathbb{R}} f_n = n\, m\big((0, \frac{1}{n})\big) = n\frac{1}{n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, siis

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Järgnev teoreem on üks nn. Lebesgue'i koonduvusteoreemidest, mis annavad piisavad tingimused võrduse $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$ kehtivuseks.

Teoreem 2.2 ((Lebesgue'i) monotoonse koonduvuse teoreem e. Beppo Levi teoreem)**.** *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \nearrow f$. Siis*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Niisiis, teoreemi 2.2 eeldustel kehtib võrdus $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$.

Teoreemi 2.2 tõestus. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \leqslant f_{n+1}$, siis integraali monotoonsuse tõttu ka $\int f_n \leqslant \int f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; järelikult eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$. Kuna $f_n \nearrow f$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n \leqslant f$; järelikult integraali monotoonsuse tõttu $\int f_n \leqslant \int f$, $n \in \mathbb{N}$, ning seega ka $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f$.

Teoreemi tõestuseks jääb veenduda, et $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int f$. Selleks piisab näidata, et iga lihtsa mõõtuva funktsiooni $\phi \in L^+$, $\phi \leqslant f$, korral kehtib võrratus $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \phi$.

Tõepoolest, sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \sup\left\{ \int \phi \;\middle|\; \phi \in L^+ \text{ on lihtne mõõtuv funktsioon, } \phi \leqslant f \right\} = \int f.$$

Olgu lihtne mõõtuv funksioon $\phi \in L^+$ selline, et $\phi \leqslant f$. Võrratuse $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \phi$ kehtivuseks piisab näidata, et iga reaalarvu $\alpha \in (0,1)$ korral $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \int \alpha\phi$.

Tõepoolest, sel juhul

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \lim_{\alpha\to 1-} \int \alpha\phi = \lim_{\alpha\to 1-} \alpha \int \phi = \int \phi.$$

Fikseerime vabalt $\alpha \in (0,1)$. Tähistame

$$X_n = \big\{ x \in X \colon\; f_n(x) \geqslant \alpha\phi(x) \big\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Siis

$$X_n \in \mathfrak{A},\; X_n \subset X_{n+1},\; n \in \mathbb{N}, \qquad \text{ja} \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n. \tag{2.5}$$

Ülesanne 2.3. Tõestada väited (2.5).

Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\int f_n \geqslant \int f_n \chi_{X_n} \geqslant \int \alpha\phi\chi_{X_n} = \int_{X_n} \alpha\phi = \mu_{\alpha\phi}(X_n).$$

Kuna teoreemi 2.1 põhjal on hulgafunktsioon

$$\mu_{\alpha\phi} \colon \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \int_A \alpha\phi \in [0, \infty]$$

mõõt, siis järeldub viimasest võrratusteahelast ja tingimustest (2.5), et

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \mu_{\alpha\phi}(X_n) = \mu_{\alpha\phi}(X) = \int \alpha\phi.$$

□

Teoreem 2.3. *Olgu $f, g \in L^+$. Siis*

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

TÕESTUS. Kuna f ja g on mittenegatiivsed mõõtuvad funktsioonid, siis teoreemi 1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n, \psi_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, selliselt, et

$$\phi_n \nearrow f \quad \text{ja} \quad \psi_n \nearrow g.$$

Kuna $(\phi_n + \psi_n) \nearrow (f+g)$, siis Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int \phi_n + \int \psi_n \right) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \\ &= \int f + \int g,\end{aligned}$$

sest teoreemi 2.1 põhjal $\int (\phi_n + \psi_n) = \int \phi_n + \int \psi_n$. □

Teoreem 2.4. *Olgu $f_1, \ldots, f_n \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$. Siis*

$$\int \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} \int f_j.$$

TÕESTUS. Väide järeldub vahetult teoreemist 2.3 induktsiooni teel. □

Ülesanne 2.4. Tõestada, et kui $\phi, \psi \in L^+$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ ja $A \in \mathfrak{A}$, siis $\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$.

Teoreem 2.5. *Olgu $f_j \in L^+$, $j \in \mathbb{N}$. Siis*

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

Märkus 2.2. Ka teoreemile 2.5 (nagu ka teoreemile 2.2) viidatakse kirjanduses tavaliselt kui Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemile ehk Beppo Levi teoreemile.

TEOREEMI 2.5 TÕESTUS. Defineerime funktsioonid

$$g_n = \sum_{j=1}^{n} f_j, \qquad n \in \mathbb{N};$$

siis $g_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $g_n \nearrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j$; seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi ja teoreemi 2.4 põhjal

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} f_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

□

Teoreem 2.6. *Olgu $f \in L^+$ ning olgu $A, B \in \mathfrak{A}$.*

(a) *Kui $\mu(A) = 0$, siis*

$$\int_A f = 0.$$

(b) *Kui $\mu(A \cap B) = 0$, siis*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

TÕESTUS. (a). Olgu $\mu(A) = 0$. Defineerime funktsiooni $g(x) = \infty$, $x \in X$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $\int_A g = 0$, sest kuna $f \leqslant g$, siis integraali monotoonsuse põhjal sel juhul ka $0 \leqslant \int_A f \leqslant \int_A g = 0$, s.t. $\int_A f = 0$.

Defineerime funktsioonid

$$g_n(x) = n, \qquad x \in X, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Kuna $g_n \nearrow g$, siis ka $g_n\chi_A \nearrow g\chi_A$; seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_A g = \int g\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int g_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n.$$

Et aga

$$\int_A g_n = \int g_n\chi_A = \int n\chi_A = n\mu(A) = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

siis ka $\int_A g = 0$.

(b). Olgu $\mu(A \cap B) = 0$. Kõigepealt paneme tähele, et kui $A \cap B = \emptyset$, siis väide kehtib, sest sel juhul

$$\int_{A\cup B} f = \int f\chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

Väite (b) tõestuseks üldjuhul märgime, et väite (a) põhjal $\int_{A\cap B} f = 0$; seega

$$\int_{A\cup B} f \overset{(1)}{=} \int_A f + \int_{B\setminus A} f = \int_A f + \int_{B\setminus A} f + \int_{A\cap B} f \overset{(2)}{=} \int_A f + \int_B f.$$

Siin

- võrdus (1) kehtib, sest $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ja $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
- võrdus (2) kehtib, sest $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ja $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$.

□

Teoreem 2.7. *Olgu $f, g \in L^+$ sellised, et $f = g$ p.k. Siis*

$$\int f = \int g.$$

TÕESTUS. Kuna $f = g$ p.k., siis leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$f(x) = g(x) \quad \text{iga } x \in A \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \mu(A^c) = 0.$$

Arvestades, et $f\chi_A = g\chi_A$ ning teoreemi 2.6 põhjal $\int_{A^c} f = \int_{A^c} g = 0$, saame, et

$$\begin{aligned}\int f &= \int_A f + \int_{A^c} f = \int_A f = \int f\chi_A \\ &= \int g\chi_A = \int_A g = \int_A g + \int_{A^c} g = \int g.\end{aligned}$$

□

Teoreem 2.8. *Olgu $f \in L^+$. Siis*

$$\int f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \quad p.k.$$

TÕESTUS. "$\Leftarrow$". Kui $f = 0$ p.k., siis teoreemi 2.7 põhjal $\int f = \int 0 = 0$.

"$\Rightarrow$". Olgu $\int f = 0$. Tähistame

$$A = \{x \in X\colon\ f(x) > 0\}.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $\mu(A) = 0$. Selleks paneme tähele, et $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, kus

$$A_j := \Big\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant \tfrac{1}{j}\Big\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Kuna $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, siis $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_j)$, seega jääb implikatsiooni tõestuseks näidata, et

$$\mu(A_j) = 0 \quad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.6}$$

Mis tahes $j \in \mathbb{N}$ korral integraali monotoonsuse tõttu

$$\frac{1}{j}\,\mu(A_j) = \int \frac{1}{j}\chi_{A_j} \leqslant \int f\chi_{A_j} \leqslant \int f = 0,$$

seega (2.6) kehtib. □

Teoreem 2.9. *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \nearrow f$ p.k. Siis*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Märkus 2.3. Teoreemi 2.9 nimetatakse (samuti nagu ka tema erijuhtu teoreemi 2.2) Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemiks ehk Beppo Levi teoreemiks.

Teoreemi 2.9 tõestus. Kuna $f_n \nearrow f$ p.k., siis leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et

$$f_n(x) \nearrow f(x) \quad \text{iga } x \in A \text{ korral} \qquad \text{ja} \qquad \mu(A^c) = 0.$$

Nüüd

$$f\chi_A, f_n\chi_A \in L^+, \;\; f = f\chi_A \text{ p.k.}, \;\; f_n = f_n\chi_A \text{ p.k.}, \, n \in \mathbb{N}, \;\text{ ja }\; f_n\chi_A \nearrow f\chi_A;$$

seega Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi 2.2 põhjal $\int f\chi_A = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\chi_A$. Teoreemist 2.7 järeldub nüüd, et

$$\int f = \int f\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int f_n\chi_A = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

Teoreem 2.10 (Fatou lemma)**.** *Olgu $f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$. Siis*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Tõestus. Teoreemi tõestuseks märgime, et

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(2)}{=} \liminf_{n\to\infty} \int \inf_{k\geqslant n} f_k \overset{(3)}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Siin

- võrdus (1) järeldub Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemist, sest
$$\inf_{k\geqslant n} f_k \nearrow \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} f_n;$$
- võrdus (2) kehtib, sest piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} \int \inf\limits_{k\geqslant n} f_k$ eksisteerib;
- võrratus (3) järeldub alumise piirväärtuse monotoonsusest, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\limits_{k\geqslant n} f_k \leqslant f_n$ ning seega integraali monotoonsuse tõttu ka $\int \inf\limits_{k\geqslant n} f_k \leqslant \int f_n$.

□

Teoreem 2.11. *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L^+$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis*

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Märkus 2.4. Teoreemile 2.11 (nagu ka teoreemile 2.10) viidatakse kirjanduses tavaliselt kui Fatou lemmale.

TEOREEMI 2.11 TÕESTUS. Kuna $f_n \to f$ p.k., siis ka $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ p.k.; seega järeldub teoreemist 2.7 ja Fatou lemmast, et

$$\int f = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

□

Teoreem 2.12. *Olgu funktsioon $f \in L^+$ selline, et $\int f < \infty$. Siis*

(a) $\mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) = \infty\}\big) = 0$ *(s.t. $f < \infty$ p.k., s.t. f on p.k. lõplik);*

(b) *hulk $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ on σ-lõplik (s.t. leiduvad hulgad $A_n \in \mathfrak{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$).*

TÕESTUS. (a). Tähistame $A = \{x \in X\colon\ f(x) = \infty\}$. Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$f \geqslant f\chi_A \geqslant n\chi_A;$$

seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$M := \int f \geqslant \int n\chi_A = n\mu(A),$$

s.t. iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n\mu(A) \leqslant M < \infty,$$

mis on võimalik vaid siis, kui $\mu(A) = 0$.

(b). Tähistame

$$A_1 = \{x \in X\colon\ f(x) \geqslant 1\}$$

ja

$$A_n = \left\{x \in X\colon\ \frac{1}{n} \leqslant f(x) < \frac{1}{n-1}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2;$$

siis $A_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, kusjuures

$$\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Väite tõestuseks jääb näidata, et $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Ülesanne 2.5. Tõestada, et $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

□

2.3. Harjutusülesandeid ja täiendavaid märkusi

Ülesanne 2.6. Olgu $\mu(X) > 0$ ning olgu $f, g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ sellised, et $f(x) < g(x)$ iga $x \in X$ korral ja $\int f\, d\mu < \infty$. Tõestada, et $\int f\, d\mu < \int g\, d\mu$.

Ülesanne 2.7. Olgu $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Tõestada, et hulgafunktsioon

$$\mu_f \colon \mathfrak{A} \ni A \longmapsto \int_A f\, d\mu \in [0, \infty]$$

on mõõt, kusjuures iga $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ korral

$$\int g\, d\mu_f = \int gf\, d\mu. \tag{2.7}$$

Näpunäide. Võrdus (2.7) tõestada kõigepealt lihtsa mõõtuva funktsiooni $g \in L^+$ jaoks; võrduse (2.7) tõestuseks üldjuhul kasutada teoreemi 1.7 ja monotoonse koonduvuse teoreemi.

Märkus 2.5. Ülesande 2.7 valguses tekib loomulik küsimus: kui $(X, \mathfrak{A})$ on mõõtuv ruum ning hulgafunktsioonid $\mu, \nu \colon X \to [0, \infty]$ on mõõdud, siis millistel tingimustel leidub funktsioon $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et $\nu = \mu_f$, s.t.

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

σ-lõplike mõõtude μ ja ν juhul annab vastuse sellele küsimusele üks mõõduteooria olulisemaid tulemusi—*Radon-Nikodými teoreem,* mille me tõestame käesoleva konspekti paragrahvis IV.2.

§ 3. Integraal $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioonist

Kõikjal selles paragrahvis on $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum.

Meenutame, et funktsiooni $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ positiivne osa $f^+\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ja negatiivne osa $f^-\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on defineeritud võrdustega

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X,$$

ja

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kui } f(x) < 0, \end{cases} \qquad x \in X.$$

Seejuures $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

3.1. Ruum $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($\mathfrak{A}$-)mõõtuv funktsioon.

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et funktsioon f on *(Lebesgue'i mõttes) integreeruv (mõõdu μ järgi)*, kui

$$\int_X f^+\,d\mu < \infty \quad \text{ja} \quad \int_X f^-\,d\mu < \infty.$$

Märgime, et $f^+, f^- \in L^+(\mu)$ ning seega on integraalid nendest funktsioonidest defineeritud.

Kui funktsioon f on integreeruv, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist f (üle hulga X) (mõõdu μ järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu.$$

Juhime tähelepanu, et integreeruvate funktsioonide $f \in L^+$ jaoks annab see integraali definitsioon sama tulemuse, mis (mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni integraali) definitsioon 2.2, sest $f \in L^+$ korral $f^+ = f$ ja $f^- = 0$.

Kõigi mõõdu μ järgi integreeruvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{R}$ klassi tähistatakse sümboliga $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ või, kui ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ roll on kontekstist selge, siis ka lihtsalt $L_1(\mu)$ või L_1.

Rõhutame, et see klassi L_1 definitsioon on "ajutine": pärast teoreemide 3.1–3.3 tõestamist me laiendame klassi L_1 peaaegu kõikjal määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega integreeruvate funktsioonidega (muidugi eelnevalt selgitades, mida niisuguste funktsioonide puhul integreeruvus tähendab).

Paneme tähele, et

$$f \in L_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int |f| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad |f| \in L_1.$$

Ülesanne 3.1. Tõestada need samaväärsused.

Kui $f \in L_1$ ja $A \in \mathfrak{A}$, siis *(Lebesgue'i) integraal funktsioonist* f *(üle hulga* A*) (mõõdu* μ *järgi)* defineeritakse võrdusega

$$\int_A f\,d\mu := \int_X f\chi_A\,d\mu.$$

Juhime tähelepanu, et $f\chi_A \in L_1$, sest kuna $|f\chi_A| \leqslant |f|$, siis $\int |f\chi_A| \leqslant \int |f| < \infty$.

Ülesanne 3.2. Olgu $f \in L_1$ ja $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu.$$

Kõik antud kontekstis kasutatavad alternatiivsed tähistused on analoogilised juhuga, kus $f \in L^+$. (Näiteks $\int_X f\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f = \int f$ jne.)

Ülesanne 3.3. Olgu $f, g \in L_1$, $A, B \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) hulk $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$ on σ-lõplik;

(b) kui $f \leqslant g$, siis ka $\int f \leqslant \int g$;

(c) kui $\mu(A) = 0$, siis $\int_A f = 0$;

(d) kui $\mu(A \cap B) = 0$, siis $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Järgnev teoreem ütleb, et L_1 on vektorruum, kusjuures integraal $\int$ on lineaarne funktsionaal ruumil L_1.

Teoreem 3.1. *Olgu* $f, g \in L_1$ *ning olgu* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Siis*

(a) $\alpha f \in L_1$, *kusjuures* $\int \alpha f = \alpha \int f$;

(b) $f + g \in L_1$, *kusjuures* $\int (f+g) = \int f + \int g$.

Tõestus. (a). Kõigepealt paneme tähele, et

$$\int |\alpha f| = \int |\alpha||f| = |\alpha| \int |f| < \infty$$

(sest $f \in L_1$ tõttu $\int |f| < \infty$); järelikult $\alpha f \in L_1$.

Jääb näidata, et $\int \alpha f = \alpha \int f$.

Vaatleme esmalt juhtu, kus $\alpha \geqslant 0$. Siis $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ ja $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, seega

$$\begin{aligned}\int \alpha f &= \int (\alpha f)^+ - \int (\alpha f)^- = \int \alpha f^+ - \int \alpha f^- \\ &= \alpha \int f^+ - \alpha \int f^- = \alpha \left(\int f^+ - \int f^- \right) = \alpha \int f.\end{aligned}$$

Ülesanne 3.4. Tõestada võrduse $\int \alpha f = \alpha \int f$ kehtivus juhul, kui $\alpha < 0$.

(b). Kõigepealt märgime, et

$$\int |f+g| \leqslant \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g| < \infty$$

(sest $f, g \in L_1$ tõttu $\int |f| < \infty$ ja $\int |g| < \infty$); järelikult $f + g \in L_1$.

Tähistame $h = f + g$. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $\int h = \int f + \int g$. Selleks paneme tähele, et

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ehk, teisisõnu,

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

ning järelikult ka

$$\int (h^+ + f^- + g^-) = \int (h^- + f^+ + g^+).$$

Kuna $f^+, f^-, g^+, g^-, h^+, h^- \in L^+$, siis järeldub viimasest võrdusest, et

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$$

ehk, teisisõnu,

$$\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-,$$

s.t. $\int h = \int f + \int g$. □

Ülesanne 3.5. Olgu $f, g \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $A \in \mathfrak{A}$. Tõestada, et

(a) $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$;

(b) $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$.

Teoreem 3.2. *Olgu $f \in L_1$. Siis $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.*

TÕESTUS. Teoreemi tõestuseks paneme tähele, et

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leqslant \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| = \int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f|,$$

sest kuna $f^+, f^- \in L^+$, siis $\int f^+ \geqslant 0$ ja $\int f^- \geqslant 0$ ning järelikult $\left|\int f^+\right| = \int f^+$ ja $\left|\int f^-\right| = \int f^-$. □

Teoreem 3.3. *Olgu $f, g \in L_1$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f = g$ *p.k.;*

(ii) $\int |f - g| = 0$*;*

(iii) $\int_E f = \int_E g$ *iga $E \in \mathfrak{A}$ korral.*

TÕESTUS. (i)⇔(ii) on ilmne, sest kuna $|f-g| \in L^+$, siis teoreemi 2.8 põhjal

$$\int |f-g| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f-g| = 0 \ \text{ p.k.} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \ \text{ p.k.}$$

(ii)⇒(iii). Kehtigu tingimus (ii) ning olgu $E \in \mathfrak{A}$. Siis

$$\left|\int_E f - \int_E g\right| = \left|\int_E (f-g)\right| \leqslant \int_E |f-g| = \int |f-g|\chi_E \leqslant \int |f-g| = 0;$$

järelikult $\int_E f - \int_E g = 0$ ehk, teisisõnu, $\int_E f = \int_E g$.

(iii)⇒(ii). Kehtigu tingimus (iii). Tähistame

$$A = \big\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant g(x)\big\} \quad \text{ja} \quad B = \big\{x \in X\colon\ f(x) < g(x)\big\}.$$

Paneme tähele, et $A, B \in \mathfrak{A}$, kusjuures $A \cap B = \emptyset$ ja $A \cup B = X$. Seega

$$\begin{aligned}\int |f-g| &= \int_A |f-g| + \int_B |f-g| = \int_A (f-g) + \int_B (g-f)\\ &= \int_A f - \int_A g + \int_B g - \int_B f = 0,\end{aligned}$$

sest tingimuse (iii) põhjal $\int_A f = \int_A g$ ja $\int_B f = \int_B g$. □

Järgnevalt laiendame klassi L_1, andes ühtlasi tema elementidele uue tõlgenduse.

(I) Me ütleme, et (μ-)peaaegu kõikjal hulgas X määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon f on (μ-)integreeruv, kui leidub ($\mathfrak{A}$-mõõtuv) (μ-)integreeruv funktsioon $g\colon\ X \to \mathbb{R}$ nii, et $f = g$ p.k. Integraal (mõõdu μ järgi) niisugusest funktsioonist f defineeritakse võrdusega $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$.

Märgime, et see integraali definitsioon on korrektne: kui $h\colon\ X \to \mathbb{R}$ on niisugune μ-mõõtuv integreeruv funktsioon, et $f = h$ p.k., siis ka $h = g$ p.k. ning seega teoreemi 3.3 põhjal $\int h\,d\mu = \int g\,d\mu$.

(II) Me loeme klassi L_1 kuuluvateks (lisaks $\mathfrak{A}$-mõõtuvatele (μ-)integreeruvatele funktsioonidele $X \to \mathbb{R}$) kõik peaaegu kõikjal hulgas X määratud (μ-)integreeruvad funktsioonid.

On ilmne, et iga $f \in L_1$ on p.k. lõplik (s.t. $|f| < \infty$ p.k.). Samuti on lihtne veenduda, et teoreemid 3.1–3.3 ja ülesanded 3.1–3.5 jäävad kehtima ka klassi L_1 niisuguse interpretatsiooni korral.

Ülesanne 3.6. Olgu $f \in L_1$ ning olgu h peaaegu kõikjal hulgas X määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon. Tõestada, et kui $h = f$ p.k., siis ka $h \in L_1$.

Lõpuks,

(III) Kaks funktsiooni klassist L_1 loeme selle klassi elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal ruumis X.

Selliselt tõlgendatuna on L_1 vektorruum, kusjuures $\int$ on lineaarne funktsionaal sellel ruumil (rõhutame, et niisuguse tõlgenduse järgi on integraal klassi L_1 elementide jaoks teoreemi 3.3 põhjal korrektselt defineeritud).

Ülesanne 3.7. Veenduda, et L_1 vektorruum, kusjuures $\int$ on lineaarne funktsionaal sellel ruumil L_1.

Veelgi enam, vektorruum L_1 on normeeritud ruum järgneva võrdusega defineeritud normi suhtes:

$$\|f\| = \int |f|, \qquad f \in L_1.$$

Ülesanne 3.8. Veenduda selles.

Märkus 3.1. Sisuliselt tõlgendame me ruumina L_1 faktorruumi $L_1/\sim$, kus ekvivalentsiseos $\sim$ klassis L_1 on defineeritud seosega

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \text{ p.k.}, \qquad f, g \in L_1.$$

Seejuures tehted selle faktorruumi ekvivalentsiklassidega, integraal ekvivalentsiklassist, ning ekvivalentsiklassi norm on defineeritud esindajate kaudu: kui $f, g \in L_1$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis defineeritakse

$$[f] + [g] = [f+g], \qquad \alpha[f] = [\alpha f], \qquad \int [f] = \int f, \qquad \|[f]\| = \int |f|, \tag{3.1}$$

kus $[f], [g], [f+g], [\alpha f] \in L_1/\sim$ on vastavalt funktsioonide $f, g, f+g, \alpha f \in L_1$ ekvivalentsiklassid.

Ülesanne 3.9. Veenduda, et definitsioonid (3.1) ei sõltu esindajate f ja g valikust.

Olgu $(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ mõõduga ruumi $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ täield. Paneme tähele, et

$$L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}),$$

s.t. *klassid $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ koosnevad ühtedest ja samadest funktsioonidest, kusjuures ka integraalid mõõtude μ ja $\overline{\mu}$ järgi neil klassidel langevad kokku,* s.t.

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\overline{\mu} \quad \text{iga } f \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}) \text{ korral.}$$

Ülesanne 3.10. Veenduda selles.

NÄPUNÄIDE. Ülesande lahenduseks

(a) tõestada, et kui $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, siis ka $f \in L^+(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kusjuures

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\overline{\mu}; \tag{3.2}$$

(võrdus (3.2) tõestada esmalt lihtsate mõõtuvate funktsioonide $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ jaoks ning seejärel, kasutades monotoonse koonduvuse teoreemi, suvaliste $f \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ jaoks);

(b) tõestada, et kui $f\colon X \to \mathbb{R}$ on μ-mõõtuv μ-integreeruv funktsioon, siis on ta ka $\overline{\mu}$-integreeruv, kusjuures kehtib võrdus (3.2);

(c) tõestada, et kui $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ on μ-p.k. määratud μ-integreeruv funktsioon, siis ta on ka $\overline{\mu}$-integreeruv, kusjuures kehtib võrdus (3.2);

(d) tõestada, et $L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu}) \subset L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Niisiis, $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu) = L_1(X, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$, kusjuures ka integraalid mõõtude μ ja $\overline{\mu}$ järgi neil klassidel langevad kokku. Järelikult, KÕNELDES KLASSIST $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, VÕIME ALATI EELDADA (JA SELLES PARAGRAHVIS EDASPIDI EELDAMEGI), ET MÕÕDUGA RUUM $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ON TÄIELIK.

3.2. Lebesgue'i koonduvusteoreemid

Teoreem 3.4 ((Lebesgue'i) domineeritud koonduvuse teoreem)**.** *Olgu funktsioonid $f_n \in L_1$, $n \in \mathbb{N}$, ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et*

1° $f_n \to f$ *p.k.;*

2° *leidub funktsioon $g \in L_1$ selliselt, et $|f_n| \leqslant g$ p.k., $n \in \mathbb{N}$.*

Siis ka $f \in L_1$, kusjuures

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n. \tag{3.3}$$

Tõestus. Tõestame teoreemi väited kõigepealt eeldustel, et

$$\text{iga } x \in X \text{ korral} \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad \text{ja} \quad |f_n(x)| \leqslant g(x) < \infty,\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Sel juhul, kuna funktsioonid f_n, $n \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad, siis teoreemi 1.6 põhjal ka $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ on mõõtuv. Kuna iga $x \in X$ korral $|f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(x)|$, siis ka $|f| \leqslant g$, järelikult $\int |f| \leqslant \int g < \infty$, seega $f \in L_1$.

Võrduse (3.3) tõestuseks piisab näidata, et $\int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Tõepoolest, sel juhul ka $\left|\int f_n - \int f\right| \leqslant \int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Selleks paneme tähele, et

- iga $n \in \mathbb{N}$ korral $2g - |f_n - f| \in L^+$
  (sest $2g - |f_n - f| \geqslant 2g - (|f_n| + |f|) = g - |f_n| + g - |f| \geqslant 0$);
- $2g - |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g$;

seega Fatou lemma põhjal

$$\begin{aligned}\int 2g &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \bigl(2g - |f_n - f|\bigr) = \liminf_{n\to\infty} \left(\int 2g - \int |f_n - f|\right) \\ &= \int 2g + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int |f_n - f|\right) = \int 2g - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|,\end{aligned}$$

millest

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \leqslant 0;$$

järelikult $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0$, nagu soovitud.

Ülesanne 3.11. Järeldada teoreemi väidete kehtivusest lisatingimustel (3.4) nende kehtivus üldjuhul.

□

Järeldus 3.5 ((Lebesgue'i) tõkestatud koonduvuse teoreem.)**.** *Olgu $\mu(X) < \infty$ ning olgu funktsioonid $f_n \in L_1$, $n \in \mathbb{N}$, ja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et*

1° $f_n \to f$ *p.k.;*

2° *leidub reaalarv $M \geqslant 0$ selliselt, et $|f_n| \leqslant M$ p.k., $n \in \mathbb{N}$.*

Siis ka $f \in L_1$, kusjuures

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et funktsioon $g(x) = M$, $x \in X$, on integreeruv.

Tõepoolest, $g = M\,\chi_X$ ning seega $\int g = M\mu(X) < \infty$ (sest $\mu(X) < \infty$), s.t. $g \in L_1$.

Järelduse 3.5 väide järeldub nüüd vahetult Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist 3.4. □

Teoreem 3.6. *Olgu funktsioonid $f_j \in L_1$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty. \tag{3.5}$$

Siis rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub p.k., kusjuures $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L_1$ ja

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

Järeldus 3.7. *Normeeritud ruum L_1 on täielik (s.t. ta on Banachi ruum).*

Tõestus. Kuna

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{L_1},$$

siis eeldus (3.5) tähendab, et rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ ruumis L_1 on absoluutselt koonduv. Kuna normeeritud ruum on täielik parajasti siis, kui temas rea absoluutsest koonduvusest järeldub selle rea koonduvus, siis piisab ruumi L_1 täielikkuseks veenduda, et eeldusel (3.5) rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub ruumis L_1; seejuures võib üldisust kitsendamata eeldada, et funktsioonid f_j, $j \in \mathbb{N}$, on määratud kõikjal hulgas X. Teoreemi 3.6 põhjal on funktsioon $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ määratud p.k. kõikjal hulgas X, kusjuures $f \in L_1$. Ruumi L_1 täielikkuseks piisab näidata, et $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$ ruumis L_1, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\| = 0$. Veendume selles:

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right\| = \int \left| f - \sum_{j=1}^{n} f_j \right| = \int \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j \right| \overset{(1)}{\leqslant} \int \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j| \overset{(2)}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty} \int |f_j| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(siin võrratus (1) kehtib integraali monotoonsuse tõttu; võrdus (2) kehtib monotoonse koonduvuse teoreemi 2.5 põhjal). □

TEOREEMI 3.6 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonid f_j, $j \in \mathbb{N}$, on määratud kõikjal hulgas X. Siis $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L^+$. Kuna Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi (täpsemalt, teoreemi 2.5) põhjal

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \int |f_j| < \infty,$$

siis $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L_1$ ning teoreemi 2.12, (a), põhjal $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)| < \infty$ p.k. $x \in X$ korral. Kuna arvrea absoluutsest koonduvusest järeldub tema koonduvus, siis saame siit, et ka rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ koondub p.k. $x \in X$ korral, s.t. rida $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ koondub p.k. ning seega on funktsioon $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ määratud p.k.

Arvestades, et

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=1}^{\infty} f_j \quad \text{p.k.}$$

ja

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \in L_1, \qquad n \in \mathbb{N},$$

järeldub Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemist, et $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \in L_1$, kusjuures

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} f_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j.$$

□

3.3. Kõikjal tihedaid alamruume ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$

Teoreem 3.8. *Olgu $f \in L_1$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub lihtne mõõtuv funktsioon $\phi \in L_1$ selliselt, et*

$$\int |f - \phi| < \varepsilon.$$

Märgime, et üldjuhul ei tarvitse lihtne mõõtuv funktsioon olla integreeruv. Teoreem 3.8 väidab, et *integreeruvate lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis L_1*, sest $\int |f - \phi| = \|f - \phi\|_{L_1}$.

TEOREEMI 3.8 TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioon f on määratud kõikjal hulgas X. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Mittenegatiivse mõõtuva funktsiooni integraali definitsiooni põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi', \phi'' \in L^+$ selliselt, et $\phi' \leqslant f^+$ ja $\phi'' \leqslant f^-$ ja

$$\int \phi' > \int f^+ - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \int \phi'' > \int f^- - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On selge, et $\phi = \phi' - \phi'' \in L_1$ on lihtne mõõtuv funktsioon; seejuures

$$\begin{aligned}\int |f-\phi| &= \int \big|(f^+ - f^-) - (\phi' - \phi'')\big| \leqslant \int \big(|f^+ - \phi'| + |f^- - \phi''|\big)\\ &= \int (f^+ - \phi' + f^- - \phi'') = \Big(\int f^+ - \int \phi'\Big) + \Big(\int f^- - \int \phi''\Big)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Definitsioon 3.2. Olgu X topoloogiline ruum.

Funktsiooni $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *kandjaks* nimetatakse hulka

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}}$$

(s.t. funktsiooni g kandja on hulga $\{x \in X\colon\ g(x) \neq 0\}$ sulund ruumis X).

Teoreem 3.9. *Olgu $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittekahanev vasakult pidev funktsioon ning olgu $\mathcal{M}_F \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ja $\mu_F\colon \mathcal{M}_F \to [0,\infty]$ funktsioonile F vastavad Lebesgue-Stieltjesi σ-algebra ja Lebesgue-Stieltjesi mõõt. Olgu $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ selliselt, et*

$$\int_{\mathbb{R}} |f-g|\, d\mu_F < \varepsilon.$$

Ülesanne 3.12. Tõestada, et

(a) tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lebesgue'i-Stieljesi mõttes integreeruv, s.t. $g \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$;

(b) tõkestatud kandjaga pidevad funktsioonid moodustavad alamruumi ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$.

Teoreem 3.9 väidab, et *tõkestatud kandjaga pidevate funktsioonide $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alamruum on kõikjal tihe ruumis $L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$*, sest $\int_{\mathbb{R}} |f-g|\, d\mu_F = \|f-g\|_{L_1(\mathbb{R},\mathcal{M}_F,\mu_F)}$.

Definitsioon 3.3. Öeldakse, et topoloogiline ruum X on *lokaalselt kompaktne,* kui ruumi X igal punktil leidub kompaktne ümbrus (s.t. iga $x \in X$ korral leiduvad kompaktne hulk $K \subset X$ ja lahtine hulk $U \subset X$ selliselt, et $x \in U \subset K$).

On ilmne, et iga kompaktne topoloogiline ruum on lokaalselt kompaktne. Prototüübiline näide lokaalselt kompaktsest topoloogilisest ruumist, mis pole kompaktne, on ruum $\mathbb{R}^m$.

Kehtib teoreemist 3.9 üldisem

Teoreem 3.10. *Olgu X lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, sisaldagu σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ruumi X Boreli σ-algebrat ning olgu $\mu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ regulaarne mõõt. Siis iga $f \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ korral leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et*

$$\int_X |f-g|\, d\mu < \varepsilon.$$

Niisiis, *teoreemi 3.10 eeldustel on kompaktse kandjaga pidevate funktsioonide* $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *hulk kõikjal tihe ruumis* $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, sest $\int_X |f - g|\, d\mu = \|f - g\|_{L_1(X,\mathfrak{A},\mu)}$.

Ülesanne 3.13. Tõestada, et teoreemi 3.10 eeldustel moodustavad kompaktse kandjaga pidevad funktsioonid $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ alamruumi ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Märgime, et funktsiooni $f\colon \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ kandja on kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud, sest hulk ruumis $\mathbb{R}^m$ on kompaktne parajasti siis, kui ta on kinnine ja tõkestatud.

Teoreemi 3.10 tõestus toetub järgnevale topoloogia kursusest tuttavale Urõsoni lemma lokaalselt kompaktsele versioonile.

Teoreem 3.11 (Urõsoni lemma (lokaalselt kompaktne versioon))**.** *Olgu X lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $K \subset U \subset X$, kus hulk $K \subset X$ on kompaktne ning hulk $U \subset X$ on lahtine. Siis leidub pidev funktsioon $g\colon X \to \mathbb{R}$ selliselt, et*

(1) $g[X] \subset [0, 1]$;

(2) *funktsiooni g kandja* $\operatorname{supp} g$ *on kompaktne, kusjuures* $\operatorname{supp} g \subset U$;

(3) $g(x) = 1$ *iga $x \in K$ korral.*

Ülesanne 3.14. Tõestada teoreem 3.10.

Näpunäide. Kõigepealt näidata, et kui hulk $A \in \mathfrak{A}$ on selline, et $\mu(A) < \infty$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ selliselt, et $\int_X |\chi_A - g|\, d\mu < \varepsilon$. (Selleks kasutada mõõdu μ regulaarsust ning Urõsoni lemmat 3.11.) Seejärel kasutada teoreemi 3.8.

Teoreemi 3.9 tõestus (ilma teoreemi 3.10 kasutamata). Olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 3.8 põhjal leidub lihtne mõõtuv funktsioon $\phi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ selliselt, et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - \phi|\, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \qquad (n \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{M}_F,\ j = 1, \ldots, n)$$

funktsiooni mingi niisugune esitus, kus hulgad $A_1, \ldots, A_n$ on paarikaupa lõikumatud ning $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Kuna $\phi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$, siis $\mu_F(A_j) < \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Teoreemi I.5.7 põhjal leiduvad iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral arv $n_j \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud tõkestatud vahemikud $I_i^j \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n_j$, selliselt, et

$$\mu_F\left(A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j\right) < \frac{\varepsilon}{3\, n\, |\alpha_j|}.$$

Tähistame

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n_j} \chi_{I_i^j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j \chi_{I_i^j};$$

siis $\psi \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$, kusjuures

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\phi - \psi| \, d\mu_F &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} \Big| \, d\mu_F \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\chi_{A_j} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} \right) \Big| \, d\mu_F \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} \left| \chi_{A_j} - \chi_{\bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} \right| \, d\mu_F = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j} \, d\mu_F \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \mu_F \left(A_j \triangle \bigcup_{i=1}^{n_j} I_i^j \right) < \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \frac{\varepsilon}{3\, n\, |\alpha_j|} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Teoreemi tõestuseks piisab nüüd näidata, et

(•) kui $(a, b) \subset \mathbb{R}$ on tõkestatud vahemik, siis iga $\gamma > 0$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $h \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ nii, et

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(a,b)} - h| \, d\mu_F < \gamma.$$

Tõepoolest, kui väide (•) kehtib, siis mis tahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $i \in \{1, \ldots, n_j\}$ korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon $h_i^j \in L_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_F, \mu_F)$ nii, et

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{I_i^j} - h_i^j| \, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3\, n\, n_j\, |\alpha_j|}.$$

Tähistame

$$g = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j h_i^j;$$

siis g on tõkestatud kandjaga pidev funktsioon, kusjuures

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\psi - g| \, d\mu_F &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j \chi_{I_i^j} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j h_i^j \Big| \, d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_j (\chi_{I_i^j} - h_i^j) \Big| \, d\mu_F \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} |\alpha_j| \int_{\mathbb{R}} |\chi_{I_i^j} - h_i^j| \, d\mu_F < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} |\alpha_j| \frac{\varepsilon}{3\, n\, n_j\, |\alpha_j|} = \frac{\varepsilon}{3};
\end{aligned}$$

järelikult

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, d\mu_F \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f - \phi| \, d\mu_F + \int_{\mathbb{R}} |\phi - \psi| \, d\mu_F + \int_{\mathbb{R}} |\psi - g| \, d\mu_F < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tõestame nüüd väite (•). Olgu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mingi tõkestatud vahemik ning olgu $\gamma > 0$. Valime arvud $c, d \in (a, b)$, $c < d$, selliselt, et

$$\mu_F\big((a, b) \setminus (c, d)\big) < \gamma.$$

Ülesanne 3.15. Veenduda, et sellised arvud $c, d \in (a, b)$ eksisteerivad.

Defineerime funktsiooni $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seosega

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-\infty, a]; \\ \dfrac{x-a}{c-a}, & \text{kui } x \in [a, c]; \\ 1, & \text{kui } x \in [c, d]; \\ 1 - \dfrac{x-d}{b-d}, & \text{kui } x \in [d, b]; \\ 0, & \text{kui } x \in [b, \infty); \end{cases}$$

siis h on tõkestatud kandjaga pidev funktsioon, kusjuures

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{(a,b)} - h| \, d\mu_F \leqslant \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)\setminus(c,d)} \, d\mu_F = \mu_F\big((a,b) \setminus (c,d)\big) < \gamma.$$

□

3.4. Harjutusülesandeid

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum ning olgu $g\colon\ X \to \mathbb{R}$ (Boreli mõttes) mõõtuv funktsioon. Siis hulgafunktsioon

$$\mu g^{-1}(E) = \mu\big(g^{-1}[E]\big), \quad E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

on Boreli mõõt ruumis $\mathbb{R}$. Kui μ on tõenäosusmõõt, siis mõõtu μg^{-1} nimetatakse funktsiooni g *jaotuseks.*

Ülesanne 3.16. Tõestada, et μg^{-1} on mõõt.

Defineerime funktsiooni

$$G(t) = \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ g(x) < t\big\}\Big) = \mu\Big(g^{-1}\big[(-\infty, t)\big]\Big) = \mu g^{-1}\big((-\infty, t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kui μ on tõenäosusmõõt, siis funktsiooni G nimetatakse funktsiooni g *jaotusfunktsiooniks.*

Ülesanne 3.17. Tõestada, et

(a) funktsioon G on mittekahanev ja vasakult pidev;

(b) $\mu g^{-1} = \mu_G$ (s.t. μg^{-1} on funktsioonile G vastav Boreli mõõt, vt. § I.5, punkt 1).

Ülesanne 3.18. Tõestada, et kui $f \in L_1(\mu g^{-1})$, siis funktsioonide g ja f kompositsioon $f \circ g \in L_1(\mu)$ kusjuures

$$\int f \, d\mu g^{-1} = \int f \circ g \, d\mu.$$

Veelgi täpsemalt, mis tahes $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ korral

$$\int_E f \, d\mu g^{-1} = \int_{g^{-1}[E]} f \circ g \, d\mu.$$

§ 4. Riemanni integraali ja Lebesgue'i integraali vahekord

Meenutame kõigepealt Riemanni integraali mõistet.

Olgu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon ning olgu T lõigu $[a,b]$ tükeldus punktidega

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Tähistame $\Delta(T) = \max\limits_{j=1,\ldots,n}(x_j - x_{j-1})$ (s.t. $\Delta(T)$ on tükelduse T pikima osalõigu pikkus) ning

$$M_j = \sup\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\bigr\}, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad S(T) = \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}),$$

$$m_j = \inf\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}, x_j]\bigr\}, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad s(T) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}).$$

Summasid $S(T)$ ja $s(T)$ nimetatakse (lõigu $[a,b]$ tükeldusele T vastavateks) funktsiooni f *Darboux' ülemsummaks* ja *Darboux' alamsummaks*.

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et

(a) kui lõigu $[a,b]$ tükeldus T' on saadud tükelduse T punktidele uute punktide lisamise teel, siis

$$S(T') \leqslant S(T) \quad \text{ja} \quad s(T') \geqslant s(T),$$

s.t. *tükelduse peenendamisel Darboux' ülemsumma ei kasva ja Darboux' alamsumma ei kahane*;

(b) lõigu $[a,b]$ suvaliste tükelduste ja T ja T' korral

$$S(T) \geqslant s(T'),$$

s.t. *ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem ühestki Darboux' alamsummast.*

Tähistame

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\bigl\{S(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus}\bigr\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\bigl\{s(T)\colon\ T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ tükeldus}\bigr\}.$$

(Märgime, et need inf ja sup on lõplikud, sest funktsiooni f tõkestatuse tõttu on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulk ja Darboux' alamsummade hulk tõkestatud.) Arvusid $\overline{\int_a^b} f$ ja $\underline{\int_a^b} f$ nimetatakse vastavalt funktsiooni f *Darboux' ülemiseks integraaliks* ja *Darboux' alumiseks integraaliks* (üle lõigu $[a,b]$).

Matemaatilise analüüsi kursusest on meile tuttav

Teoreem 4.1 (Darboux' lemma). (a) $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} S(T) = \overline{\int_a^b} f$, *s.t. iga reaalarvu* $\varepsilon > 0$ *korral leidub reaalarv* $\delta > 0$ *selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant S(T) - \overline{\int_a^b} f < \varepsilon$$

(teisisõnu, piisavalt peentele tükeldustele vastavad Darboux' ülemsummad erinevad Darboux' ülemisest integraalist kuitahes vähe);

(b) $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0} s(T) = \underline{\int_a^b} f$, *s.t. iga reaalarvu* $\varepsilon > 0$ *korral leidub reaalarv* $\delta > 0$ *selliselt, et*

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \underline{\int_a^b} f - s(T) < \varepsilon$$

(teisisõnu, piisavalt peentele tükeldustele vastavad Darboux' alamsummad erinevad Darboux' alumisest integraalist kuitahes vähe).

Definitsioon 4.1. Kui $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, siis öeldakse, et funktsioon f on *Riemanni mõttes integreeruv* lõigus $[a,b]$. Darboux' integraalide $\overline{\int_a^b} f$ ja $\underline{\int_a^b} f$ ühist väärtust nimetatakse sel juhul funktsiooni f *Riemanni integraaliks (üle lõigu* $[a,b]$*)* ja tähistatakse sümboliga

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad R\text{-}\int_a^b f \quad \text{või lihtsalt} \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{või} \quad \int_a^b f.$$

Niisiis, kui funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, siis

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Tähistame

$$\mathcal{L}_{[a,b]} = \big\{E \cap [a,b] \colon E \in \mathcal{L}\big\} \quad \text{ja} \quad m_{[a,b]} = m|_{\mathcal{L}_{[a,b]}},$$

kus $\mathcal{L}$ on ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebra ja m on Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}$. Kui see ei põhjusta kaksipidimõistmist, siis kirjutame edaspidi $m_{[a,b]}$ asemel ka lihtsalt m. Paneme tähele, et

(a) $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on σ-algebra (see fakt järeldub ülesandest I.2.11);

(b) $\mathcal{L}_{[a,b]}$ on lõigu $[a,b]$ Boreli σ-algebra täield (see fakt järeldub ülesannetest I.2.12 ja I.3.29).

σ-algebrat $\mathcal{L}_{[a,b]}$ nimetatakse *lõigu* $[a,b]$ *Lebesgue'i* σ*-algebraks* ning mõõtu $m_{[a,b]}$ *Lebesgue'i mõõduks lõigus* $[a,b]$.

Me ütleme, et lõigus $[a,b]$ m-p.k. määratud $\overline{\mathbb{R}}$-väärtustega funktsioon g on *Lebesgue'i mõttes integreeruv lõigus* $[a,b]$, kui $g \in L_1\big([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}, m_{[a,b]}\big)$.

Teoreem 4.2. (a) *Lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on Riemanni mõttes integreeruv selles lõigus parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga Lebesgue'i mõõt on null.*

(b) *Kui funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ on Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, siis ta on ka Lebesgue'i mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, kusjuures*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dm(x) = R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx,$$

s.t. funktsiooni f Lebesgue'i integraal üle lõigu $[a,b]$ on võrdne tema Riemanni integraaliga üle selle lõigu.

Kõikjal järgnevas tähistame funktsiooni $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ Lebesgue'i integraali, Riemanni integraali, Darboux' ülemist integraali ja Darboux' alumist integraali lõigus $[a,b]$ vastavalt sümbolitega

$$\int f,\qquad R\text{-}\int f,\qquad \overline{\int} f\quad \text{ja}\quad \underline{\int} f$$

(muidugi juhul, kui need integraalid eksisteerivad).

Olgu funktsioon $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ tõkestatud lõigus $[a,b]$. Defineerime funktsioonid $\overline{f},\underline{f}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ võrdustega

$$\overline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0+}\sup\bigl\{f(z)\colon\ z\in(x-\delta,x+\delta)\bigr\},\qquad x\in[a,b],$$
$$\underline{f}(x) = \lim_{\delta\to 0+}\inf\bigl\{f(z)\colon\ z\in(x-\delta,x+\delta)\bigr\},\qquad x\in[a,b].$$

Ülesanne 4.1. Veenduda, et funktsioonid $\overline{f}$ ja $\underline{f}$ on korrektselt defineeritud, s.t. nende definitsiooniavaldises olevad piirväärtused eksisteerivad.

Märgime, et *funktsioon f on pidev punktis $x\in[a,b]$ parajasti siis, kui $\overline{f}(x)=\underline{f}(x)$.*

Ülesanne 4.2. Veenduda selles.

Teoreemi 4.2 tõestus toetub järgnevale lemmale.

Lemma 4.3. *Funktsioonid $\overline{f}$ ja $\underline{f}$ on Lebesgue'i mõttes integreeruvad lõigus $[a,b]$, kusjuures*

$$\int\overline{f} = \overline{\int} f\quad \textit{ja}\quad \int\underline{f} = \underline{\int} f.$$

Tõestus. Olgu

$$T_k\colon\qquad a=x_0^k<x_1^k<x_2^k<\ldots<x_{n_k-1}^k<x_{n_k}^k=b\quad (n_k\in\mathbb{N}),\qquad k\in\mathbb{N},$$

sellised lõigu $[a,b]$ tükeldused, et tükelduse T_k pikima osalõigu pikkus läheneb protsessis $k\to\infty$ nullile, s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n_k}(x_j^k-x_{j-1}^k)=0$. Tähistame tükeldusele T_k

vastavad funktsiooni f Darboux' ülemsumma ja alamsumma vastavalt sümbolitega $S(T_k)$ ja $s(T_k)$, $k \in \mathbb{N}$; siis teoreemi 4.1 põhjal

$$\lim_{k\to\infty} S(T_k) = \overline{\int} f \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} s(T_k) = \underline{\int} f, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$M_j^k = \sup\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}^k, x_j^k]\bigr\}, \qquad j = 1, \dots, n_k,$$
$$m_j^k = \inf\bigl\{f(z)\colon\ z \in [x_{j-1}^k, x_j^k]\bigr\}, \qquad j = 1, \dots, n_k,$$

ning defineerime lihtsad $\mathcal{L}$-mõõtuvad funktsioonid $\overline{f}_k, \underline{f}_k\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ võrdustega

$$\overline{f}_k = \sum_{j=1}^{n_k} M_j^k \chi_{[x_{j-1}^k, x_j^k]}, \qquad \underline{f}_k = \sum_{j=1}^{n_k} m_j^k \chi_{[x_{j-1}^k, x_j^k]}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Funktsioonid $\overline{f}_k, \underline{f}_k$, $k \in \mathbb{N}$, on integreeruvad, kusjuures

$$\lim_{k\to\infty} \int \overline{f}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} M_j^k (x_{j-1}^k - x_j^k) = \lim_{k\to\infty} S(T_k) = \overline{\int} f,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int \underline{f}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} m_j^k (x_{j-1}^k - x_j^k) = \lim_{k\to\infty} s(T_k) = \underline{\int} f.$$

Paneme tähele, et mis tahes $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k-1}^k\}$ korral

$$\lim_{k\to\infty} \overline{f}_k(x) = \overline{f}(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \underline{f}_k(x) = \underline{f}(x).$$

Ülesanne 4.3. Veenduda selles.

Niisiis

$$\overline{f}_k \to \overline{f} \ m\text{-p.k.} \quad \text{ja} \quad \underline{f}_k \to \underline{f} \ m\text{-p.k.},$$

sest hulk $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k-1}^k\}$ on loenduv ning seega on tema Lebesgue'i mõõt null. Funktsiooni f tõkestatuse tõttu leidub arv $M \geqslant 0$ selliselt, et $|f(x)| \leqslant M$, $x \in [a,b]$; seega ka

$$|M_j^k| \leqslant M \quad \text{ja} \quad |m_j^k| \leqslant M, \qquad j = 1, \dots, n_k,\ k \in \mathbb{N};$$

järelikult

$$|\overline{f}_k(x)| \leqslant M \quad \text{ja} \quad |\underline{f}_k(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_1^k, \dots, x_{n_k-1}^k\}.$$

Lebesgue'i tõkestatud koonduvuse teoreemi põhjal on funktsioonid $\overline{f}$ ja $\underline{f}$ Lebesgue'i mõttes integreeruvad lõigus [a,b], kusjuures

$$\int \overline{f} = \lim_{k\to\infty} \int \overline{f}_k = \overline{\int} f \quad \text{ja} \quad \int \underline{f} = \lim_{k\to\infty} \int \underline{f}_k = \underline{\int} f.$$

$\square$

Teoreemi 4.2 tõestus. (a). Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tõkestatud lõigus $[a,b]$. Kuna Lemma 4.3 põhjal $\overline{\int} f = \int \overline{f}$ ja $\underline{\int} f = \int \underline{f}$, siis

$$\text{funktsioon } f \text{ on Riemanni mõttes integreeeruv lõigus } [a,b] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\int} f = \underline{\int} f$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \overline{f} = \int \underline{f} \quad \Leftrightarrow \quad \int (\overline{f} - \underline{f}) = 0.$$

Kuna $\overline{f} - \underline{f} \geqslant 0$, siis $\overline{f} - \underline{f} \in L^+\big([a,b], \mathcal{L}_{[a,b]}, m_{[a,b]}\big)$; järelikult teoreemi 2.8 põhjal

$$\int (\overline{f} - \underline{f}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f} - \underline{f} = 0 \ m\text{-p.k.} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f} = \underline{f} \ m\text{-p.k.} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ on pidev } m\text{-p.k.}$$

$\Leftrightarrow$ funktsiooni f katkevuspunktide hulga Lebesgue'i mõõt on null.

(b). Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemanni mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$. Siis on funktsioon f tõkestatud lõigus $[a,b]$, järelikult väite (a) tõestuse ja Lemma 4.3 põhjal

$$\int \overline{f} = \int \underline{f} = \underline{\int} f = \overline{\int} f = R\text{-}\int f \qquad \text{ja} \qquad \underline{f} = \overline{f} \ m\text{-p.k.}.$$

Kuna $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$, siis järeldub viimasest võrdusest, et $\underline{f} = f = \overline{f}$ m-p.k.; seega on funktsioon f Lebesgue'i mõttes integreeruv lõigus $[a,b]$, kusjuures

$$\int f = \int \overline{f} = R\text{-}\int f.$$

□

§ 5. Mõõtuvate funktsioonide koonduvustüüpe

Selles paragrahvis vaatleme erinevaid mõõtuvate funktsioonide koonduvustüüpe ning uurime nende vahekordi.

Olgu X mittetühi hulk ning olgu $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 5.1. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *ühtlaselt hulgas* X, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ selliselt, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definitsioon 5.2. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *punktiviisi hulgas* X, kui

$$\text{iga } x \in X \text{ korral} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Eeldame nüüd täiendavalt, et $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on mõõduga ruum.

Definitsioon 5.3. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *μ-peaaegu kõikjal ruumis* X (ehk lihtsalt *peaaegu kõikjal*, kui ruumi X ja mõõdu μ roll on kontekstist selge) ja kirjutatakse $f_n \to f$ μ-p.k. või $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ μ-p.k. (või ka lihtsalt $f_n \to f$ p.k. või $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ p.k.), kui

$$\text{leidub hulk } A \in \mathfrak{A} \text{ selliselt, et } \mu(A^c) = 0 \text{ ja iga } x \in A \text{ korral } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Teisisõnu, $f_n \to f$ μ-p.k. parajasti siis, kui hulk $\{x \in X\colon\ f_n(x) \not\to f(x)\}$ on μ-hüljatav.

Märgime, et peaaegu kõikjal koonduvuse definitsioon laieneb ka juhule, kus funktsioonid f ja f_n, $n \in \mathbb{N}$, pole määratud mingis ruumi X μ-hüljatavas alamhulgas.

Eeldame nüüd täiendavalt, et funktsioonid f ja f_n, $n \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad ning μ-peaaegu kõikjal lõplikud.

Definitsioon 5.4. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *mõõdu μ järgi ruumis* X (ehk lihtsalt *mõõdu järgi*, kui ruumi X ja mõõdu μ roll on kontekstist selge) ja kirjutatakse $\mu\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, kui

$$\text{iga } \delta > 0 \text{ korral } \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\}\Big) = 0.$$

(Juhime tähelepanu, et funktsioonide f ja f_n, $n \in \mathbb{N}$, mõõtuvus garanteerib, et hulk $\big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta)\big\}$ on mõõtuv, s.t. $\big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta)\big\} \in \mathfrak{A}$.)

Ülesanne 5.1. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu mõõtuvad funktsioonid $f, g, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et $f_n \to f$ mõõdu järgi ja $f_n \to g$ mõõdu järgi. Tõestada (ilma teoreemi 5.3 kasutamata), et $f = g$ p.k.

Märgime, et mõõdu järgi koonduvuse definitsioon laieneb ka juhule, kus funktsioonid f ja f_n, $n \in \mathbb{N}$, pole määratud mingis ruumi X nullmõõduga alamhulgas.

Eeldame nüüd täiendavalt, et $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 5.5. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *ruumis* L_1 (ehk 1-*keskmiselt* e. lihtsalt *keskmiselt*), kui

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0.$$

Juhime tähelepanu, et $\int |f_n - f| = \|f_n - f\|_{L_1}$; niisiis mõistetakse koonduvuse all ruumis L_1 (nagu nimetuse järgi oodata ongi) koonduvust Banachi ruumi L_1 normi järgi.

On ilmne, et (mõõduga ruumis)

ühtlane koonduvus $\Longrightarrow$ punktiviisi koonduvus $\Longrightarrow$ koonduvus p.k.

Samuti

ühtlane koonduvus $\Longrightarrow$ mõõdu järgi koonduvus.

Ülesanne 5.2. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mõõtuvad funktsioonid. Tõestada, et kui $f_n \to f$ ühtlaselt ruumis X, siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.

Vastupidised implikatsioonid üldjuhul ei kehti.

Näide 5.1. Olgu $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{L}$ ja $\mu = m$. (Meenutame, et sümbolid $\mathcal{L}$ ja m tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.)

1. Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ võrdusega

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{(0,n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Siis $f_n \to 0$ ühtlaselt hulgas X.

2. Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ võrdusega

$$f_n = \chi_{(n-1,n)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Siis $f_n \to 0$ punktiviisi, kuid mitte Lebesgue'i mõõdu järgi ruumis $\mathbb{R}$, sest iga indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}\colon\ |f_n(x) - 0| \geqslant 1\}\big) = \mu\big((n-1, n)\big) = 1.$$

Niisiis, *punktiviisi koonduvusest (ning seega ka p.k. koonduvusest) ei järeldu üldjuhul koonduvust mõõdu järgi (ning seega ka ühtlast koonduvust).*

3. Defineerime funktsioonid $f_n\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ võrdusega

$$f_n = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Siis $f_n \to 0$ p.k. (sest iga $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral $f_n(x) \to 0$), kuid mitte punktiviisi (sest $f_n(0) \to \infty$). Niisiis, *koonduvusest peaaegu kõikjal ei järeldu üldjuhul punktiviisi koonduvust.*

Igaühes näidetest 1–3

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0|\, dm = \int_{\mathbb{R}} |f_n|\, dm = 1;$$

seega $f_n \not\to 0$ ruumis $L_1(X, \mathcal{L}, m)$. Niisiis, *ühtlasest koonduvusest (ning seega ka punktiviisi koonduvusest ja koonduvusest peaaegu kõikjal) ei järeldu üldjuhul koonduvust ruumis L_1.*

Ülesanne 5.3. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et kui $f_n \to f$ ühtlaselt ruumis X, siis ka $f_n \to f$ ruumis L_1.

4. Defineerime funktsioonid $f_n \colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ võrdustega

$$\begin{aligned}
&f_1 = \chi_{[0,1)}, \quad f_2 = \chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}, \quad f_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)},\\
&f_4 = \chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}, \quad f_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}, \quad f_6 = \chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}, \quad f_7 = \chi_{\left[\frac{3}{4},1\right)},\\
&f_8 = \chi_{\left[0,\frac{1}{8}\right)}, \quad f_9 = \chi_{\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)}, \quad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} |f_n|\, dm = 0,$$

s.t. $f_n \to 0$ ruumis $L_1(X, \mathcal{L}_{[0,1]}, m)$. Samal ajal iga $x \in [0,1)$ korral $f_n(x) \not\to 0$. Niisiis, *koonduvusest ruumis L_1 ei järeldu üldjuhul koonduvust peaaegu kõikjal.*

Teoreem 5.1. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Kui*

(1) *$f_n \to f$ p.k.;*

(2) *leidub funktsioon $g \in L_1$ selliselt, et $|f_n| \leqslant g$ p.k., $n \in \mathbb{N}$;*

siis $f_n \to f$ ruumis L_1.

Tõestus. Kehtigu tingimused (1) ja (2). Piirprotsessis $n \to \infty$ järeldub tingimusest (2), et ka $|f| \leqslant g$ p.k. ning seega

$$|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g \quad \text{p.k.}$$

Kuna $2g \in L_1$ ning $|f_n - f| \to 0$ p.k., siis Lebesgue'i domineeritud koonduvuse teoreemi põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = \int 0 = 0,$$

s.t. $f_n \to f$ ruumis L_1. □

Teoreem 5.2. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ ruumis $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.*

Teoreem 5.2 väidab, et *koonduvusest ruumis L_1 järeldub koonduvus mõõdu järgi.* Näitest 5.1, **4**, järeldub nüüd, et *koonduvusest mõõdu järgi ei järeldu koonduvust p.k.* (sest selles näites $f_n \to f$ ruumis L_1, seega teoreemi 5.2 põhjal ka $f_n \to f$ mõõdu järgi; samas ei kehtinud $f_n \to f$ p.k.).

Teoreemi 5.2 tõestus. Fikseerime vabalt $\delta > 0$ ja tähistame

$$E_n = \{x \in X\colon\ |f(x) - f_n(x)| \geqslant \delta\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tõestamaks, et $f_n \to f$ mõõdu järgi, peame näitama, et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|f - f_n| \geqslant \delta$ hulgas E_n, seega

$$\mu(E_n) = \int \chi_{E_n} \leqslant \int \frac{|f - f_n|}{\delta} \chi_{E_n} = \frac{1}{\delta} \int |f - f_n|\, \chi_{E_n} \leqslant \frac{1}{\delta} \int |f - f_n|, \quad n \in \mathbb{N},$$

Kuna $f_n \to f$ ruumis L_1, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f - f_n| = 0$; seega järeldub viimasest võrratusteahelast, et ka $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. □

Teoreem 5.3. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu mõõtuvad funktsioonid $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ mõõdu järgi. Siis*

(a) *leidub osajada (f_{k_n}) selliselt, et $f_{k_n} \to f$ p.k.;*

(b) *kui mingi mõõtuva funktsiooni $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ korral $f_n \to g$ mõõdu järgi, siis $f = g$ p.k.*

Tõestus. (a). Kuna $f_n \to f$ mõõdu järgi, siis saame valida kasvava indeksite jada $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tähistame

$$A := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Kuna

$$\begin{aligned}
\mu(A^c) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X\colon\ |f_{k_n}(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0
\end{aligned}$$

(sest rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ koondub ja koonduva rea jääkliige koondub nulliks), s.t. $\mu(A^c) = 0$, siis piisab väite (a) tõestuseks näidata, et iga $x \in A$ korral $f_{k_n}(x) \to f(x)$.

Olgu $x \in A$. Siis leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geqslant m$ korral $|f_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$. Kuna $\frac{1}{n} \to 0$, siis ka $|f_{k_n}(x) - f(x)| \to 0$.

(b). Olgu mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ selline, et $f_n \to g$ mõõdu järgi. Teoreemi väite (a) põhjal leidub leidub jada $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ osajada $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et $f_{k_n} \to g$ p.k. Kuna mõõdu järgi koonduva jada osajada järgi koondub mõõdu järgi samaks funktsiooniks, milleks esialgne jadagi, siis leidub teoreemi väite (a) põhjal jada $(f_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ osajada $(f_{l_{k_n}})_{n=1}^{\infty}$ selliselt, et $f_{l_{k_n}} \to f$ p.k. Kuna ilmselt ka $f_{l_{k_n}} \to g$ p.k., siis $f = g$ p.k. □

Järeldus 5.4. *Olgu funktsioonid $f, f_n \in L_1$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ ruumis L_1. Siis leidub osajada (f_{k_n}) selliselt, et $f_{k_n} \to f$ p.k.*

Tõestus. Väide järeldub vahetult teoreemidest 5.2 ja 5.3, (a). □

Teoreem 5.5 (Jegorovi teoreem). *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum (s.t. $\mu(X) < \infty$) ning olgu peaaegu kõikjal lõplikud mõõtuvad funktsioonid $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ning $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas A.*

Tõestus. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Olgu hulk $B \in \mathfrak{A}$ selline, et $\mu(B^c) = 0$ ning iga $x \in B$ korral $|f(x)|, |f_n(x)| < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, ja $f_n(x) \to f(x)$. Tähistame

$$B_m^k := \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in B\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}, \qquad m, k \in \mathbb{N};$$

siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral $B_1^k \subset B_2^k \subset B_3^k \subset \ldots$, kusjuures $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k = B$.

Ülesanne 5.4. Tõestada, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^k = B$.

Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\mu(B_m^k) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu(B) = \mu(X)$$

ning mõõdu μ lõplikkuse tõttu järelikult

$$\mu\left(B_m^{k\,c}\right) = \mu(X \setminus B_m^k) = \mu(X) - \mu(B_m^k) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral leidub indeks $m(k) \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\mu\left(B_{m(k)}^{k}{}^{c}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tähistame

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{m(k)}^k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=m(k)}^{\infty} \left\{ x \in B\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\};$$

siis

$$\mu(A^c) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{m(k)}^{k}{}^{c} \right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(B_{m(k)}^{k}{}^{c}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

ning seega jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas A.

Ülesanne 5.5. Tõestada, et $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas A.

□

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ mõõduga ruum ning olgu $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, peaaegu kõikjal lõplikud funktsioonid.

Definitsioon 5.6. Öeldakse, et jada (f_n) koondub funktsiooniks f *μ-peaaegu ühtlaselt ruumis X* (või lihtsalt *peaaegu ühtlaselt*, kui ruumi X ja mõõdu μ roll on kontekstist selge), kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ja $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas A.

Jegorovi teoreem väidab niisiis, et *lõpliku mõõduga ruumis järeldub (peaaegu kõikjal lõplike mõõtuvate funktsioonide) peaaegu kõikjal koonduvusest peaaegu ühtlane koonduvus.*

Teoreem 5.6. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ lõpliku mõõduga ruum (s.t. $\mu(X) < \infty$) ning olgu peaaegu kõikjal lõplikud mõõtuvad funktsioonid $f, f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $f_n \to f$ p.k. Siis ka $f_n \to f$ mõõdu järgi.*

Teoreem 5.6 väidab niisiis, et *lõpliku mõõduga ruumis järeldub (peaaegu kõikjal lõplike mõõtuvate funktsioonide) peaaegu kõikjal koonduvusest koonduvus mõõdu järgi.*

Tõestus. Teoreemi tõestuseks peame näitama, et iga $\delta > 0$ korral

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big) = 0. \tag{5.1}$$

Fikseerime vabalt $\delta > 0$. Võrduse (5.1) kehtivuseks peame näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \mu\big(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big) < \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Jegorovi teoreemi põhjal leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ selliselt, et $\mu(A^c) < \varepsilon$ ja $f_n \to f$ ühtlaselt hulgas A. Valime indeksi $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta \text{ iga } x \in A \text{ korral.}$$

Seega, kui $n \geqslant N$, siis $\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\} \subset A^c$ ning järelikult

$$\mu\big(\{x \in X\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big) \leqslant \mu(A^c) < \varepsilon.$$

□

Teoreem 5.7 (Luzini teoreem)**.** *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub kompaktne hulk $K \subset [a,b]$ selliselt, et $m\big([a,b] \setminus K\big) < \varepsilon$ ja $f|_K$ on pidev.*

Sümbol m tähistab siin Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.

Luzini teoreemi 5.7 tõestus.

***Ülesanne 6** (6 p.)**.** Tõestada Luzini teoreem 5.7.

Näpunäide. Kasutada teoreemi 3.10 (või teoreemi 3.9) ja Jegorovi teoreemi.

□

III peatükk.
Korrutismõõdud

§ 1. Korrutis-σ-algebrad

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $X_1, \ldots, X_n$ mittetühjad hulgad. Meenutame, et hulkade $X_1, \ldots, X_n$ otsekorrutiseks nimetatakse hulka

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_n = \prod_{j=1}^{n} X_n &= \big\{(x_j)_{j=1}^n \colon\ x_j \in X_j,\ j = 1, \ldots, n\big\} \\ &= \big\{(x_1, \ldots, x_n) \colon\ x_j \in X_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}. \end{aligned}$$

Otsekorrutis $X_1 \times \cdots \times X_n$ on niisiis kõikvõimalike selliste n-komponendiliste järjendite hulk, mille j-s komponent kuulub hulka X_j, $j = 1, \ldots, n$.

Iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral saame me defineerida kujutuse

$$\pi_j \colon\ X_1 \times \cdots \times X_n \ni (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j \in X_j.$$

Seda kujutust nimetatakse otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ *j-ndaks koordinaatfunktsiooniks.* Otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ j-s koordinaatfunktsioon seab niisiis selle otsekorrutise igale järjendile vastavusse tema j-nda komponendi.

Olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid (s.t. kogumid $\mathfrak{A}_j \subset \mathcal{P}(X_j)$ on σ-algebrad).

Definitsioon 1.1. Vähimat otsekorrutise $X_1 \times \cdots \times X_n$ alamhulkade σ-algebrat, mille suhtes kõik selle otsekorrutise koordinaatfunktsioonid on mõõtuvad, nimetatakse σ-algebrate $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *korrutis-σ-algebraks* ja tähistatakse sümboliga

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n \quad \text{või} \quad \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j.$$

Mõõtuvuse definitsioonist järeldub, et

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma\left(\Big\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\Big\}\right). \tag{1.1}$$

Tõepoolest, kui $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \ldots \times X_n)$ on σ-algebra ja $j \in \{1, \ldots, n\}$, siis vastavalt definitsioonile tähendab koordinaatfunktsiooni π_j mõõtuvus $\mathfrak{A}$ suhtes (täpsemalt, $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_j)$-mõõtuvus), et

$$\pi_j^{-1}(A) \in \mathfrak{A} \text{ iga } A \in \mathfrak{A}_j \text{ korral.}$$

Niisiis, kõik otsekorrutise $X_1 \times \ldots \times X_n$ koordinaatfunktsioonid on σ-algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X_1 \times \ldots \times X_n)$ suhtes mõõtuvad parajasti siis, kui

$$\mathfrak{A} \supset \left\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}.$$

Siit järeldub, et vähim otsekorrutise $X_1 \times \ldots X_n$ alamhulkade σ-algebra, mille suhtes kõik tema koordinaatfunktsioonid on mõõtuvad, on vähim kogumit $\left\{\pi_j^{-1}(A) \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}$ sisaldav σ-algebra ehk, teisisõnu, kehtib (1.1).

Kuna mistahes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ja $A \in \mathfrak{A}_j$ korral

$$\begin{aligned}\pi_j^{-1}(A) &= \left\{x = (x_k)_{k=1}^n \in \prod_{k=1}^n X_k \colon\ \pi_j(x) \in A\right\} = \left\{(x_k)_{k=1}^n \in \prod_{k=1}^n X_k \colon\ x_j \in A\right\} \\ &= X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n,\end{aligned}$$

siis võib valemi (1.1) esitada ka kujul

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma\left(\left\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\right\}\right).$$

Teoreem 1.1. *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid. Siis*

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma\Big(\big\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}\Big).$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \big\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathfrak{A}_j\big\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}.\end{aligned}$$

Kuna $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{F}_1)$, siis piisab teoreemi tõestuseks näidata, et $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

Sisalduvus $\sigma(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$ on ilmne, sest $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$.

Veendume, et ka $\sigma(\mathcal{F}_2) \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$. Kuna $\sigma(\mathcal{F}_1)$ on σ-algebra, siis piisab selleks veenduda, et $\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$ (vt. lemma I.2.1). Mis tahes $A_1 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{F}_2$ ($A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$) korral

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \bigcap_{j=1}^n X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \in \sigma(\mathcal{F}_1);$$

järelikult $\mathcal{F}_2 \subset \sigma(\mathcal{F}_1)$. $\square$

Teoreem 1.2. *Olgu $n \in \mathbb{N}$, olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n)$ mõõtuvad ruumid ning olgu kogumid $\mathcal{E}_j \subset \mathcal{P}(X_j)$, $j = 1, \ldots, n$, sellised, et $\sigma(\mathcal{E}_j) = \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$ (s.t. iga $j \in \{1, \ldots, n\}$ korral kogum $\mathcal{E}_j$ genereerib σ-algebra $\mathfrak{A}_j$). Siis*

(a)

$$\begin{aligned}\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j &= \sigma\left(\left\{\pi_j^{-1}(A)\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\right\}\right)\\ &= \sigma\left(\left\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\right\}\right);\end{aligned}$$

(b) *kui $\mathcal{E}_j \ni X_j$, $j = 1, \ldots, n$, siis*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma\Big(\big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathcal{E}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}\Big).$$

Tõestus. (a).

Ülesanne 1.1. Tõestada väide (a).

Näpunäide. Arutleda, nagu valemi (1.1) põhjenduses, rakendades seal funktsiooni mõõtuvuse definitsiooni asemel teoreemi II.1.1.

(b). Olgu $\mathcal{E}_j \ni X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Tähistame

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathfrak{A}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\},\\ \mathcal{F}_3 &= \big\{X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times A \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n\colon\ j \in \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{E}_j\big\},\\ \mathcal{F}_4 &= \big\{A_1 \times \cdots \times A_n\colon\ A_j \in \mathcal{E}_j,\ j = 1, \ldots, n\big\}.\end{aligned}$$

Väite tõestuseks peame näitama, et $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma(\mathcal{F}_4)$. Kuna teoreemi 1.1 ja väite (a) põhjal $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma(\mathcal{F}_2) = \sigma(\mathcal{F}_3)$, siis piisab näidata, et $\sigma(\mathcal{F}_3) \subset \sigma(\mathcal{F}_4) \subset \sigma(\mathcal{F}_2)$, mis on ilmne, sest $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_4 \subset \mathcal{F}_2$. □

Meenutame, et kui $n \in \mathbb{N}$ ning $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ on meetrilised ruumid, siis otsekorrutis $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ on meetriline ruum järgmise võrdusega defineeritud kauguse ρ — nn. *korrutismeetrika* suhtes:

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \rho_j(x_j, y_j), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in X.$$

Ülesanne 1.2. Olgu $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ meetrilised ruumid ning olgu (X, ρ) nende korrutisruum. Tõestada, et

(a) kui $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ ja $r > 0$, siis

$$B(x, r) = \prod_{j=1}^{n} B(x_j, r)$$

($B(x, r)$ tähistab lahtist kera keskpunktiga x ja raadiusega r);

(b) kui ruumid $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ on separaablid, siis ka korrutisruum X on separaabel.

Teoreem 1.3. *Olgu $n \in \mathbb{N}$, olgu $X_1, \dots, X_n$ meetrilised ruumid ning olgu otsekorrutis $X = X_1 \times \dots \times X_n$ varustatud korrutismeetrikaga. Siis*

(a)
$$\mathcal{B}_X \supset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$$
(sümbol $\mathcal{B}_X$ tähistab ruumi X Boreli σ-algebrat);

(b) *kui ruumid $X_1, \dots, X_n$ on separaablid, siis*
$$\mathcal{B}_X = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}.$$

TÕESTUS. (a). Kuna Boreli σ-algebra definitsiooni põhjal $\mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\tau_{X_j})$, $j = 1, \dots, n$ (meenutame, et sümbol τ_{X_j} tähistab ruumi X_j lahtiste alamhulkade kogumit), siis teoreemi 1.2, (a), põhjal $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\mathcal{E})$, kus
$$\mathcal{E} = \Big\{ X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \dots \times X_n \colon\ j \in \{1, \dots, n\},\ U \in \tau_{X_j} \Big\}.$$
Seega piisab väite tõestuseks näidata, et $\mathcal{E} \subset \tau_X$, s.t. kogumi $\mathcal{E}$ iga hulk on lahtine hulk ruumis X, sest sel juhul $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\tau_X) = \mathcal{B}_X$.

Ülesanne 1.3. Veenduda, et $\mathcal{E} \subset \tau_X$.

(b). Olgu ruumid $X_1, \dots, X_n$ separaablid. Kuna väite (a) põhjal $\mathcal{B}_X \supset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$, siis jääb teoreemi tõestuseks näidata, et $\mathcal{B}_X \subset \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$. Selleks aga piisab näidata, et tähistades
$$\mathcal{G} := \big\{ U_1 \times \dots \times U_n \colon\ U_j \in \tau_{X_j},\ j = 1, \dots, n \big\},$$
kehtib sisalduvus $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$.

Tõepoolest, kuna Boreli σ-algebra definitsiooni põhjal $\sigma(\tau_{X_j}) = \mathcal{B}_{X_j}$, $j = 1, \dots, n$, siis teoreemi 1.2, (b), põhjal $\sigma(\mathcal{G}) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}$ ning järelikult sisalduvuse $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$ kehtides
$$\mathcal{B}_X = \sigma(\tau_X) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{B}_{X_j}.$$

Veendume, et $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$. Olgu $U \in \tau_X$ (s.t. U on ruumi X lahtine alamhulk). Kuna ruumid $X_1, \dots, X_n$ on separaablid, siis ka korrutisruum $X = X_1 \times \dots \times X_n$ on separaabel (vt. ülesannet 1.2, (b)). *Ülesande 2 põhjal esitub hulk U lahtiste kerade loenduva ühendina, s.t.
$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x^k, r_k), \qquad \text{kus } x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in X_1 \times \dots \times X_n = X,\ r_k > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$
Aga nüüd ülesande 1.2, (a), põhjal
$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x^k, r_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_1^k, r_k) \times \dots \times B(x_n^k, r_k) \in \sigma(\mathcal{G});$$
järelikult $\tau_X \subset \sigma(\mathcal{G})$. $\square$

Meenutame, et sümboliga $\mathbb{R}^n$ tähistame me meetrilist ruumi $(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}, d)$, kus kaugus d on defineeritud võrdusega

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^2},\qquad x=(x_1,\dots,x_n),y=(y_1,\dots,y_n)\in\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}.$$

Teoreem 1.4. *Olgu $n\in\mathbb{N}$. Siis*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}=\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n}.$$

Tõestus. Olgu ρ ruumi $\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}$ korrutismeetrika, s.t.

$$\rho(x,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j-y_j|,\qquad x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n)\in\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n}.$$

Teoreemi 1.3, (b), põhjal $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n}=\mathcal{B}_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)}$. Kuna

$$\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)}=\tau_{\mathbb{R}^n}$$

(s.t. ruumides $(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)$ ja $\mathbb{R}^n$ on ühed ja samad lahtised hulgad), siis

$$\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n}=\mathcal{B}_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)}=\sigma(\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)})=\sigma(\tau_{\mathbb{R}^n})=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Ülesanne 1.4. Veenduda, et $\tau_{(\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},\rho)}=\tau_{\mathbb{R}^n}$.

□

Ülesanne 1.5. Tõestada, et kui $E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, $z\in\mathbb{R}^n$ ja $r\in\mathbb{R}$, siis ka $E+z\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ ja $rE\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Näpunäide. Veenduda, et kogum $\mathcal{E}=\{E\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\colon E+r\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ja $rE\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ iga $r\in\mathbb{R}$ korral$\}$ on σ-algebra, kusjuures $\mathcal{E}$ sisaldab mingi σ-algebrat $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ genereeriva kogumi $\mathcal{E}_1$.

Märkus 1.1. Kui X_1, X_2 ja X_3 on mingid hulgad, siis me võime loomulikul viisil samastada otsekorrutised

$$X_1\times X_2\times X_3,\quad (X_1\times X_2)\times X_3\quad \text{ja}\quad X_1\times(X_2\times X_3).$$

Üldisemalt, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $X_1,\dots,X_n$ on mingid hulgad, siis me võime loomulikul viisil samastada otsekorrutised

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,\quad (X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n\quad \text{ja}\quad X_1\times(X_2\times\cdots\times X_n).$$

Seda arvestades saab näidata, et σ-algebrate "korrutamine" on assotsiatiivne, s.t. kui $(X_1,\mathfrak{A}_1)$, $(X_2,\mathfrak{A}_2)$ ja $(X_3,\mathfrak{A}_3)$ on mõõtuvad ruumid, siis

$$\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3=(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)\otimes\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3),$$

ning, üldisemalt, kui $n\in\mathbb{N}$ ja $(X_1,\mathfrak{A}_1),\dots,(X_n,\mathfrak{A}_n)$ on mõõtuvad ruumid, siis

$$\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_n=(\mathfrak{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_{n-1})\otimes\mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_n).$$

§ 2. Korrutismõõdud

Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ mõõduga ruumid.

Definitsioon 2.1. Olgu $A \in \mathfrak{A}$ ja $B \in \mathfrak{B}$. Hulka

$$A \times B = \big\{(x, y) \in X \times Y \colon\ x \in A,\ y \in B\big\}$$

nimetatakse $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$*-mõõtuvaks ristkülikuks* (ehk lihtsalt *mõõtuvaks ristkülikuks*). Hulki A ja B nimetatakse selle ristküliku *külgedeks.*

Selles paragrahvis konstrueerime ühe mõõdu korrutis-σ-algebral $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, mida me hakkame nimetama *mõõtude μ ja ν korrutismõõduks* ning tähistama sümboliga $\mu\times\nu$. Nimetus "mõõtude μ ja ν korrutismõõt" on mõõdu $\mu \times \nu$ puhul igati õigustatud, sest me konstrueerime ta selliselt, et iga mõõtuva ristküliku $A \times B \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B),$$

s.t. mõõtuva ristküliku korrutismõõt on võrdne tema külgede mõõtude korrutisega.

Tähistame

$$\mathcal{A}_0 = \{A \times B \colon\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\},$$

s.t. $\mathcal{A}_0$ on kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum, ning

$$\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} E_j \colon\ n \in \mathbb{N},\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0,\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j\right\},$$

s.t. $\mathcal{A}$ on kõigi paarikaupa lõikumatute $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite kogum. Kuna $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra, siis teoreemi I.2.5 põhjal on kogum $\mathcal{A}$ algebra.

Ülesanne 2.1. Tõestada, et kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra.

Defineerime hulgafunktsiooni $\rho\colon\ \mathcal{A} \to [0, \infty]$ võrdusega

$$\rho(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\, \nu(B_j), \qquad E \in \mathcal{A}, \tag{2.1}$$

kus paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud $A_1 \times B_1, \ldots, A_n \times B_n$ ($n \in \mathbb{N}$), on sellised, et

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \times B_j. \tag{2.2}$$

Siis

(1) hulgafunktsioon ρ on korrektselt defineeritud, s.t. tema definitsioon ei sõltu hulga E esitusest kujul (2.2) — täpsemalt, kui paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud $A'_1 \times B'_1, \ldots, A'_m \times B'_m$ ($m \in \mathbb{N}$), on sellised, et $E = \bigcup_{i=1}^{m} A'_i \times B'_i$, siis

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A'_i)\, \nu(B'_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\, \nu(B_j);$$

(2) hulgafunktsioon ρ on mõõt;

(3) mõõt ρ on ainus mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul mõõtuva ristküliku mõõt on tema külgede mõõtude korrutis.

Väited (1)–(3) järelduvad ülesandest I.3.10 ja järgnevast lemmast.

Lemma 2.1. *Olgu $A \times B \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ mõõtuv ristkülik, olgu J mingi ülimalt loenduv indeksite hulk ning olgu paarikaupa lõikumatud mõõtuvad ristkülikud $A_j \times B_j \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, $j \in J$, sellised, et*

$$A \times B = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j.$$

Siis

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j \in J} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Ülesanne 2.2. Järeldada ülesandest I.3.10 ja lemmast 2.1 väited (1)–(3).

LEMMA 2.1 TÕESTUSEKS. piisab näidata, et

$$\text{iga } y \in Y \text{ korral} \quad \mu(A)\,\chi_B(y) = \sum_{j \in J} \mu(A_i)\,\chi_{B_j}(y). \tag{2.3}$$

Tõepoolest, kui väide (2.3) kehtib, siis Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal (täpsemalt, teoreemi II.2.5 põhjal)

$$\begin{aligned}\mu(A)\nu(B) &= \mu(A)\int_Y \chi_B(y)\,d\nu(y) = \int_Y \mu(A)\,\chi_B(y)\,d\nu(y) = \int_Y \sum_{j \in J} \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) \\ &= \sum_{j \in J}\int_Y \mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) = \sum_{j \in J}\mu(A_j)\int_Y \chi_{B_j}(y)\,d\nu(y) = \sum_{j \in J}\mu(A_j)\nu(B_j).\end{aligned}$$

Tõestame väite (2.3). Olgu $y \in Y$, siis monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\mu(A)\,\chi_B(y) &= \chi_B(y)\int_X \chi_A(x)\,d\mu(x) = \int_X \chi_A(x)\,\chi_B(y)\,d\mu(x) \\ &= \int_X \chi_{A \times B}(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \chi_{\bigcup_{j \in J} A_j \times B_j}(x,y)\,d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{j \in J} \chi_{A_j \times B_j}(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \sum_{j \in J} \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{j \in J}\int_X \chi_{A_j}(x)\,\chi_{B_j}(y)\,d\mu(x) = \sum_{j \in J}\chi_{B_j}(y)\int_X \chi_{A_j}(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{j \in J}\mu(A_j)\,\chi_{B_j}(y).\end{aligned}$$

□

Olgu $\rho^*\colon \mathcal{P}(X \times Y) \to [0,\infty]$ mõõduga $\rho\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ assotsieeruv välismõõt, s.t. $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$ korral

$$\begin{aligned}\rho^*(E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\rho(E_j)\colon\ E_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\}\\ &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\nu(B_j)\colon\ A_j \in \mathfrak{A}, B_j \in \mathfrak{B}, j \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j\right\}.\end{aligned}$$

Tähistame

$$\mu \times \nu := \rho^*|_{\sigma(\mathcal{A})} = \rho^*|_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}.$$

Ülesanne 2.3. Veenduda, et $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Hahni teoreemi põhjal on hulgafunktsioon $\mu \times \nu\colon\ \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to [0,\infty]$ mõõt; seejuures on $\mu \times \nu$ mõõdu ρ jätk σ-algebrale $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Mõõtu $\mu \times \nu$ nimetatakse mõõtude μ ja ν *korrutismõõduks.* Mõõduga ruumi

$$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$$

nimetatakse *ruumide* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ *korrutisruumiks.*

Märgime, et kui $A \times B$ on $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuv ristkülik, siis $A \times B \in \mathcal{A}$ ning järelikult

$$\mu \times \nu(A \times B) = \rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

s.t. mõõtuva ristküliku korrutismõõt on tema külgede mõõtude korrutis.

Paneme tähele, et kui ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on σ-lõplikud, siis eelmõõduga ruum $(X \times Y, \mathcal{A}, \rho)$ on σ-lõplik ning järelikult ka korrutisruum $(X \times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ on σ-lõplik.

Ülesanne 2.4. Tõestada, et kui ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on σ-lõplikud, siis ka

(a) eelmõõduga ruum $(X \times Y, \mathcal{A}, \rho)$ on σ-lõplik;

(b) korrutisruum $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ on σ-lõplik.

Seega, kui ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on σ-lõplikud, siis Hahni teoreemi põhjal on korrutismõõt $\mu \times \nu$ mõõdu ρ ainus jätk korrutis-σ-algebrale $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Mõõt ρ on ainus selline mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul iga $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuva ristküliku $A \times B$ mõõt on tema külgede mõõtude korrutis. Niisis, *kui ruumid* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ *on* σ*-lõplikud, siis korrutismõõt* $\mu \times \nu$ *on ainus selline mõõt korrutis-*σ*-algebral* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$*, et iga* $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$*-mõõtuva ristküliku* $A \times B$ *korral*

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Ülesanne 2.5. Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu kogumid $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$ ja $\mathcal{D} \subset \mathfrak{B}$ sellised, et

- leiduvad $C_j \in \mathcal{C}$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \supset X$;

- $\mu = \lambda_1|_{\mathfrak{A}}$, kus välismõõt $\lambda_1\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda_1(C) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\colon\ A_j \in \mathcal{C},\ j\in\mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset C\right\},\quad C\in\mathcal{P}(X);$$

- leiduvad $D_j \in \mathcal{D}$, $j\in\mathbb{N}$, nii, et $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \supset Y$;
- $\nu = \lambda_2|_{\mathfrak{B}}$, kus välismõõt $\lambda_2\colon \mathcal{P}(Y) \to [0,\infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda_2(C) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\nu(B_j)\colon\ B_j \in \mathcal{D},\ j\in\mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supset D\right\},\quad D\in\mathcal{P}(Y).$$

Olgu mõõt ρ defineeritud võrdusega (2.1). Tõestada, et iga $E\in\mathcal{P}(X\times Y)$ korral

$$\rho^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)\nu(B_j)\colon\ A_j\in\mathcal{C},\ B_j\in\mathcal{D},\ j\in\mathbb{N},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\times B_j\supset E\right\} =: \lambda(E).$$

Märkus 2.1. Järgmise paragrahvi näites 3.1 veendume, et üldjuhul ei tarvitse mõõduga ruum $(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ olla täielik isegi siis, kui ruumid $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ on täielikud.

Ülesanne 2.6. Olgu $(X,\overline{\mathfrak{A}},\overline{\mu})$ ja $(Y,\overline{\mathfrak{B}},\overline{\nu})$ vastavalt mõõduga ruumide $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ täieldid. Tõestada, et

(a) korrutisruumide $(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$ ja $(X\times Y,\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}},\overline{\mu}\times\overline{\nu})$ täieldid $(X\times Y,\overline{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}},\overline{\mu\times\nu})$ ja $(X\times Y,\overline{\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}},\overline{\overline{\mu}\times\overline{\nu}})$ on võrdsed;

(b) kui μ ja ν on σ-lõplikud, siis ruumi $(X\times Y,\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B},\mu\times\nu)$ täield on $(X\times Y,\mathcal{M}(\rho^*),\rho^*|_{\mathcal{M}(\rho^*)})$, kus mõõt ρ on defineeritud võrdusega (2.1).

NÄPUNÄIDE. Väite (b) tõestuseks kasutada järeldust I.4.7. Väite (a) tõestuseks on otstarbekas kõigepealt veenduda, et

(1) iga $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}$-mõõtuva ristküliku $C\times D$ korral leidub $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuv ristkülik $A\times B\supset C\times D$ nii, et $\mu(A)\,\nu(B) = \overline{\mu}(C)\,\overline{\nu}(D)$;

(2) $\pi^* = \rho^*$, kus mõõt ρ on defineeritud võrdusega (2.1) ning mõõt π on mõõdu ρ analoog paarikaupa lõikumatute $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite algebral;

(3) $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}\supset\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, kusjuures $\mu\times\nu = \overline{\mu}\times\overline{\nu}|_{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}$ (siin kasutada teoreemi 1.1);

(4) $\mathcal{N}(\mu\times\nu) = \mathcal{N}(\overline{\mu}\times\overline{\nu})$, s.t. hulk $N\in\mathcal{P}(X\times Y)$ on $\mu\times\nu$-hüljatav parajasti siis, kui ta on $\overline{\mu}\times\overline{\nu}$-hüljatav (siin kasutada ülesannet I.4.4, (b), ja lauset I.4.5);

(5) $\overline{\mathfrak{A}}\otimes\overline{\mathfrak{B}}\subset\overline{\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}}$ (siin kasutada teoreemi 1.1 ja lemmat I.2.1).

Ülesanne 2.7. Olgu $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ja $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ σ-lõplikud mõõduga ruumid, kus X ja Y on Hausdorffi topoloogilised ruumid. Tõestada, et kui mõõdud μ ja ν on regulaarsed, siis ka korrutismõõt $\mu\times\nu$ on (korrutistopoloogia suhtes) regulaarne.

NÄPUNÄIDE. Korrutismõõdu $\mu\times\nu$ regulaarsuseks piisab ülesannete I.3.30 ja 2.6, (b), ning teoreemi I.5.4 põhjal näidata, et võrdusega (2.1) defineeritud mõõt ρ on regulaarne.

Märkus 2.2. Kolme või enama mõõduga ruumi korrutisruum defineeritakse analoogiliselt kahe mõõduga ruumi juhuga.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ mõõduga ruumid. Kui $A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \dots, n$, siis hulka

$$A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n)$$

nimetatakse $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*-mõõtuvaks risttahukaks.* Hulki $A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j = 1, \dots, n$, nimetatakse selle risttahuka *servadeks.*

Tähistame sümboliga $\mathcal{A}_0$ kõigi $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuvate risttahukate kogumi ning tähega $\mathcal{A}$ kõigi kogumi $\mathcal{A}_0$ paarikaupa lõikumatute hulkade lõplike ühendite kogumi, s.t.

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{m} E_i \colon\ m \in \mathbb{N},\ E_i \in \mathcal{A}_0,\ i = 1, \dots, m,\ E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j \right\}.$$

Kuna kogum $\mathcal{A}_0$ on poolalgebra, siis teoreemi II.2.5 põhjal on kogum $\mathcal{A}$ algebra.

Defineerime hulgafunktsiooni $\rho\colon\ \mathcal{A} \to [0, \infty]$ võrdusega

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_1^i) \cdots \mu_n(A_n^i), \qquad E \in \mathcal{A},$$

kus $m \in \mathbb{N}$ ning paarikaupa lõikumatud $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuvad ristkülikud $E_i = A_1^i \times \cdots \times A_n^i$, $i = 1, \dots, m$, on sellised, et

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \tag{2.4}$$

Sarnaselt kahe mõõduga ruumi juhuga saab näidata, et

(1) hulgafunktsioon ρ on korrektselt defineeritud, s.t. tema definitsioon ei sõltu hulga E esitusest kujul (2.4);

(2) hulgafunktsioon ρ on mõõt;

(3) mõõt ρ on ainus mõõt algebral $\mathcal{A}$, mille puhul mõõtuva risttahuka mõõt on tema servade mõõtude korrutis.

Olgu $\rho^*\colon\ \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n) \to [0, \infty]$ mõõduga $\rho\colon\ \mathcal{A} \to [0, \infty]$ assotsieeruv välismõõt, s.t.

$$\rho^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \colon\ E_j \in \mathcal{A},\ j \in \mathbb{N},\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}, \qquad E \in \mathcal{P}(X_1 \times \cdots \times X_n).$$

Tähistame

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n := \rho^*|_{\sigma(\mathcal{A})} = \rho^*|_{\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n}.$$

Hahni teoreemi põhjal on hulgafunktsioon $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n\colon\ \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n \to [0, \infty]$ mõõt; seejuures on $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ mõõdu ρ jätk σ-algebrale $\sigma(\mathcal{A}) = \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$.

Mõõtu $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ nimetatakse mõõtude $\mu_1, \dots, \mu_n$ *korrutismõõduks.* Mõõduga ruumi

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$$

nimetatakse ruumide $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ *korrutisruumiks.*

Märgime, et kui $A_1 \times \cdots \times A_n$ on $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$-mõõtuv ristkülik, siis $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{A}$ ning järelikult

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \rho(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n),$$

s.t. mõõtuva risttahuka korrutismõõt on tema servade mõõtude korrutis.

Analoogiliselt kahe mõõduga ruumi juhuga saab näidata, et *kui mõõduga ruumid* $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \dots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ *on σ-lõplikud, siis*

(a) *korrutisruum* $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ *on* σ*-lõplik;*

(b) *korrutismõõt* $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ *on ainus selline mõõt korrutis-*σ*-algebral* $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*, et iga* $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$*-mõõtuva ristküliku* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *korral*

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n).$$

Märkus 2.3. Ülesannete 2.4–2.7 väidete analoogid jäävad kehtima, kui neis ülesannetes vaadelda kahe mõõduga ruumi korrutisruumi asemel kolme või enama mõõduga ruumi korrutisruumi.

Märkus 2.4. Saab näidata, et mõõtude "korrutamine" on assotsiatiivne, s.t. kui $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ja $(X_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3)$ on mõõduga ruumid, siis

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3),$$

ning, üldisemalt, kui $n \in \mathbb{N}$ ja $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \ldots, (X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ on mõõduga ruumid, siis

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \cdots \times \mu_n = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_{n-1}) \times \mu_n = \mu_1 \times (\mu_2 \times \cdots \times \mu_n).$$

§ 3. Fubini-Tonelli teoreemid

3.1. Hulga lõiked. Funktsiooni lõiked

Definitsioon 3.1. Olgu X, Y ja Z mittetühjad hulgad, olgu $E \subset X \times Y$ ning olgu $f\colon X \times Y \to Z$.

Olgu $x \in X$. Hulka

$$E_x := \{y \in Y\colon (x, y) \in E\} \in \mathcal{P}(Y)$$

nimetatakse hulga E *x-lõikeks.* Funktsiooni $f_x\colon Y \to Z$,

$$f_x(y) = f(x, y), \quad y \in Y,$$

nimetatakse funktsiooni f *x-lõikeks.*

Olgu $y \in Y$. Hulka

$$E^y := \{x \in X\colon (x, y) \in E\} \in \mathcal{P}(X)$$

nimetatakse hulga E *y-lõikeks.* Funktsiooni $f^y\colon X \to Z$,

$$f^y(x) = f(x, y), \quad x \in X,$$

nimetatakse funktsiooni f *y-lõikeks.*

Ülesanne 3.1. Olgu X ja Y mittetühjad hulgad ning olgu $x \in X$. Tõestada, et

(a) kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$, siis $(E^c)_x = (E_x)^c$;

(b) kui J on mingi indeksite hulk ja $E_j \in \mathcal{P}(X \times Y)$, $j \in J$, siis

$$\Big(\bigcup_{j\in J} E_j\Big)_x = \bigcup_{j\in J} (E_j)_x \quad \text{ja} \quad \Big(\bigcap_{j\in J} E_j\Big)_x = \bigcap_{j\in J} (E_j)_x;$$

(c) kui $E \in \mathcal{P}(X \times Y)$, siis $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$;

(d) kui $f\colon X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, siis $(f^+)_x = (f_x)^+$ ja $(f^-)_x = (f_x)^-$;

(e) kui $Z \neq \emptyset$ ja $f\colon X \times Y \to Z$, siis iga $C \in \mathcal{P}(Z)$ korral $\big(f^{-1}[C]\big)_x = f_x^{-1}[C]$.

Teoreem 3.1. *Olgu $(X, \mathfrak{A})$ ja $(Y, \mathfrak{B})$ mõõtuvad ruumid.*

(a) *Kui $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, siis*

 (1) *$E_x \in \mathfrak{B}$ iga $x \in X$ korral;*

 (2) *$E^y \in \mathfrak{A}$ iga $y \in Y$ korral.*

(b) *Olgu $(Z, \mathfrak{C})$ mõõtuv ruum ning olgu funktsioon $f\colon X \times Y \to Z$ $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuv. Siis*

 (1) *funktsioon $f_x\colon Y \to Z$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv iga $x \in X$ korral;*

 (2) *funktsioon $f^y\colon X \to Z$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv iga $y \in Y$ korral.*

TÕESTUS. (a). Tõestame ainult väite (1). Väide (2) tõestatakse analoogiliselt.

Fikseerime vabalt $x \in X$ ja tähistame

$$\mathcal{D} := \big\{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}\colon\ E_x \in \mathfrak{B}\big\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}.$$

Väite (1) tõestuseks piisab näidata, et $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et kogum $\mathcal{D}$ sisaldab kõik $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvad ristkülikud.

Tõepoolest, kui $A \in \mathfrak{A}$ ja $B \in \mathfrak{B}$, siis

$$(A \times B)_x = \{y \in Y\colon\ (x, y) \in A \times B\} = \begin{cases} B, & \text{kui } x \in A, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin A. \end{cases}$$

Seega igal juhul $(A \times B)_x \in \mathfrak{B}$, s.t. $A \times B \in \mathcal{D}$.

Veendumaks, et $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$, piisab nüüd näidata, et kogum $\mathcal{D}$ on σ-algebra, sest sel juhul

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \sigma(\{A \times B\colon\ A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B}\}) \subset \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

Ülesanne 3.2. Näidata, et kogum $\mathcal{D}$ on σ-algebra.

(b). Tõestame ainult väite (1). Väide (2) tõestatakse analoogiliselt.

Ülesanne 3.3. Tõestada väide (1).

NÄPUNÄIDE. Kasutada ülesannet 3.1, (e).

□

Näide 3.1. Näitame, et mõõduga ruum $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}, m\times m)$ ei ole täielik. (Sümbolid $\mathcal{L}$ ja m tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$.)

Olgu hulk $N \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ selline, et $m(N) = 0$ (niisuguseid hulki leidub — me võime hulgaks N võtta näiteks ruumi $\mathbb{R}$ mis tahes ühepunktilise alamhulga), ning olgu $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}$ (meenutame, et järelduse I.5.9 põhjal $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$). Nüüd

$$N \times B \subset N \times \mathbb{R} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L},$$

kusjuures

$$m \times m\,(N \times \mathbb{R}) = m(N)\,m(\mathbb{R}) = 0\,m(\mathbb{R}) = 0,$$

seega hulk $N \times B$ on $m \times m$-hüljatav. Seejuures $N \times B \notin \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$.

Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $N \times B \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$. Siis, valides vabalt $x \in N$, järeldub teoreemist 3.1, et $B = (N \times B)_x \in \mathcal{L}$—vastuolu.

Seega mõõduga ruum $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \times m)$ ei ole täielik. Meenutame, et ruum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ on täielik.

3.2. Lemma monotoonsest klassist

Olgu X mingi hulk.

Definitsioon 3.2. Kogumit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nimetakse *monotoonseks klassiks*, kui

1° $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$;

2° $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}$

(s.t. $\mathcal{D}$ on kinnine oma hulkade monotoonsete loenduvate ühendite ja monotoonsete loenduvate ühisosade suhtes).

Definitsioon 3.3. Olgu $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$.

Vähimat hulga X alamhulkade monotoonset klassi, mis sisaldab kõiki kogumi $\mathcal{E}$ hulki, nimetatakse *kogumi $\mathcal{E}$ poolt genereeritud monotoonseks klassiks* ja tähistatakse sümboliga $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Kuna iga σ-algebra on monotoonne klass, siis mis tahes kogumi $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ korral $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. Järgnev teoreem näitab, et kui $\mathcal{E}$ on algebra, siis $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Teoreem 3.2 (Lemma monotoonsest klassist)**.** *Olgu X mingi mittetühi hulk ning olgu $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ algebra. Siis*

$$\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}),$$

s.t. algebra poolt genereeritud σ-algebra on võrdne selle algebra poolt genereeritud monotoonse klassiga.

Tõestus.

***Ülesanne 7** (6 p.)**.** Tõestada teoreem 3.2.

□

3.3. Fubini-Tonelli teoreemid

Teoreem 3.3. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-lõplikud mõõduga ruumid. Siis iga hulga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral*

(a) *funktsioon $g_E \colon X \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0, \infty]$ on $\mathfrak{A}$-mõõtuv (s.t. $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$);*

(b) *funktsioon $h_E \colon Y \ni y \mapsto \mu(E^y) \in [0, \infty]$ on $\mathfrak{B}$-mõõtuv (s.t. $h_E \in L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$).*

Seejuures

$$\mu \times \nu(E) \overset{\text{(A)}}{=} \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y).$$

Tõestus. Tõestame vaid, et iga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral kehtivad väide (a) ja võrdus (A). Väide (b) ja võrdus $\mu \times \nu(E) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

(I) Vaatleme kõigepealt juhtu, kus mõõduga ruumid $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ on lõplikud. Tähistame

$$\mathcal{D} := \bigl\{E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \colon \text{ väide (a) ja võrdus (A) kehtivad}\bigr\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}.$$

Veendumaks, et väide (a) ja võrdus (A) kehtivad iga hulga $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ korral, piisab näidata, et $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subset \mathcal{D}$. Selleks aga piisab näidata, et

(1) $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, kus $\mathcal{A}$ on kõigi paarikaupa lõikumatute $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute lõplike ühendite kogum;

(2) $\mathcal{D}$ on monotoonne klass.

Tõepoolest, kui väited (1) ja (2) kehtivad, siis, arvestades, et $\mathcal{A}$ on algebra, järeldub lemma põhjal monotoonsest klassist, et

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}.$$

(1). Näitame, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{D}$, kus $\mathcal{A}_0$ on kõigi $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-mõõtuvate ristkülikute kogum.

Tõepoolest, kui $E = A \times B \in \mathcal{A}_0$ ($A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$), siis

$$E_x = (A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{kui } x \in A, \\ \emptyset, & \text{kui } x \notin A, \end{cases}$$

järelikult

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B), & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \notin A, \end{cases} = \nu(B)\, \chi_A(x).$$

Seega $g_E = \nu(B)\, \chi_A \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures

$$\int_X g_E \, d\mu = \int_X \nu(B)\, \chi_A \, d\mu = \nu(B)\mu(A) = \mu \times \nu(A \times B) = \mu \times \nu(E),$$

s.t. $E \in \mathcal{D}$.

Kui nüüd $E \in \mathcal{A}$, s.t. $E = \bigcup_{j=1}^n E_j$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0$ on paarikaupa lõikumatud, siis iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu\left(\Big(\bigcup_{j=1}^n E_j\Big)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^n (E_j)_x\right) = \sum_{j=1}^n \nu\big((E_j)_x\big) = \sum_{j=1}^n g_{E_j}(x)$$

(sest hulgad $(E_1)_x, \ldots, (E_n)_x \in \mathfrak{B}$ on paarikaupa lõikumatud), s.t. $g_E = \sum_{j=1}^n g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ (sest kuna $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{D}$, siis $g_{E_1}, \ldots, g_{E_n} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$); seejuures

$$\int_X g_E \, d\mu = \int_X \sum_{j=1}^n g_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_X g_{E_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^n \mu \times \nu(E_j) = \mu \times \nu(E).$$

Niisiis $E \in \mathcal{D}$ ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

(2). Näitame, et $\mathcal{D}$ on monotoonne klass, s.t. kehtivad implikatsioonid

1° $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{D}$;

2° $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{D}$.

1°. Olgu hulgad $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$. Peame näitama, et siis ka $E := \bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{D}$, s.t.

$$g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \text{ja} \quad \mu \times \nu(E) = \int_X g_E \, d\mu.$$

Selleks paneme tähele, et iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\Big(\bigcup_{j=1}^\infty E_j\Big)_x\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E_j)_x\right) = \lim_{j\to\infty} \nu\big((E_j)_x\big) = \lim_{j\to\infty} g_{E_j}(x)$$

(sest $(E_1)_x \subset (E_2)_x \subset (E_3)_x \subset \ldots$). Seega mõõdu monotoonsuse tõttu $g_{E_j} \nearrow g_E$. Kuna $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, siis $g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $j \in \mathbb{N}$, järelikult teoreemi II.1.6 põhjal ka $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Arvestades, et $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, saame Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal, et

$$\mu \times \nu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu \times \nu(E_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X g_{E_j} \, d\mu = \int_X g_E \, d\mu.$$

2°. Olgu hulgad $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, sellised, et $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$. Peame näitama, et siis ka $E := \bigcap_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{D}$, s.t.

$$g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \text{ja} \quad \mu \times \nu(E) = \int_X g_E \, d\mu.$$

Selleks paneme tähele, et iga $x \in X$ korral

$$g_E(x) = \nu(E_x) = \nu\left(\Big(\bigcap_{j=1}^\infty E_j\Big)_x\right) = \nu\left(\bigcap_{j=1}^\infty (E_j)_x\right) = \lim_{j\to\infty} \nu\big((E_j)_x\big) = \lim_{j\to\infty} g_{E_j}(x)$$

(sest $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset (E_3)_x \supset \ldots$ ja $\nu\big((E_1)_x\big) < \nu(Y) < \infty$). Seega $g_{E_j} \to g_E$. Kuna $E_j \in \mathcal{D}$, $j \in \mathbb{N}$, siis $g_{E_j} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $j \in \mathbb{N}$, järelikult teoreemi II.1.6 põhjal ka $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Mõõdu monotoonsuse tõttu iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$|g_{E_j}(x)| = \nu\big((E_j)_x\big) \leqslant \nu(Y) < \infty, \quad x \in X.$$

Lebesgue'i tõkestatud koonduvuse teoreemi põhjal saame nüüd, et

$$\mu \times \nu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu \times \nu(E_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X g_{E_j} \, d\mu = \int_X g_E \, d\mu.$$

(II) Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam σ-lõplike mõõduga ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ lõplikkust).

Ruumide $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-lõplikkuse tõttu leiduvad hulgad $X_j \in \mathfrak{A}$, $Y_j \in \mathfrak{B}$, $j \in \mathbb{N}$, selliselt, et

$$\mu(X_j) < \infty,\ j \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X, \qquad X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots,$$

$$\nu(Y_j) < \infty,\ j \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j = Y, \qquad Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \dots.$$

Tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\mathfrak{A}_j = \big\{A \cap X_j\colon\ A \in \mathfrak{A}\big\}, \quad \mu_j = \mu|_{\mathfrak{A}_j}, \quad \mathfrak{B}_j = \big\{B \cap Y_j\colon\ B \in \mathfrak{B}\big\}, \quad \nu_j = \nu|_{\mathfrak{B}_j}.$$

Paneme tähele, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

(1) $(X_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ ja $(Y_j, \mathfrak{B}_j, \nu_j)$ on mõõduga ruumid;

(2) kui $f \in L^+(X_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$, siis, defineerides

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in X_j, \\ 0, & \text{kui } x \notin X_j, \end{cases} \qquad x \in X,$$

kehtib $\widehat{f} \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures $\int_X \widehat{f}\, d\mu = \int_{X_j} f\, d\mu_j$;

(3) $\mathfrak{A}_j \otimes \mathfrak{B}_j = \big\{E \cap (X_j \times Y_j)\colon\ E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}\big\} \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$;

(4) $\mu_j \times \nu_j = \mu \times \nu|_{\mathfrak{A}_j \otimes \mathfrak{B}_j}$.

Ülesanne 3.4. Tõestada, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral kehtivad väited (1)–(4).

Olgu $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Tõestame väite (a) ja võrduse (A). Tähistame

$$E_j = E \cap (X_j \times Y_j) \in \mathfrak{A}_j \otimes \mathfrak{B}_j \subset \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Kuna ruumid $(X_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ ja $(Y_j, \mathfrak{B}_j, \nu_j)$ on lõplikud, siis tõestuse osa (I) põhjal iga $j \in \mathbb{N}$ korral

funktsioon $\quad X_j \ni x \mapsto \nu_j\big((E_j)_x\big) \in [0, \infty] \quad$ kuulub klassi $L^+(X_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$,

kusjuures

$$\mu_j \times \nu_j(E_j) = \int_{X_j} \nu_j\big((E_j)_x\big)\, d\mu_j(x).$$

Siit järeldub väite (2) põhjal, et iga $j \in \mathbb{N}$ korral

funktsioon $\quad X \ni x \mapsto \nu_j\big((E_j)_x\big) = \nu\big((E_j)_x\big) \in [0, \infty] \quad$ kuulub klassi $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$,

kusjuures

$$\mu \times \nu(E_j) = \mu_j \times \nu_j(E_j) = \int_{X_j} \nu_j\big((E_j)_x\big)\, d\mu_j(x) = \int_X \nu\big((E_j)_x\big)\, d\mu(x).$$

Paneme tähele, et iga $x \in X$ korral $\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j)_x = E_x$, kusjuures $(E_1)_x \subset (E_2)_x \subset (E_3)_x \subset \ldots$; järelikult

$$\nu\big((E_j)_x\big) \nearrow \nu(E_x) = g_E(x).$$

Seega $g_E \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures Lebesgue'i monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \lim_{j\to\infty} \int_X \nu\big((E_j)_x\big)\, d\mu(x) = \lim_{j\to\infty} \mu \times \nu(E_j) = \mu \times \nu(E).$$

□

Teoreem 3.4 (Tonelli teoreem)**.** *Olgu* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *ja* $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ *σ-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu* $f \in L^+(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$*. Siis*

(a) *funktsioon* $g\colon\ X \ni x \mapsto \int_Y f_x\, d\nu \in [0, \infty]$ *on* $\mathfrak{A}$*-mõõtuv (s.t.* $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$*);*

(b) *funktsioon* $h\colon\ Y \ni y \mapsto \int_X f^y\, d\mu \in [0, \infty]$ *on* $\mathfrak{B}$*-mõõtuv (s.t.* $h \in L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$*).*

Seejuures

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu \times \nu \overset{\text{(A)}}{=} \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu\right) d\nu(y). \tag{3.1}$$

Märkus 3.1. Sageli jäetakse valemis (3.1) sulud kirjutamata. Samuti eelistavad mõned autorid kirjutada selles valemis sümbolid $d\mu$ ja $d\nu$ vastupidises järjekorras. Niisiis kirjutatakse valem (3.1) tihtipeale ka kujul

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu \times \nu(x,y) &= \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\\ &= \int_X \int_Y f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Tonelli teoreemi 3.4 tõestus. Tõestame ainult väite (a) ja võrduse (A). Väide (b) ja võrdus $\int_{X\times Y} f\, d\mu \times \nu = \int_Y \big(\int_X f^y\, d\mu\big)\, d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

(I) Tõestame väite (a) ja võrduse (A) kõigepealt juhul, kui $f \in L^+(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ on lihtne mõõtuv funktsioon standardesitusega $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$. Sel juhul iga $x \in X$ korral

$$f_x = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\chi_{E_j})_x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{(E_j)_x} \in L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu),$$

järelikult

$$g(x) = \int_Y f_x\, d\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \nu\big((E_j)_x\big).$$

Kuna teoreemi 3.3 põhjal kuuluvad funktsioonid $X \ni x \mapsto \nu\big((E_j)_x\big)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, klassi $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, siis ka $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$; seejuures

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu\times\nu &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu\times\nu(E_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_X \nu\big((E_j)_x\big)\, d\mu(x)\\ &= \int_X \sum_{j=1}^n \alpha_j \nu\big((E_j)_x\big)\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

(II) Vaatleme nüüd juhtu, kus $f \in L^+(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ on suvaline. Teoreemi II.1.7 põhjal leiduvad lihtsad mõõtuvad funktsioonid $\phi_n \in L^+(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $\phi_n \nearrow f$. Nüüd monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu\times\nu &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \phi_n\, d\mu\times\nu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X \left(\int_Y (\phi_n)_x\, d\nu\right) d\mu(x)\\ &\overset{(2)}{=} \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu(x).\end{aligned}$$

Tõepoolest, tõestuse osa (I) põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral funktsioon $\psi_n\colon X \ni x \mapsto \int_Y (\phi_n)_x\, d\nu$ kuulub klassi $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures $\int_{X\times Y} \phi_n\, d\mu\times\nu = \int_X \big(\int_Y (\phi_n)_x\, d\nu\big)\, d\mu(x)$; niisiis kehtib (1). Kuna $\phi_n \nearrow f$, siis iga $x \in X$ korral $(\phi_n)_x \nearrow f_x$ ning seega monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal $\psi_n(x) = \int_Y (\phi_n)_x\, d\nu \nearrow \int_Y f_x\, d\nu = g(x)$, järelikult $g \in L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures jällegi monotoonse koonduvuse teoreemi põhjal kehtib (2).

□

Järeldus 3.5. *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-lõplikud mõõduga ruumid.*

(a) *Olgu $E \in \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ selline, et $\mu\times\nu(E) = 0$. Siis*

   (1) *$\nu(E_x) = 0$ μ-p.k. $x \in X$ korral;*

   (2) *$\mu(E_y) = 0$ ν-p.k. $y \in Y$ korral.*

(b) *Olgu $\mu\times\nu$-p.k. määratud funktsioonid $f, g\colon X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sellised, et $f = g$ $\mu\times\nu$-p.k. Siis*

   (1) *μ-p.k. $x \in X$ korral*

$$f_x(y) = f(x,y) = g(x,y) = g_x(y) \quad \nu\text{-p.k. } y \in Y \text{ korral;}$$

   (2) *ν-p.k. $y \in Y$ korral*

$$f^y(x) = f(x,y) = g(x,y) = g^y(x) \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral.}$$

TÕESTUS. (a). Teoreemi 3.3 põhjal kuuluvad funktsioonid

$$X \ni x \mapsto \nu(E_x) \in [0,\infty] \quad \text{ja} \quad Y \ni y \mapsto \mu(E^y) \in [0,\infty]$$

vastavalt klassidesse $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$, kusjuures

$$\int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y) = \mu \times \nu(E) = 0.$$

Väited (1) ja (2) järelduvad nüüd vahetult teoreemist II.2.8.

(b). Olgu hulk $E \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ selline, et $f(x, y) = g(x, y)$ iga $(x, y) \in E$ korral ja $\mu \times \nu(E^c) = 0$.

Mis tahes $x \in X$ korral

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \text{iga } y \in E_x \text{ korral.}$$

Väite (a), (1), põhjal μ-p.k. $x \in X$ korral $\nu\big((E_x)^c\big) = \nu\big((E^c)_x\big) = 0$, järelikult μ-p.k. $x \in X$ korral $f(x, y) = g(x, y)$ ν-p.k. $y \in Y$ korral.

Väide (2) tõestatakse analoogiliselt. □

Teoreem 3.6 (Fubini teoreem)**.** *Olgu $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ja $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ σ-lõplikud mõõduga ruumid ning olgu $f \in L_1(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$. Siis*

(a) *$f_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ μ-p.k. $x \in X$ korral;*

(b) *$f^y \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ν-p.k. $y \in Y$ korral;*

(c) *μ-p.k. määratud funktsioon $g\colon X \ni x \mapsto \int_Y f_x\, d\nu \in \overline{\mathbb{R}}$ on integreeruv (s.t. $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$);*

(d) *ν-p.k. määratud funktsioon $h\colon Y \ni y \mapsto \int_X f^y\, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ on integreeruv (s.t. $h \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$).*

Seejuures

$$\int_{X \times Y} f\, d\mu \times \nu \overset{\text{(A)}}{=} \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu \right) d\nu(y).$$

Fubini teoreemi 3.6 tõestus tugineb Tonelli teoreemile 3.4 ning järeldusele 3.5.

Fubini teoreemi 3.6 tõestus. Tõestame ainult väited (a) ja (c) ning võrduse (A). Väited (b) ja (d) ning võrdus $\int_{X\times Y} f\, d\mu \times \nu = \int_Y \left(\int_X f^y\, d\mu\right) d\nu(y)$ tõestatakse analoogiliselt.

Kõigepealt vaatleme juhtu, kus f on kõikjal ruumis $X \times Y$ määratud $\mathbb{R}$-väärtustega $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ mõõtuv funktsioon. Sel juhul teoreemi Tonelli teoreemi 3.4 põhjal

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} f\, d\mu \times \nu &= \int_{X \times Y} f^+\, d\mu \times \nu - \int_{X \times Y} f^-\, d\mu \times \nu \\
&= \int_X \left(\int_Y (f^+)_x\, d\nu \right) d\mu(x) - \int_X \left(\int_Y (f^-)_x\, d\nu \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y (f^+)_x\, d\nu - \int_Y (f^-)_x\, d\nu \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y (f_x)^+\, d\nu - \int_Y (f_x)^-\, d\nu \right) d\mu(x) \\
&= \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu \right) d\mu(x).
\end{aligned}$$

Muuhulgas kehtivad (a) ja (c).

Tõepoolest, Tonelli teoreemi 3.4 põhjal $(f_x)^\pm = (f^\pm)_x \in L^+(Y, \mathfrak{B}, \nu)$, seejuures funktsioonid

$$g_1\colon X \ni x \longmapsto \int_Y (f_x)^+\, d\nu \quad \text{ja} \quad g_2\colon X \ni x \longmapsto \int_Y (f_x)^-\, d\nu$$

kuuluvad klassi $L^+(X, \mathfrak{A}, \mu)$, kusjuures

$$\int_X g_1\, d\mu = \int_X \left(\int_Y (f_x)^+\, d\nu\right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f^+\, d\mu\times\nu < \infty$$
$$\int_X g_2\, d\mu = \int_X \left(\int_Y (f_x)^-\, d\nu\right) d\mu(x) = \int_{X\times Y} f^-\, d\mu\times\nu < \infty,$$

s.t. $g_1, g_2 \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Siit järeldub ka (teoreemi II.2.8 põhjal), et

$$\int_Y (f_x)^\pm\, d\nu < \infty \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral;}$$

niisiis μ-p.k. $x \in X$ korral $f_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$. Samuti μ-p.k. $x \in X$ korral

$$g(x) = \int_X f_x\, d\mu(x) = \int_X (f_x)^+\, d\mu(x) - \int_X (f_x)^-\, d\mu(x) = g_1(x) - g_2(x),$$

s.t. $g = g_1 - g_2$, järelikult $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Olgu nüüd $f \in L_1(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ suvaline. Siis leidub kõikjal ruumis $X\times Y$ määratud $\mathbb{R}$-väärtustega $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$-mõõtuv funktsioon $\widehat{f} \in L_1(X\times Y, \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}, \mu\times\nu)$ nii, et $f = \widehat{f}$ $\mu\times\nu$-p.k. Järelduse 3.5 põhjal μ-p.k. $x \in X$ korral $f_x = \widehat{f}_x$ ν-p.k, järelikult $f_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ μ-p.k. $x \in X$ korral (sest eelnevalt tõestatu põhjal $\widehat{f}_x \in L_1(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ μ-p.k. $x \in X$ korral), kusjuures

$$g(x) = \int_X f_x\, d\nu = \int_X \widehat{f}_x\, d\nu \quad \mu\text{-p.k. } x \in X \text{ korral.}$$

Siit järeldub, et $g \in L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ (sest eelnevalt tõestatu põhjal funktsioon $X \ni x \longmapsto \int_X \widehat{f}_x\, d\nu$ kuulub klassi $L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$), kusjuures

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu\times\nu = \int_{X\times Y} \widehat{f}\, d\mu\times\nu = \int_X \left(\int_Y \widehat{f}_x\, d\nu\right) d\mu = \int_X \left(\int_Y f_x\, d\nu\right) d\mu.$$

□

§ 4. Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$

Näites 3.1 veendusime, et mõõduga ruum

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \times m)$$

ei ole täielik (sümbolid $\mathcal{L}$ ja m tähistavad vastavalt ruumi $\mathbb{R}$ Lebesgue'i σ-algebrat ja Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}$). Analoogiliselt saab näidata, et kui $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, siis korrutisruum

$$(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}}_{n}, \underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{n})$$

pole täielik. Olgu $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ selle ruumi täield. Kogumit $\mathcal{L}^n$ nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue'i σ-algebraks.* Selle kogumi hulki nimetatakse ruumi $\mathbb{R}^n$ *Lebesgue'i hulkadeks.* Mõõtu m^n nimetatakse *Lebesgue'i mõõduks ruumis* $\mathbb{R}^n$. Edaspidi tähistame Lebesgue'i mõõtu ruumis $\mathbb{R}^n$ ka lihtsalt sümboliga m.

Märkus 4.1. Ülesandest 2.6, (a), koos märkusega 2.3 järeldub, et $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ on ka ruumi

$$(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n}, \underbrace{m \times m \times \ldots \times m}_{n})$$

täield ehk, kuna teoreemi 1.4 põhjal $\underbrace{\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, siis $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m^n)$ on ruumi $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{m \times m \times \ldots m}_{n})$ täield. (Sümbol $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tähistab ruumi $\mathbb{R}^n$ Boreli σ-algebrat.)

Märkus 4.2. Ülesannetest 2.6, (b), ja 2.5 koos märkusega 2.3 ning valemist (I.5.3) järeldub, et $\mathcal{L}^n = \mathcal{M}(\lambda)$ ja $m^n = \lambda|_{\mathcal{L}^n} = \lambda|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ (sümbol $\mathcal{M}(\lambda)$ tähistab hulga $\mathbb{R}^n$ λ-mõõtuvate alamhulkade σ-algebrat), kus välismõõt $\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ on defineeritud võrdusega

$$\lambda(E) = \inf\Bigg\{ \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(b_1^j - a_1^j) \cdots (b_n^j - a_n^j)}_{n \text{ tegurit}} \colon a_1^j, b_1^j, \ldots, a_n^j, b_n^j \in \mathbb{R},\ a_1^j < b_1^j, \ldots, a_n^j < b_n^j,\ j \in \mathbb{N},$$
$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(a_1^j, b_1^j) \times \cdots \times (a_n^j, b_n^j)}_{n \text{ vahemikku}} \supset E \Bigg\}, \quad E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Seejuures lause I.4.5 põhjal $m^* = \lambda$. (Sümbol m^* tähistab siin mõõduga m assotsieeruvat välismõõtu.)

Integreerides Lebesgue'i mõõdu m järgi ruumis $\mathbb{R}^n$, kirjutatakse sümboli dm või $dm(x)$ asemel tihti ka lihtsalt dx.

Teoreem 4.1. *Olgu $E \in \mathcal{L}^n$.*

(a) $m(E) = \sup\{m(K)\colon\ K \subset E, K \text{ on kompaktne}\}$
$\quad = \inf\{m(U)\colon\ U \supset E, U \text{ on lahtine}\}$.

(b) *$E = G \setminus N_1$, kus $G \in \mathcal{L}^n$ on G_δ ning $N_1 \in \mathcal{L}^n$ on selline, et $m(N_1) = 0$.*

(c) *$E = H \cup N_2$, kus $H \in \mathcal{L}^n$ on F_σ ning $N_2 \in \mathcal{L}^n$ on selline, et $m(N_2) = 0$.*

Märkus 4.3. Teoreemi 4.1 väidet (c) kasutatakse hiljem teoreemi VI.2.2 tõestamisel.

TEOREEMI 4.1 TÕESTUS. Väide (a) — Lebesgue'i mõõdu regulaarsus — järeldub ülesannetest I.3.30 ja 2.7 koos märkusega 2.3.

Ülesanne 4.1. Tõestada väited (b)–(c).

NÄPUNÄIDE. Kõigepealt panna tähele, et Lebesgue'i mõõdu m jaoks ruumis $\mathbb{R}^n$ kehtib teoreemi I.5.5 väite analoog. Edasi arutleda nagu teoreemi 5.6 implikatsioonide (i)⇒(ii) ja (i)⇒(iii) tõestuses.

□

Ülesanne 4.2. Tõestada, et ruumi $\mathbb{R}^n$ m-hüljatava alamhulga nihe ja kordne on m-hüljatavad hulgad, s.t., kui $E \in \mathcal{N}(m)$, $z \in \mathbb{R}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$, siis ka $E + z, rE \in \mathcal{N}(m)$.

NÄPUNÄIDE. Kasutada fakti, et $E \in \mathcal{N}(m)$ parajasti siis, kui $\lambda(E) = 0$, kus λ on välismõõt märkusest 4.2. (See fakt järeldub ülesandest I.4.4, (b), koos märkuses 4.2 põhjendatud võrdusega $m^* = \lambda$.)

Teoreem 4.2. (a) *Olgu $E \in \mathcal{L}^n$ ja $z \in \mathbb{R}^n$. Siis $E+z \in \mathcal{L}^n$, kusjuures $m(E+z) = m(E)$.*

(b) *Olgu $E \in \mathcal{L}^n$ ja $r \in \mathbb{R}$. Siis $rE \in \mathcal{L}^n$, kusjuures $m(rE) = |r|^n \, m(E)$.*

(c) *Olgu funktsioon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Siis ka funktsioon $f(\,\cdot + z)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on Lebesgue'i mõttes mõõtuv. Seejuures, kui $f \geqslant 0$ või $f \in L_1(m)$, siis ka vastavalt $f(\,\cdot + z) \geqslant 0$ või $f(\,\cdot + z) \in L_1(m)$, kusjuures*

$$\int f(x+z)\, dm(x) = \int f(x)\, dm(x).$$

TÕESTUS.

Ülesanne 4.3. Tõestada teoreem 4.2.

NÄPUNÄIDE. (a) ja (b). Sisalduvuste $E + z \in \mathcal{L}^n$ ja $rE \in \mathcal{L}^n$ tõestamisel kasutada asjaolu, et $\mathcal{L}^n$ on Boreli σ-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ täield Lebesgue'i mõõdu m suhtes, ning fakte, et ruumis $\mathbb{R}^n$ Boreli hulga nihe ja kordne on Boreli hulgad ning m-hüljatava hulga nihe ja kordne on m-hüljatavad (vt. ülesandeid 1.5 ja 4.2).

Võrduste $m(E + z) = m(E)$ ja $m(rE) = |r|^n \, m(E)$ tõestamisel kasutada märkust 4.2.

□

Märkus 4.4. Teoreemi 4.2 väide (a) ütleb, et Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ on nihke suhtes invariantne. Paragrahvis VI.2 näitame, et Lebesgue'i mõõt ruumis $\mathbb{R}^n$ on ka pöörde suhtes invariantne.

Definitsioon 4.1. Olgu $g\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Hulka

$$\operatorname{supp} g \;:= \overline{\{x \in \mathbb{R}^n\colon\; g(x) \neq 0\}}$$

(s.t. hulga $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\; g(x) \neq 0\}$ sulundit ruumis $\mathbb{R}^n$) nimetatakse funktsiooni g *kandjaks*.

Järgnev teoreem on erijuht teoreemist II.3.10, kus $X = \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A} = \mathcal{L}^n$ ja $\mu = m$.

Teoreem 4.3. *Olgu* $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, m)$*. Siis iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub tõkestatud kandjaga pidev funktsioon* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *selliselt, et*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\,dm < \varepsilon.$$

Selle punkti ülejäänud osa pühendub Lebesgue'i mõõdu võrdlusele Jordani mõõduga ruumis $\mathbb{R}^n$. Termini "kuup (ruumis $\mathbb{R}^n$)" all mõistame me edaspidi hulkasid tüüpi

$$\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j] := [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n],$$

kus $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $a_j < b_j$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $b_1 - a_1 = \ldots = b_n - a_n$.

Iga $k \in \mathbb{Z}$ korral tähistame

$$\mathcal{Q}_k = \left\{\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]\colon\ 2^k a_j, 2^k b_j \in \mathbb{Z},\ b_j - a_j = \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Kogumi $\mathcal{Q}_k$ hulki nimetatakse *diaadilisteks kuupideks* (servapikkusega $\frac{1}{2^k}$). Märgime, et

(1) kogumi $\mathcal{Q}_k$ mistahes kahe kuubi sisemused on lõikumatud;

(2) kogumi $\mathcal{Q}_{k+1}$ kuubid saadakse kogumi $\mathcal{Q}_k$ kuupide servade poolitamise teel.

Olgu $E \subset \mathbb{R}^n$. Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\underline{A}_k(E) = \bigcup_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_k\\ Q\subset E}} Q \qquad \text{ja} \qquad \overline{A}_k(E) = \bigcup_{\substack{Q\in\mathcal{Q}_k\\ Q\cap E\neq\emptyset}} Q.$$

Siis

$$m\left(\underline{A}_k(E)\right) = \frac{1}{2^{kn}} \times \text{"kuupide arv } \underline{A}_k(E)\text{-s"};$$
$$m\left(\overline{A}_k(E)\right) = \frac{1}{2^{kn}} \times \text{"kuupide arv } \overline{A}_k(E)\text{-s"}.$$

Kuna $\underline{A}_1(E) \subset \underline{A}_2(E) \subset \underline{A}_3(E) \subset \ldots$ ja $\overline{A}_1(E) \supset \overline{A}_2(E) \supset \overline{A}_3(E) \supset \ldots$, siis eksisteerivad piirväärtused

$$\underline{\kappa}(E) := \lim_{k\to\infty} m\left(\underline{A}_k(E)\right) \qquad \text{ja} \qquad \overline{\kappa}(E) := \lim_{k\to\infty} m\left(\overline{A}_k(E)\right),$$

mida nimetatakse vastavalt hulga E *Jordani sisemõõduks* ja *Jordani välismõõduks.* Kui $\underline{\kappa}(E) = \overline{\kappa}(E) < \infty$, siis öeldakse, et hulk E on *Jordani mõttes mõõtuv;* tema Jordani sise- ja välismõõdu ühist väärtust nimetatakse sel juhul hulga E *Jordani mõõduks* ja tähistatakse sümboliga $\kappa(E)$.

Märkus 4.5. Kui hulk $E \subset \mathbb{R}^n$ on tõkestamata, siis $\overline{\kappa}(E) = \infty$.

Märkus 4.6. Jordani mõõdu defineerimisel (ruumi $\mathbb{R}^n$ tõkestatud alamhulkade jaoks) kasutatakse diaadiliste kuupide asemel tihti ka suvalisi (lõplikke) koordinaatristtahuksummasid või hulktahuksummasid. Mõiste sisu jääb seejuures samaks.

Tähistame

$$\underline{A}(E) := \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(E) \qquad \text{ja} \qquad \overline{A}(E) := \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{A}_k(E).$$

Siis

(1) $\underline{A}(E) \subset E \subset \overline{A}(E)$;

(2) $\underline{A}(E)$ ja $\overline{A}(E)$ on Boreli hulgad;

(3) $\underline{\kappa}(E) = m\left(\underline{A}(E)\right)$ ja $\overline{\kappa}(E) = m\left(\overline{A}(E)\right)$.

Niisiis, tõkestatud hulk $E \subset \mathbb{R}^n$ on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui

$$m\left(\overline{A}(E) \setminus \underline{A}(E)\right) = 0.$$

Siit järeldub, et kui E on Jordani mõttes mõõtuv, siis ta on ka Lebesgue'i mõttes mõõtuv, kusjuures $m(E) = \kappa(E)$.

Lause 4.4. *Olgu $U \subset \mathbb{R}^n$ lahtine hulk. Siis*

(a) *$U = \underline{A}(U)$;*

(b) *U on paarikaupa lõikumatute sisemustega kuupide loenduv ühend;*

(c) *$m(U) = \underline{\kappa}(U)$.*

TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $U \neq \mathbb{R}^n$.

(a). Olgu $x = (x_j)_{j=1}^n \in U$. Näitame, et leiduvad $k \in \mathbb{N}$ ja $Q \in \mathcal{Q}_k$ nii, et $x \in Q \subset U$. Kui mingi diaadilise kuubi $Q \in \mathcal{Q}_k$ ($k \in \mathbb{N}$) korral $x \in Q$, siis suvalise $y = (y_j)_{j=1}^n \in Q$ korral

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} \leqslant \sqrt{n\left(\frac{1}{2^k}\right)^2} = \frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

Hulga U lahtisuse tõttu $\delta := \inf\{d(x,z)\colon\ z \notin U\} > 0$. Niisiis, kui valida $k \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta$, ja $Q \in \mathcal{Q}_k$ nii, et $x \in Q$ (niisugune Q leidub alati), siis $Q \subset U$. Seega $x \in Q \subset \underline{A}_k(U) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} \underline{A}_i(U) = \underline{A}(U)$.

(b). Väite (a) põhjal

$$U = \underline{A}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(U) = \underline{A}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U) = \underline{A}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{\underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U)}.$$

Väite tõestuseks piisab nüüd vaid tähele panna, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral esitub sulund $\overline{\underline{A}_k(U) \setminus \underline{A}_{k-1}(U)}$ paarikaupa lõikumatute sisemustega kuupide ülimalt loenduva ühendina.

(c). Kuna väite (a) põhjal $U = \underline{A}(U) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underline{A}_k(U)$, kusjuures $\underline{A}_1(U) \subset \underline{A}_2(U) \subset \underline{A}_3(U) \subset \ldots$, siis

$$m(U) = \lim_{k\to\infty} m\big(\underline{A}_k(U)\big) = \underline{\kappa}(U).$$

□

Lause 4.5. *Olgu $F \subset \mathbb{R}^n$ kompaktne hulk. Siis $m(F) = \overline{\kappa}(F)$.*

Tõestus. Valime arvu $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\operatorname{int} Q_0 \supset F$, kus

$$Q_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\colon\ \max |x_j| \leqslant N\}.$$

Paneme tähele, et iga $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral

$$m(Q_0) = m\big(\overline{A}_k(F)\big) + m\big(\underline{A}_k(Q_0 \setminus F)\big)$$

(sest kui $Q_0 \supset Q \in \mathcal{Q}_k$, siis kas $Q \cap F = \emptyset$ või $Q \subset Q_0 \setminus F$). Protsessis $k \to \infty$ järeldub siit, et

$$m(Q_0) = \overline{\kappa}(F) + \underline{\kappa}(Q_0 \setminus F). \tag{4.1}$$

Kuna lause 4.4 põhjal

$$\underline{\kappa}(Q_0 \setminus F) = \underline{\kappa}\big((\operatorname{int} Q_0) \setminus F\big) = m\big((\operatorname{int} Q_0) \setminus F\big) = m(Q_0 \setminus F) = m(Q_0) - m(F),$$

siis järeldub võrdusest (4.1), et $m(F) = \overline{\kappa}(F)$. □

Laused 4.4 ja 4.5 võimaldavad meil piltlikult võrrelda mõõtuvust Jordani mõttes ja mõõtuvust Lebesgue'i mõttes. Tõkestatud hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ Jordani mõõdu arvutamisel lähendame me teda seest- ja väljastpoolt diaadiliste kuupide ühenditega; hulk E on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui need kaks lähendust ("seest" ja "väljast") annavad ühesuguse mõõdu. Tõkestatud hulga $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue'i mõõdu arvutamisel lähendame me teda seestpoolt kompaktsete hulkadega ja väljastpoolt lahtiste hulkadega; neid kompaktseid ja lahtisi hulki lähendame me omakorda vastavalt väljast- ja seestpoolt diaadiliste kuupidega. Hulk E on Lebesgue'i mõttes mõõtuv parajasti siis, kui need kaks kahesammulist ("seest-väljast" ja "väljast-seest") lähendust annavad ühesuguse mõõdu.

IV peatükk.
L_p-ruumid

§ 1. L_p-ruumi mõiste ja põhiomadused

Kõikjal selles paragrahvis on $\mathbb{K}$ üks korpustest $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$ ning $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ on mõõduga ruum. Funktsiooni $f\colon X \to \mathbb{K}$ mõõtuvuse ja integreeruvuse all mõistetakse tema μ-mõõtuvust ja μ-integreeruvust. "Peaaegu kõikjal" tähendab "μ-peaaegu kõikjal". Sümbol $\overline{\mu}$ tähistab mõõdu μ täieldit.

1.1. Ruumi L_p $(0 < p < \infty)$ mõiste

Olgu $0 < p < \infty$. Kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on mõõtuv funktsioon, siis tähistame

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

(rõhutame, et me ei välista siinkohal võimalust $\|f\|_p = \infty$). Defineerime

$$L_p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \Big\{f\colon X \to \mathbb{K} \mid f \text{ on mõõtuv funktsioon, } \|f\|_p < \infty\Big\}.$$

Kui $\mathfrak{A}$ ja μ või $(X, \mathfrak{A})$ või $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ roll on kontekstist selge, siis kirjutatakse $L_p(X, \mathfrak{A}, \mu)$ asemel ka lihtsalt vastavalt $L_p(X)$, $L_p(\mu)$ või L_p.

Kui $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, siis sümboliga $L_p(a, b)$ tähistatakse hulka $L_p\big((a, b), \mathcal{L}_{(a,b)}, m\big)$, kus $\mathcal{L}_{(a,b)}$ on vahemiku (a, b) Lebesgue'i mõttes mõõtuvate hulkade σ-algebra ja m on Lebesgue'i mõõt.

Kui $\Gamma \neq \emptyset$ on mingi hulk, siis me tähistame $\ell_p(\Gamma) = L_p(\Gamma, \mathcal{P}(\Gamma), c)$, kus c on loendamismõõt hulga Γ kõikide alamhulkade kogumil $\mathcal{P}(\Gamma)$. Me kirjutame $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$.

Ülesanne 1.1. Olgu $\Gamma \neq \emptyset$ mingi hulk ning olgu $1 \leqslant p < \infty$.

(a) Olgu $f \in \ell_p(\Gamma)$. Tõestada, et hulk $\{x \in \Gamma\colon f(x) \neq 0\}$ on ülimalt loenduv.

(b) Olgu $f\colon \Gamma \to \mathbb{K}$. Tõestada, et

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} |f(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \colon n \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_n \in \Gamma,\, x_j \neq x_i,\, i \neq j\right\}.$$

(c) Mistahes funktsioon $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ on tõlgendatav jadana $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, kus $\xi_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$. (Tegelikult jada $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ defineeritaksegi kui funktsioon, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, mille korral $\xi_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$.) Veenduda, et

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, dc\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{+}}.$$

Selles paragrahvis anname hulgale L_p vektorruumi ning juhtudel, kus $1 \leqslant p < \infty$, ka Banachi ruumide struktuuri.

Vajadus võrratuste järele, mis garanteeriksid, et L_p, kus $1 \leqslant p < \infty$, on vektorruum, ning, veelgi enam, normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p$ suhtes, annab meile hea võimaluse tutvuda *kumerate* funktsioonidega.

1.2. Hölderi ja Minkowski võrratused

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et arvud $p, q \in (1, \infty)$ on *kaaseksponendid,* kui $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teoreem 1.1 (Hölderi võrratus)**.** *Olgu arvud $p, q \in (1, \infty)$ kaaseksponendid ning olgu $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ mõõtuvad funktsioonid . Siis*

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leqslant \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{1.1}$$

Muuhulgas, kui $f \in L_p$ ja $g \in L_q$, siis $fg \in L_1$. Võrdus $\|fg\|_1 = \|f\|_p \, \|g\|_q$ kehtib parajasti siis, kui leidub konstant $\alpha \in \mathbb{K}$ nii, et $\alpha|f|^p = |g|^q$ p.k. või $\alpha|g|^q = |f|^p$ p.k.

TÕESTUS. □

Teoreem 1.2 (Minkowski võrratus)**.** *Olgu $1 \leqslant p < \infty$ ning olgu $f, g \in L_p$. Siis*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Võrdus $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ kehtib parajasti siis, kui leidub $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$, nii, et $\alpha f = g$ p.k. või $\alpha g = f$ p.k.

TÕESTUS. □

1.3. Ruumid L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ kui Banachi ruumid

Olgu $0 < p < \infty$.

On ilmne, et L_p on loomulike tehete suhtes vektorruum. Seejuures me loeme kaks hulka L_p kuuluvat funktsiooni ruumi L_p elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal.

Ülesanne 1.2. Veenduda, et L_p on funktsioonide liitmise suhtes kinnine, s.t. kui $f, g \in L_p$, siis ka $f + g \in L_p$.

Vahetult on kontrollitav, et $\|\cdot\|_p$ rahuldab normi samasuse ja homogeensuse aksioome.

Ülesanne 1.3. Veenduda selles.

Samas on lihtne veenduda, et kui $0 < p < 1$, siis üldjuhul pole $\|\cdot\|_p$ norm, sest ta ei rahulda kolmnurga võrratust.

Ülesanne 1.4. Olgu $0 < p < 1$. Tõestada, et üldjuhul $\|\cdot\|_p$ ei rahulda kolmnurga võrratust.

NÄPUNÄIDE. Tõestada, et kui leiduvad $A, B \in \mathfrak{A}$, $A \cap B = \emptyset$, $0 < \mu(A) < \infty$, $0 < \mu(B) < \infty$, siis leiduvad lihtsad mõõõtuvad funktsioonid $f = \alpha\,\chi_A$ ja $g = \beta\,\chi_B$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) nii, et $\|f + g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p$.

Kui $1 \leqslant p < \infty$, siis L_p on normeeritud ruum normi $\|\cdot\|_p$ suhtes. Kolmnurga võrratus normi $\|\cdot\|_p$ jaoks järeldub *Minkowski võrratusest.*

Ülesanne 1.5. Veenduda selles.

Märkus 1.1. Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on p.k. ruumis X määratud mõõtuv funktsioon, s.t. leidub selline μ-mõõtuv funktsioon $g\colon X \to \mathbb{K}$, mille korral $f = g$ p.k., siis defineeritakse $\|f\|_p = \|g\|_p$ (märgime, et see definitsioon ei sõltul funktsiooniga f p.k. võrdse (μ-mõõtuva) funktsiooni g valikust). Sageli on otstarbekas ruumide L_p, $1 \leqslant p < \infty$, defineerimisel haarata kaasa ka p.k. ruumis X määratud mõõtuvad funktsioonid, defineerides

$$L_p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \Big\{ f\colon X \to \mathbb{K} \mid f \text{ on p.k. määratud mõõtuv funktsioon, } \|f\|_p < \infty \Big\}.$$

Sellise tõlgenduse korral koosnevad hulgad $L_p(\mu)$ ja $L_p(\overline{\mu})$ ühtedest ja samadest funktsioonidest. Normeeritud ruumide $L_p(\mu)$ defineerimisel loetakse kaks (p.k. määratud) funktsiooni hulgast $L_p(\mu)$ ruumi $L_p(\mu)$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal. Rõhutame, et selles märkuses kirjeldatud moel (s.t. p.k. määratud funktsioone kaasates) defineeritud ruum $L_p(\mu)$ ja eespool kirjeldatud moel defineeritud ruum $L_p(\mu)$ on loomulikul viisil samastatavad.

Märkus 1.2. Ruumi L_p võib tõlgendada ka kui paarikaupa p.k. võrdsete (p.k. määratud) mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{K}$, $\int |f|^p < \infty$, ekvivalentsiklasside vektorruumi, kus tehted ekvivalentsiklassidega ja ekvivalentsiklassi norm defineeritakse esindajate kaudu: kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on p.k. määratud mõõtuvad funktsioonid, $\int |f|^p, \int |g|^p < \infty$, ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \text{ja} \quad \|[f]\| := \|f\|.$$

Lause 1.3. *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Siis L_p on Banachi ruum.*

TÕESTUS. □

On ilmne, et kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on lihtne mõõtuv funktsioon esitusega $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\chi_{E_j}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq 0$ ja hulgad $E_j \in \mathfrak{A}$, $j = 1, \ldots, n$, on paarikaupa lõikumatud, siis

$$f \in L_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad f \in L_p \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu(E_j) < \infty,\ j = 1, \ldots, n.$$

Lause 1.4. *Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Siis integreeruvate lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on kõikjal tihe ruumis L_p.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.6. Tõestada lause 1.8.

□

Lause 1.5. *Olgu X lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu μ Radoni mõõt ruumis X. Siis $C_c(X)$ on ruumis $L_p(\mu)$ kõikjal tihe (normi $\|\cdot\|_p$ suhtes).*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.7. Tõestada lause 1.9.

□

1.4. Ruum L_∞

Kui $f\colon X \to \mathbb{K}$ on (μ-)mõõtuv funktsioon, siis tähistatakse

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty :&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| := \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in X} |f(x)| \\ :&= \inf\{M \geqslant 0\colon\ |f(x)| \leqslant M \text{ p.k.}\} \\ &= \inf\Big\{M \geqslant 0\colon\ \mu\big(\{x\in X\colon\ |f(x)| > M\}\big) = 0\Big\},\end{aligned}$$

kus loetakse $\inf\emptyset = \infty$. Märgime, et $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ p.k., sest

$$\begin{aligned}\mu\big(\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty\}\big) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Big\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{j}\Big\}\right) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\overline{\mu}\left(\Big\{x\in X\colon\ |f(x)| > \|f\|_\infty + \tfrac{1}{j}\Big\}\right) = 0\end{aligned}$$

Märkus 1.3. Tähistus "ess sup" tuleneb ingliskeelsest terminist "essential supremum". Prantsuskeelne omadussõna "vrai" tähendab "tõeline".

Kui $\|f\|_\infty$, siis öeldakse, et f on *essentially tõkestatud funktsioon.*
Tähistame

$$L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu) := \Big\{f\colon\ X\to\mathbb{K} \mid f \text{ on } \mu\text{-mõõtuv funktsioon, } \|f\|_\infty < \infty\Big\}.$$

Kui $\mathfrak{A}$ ja μ või $(X,\mathfrak{A})$ või $(X,\mathfrak{A},\mu)$ roll on kontekstist selge, siis kirjutatakse $L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu)$ asemel ka lihtsalt vastavalt $L_\infty(X)$, $L_\infty(\mu)$ või L_∞.

Kui $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, siis sümboliga $L_\infty(a,b)$ tähistatakse hulka $L_\infty\big((a,b),\mathcal{L}_{(a,b)},m\big)$, kus $\mathcal{L}_{(a,b)}$ on vahemiku (a,b) Lebesgue'i mõttes mõõtuvate hulkade σ-algebra ja m on Lebesgue'i mõõt.

Kui $\Gamma\neq\emptyset$ on mingi hulk, siis me tähistame $\ell_\infty(\Gamma) = L_\infty(\Gamma,\mathcal{P}(\Gamma),c)$, kus c on loendamismõõt hulga Γ kõikide alamhulkade kogumil $\mathcal{P}(\Gamma)$. Me kirjutame $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$.

On ilmne, et ruum L_∞ on vektorruum loomulike tehete suhtes. Nagu ka ruumide L_p $(1\leqslant p<\infty)$ juhul, loeme me kaks hulka L_∞ kuuluvat funktsiooni ruumi L_∞ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal.

Märkus 1.4. Kui $f\colon\ X\to\mathbb{K}$ on p.k. ruumis X määaratud mõõtuv funktsioon, siis defineeritakse $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|f| := \|f\|_\infty := \|g\|_\infty$, kus $g\colon\ X\to\mathbb{K}$ on selline μ-mõõtuv funktsioon mille korral $f=g$ p.k. (märgime, et see definitsioon ei sõltu funktsiooniga f p.k. võrdse (μ-mõõtuva) funktsiooni g valikust). Kui $\|f\|_\infty<\infty$, siis öeldakse, et f on essentially tõkestatud. Nagu ka ruumide L_p, $1\leqslant p<\infty$, juhul, on ruumi L_∞ defineerimisel sageli otstarbekas haarata kaasa ka p.k. ruumis X määratud mõõtuvad funktsioonid, defineerides

$$L_\infty(X,\mathfrak{A},\mu) := \Big\{f\colon\ X\to\mathbb{K} \mid f \text{ on p.k. määratud mõõtuv funktsioon, } \|f\|_\infty < \infty\Big\}.$$

Sellise tõlgenduse korral koosnevad hulgad $L_\infty(\mu)$ ja $L_\infty(\overline{\mu})$ ühtedest ja samadest funktsioonidest. Normeeritud ruumide $L_\infty(\mu)$ defineerimisel loetakse kaks (p.k. määratud) essentially tõkestatud funktsiooni ruumi $L_\infty(\mu)$ elementidena võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal. Rõhutame, et selles märkuses kirjeldatud moel (s.t. p.k. määratud funktsioone kaasates) defineeritud ruum $L_\infty(\mu)$ ja eespool kirjeldatud moel defineeritud ruum $L_\infty(\mu)$ on loomulikul viisil samastatavad.

Märkus 1.5. Ruumi L_∞ võib tõlgendada ka kui paarikaupa p.k. võrdsete (p.k. määratud) essentially tõkestatud mõõtuvate funktsioonide $f\colon X \to \mathbb{K}$ ekvivalentsiklasside vektorruumi, kus tehted ekvivalentsiklassidega ja ekvivalentsiklassi norm defineeritakse esindajate kaudu: kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on (p.k. määratud) essentially tõkestatud mõõtuvad funktsioonid ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis

$$[f] + [g] := [f + g], \quad \alpha[f] := [\alpha f] \quad \text{ja} \quad \|[f]\| := \|f\|.$$

Ruumi L_∞ olulisemad omadused võtab kokku

Teoreem 1.6. (a) ("Hölderi võrratus") *Kui $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ on (p.k. määratud) mõõtuvad funktsioonid, siis*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_\infty.$$

Kui $f \in L_1$ ja $g \in L_\infty$, siis $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$ parajasti siis, kui $|g(x)| = \|g\|_\infty$ p.k. hulgas $\{x \in X\colon\ f(x) \neq 0\}$.

(b) *$(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on normeeritud ruum.*

(c) *Kui $f, f_j \in L_\infty$, $j \in \mathbb{N}$, siis $\|f_j - f\|_\infty \to 0$ parajasti siis, kui leidub hulk $A \in \mathfrak{A}$ nii, et $\mu(A^c) = 0$ ja $f_j \to f$ ühtlaselt hulgas A.*

(d) *$(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachi ruum.*

(e) *Lihtsate mõõtuvate funktsioonide alamruum on ruumis L_∞ kõikjal tihe.*

TÕESTUS.

Ülesanne 1.8. Tõestada teoreem 1.10.

□