1. Topoloogilise ruumi mõiste

1. **Topoloogia ja topoloogiline ruum.** Olgu X mingi hulk.

Def 1.1. Hulga X teatav alamhulkade süsteem τ on *topoloogia* ehk *lahtiste hulkade süsteem* (hulgal X), kui

(1) lahtiste hulkade mis tahes ühend on lahtine hulk;
(2) lahtiste hulkade lõplik ühisosa on lahtine hulk;
(3) $\varnothing$ ja X on lahtised hulgad.

Tingimusi (1)–(3) nimetatakse *topoloogia aksioomideks*. Hulka X koos topoloogiaga τ (s.t. paari (X, τ)) nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks*. Kogumisse τ kuuluvaid hulki nimetatakse topoloogilise ruumi (X, τ) *lahtisteks hulkadeks* või hulga X τ-lahtisteks alamhulkadeks.

Ülesanne 1.1. Olgu $X = \{a, b, c, d\}$ neljaelemendiline hulk. Määrata iga järgneva kogumi puhul, kas tegu on topoloogiaga:

(1) $\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$;
(2) $\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}$;
(3) $\varnothing, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$;
(4) $\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$.

Kas hulga X topoloogia võib koosneda täpselt ühest, kahest, kolmest või neljast alamhulgast?

Ülesanne 1.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A \subset X$. Eeldame, et iga $x \in A$ korral leidub $U \in \tau$ nii, et $x \in U \subset A$. Tõestada, et $A \in \tau$.

Ülesanne 1.3. Olgu X reaalarvude kiir $[0, \infty)$. Koosnegu τ tühihulgast, hulgast X ja kõikidest vahemikest kujul (a, ∞), kus $a \geq 0$. Tõestada, et τ on topoloogia hulgal X.

Ülesanne 1.4. Olgu $n = 1, 2, \ldots$ korral $U_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Tõestada, et $\tau = \{\varnothing, U_1, U_2, \ldots\}$ on topoloogia kõigi naturaalarvude hulgal $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Ülesanne 1.5. Olgu X mingi hulk. Kas

$$\{U \subset X \colon U = \varnothing \text{ või } U = X \text{ või } X \setminus U \text{ on lõpmatu}\}$$

on topoloogia hulgal X?

2. **Topoloogiliste ruumide näiteid.** Olgu X mingi hulk.

Näide 2.1. Hulga X kõikide alamhulkade hulk on topoloogia hulgal X. Seda topoloogiat nimetatakse *diskreetseks topoloogiaks* hulgal X ja vastavat topoloogilist ruumi nimetatakse *diskreetseks topoloogiliseks ruumiks*. Paneme tähele, et topoloogia on diskreetne parajasti siis, kui kõik üheelemendilised alamhulgad on lahtised.

Näide 2.2. Hulgal X moodustab topoloogia ka kogum kuhu kuuluvad vaid hulgad $\varnothing$ ja X. Seda topoloogiat nimetatakse *triviaalseks* ehk *antidiskreetseks topoloogiaks* hulgal X ja vastavat topoloogist ruumi nimetatakse *triviaalseks* ehk *antidiskreetseks topoloogiliseks ruumiks*.

Näide 2.3. Hulga X alamhulkade kogum, mis koosneb tühjast hulgast ja kõigi lõplike alamhulkade täiendhulkadest, on hulga X topoloogia. Seda topoloogiat nimetatakse *kofiniitseks topoloogiaks* hulgal X. Paneme tähele, et lõplikul hulgal on kofiniitne topoloogia täpselt diskreetne topoloogia. (Kofiniitset topoloogiat hulgal $\mathbb{R}$ nimetatakse ka *Zariski topoloogiaks*).

Näide 2.4. Kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on topoloogiline ruum, kui temas lahtisteks hulkadeks nimetatada tühihulk, kõikvõimalikud vahemikud kujul (a, b), kus $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ ja selliste vahemike kõikvõimalikud ühendid. Seda topoloogiat nimetatakse reaalarvude hulga tavaliseks või loomulikuks topoloogiaks. Just seda topoloogiat peetakse silmas, kui räägitakse hulgast $\mathbb{R}$ kui topoloogilisest ruumist ja ei täpsustata vaadeldavat topoloogiat.

Sama topoloogia annab kogum

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R} \colon \forall x \in U \ \exists r > 0 \ (x - r, x + r) \subset U\}.$$

Näide 2.5. Vaatleme nüüd ühte nn. poollõikude topoloogiat hulgal $\mathbb{R}$. Lahtisteks hulkadeks loeme parajasti $\mathbb{R}$ sellised alamhulgad U, mille korral iga $x \in U$ jaoks leidub $r > 0$ nii, et $[x, x + r) \subset U$. Seda topoloogiat nimetatakse täpsemalt alam-piiri topoloogiaks.

Lahtisteks hulkadeks on seega parajasti tühihulk, kõikvõimalikud poollõigud kujul $[a, b)$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ ja selliste poollõikude kõikvõimalikud ühendid.

Ülem-piiri topoloogia definitsioon on sarnane, vaid poollõigud $[x, x+r)$ tuleb asendada poollõikudega $(x - r, x]$.

Näide 2.6. Vaatleme hulka $X = \{0, 1\}$. Paneme tähele $\{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ on topoloogia hulgal X. Seda topoloogiat nimetatakse Sierpinski topoloogiaks.

Ülesanne 2.1. Kontrollida topoloogia aksioomide kehtivust käesolevas osas toodud topoloogiate puhul.

3. **Topoloogiate võrdlemine.** Olgu X mingi hulk. Hulga X topoloogia on alamhulkade kogum, seega ise alamhulk kõigi alamhulkade hulgas $\mathcal{P}(X)$. Seetõttu võime hulga X topoloogiaid τ_1 ja τ_2 (kui $\mathcal{P}(X)$ alamhulki) uurida sisalduvuse suhtes.

Def 3.1. Olgu X hulk ning τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X. Kui $\tau_1 \subset \tau_2$, siis öeldakse, et topoloogia τ_1 on *nõrgem* ehk *väiksem* kui topoloogia

τ_2; sel juhul öeldakse ka, et topoloogia τ_2 on *tugevam* ehk *suurem* kui topoloogia τ_1.[1]

Ilmselge on, et suvalisel hulgal on diskreetne topoloogia tugevam kui ükski teine topoloogia ning triviaalne topoloogia nõrgem kui ükski teine topoloogia.

Seos «on nõrgem kui» määrab vaadeldava hulga topoloogiate seas osalise järjestuse. Selline järjestus ei tarvitse olla lineaarne ehk suvalised kaks topoloogiat (samal hulgal) ei tarvitse olla sisalduvuse suhtes võrreldavad. Näiteks hulga $\mathbb{R}$ poollõikude topoloogiad pole võrreldavad.

Kui τ_1 ja τ_2 on topoloogiad hulgal X, siis $\tau_1 \cup \tau_2$ ei tarvitse olla topoloogia hulgal X (leida vastav näide). Kindlasti on $\tau_1 \cap \tau_2$ topoloogia hulgal X. (Viimast ühendit ja ühisosa mõistetakse kui $\mathcal{P}(X)$ alamhulkade ühendit ja ühisosa.)

Teoreem 3.1. Olgu X hulk ja olgu T hulgal X määratud topoloogiate mingi kogum. Tähistame

$$\tau_T = \bigcap_{\tau \in T} \tau.$$

(Kogum τ_T koosneb parajasti nendest X alamhulkadest, mis esinevad kõigis vaadeldavates topoloogiates.) Kogum τ_T on topoloogia hulgal X, mis on nõrgem mis tahes topoloogiast kogumis T. Kui mingi topoloogia $\tilde{\tau}$ on nõrgem kogumi T igast topoloogiast, siis topoloogia τ_T on tugevam kui $\tilde{\tau}$.

Tõestus. Vahetu kontroll. □

Järeldus 3.2. Olgu X hulk ja σ tema alamhulkade mingi kogum. Leidub vähim topoloogia, mis sisaldab antud kogumit σ.

Tõestus. Olgu T hulga X kõigi selliste topoloogiate kogum, mis sisaldavad kogumit σ. Märgime, et T sisaldab vähemalt diskreetse topoloogia ning pole seetõttu tühi. Rakendame viimast teoreemi kogumile T. Topoloogia τ_T on vähim topoloogia, mis sisaldab kogumit σ. □

Märkus. 1) Vähimat topoloogiat, mis sisaldab vaadeldavat alamhulkade kogumit σ, nimetatakse *σ poolt genereeritud topoloogiaks.*

2) Kuigi hulgal X määratud topoloogiate τ_1 ja τ_2 puhul ei tarvitse $\tau_1 \cup \tau_2$ olla topoloogia, siis kindlasti leidub vähim topoloogia, mis seda ühendit sisaldab.[2]

[1]Tugevama topoloogia kohta öeldakse mõnikord ka peenem topoloogia (ingl. k. *finer topology*) ja nõrgema topoloogia kohta öeldakse ka jämedam topoloogia (ingl. k. *coarser topology*).

[2]Fikseeritud hulga kõigi topoloogiate kogum on seega võre, isegi täielik võre.

Ülesanne 3.1. Võrrelda omavahel hulga $\mathbb{R}$ tavalist topoloogiat ja kofiniitset topoloogiat?

Ülesanne 3.2. Võrrelda omavahel hulga $\mathbb{R}$ tavalist topoloogiat ja alam-piiri topoloogiat. Leida hulga $\mathbb{R}$ ülem-piiri ja alam-piiri topoloogiate ühisosa. Kas ülem-piiri ja alam-piiri topoloogiate ühend on topoloogia? On teada, et vähim topoloogia, mis sisaldab nende kahe topoloogia ühendi, on diskreetne topoloogia.

4. **Meetriline ruum. Metriseeruv ruum.** Olgu X hulk.

Def 4.1. Kujutust $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *meetrikaks* ehk *kauguseks* hulgal X, kui on täidetud järgmised tingimused (nn. *meetrika* ehk *Frechet' aksioomid*): iga $x, y, z \in X$ korral

(1) $d(x,y) \geq 0$ (kauguse mittenegatiivsus);
(2) $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (samasuse aksioom);
(3) $d(x,y) = d(y,x)$ (sümmeetria aksioom);
(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (kolmnurga võrratus).

Hulka X koos temal määratud meetrikaga d (s.t. paari (X,d)) nimetatakse *meetriliseks ruumiks*.

Märkus. 1) Pole raske nähe, et kauguse mittenegatiivsus järeldub ülejäänud aksioomidest.

2) Kui meetrika definitsioonis samasuse aksioom asendada nõrgema tingimusega $d(x,x) = 0$ (mistõttu erijuhul võib $d(x,y) = 0$ esineda ka $x \neq y$ puhul), siis vastavat funktsiooni d nimetatakse *semimeetrikaks*. Iga meetrika on muidugi semimeetrika. Hulka koos temal määratud semimeetrikaga nimetatakse *semimeetriliseks ruumiks*.

Näide 4.1. Kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on meetriline ruum kauguse $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, suhtes.

Näide 4.2. Kõigi tõkestatud arvjadade hulk X on meetriline ruum kauguse $d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X$, suhtes.

Näide 4.3. Olgu $[a,b]$ reaalarvude lõik, $a < b$. Olgu X kõigi pidevate funktsioonide $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hulk. See hulk koos meetrikaga $d(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$, $f, g \in X$, on meetriline ruum, mida tähistatakse sümboliga $C[a,b]$.

Näide 4.4. Olgu $[a,b]$ reaalarvude lõik, $a < b$. Olgu X kõigi pidevate funktsioonide $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hulk. Fikseerime vabalt $t_0 \in [a,b]$. Kujutus $d(f,g) = |f(t_0) - g(t_0)|$, $f, g \in X$, on semimeetrika hulgal X.

Näide 4.5. Olgu $[a,b]$ reaalarvude lõik, $a < b$. Olgu X kõigi Lebesgue'i mõttes integreeruvate funktsioonide $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hulk (kui pole teadlik Lebesgue'i mõttes integreeruvusest, siis võib siin vaadelda

Riemanni mõttes integreeruvust). Elementide võrdus hulgas X olgu defineeritud nagu tavaline funktsioonide võrdus, s.t. punktiviisi. Kujutus $d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\,dt$, $f,g \in X$, on semimeetrika.

Def 4.2. Olgu (X,d) meetriline ruum. Kui $x \in X$ ja $r > 0$, siis *lahtiseks keraks* (keskpunktiga x ja raadiusega r) nimetatakse hulka $B(x,r) = \{y \in X \colon d(x,y) < r\}$.

Teoreem 4.1. Olgu (X,d) meetriline ruum. Olgu τ_d parajasti selliste alamhulkade $U \subset X$ kogum, mille iga elemendi $x \in U$ korral leidub $r > 0$ nii, et $B(x,r) \subset U$. Kogum τ_d on topoloogia hulgal X.

Tõestus. Ilmselt $\varnothing$ ja X kuuluvad kogumisse τ_d.

Veendume, et τ_d sisaldab oma elementide kogumi suvalise ühendi. Olgu $U_\alpha \in \tau_d$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Näitame, et $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \tau_d$. Võime edasises eeldada, et $\mathcal{A} \neq \varnothing$. Olgu $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Järelikult leidub $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et $x \in U_{\alpha_0}$. Kuna $U_{\alpha_0} \in \tau_d$, siis leidub $r > 0$ nii, et $B(x,r) \subset U_{\alpha_0}$. Kuna $U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, siis kokkuvõttes mingi $r > 0$ korral $B(x,r) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, mida oligi tarvis näidata.

ISE KONTROLLIDA, et τ_d sisaldab oma hulkade suvalise lõpliku kogumi ühisosa. $\square$

Märkus. 1) Topoloogiat τ_d nimetatakse vaadeldava meetrilise ruumi *meetrika poolt indutseeritud topoloogiaks.* Kui meetrilist ruumi (X,d) käsitletakse vaikimisi topoloogilise ruumina, siis peetakse silmas topoloogilist ruumi (X,τ_d).

2) Analoogiliselt defineeritakse *semimeetrika poolt indutseeritud topoloogia.*

3) Oluline on teada, et erinevad meetrikad võivad indutseerida sama topoloogia. See on nii näiteks siis, kui üks vaadeldavatest meetrikatest on teise meetrika kordne. (Rohkem sellekohaseid näiteid anname ülesannete osas.)

Def 4.3. Olgu (X,τ) topoloogiline ruum. Öeldakse, et topoloogia τ on *metriseeruv*, kui leidub meetrika hulgal X, mille poolt indutseeritud topoloogia ja topoloogia τ on samad.

Näide 4.6. Sierpinski topoloogia on ehk lihtsaim näide topoloogiast, mis ei ole metriseeruv.

***Ülesanne 1.** Kui (X,d) on meetriline ruum, siis öeldakse, et hulga X elementide *jada* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *koondub* hulga X elemendiks x kauguse d suhtes, kui $\lim_n d(x,x_n) = 0$. (Elementi x nimetatakse sel juhul *jada* (x_n) *piirelemendiks.*)

Olgu $[a,b]$ reaalarvude lõik, $a < b$. Olgu X kõigi pidevate funktsioonide $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hulk. Tõestada, et ei ole olemas sellist kaugust hulgal

X, et jadade koonduvus tähendaks selle funktsioonide jada punktiviisi koonduvust (samaks piirelemendiks).

Selle fakti kohta öeldakse ka, et $C[a,b]$ elementide jada punktiviisi koonduvus ei ole indutseeritud meetrika poolt.

Ülesanne 4.1. Tõestada, et meetrilises ruumis on lahtine kera lahtine hulk.

Ülesanne 4.2. Olgu X mittetühi hulk. Tõestada, et $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$,

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$$

on meetrika hulgal X. Vaadeldud meetrikat nimetatakse *diskreetseks meetrikaks* hulgal X. Millise topoloogia selline meetrika indutseerib?

Ülesanne 4.3. Olgu (X,d_X) ja (Y,d_Y) meetrilised ruumid. Tõestada, et hulgal $X\times Y$ võime meetrika defineerida ükskõik millisel järgmisel viisil: $(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in X\times Y$ korral

(1) $d\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big)=\big[[d_X(x,\tilde{x})]^2+[d_Y(y,\tilde{y})]^2\big]^{1/2}$;
(2) $d\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big)=d_X(x,\tilde{x})+d_Y(y,\tilde{y})$;
(3) $d\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big)=\max\{d_X(x,\tilde{x}),d_Y(y,\tilde{y})\}$.

Vaadeldes erijuhtu $X=Y=\mathbb{R}$ joonistada iga ülalvaadeldud kauguse suhtes kera keskpunktiga $(0,0)$ ja raadiusega 1.

(On teada, et siin loetletud meetrikad indutseerivad sama topoloogia.)

Ülesanne 4.4. Tõestada, et $d\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $d(m,n)=\left|\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right|$, on kaugus kõigi naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$. Leida saadud meetrilises ruumis kerad $B(1,1)$, $B(2,1/2)$, $B(3,1/3)$.

Ülesanne 4.5. Ilmselt on kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ meetriline ruum kauguse $d(m,n)=|m-n|$, $m,n\in\mathbb{N}$, suhtes. Tõestada, et selles ülesandes vaadeldud n.ö. loomulik meetrika, eelmises ülesandes vaadeldud meetrika ja diskreetne meetrika indutseerivad sama topoloogia hulgal $\mathbb{N}$.

5. **Kinnised hulgad.**

Def 5.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. τ-lahtiste hulkade täiendhulki nimetatakse *kinnisteks hulkadeks*, täpsemalt τ-kinnisteks hulkadeks.

Märkus. Märgime, et kui hulk ei ole kinnine, siis ei tarvitse see hulk olla lahtine ning vastupidi, kui hulk ei ole lahtine, siis ei tarvitse ta olla kinnine. Kinnisus ja lahtisus ei ole seega vastandlikud. Erijuhul võib hulk olla lahtine ja kinnine korraga. Selliseid hulki, mis on samaaegselt kinnised ja lahtised, nimetatakse *kinnis-lahtisteks hulkadeks*.

Lause 5.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Kui $\mathcal{F}$ tähistab kõigi τ-kinniste hulkade kogumit, siis

(1) $\mathcal{F}$ mis tahes lõpliku alamkogumi hulkade ühend on $\mathcal{F}$ element;
(2) $\mathcal{F}$ mis tahes alamkogumi hulkade ühisosa on $\mathcal{F}$ element;
(3) $\varnothing$ ja X on $\mathcal{F}$ elemendid.

Kui $\mathcal{F}$ on hulga X alamhulkade kogum, mis rahuldab ülaltoodud kolme tingimust, siis kõikide kogumisse $\mathcal{F}$ kuuluvate hulkade täiendhulkade kogum on topoloogia hulgal X. Selle topoloogia suhtes kinnisteks hulkadeks on parajasti kogumi $\mathcal{F}$ hulgad.

Tõestus. Ilmselt on selge, et $\varnothing$ ja X sisalduvad kogumis $\mathcal{F}$.

Olgu $F_1, \ldots, F_n$ kogumist $\mathcal{F}$. Hulk $\bigcup_{i=1}^n F_i$ kuulub kogumisse $\mathcal{F}$, sest de Morgani valemite põhjal on $X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n X \setminus F_i$ ning viimane hulk (kui lahtiste hulkade lõplik ühisosa) on lahtine.

Ülejäänud ISE! $\square$

Ülesanne 5.1. Olgu $X = \{a, b, c, d, e\}$ viieelemendiline hulk. Defineerime hulga X topoloogia

$$\tau = \big\{\varnothing, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\big\}.$$

Leida kõik X alamhulgad, mis on 1) kinnised, 2) kinnis-lahtised ja 3) need, mis ei ole kinnised ega lahtised.

Ülesanne 5.2. Näidata, et $\mathbb{R}$ alamhulk $\{0\} \cup \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on kinnine. (See on näide $\mathbb{R}$ kinnisest alamhulgast, mis on loenduv. Pole raske näha, et mitteloenduv Cantori hulk on $\mathbb{R}$ kinnine alamhulk.)

Ülesanne 5.3. Tõestada, et meetrilise ruumi mis tahes lõplik alamhulk on kinnine.

Ülesanne 5.4. Olgu (X, d) meetriline ruum. *Kinniseks keraks* (keskpunktiga $x \in X$ ja raadiusega $r > 0$) nimetatakse hulka $\overline{B}(x, r) = \{y \in X \colon d(x, y) \leq r$. Tõestada, et kinnine kera on kinnine hulk.

Ülesanne 5.5. Anda näide hulga $\mathbb{R}$ lahtistest alamhulkadest U_n, $n \in \mathbb{N}$, mille korral $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ ei ole lahtine. Leida näide hulga $\mathbb{R}$ kinnistest alamhulkadest F_n, $n \in \mathbb{N}$, mille korral $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ei ole kinnine.

Ülesanne 5.6. Tõestada, et kofiniitse topoloogia suhtes on ühepunktilised alamhulgad kinnised. Tõestada, et kui mingi topoloogia suhtes on kõik ühepunktilised alamhulgad kinnised, siis vaadeldav topoloogia on tugevam kui kofiniitne topoloogia.

F_σ- ja G_δ-hulgad*.

Def 5.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A \subset X$. Öeldakse, et A on *F_σ-hulk*, kui A on esitatav kinniste hulkade loenduva ühendina, s.t. $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, kus iga $F_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$ on kinnine. Öeldakse, et A on *G_δ-hulk*, kui A on esitatav lahtiste hulkade loenduva ühisosana, s.t. $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i$, kus iga $G_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$ on lahtine.

Pole raske näha (nt. de Morgani valemite abil), et F_σ-hulga täiendhulk on G_δ-hulk ning G_δ-hulga täiendhulk on F_σ-hulk.

Ülesanne 5.7. Tõestada, et F_σ-hulga A korral leiduvad kinnised hulgad $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$ nii, et $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$.

Ülesanne 5.8. Tõestada, et G_δ-hulga A korral leiduvad lahtised hulgad $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$ nii, et $A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$.

Ülesanne 5.9. Tõestada, et F_σ-hulkade loenduv ühend on F_σ-hulk. Tõestada, et G_δ-hulkade loenduv ühisosa on G_δ-hulk.

Ülesanne 5.10. Tõestada, et F_σ-hulga täiendhulk on G_δ-hulk. Tõestada, et G_δ-hulga täiendhulk on F_σ-hulk.

***Ülesanne 2.** 1) Tõestada, et ruumi $\mathbb{R}$ iga kinnine alamhulk on G_δ-hulk. (Siin võib $\mathbb{R}$ asendada suvalise meetrilise ruumiga.)

2) Tõestada, et kahe F_σ-hulga ühisosa on F_σ-hulk ja kahe G_δ-hulga ühend on G_δ-hulk.

6. **Topoloogia baas.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 6.1. Topoloogia τ baasiks nimetatakse sellist lahtiste hulkade kogumit $\mathfrak{B}$, et suvaline $U \in \tau$ on esitatav $\mathfrak{B}$ hulkade mingi ühendina.

Märkus. 1) Topoloogial võib olla erinevaid baase. Ilmselt on baasi $\mathfrak{B}$ korral baasiks ka suvaline lahtiste hulkade kogum, milles $\mathfrak{B}$ sisaldub, näiteks kogu vaadeldav topoloogia.

2) Alamhulkade kogum ei saa olla baasiks (vaadeldava hulga) erinevatele topoloogiatele.

Lause 6.1. Olgu $\mathfrak{B} \subset \tau$. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{B}$ on topoloogia τ baas;
(2) iga $U \in \tau$ ja $x \in U$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B \subset U$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Olgu $\mathfrak{B}$ topoloogia τ baas. Olgu $U \in \tau$. Baasi mõiste kohaselt on $U = \bigcup_{i \in I} B_i$, kus $B_i \in \mathfrak{B}$ ja I on sobiv indeksite hulk. Kui $x \in U$, siis mingi $i_0 \in I$ korral $x \in B_{i_0}$ ja otsitavaks hulgaks B sobib B_{i_0}.

(2) $\Rightarrow$ (1). Kui $U \in \tau$, siis $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, kus iga $B_x \in \mathfrak{B} \subset \tau$ rahuldab tingimust $x \in B_x \subset U$. $\square$

Järeldus 6.2. Hulga X alamhulkade kogum $\mathfrak{B}$ on topoloogia τ baas parajasti siis, kui

$$\tau = \{U \subset X \colon \forall x \in U \ \exists B \in \mathfrak{B} \quad x \in B \subset U\}.$$

Tõestus. Vahetu järeldus. $\square$

Näide 6.1. Meetrilise ruumi topoloogia baasi moodustavad kõikvõimalikud lahtised kerad; tegelikult piisab baasiks kõikidest sellistest keradest, mille raadius on $1/n$ mingi $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näide 6.2. $\mathbb{R}$ poollõikude topoloogia baasiks sobivad kõikvõimalikud vastavat tüüpi poollõigud; alam-piiri topoloogia puhul poollõigud kujul $[a, b)$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$, ja ülem-piiri topoloogia puhul poollõigud kujul $(a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$.

Suvaline alamhulkade kogum ei tarvitse olla baasiks ühelegi topoloogiale.

Lause 6.3. Olgu X mingi hulk ja $\mathfrak{B}$ hulga X alamhulkade selline kogum, et

(0) iga $x \in X$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B$.

Samaväärsed on:

(1) hulgal X leidub (üheselt) topoloogia, mille baasiks on $\mathfrak{B}$;

(2) mis tahes $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ korral $B_1 \cap B_2$ esitub $\mathfrak{B}$ hulkade mingi kogumi ühendina;

(3) mis tahes $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ja mis tahes $x \in B_1 \cap B_2$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Olgu $\mathfrak{B}$ baasiks topoloogiale τ. Olgu $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Kuna $B_1 \cap B_2 \in \tau$ ja $\mathfrak{B}$ on τ baas, siis $B_1 \cap B_2$ esitub $\mathfrak{B}$ hulkade mingi kogumi ühendina.

(2) $\Rightarrow$ (3). Olgu $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Olgu $x \in B_1 \cap B_2$. Eelduse kohaselt $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i \in I} V_i$, kus $V_i \in \mathfrak{B}$ ja I on sobiv indeksite hulk. Olgu $i_0 \in I$ selline, et $x \in V_{i_0}$. Ilmselt sobib V_{i_0} otsitavaks hulgaks B.

(3) $\Rightarrow$ (1). Defineerime

$$\tau = \{U \subset X \colon \forall x \in U \ \exists B \in \mathfrak{B} \ x \in B \subset U\}.$$

Kui τ on topoloogia, siis järelduse 6.2 põhjal on $\mathfrak{B}$ tema baas. Näitame, et τ on topoloogia. Ilmselt $\varnothing, X \in \tau$ ning τ sisaldab ka oma alamhulkade suvalise ühendi.

Piisab veel näidata, et $U_1, U_2 \in \tau$ korral $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Olgu $x \in U_1 \cap U_2$. Otsime hulka $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B \subset U_1 \cap U_2$. Kuna $x \in U_1$ ja $x \in U_2$, siis τ definitsiooni tõttu leiduvad $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B_1 \subset U_1$ ja $x \in B_2 \subset U_2$. Seega $x \in B_1 \cap B_2$. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$. □

Ülesanne 6.1. Tõestada, et hulga X alamhulkade süsteem ei saa olla baasiks hulga X erinevatele topoloogiatele.

Ülesanne 6.2. Milline on mittetühja hulga diskreetse topoloogia vähim baas?

Ülesanne 6.3. Tõestada, et hulga $\mathbb{R}$ poollõikude topoloogial (s.o. ülem- või alam-piiri topoloogial) ei leidu loenduvat baasi.

Ülesanne 6.4. Tõestada, et kui $\mathfrak{B}$ on hulga X topoloogia τ^* baas, siis

$$\tau^* = \bigcap_{\tau \text{ top. hulgal } X,\ \mathfrak{B} \subset \tau} \tau.$$

Topoloogia eelbaas*. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 6.2. Topoloogia τ *eelbaasiks* nimetatakse kogumit $\mathfrak{E} \subset \mathcal{P}(X)$, mille korral

$$\{B = \bigcap_{i=1}^{n} E_i \colon E_i \in \mathfrak{E},\ n \in \mathbb{N}\}$$

on topoloogia τ baas.

Topoloogia iga baas on ka sama topoloogia eelbaas.

Näide 6.3. Topoloogilise ruumi $\mathbb{R}$ eelbaasiks on nt.

$$\mathfrak{E} = \{(-\infty, a) \colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) \colon b \in \mathbb{R}\}.$$

***Ülesanne 3.** Tõestada, et $\mathfrak{E} \subset \mathcal{P}(X)$ on hulga X mingi topoloogia eelbaas parajasti siis, kui $X = \bigcup_{E \in \mathfrak{E}} E$.

7. **Punkti ümbrus. Punkti ümbruste baas.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 7.1. Olgu $x \in X$. Punkti x *ümbruseks* nimetatakse mis tahes hulka $G \subset X$, mille korral leidub $U \in \tau$ nii, et $x \in U \subset G$.

Märkus. 1) Leidub käsitlusi, kus punkti x ümbrus tähendab lahtist hulka, mis sisaldab punkti x.

2) Punkti x iga ümbrus sisaldaldab punkti x lahtise ümbruse.

Näide 7.1. Topoloogilise ruumi $\mathbb{R}$ punkti x ümbruseks on punkti x sisaldav suvaline vahemik. Kui $x \in (a, b)$, siis ka $[a, b]$ ja $[a, b] \cup \mathbb{N}$ on punkti x ümbrused.

Meetrilise ruumi (X, d) punkti x ümbruseks (loomuliku topoloogia suhtes) on nt. iga kera $B(x, r)$ $(r > 0)$.

Def 7.2. Olgu $x \in X$. Punkti x *ümbruste süsteemiks* $\mathfrak{N}_x$ nimetatakse kõigi punkti x sisaldavate ümbruste kogumit. Punkti x *ümbruste baasiks* ehk *fundamentaalsüsteemiks* nimetatakse kogumit $\mathfrak{B}_x \subset \mathfrak{N}_x$, kui iga $G \in \mathfrak{N}_x$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B \subset G$.

Näide 7.2. Topoloogilise ruumi $\mathbb{R}$ suvalise punkti x ümbruste baasi moodustavad kõik punkti x sisaldavad vahemikud. Ümbruste baasiks sobivad ka kõik sümmeetrilised vahemikud ümber punkti x või kõik vahemikud $(x - 1/n, x + 1/n)$, kus $\in \mathbb{N}$.

Meetrilise ruumi (X, d) punkti x ümbruste baasiks (loomuliku topoloogia τ_d suhtes) on nt. kõik kerad $B(x, 1/n)$, kus $n \in \mathbb{N}$.

Lause 7.1. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X. Iga $x \in X$ korral olgu $\mathfrak{B}^1_x$ punkti x ümbruste baas topoloogias τ_1 ja $\mathfrak{B}^2_x$ punkti x ümbruste baas topoloogias τ_2. Samaväärsed on

(1) $\tau_1 \subset \tau_2$;
(2) mis tahes $x \in X$ ja mis tahes $B^1_x \in \mathfrak{B}^1_x$ korral leidub $B^2_x \in \mathfrak{B}^2_x$ nii, et $B^2_x \subset B^1_x$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Eeldame, et $\tau_1 \subset \tau_2$. Olgu $x \in X$ ja $B^1_x \in \mathfrak{B}^1_x$. Punktil x leidub seega τ_1-lahtine ümbrus $U_x \subset B^1_x$. Kuna eelduse põhjal $U_x \in \tau_2$, siis U_x on punkti x ümbrus ka τ_2 suhtes. Ümbruste baasi definitsiooni põhjal leidub $B^2_x \in \mathfrak{B}^2_x$ nii, et $B^2_x \subset U_x$. Kokkuvõttes $B^2_x \subset B^1_x$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olgu $\varnothing \neq U \in \tau_1$. Iga $x \in U$ korral on U tema ümbrus. Ümbruste baasi mõiste kohaselt leidub $B^1_x \in \mathfrak{B}_1$ nii, et $B^1_x \subset U$. Eelduse kohaselt leidub $B^2_x \in \mathfrak{B}_2$ nii, et $B^2_x \subset B^1_x$. Iga ümbrus sisaldab lahtise ümbruse, seega leidub $V_x \in \tau_2$ nii, et $x \in V_x \subset B^2_x$. Ilmselt $U = \bigcup_{x \in U} V_x \in \tau_2$. □

Olgu hulgal X antud kaks meetrikat d_1 ja d_2. Olgu τ_1 ja τ_2 vastavad topoloogiad hulgal X. Eelmise lause rakendusena saame kriteeriumi nende topoloogiate võrdlemiseks: τ_1 on nõrgem kui τ_2 parajasti siis, kui iga $x \in X$ ja iga $r > 0$ korral leidub $s > 0$ nii, et $B_2(x,s) \subset B_1(x,r)$.

Tingimus

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in X \quad d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y) \tag{1}$$

on tugevam kui eespool saadud kriteerium. Näiteks hulga $\mathbb{N}$ tavaline meetrika $d_1(x,y) = |x-y|$ ja meetrika $d_2(x,y) = |1/x - 1/y|$ indutseerivad sama topoloogia, kuid tingimus (1) pole täidetud.

***Ülesanne 4.** Olgu X kõigi pidevate funktsioonide $[0,1] \to \mathbb{R}$ hulk. Vaatleme hulgal X kahte kaugust:

$$d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

ja

$$\tilde{d}(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$$

Olgu τ_d ja $\tau_{\tilde{d}}$ vastavad loomulikud topoloogiad. Tõestada, et $\tau_{\tilde{d}} \subset \tau_d$, kuid $\tau_{\tilde{d}} \neq \tau_d$.

Lause 7.2. Olgu $x \in X$. Punkti x ümbruste baasil $\mathfrak{B}_x$ on järgmised omadused:

(1) kui $B_x \in \mathfrak{B}_x$, siis $x \in B_x$;
(2) kui $B_x^1, B_x^2 \in \mathfrak{B}_x$, siis leidub $B_x^3 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B_x^3 \subset B_x^1 \cap B_x^2$;
(3) kui $B_x \in \mathfrak{B}_x$, siis leidub $B_x^1 \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B_x^1 \subset B_x$ ja iga $y \in B_x^1$ korral leidub $B_y \in \mathfrak{B}_y$ nii, et $B_y \subset B_x$.

Tõestus. Põhjendame siin vaid viimase omaduse. Olgu $B_x \in \mathfrak{B}_x$. Iga ümbrus sisaldab lahtise ümbruse, mistõttu leidub punkti x lahtine ümbrus $U \subset B_x$. Ümbruste baasi mõiste kohaselt leidub omakorda $B_x^1 \subset U$. Ilmselt on B_x ümbruseks mis tahes punktile $y \in U$ (seega ka mis tahes punktile $y \in B_x^1$). Ümbruste baasi mõiste lubab leida seega $B_y \in \mathfrak{B}_y$ nii, et $B_y \subset B_x$. □

Lause 7.3. Olgu hulga X iga elemendi x jaoks määratud mittetühi alamhulkade kogum $\mathfrak{B}_x$ nii, et oleksid täidetud eelmise lause tingimused (1)–(3). Alamhulkade kogum

$$\tau = \{U \subset X : \forall x \in U \ \exists B_x \in \mathfrak{B}_x \quad B_x \subset U\}$$

on topoloogia hulgal X, mille suhtes $\mathfrak{B}_x$ on punkti $x \in X$ ümbruste baas iga $x \in X$ korral.

Tõestus. Vt. järgmist ülesannet. □

[*]**Ülesanne 5.** Tõestada lause 7.3. Näpunäide. Miks on fikseeritud $x \in X$ korral $B_x \in \mathfrak{B}_x$ ümbrus? Näidata, et B_x on ümbrus, sest $U = \{y \in B_x \colon \exists B_y \subset B_x\}$ on lahtine ja sisaldab punkti x.

****

See (väiksemas kirjas) osa ei ole kursuse läbimiseks obligatoorne.

Lause 7.4. Olgu $x \in X$. Punkti x ümbruste süsteemil $\mathfrak{N}_x$ on järgmised omadused:

(1) kui $U \in \mathfrak{N}_x$, siis $x \in U$;
(2) kui $U, V \in \mathfrak{N}_x$, siis $U \cap V \in \mathfrak{N}_x$;
(3) kui $U \in \mathfrak{N}_x$ ja $U \subset V \subset X$, siis $V \in \mathfrak{N}_x$;
(4) kui $U \in \mathfrak{N}_x$, siis leidub $V \in \mathfrak{N}_x$ nii, et $V \subset U$ ja iga $y \in V$ korral $U \in \mathfrak{N}_y$.

alapunkti (4) võib sõnastada ka kujul:

(4′) kui $U \in \mathfrak{N}_x$, siis $\{y \in U \colon U \in \mathfrak{N}_y\} \in \mathfrak{N}_x$.

Lause 7.5. Olgu hulga X iga elemendi x jaoks määratud mittetühi alamhulkade kogum $\mathfrak{N}_x$ nii, et oleksid täidetud tingimused (1)–(4). Alamhulkade kogum

$$\tau = \{U \subset X \colon \forall x \in U \quad U \in \mathfrak{N}_x\}$$

on topoloogia hulgal X, mille suhtes $\mathfrak{N}_x$ on ümbruste süsteem iga $x \in X$ korral.

****

Ülesanne 7.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu G_1 ja G_2 punkti $x \in X$ ümbrused. Tõestada, et $G_1 \cap G_2$ on punkti x ümbrus. Kas punkti x ümbruste loenduv ühend on üldiselt punkti x ümbrus?

Ülesanne 7.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Tõestada, et topoloogia τ baasi $\mathfrak{B}$ korral on fikseeritud $x \in X$ jaoks $\{B \in \mathfrak{B} \colon x \in B\}$ punkti x ümbruste baas. Tõestada, et kui iga $x \in X$ korral on teada punkti x lahtistest hulkadest ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$, siis $\bigcup_{x \in X} \mathfrak{B}_x$ on topoloogia τ baas.

Ülesanne 7.3. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ tavalise topoloogiaga. Tõestada, et punkti $x \in \mathbb{R}$ ümbruste baasiks sobib $\mathfrak{B} = \{(x-1/n, x+1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$.

Ülesanne 7.4. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ alam-piiri topoloogiaga. Tõestada, et punkti $x \in \mathbb{R}$ ümbruste baasiks sobib $\mathfrak{B} = \{[x, x + 1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Milline on vastav punkti $x \in \mathbb{R}$ ümbruste baas ülem-piiri topoloogia suhtes?

Ülesanne 7.5. Tõestada eelmise ülesande abil, et ülem- ja alam-piiri topoloogia pole võrreldavad.

8. **Hulga sisemus ja sulund.** Olgu (X,τ) topoloogiline ruum.

Def 8.1. Olgu $A \subset X$. Hulga A *sisemuseks* nimetatakse kõigi hulga A lahtiste alamhulkade ühendit. Hulga A sisemust tähistatakse sümboliga $\operatorname{Int} A$ või A°.

Hulga A *sulundiks* nimetatakse kõigi hulka A sisaldavate kinniste hulkade ühisosa. Hulga A sulundit tähistatakse sümboliga $\operatorname{Cl} A$ või $\overline{A}$.

Hulga A sisemuse elemente nimetatakse hulga A *sisepunktideks*. Hulga $X \setminus A$ sisemuse punkte nimetatakse ka hulga A *välispunktideks*. Hulga A sulundi punkte nimetatakse hulga A *sulundipunktideks* ehk *puutepunktideks* (ingl. k. adherent point).

Märkus. 1) Alamhulga $A \subset X$ sisemus ja sulund leiduvad.

2) Sisemus $\operatorname{Int} A$ on suurim hulga A lahtine alamhulk. Sulund $\operatorname{Cl} A$ on väikseim hulka A sisaldav kinnine hulk.

Lause 8.1. Olgu $A \subset X$. Hulk A on lahtine parajasti siis, kui $A = \operatorname{Int} A$. Hulk A on kinnine parajasti siis, kui $A = \operatorname{Cl} A$.

Tõestus. Vahetu järeldus. □

Lause 8.2 (Sisemuse ja sulundi omadusi)**.** Olgu $A, B, A_i \subset X$ $(i \in I)$. Kehtivad järgmised omadused:

(1a)	$\operatorname{Int} \varnothing = \varnothing$; $\operatorname{Int} X = X$;	(1b)	$\operatorname{Cl} \varnothing = \varnothing$; $\operatorname{Cl} X = X$;
(2a)	$\operatorname{Int} A \subset A$;	(2b)	$A \subset \operatorname{Cl} A$;
(3a)	$\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$;	(3b)	$\operatorname{Cl}\operatorname{Cl} A = \operatorname{Cl} A$;
(4a)	$A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;	(4b)	$A \subset B \implies \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Cl} B$;
(5a)	$\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;	(5b)	$\operatorname{Cl}(A \cap B) \subset \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$;
(6a)	$\operatorname{Int}(A \cup B) \supset \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$;	(6b)	$\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$;
(7a)	$\operatorname{Int}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} \operatorname{Int} A_i$;	(7b)	$\operatorname{Cl}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} \operatorname{Cl} A_i$;
(8a)	$\operatorname{Int}(\bigcup_{i\in I} A_i) \supset \bigcup_{i\in I} \operatorname{Int} A_i$;	(8b)	$\operatorname{Cl}(\bigcup_{i\in I} A_i) \supset \bigcup_{i\in I} \operatorname{Cl} A_i$;

(9) $\operatorname{Cl} A = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$;
(10) $\operatorname{Int} A = X \setminus \operatorname{Cl}(X \setminus A)$;
(11) $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$;
(12) $\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int}\operatorname{Cl} A$.

Tõestus. Ülesanne. □

Lause 8.3 (Sisepunkti kriteerium ümbruste abil)**.** Olgu $x \in X$, $A \subset X$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Samaväärsed on:

(1) $x \in \operatorname{Int} A$;
(2) leidub punkti x (lahtine) ümbrus G_x nii, et $G_x \subset A$.
(3) leidub $B_x \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B_x \subset A$.

Tõestus. (1) ⇒ (2). Kui $x \in \operatorname{Int} A$, siis $\operatorname{Int} A$ on punkti x lahtine ümbrus, mis sisaldub hulgas A.

(2) ⇒ (1). Ümbrus G_x sisaldab punkti x lahtise ümbruse U_x. Seega $U_x \subset \operatorname{Int} A$. Muuhulgas $x \in \operatorname{Int} A$.

(2) ⇔ (3). Vahetult ümbruste baasi definitsioonist. □

Lause 8.4 (Sulundipunkti kriteerium ümbruste abil)**.** Olgu $x \in X$, $A \subset X$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Samaväärsed on:

(1) $x \in \operatorname{Cl} A$;
(2) mis tahes punkti x (lahtise) ümbruse G_x korral $G_x \cap A \neq \varnothing$;
(3) mis tahes $B_x \in \mathfrak{B}_x$ korral $B_x \cap A \neq \varnothing$.

Tõestus. (1) ⇒ (2). Olgu $x \in \operatorname{Cl} A$. Oletame vastuväiteliselt, et leidub punkti x ümbrus G_x nii, et $G_x \cap A = \varnothing$ ehk $G_x \subset X \setminus A$. Olgu $U_x \subset G_x$ punkti x lahtine ümbrus. Kuna $X \setminus U_x$ on kinnine ja sisaldab hulka A, siis $\operatorname{Cl} A \subset X \setminus U_x$, mis on aga vastuolu.

(2) ⇒ (1). Kui $x \notin \operatorname{Cl} A$, siis $G_x := X \setminus \operatorname{Cl} A$ on punkti x lahtine ümbrus, kuid $G_x \cap A = \varnothing$.

(2) ⇔ (3). Vahetult ümbruste baasi definitsioonist. □

***Ülesanne 6.** Olgu X hulk. Olgu $\operatorname{Cl}^*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ selline, et mis tahes $A, B \subset X$ korral

(1) $\operatorname{Cl}^* \varnothing = \varnothing$;
(2) $A \subset \operatorname{Cl}^* A$;
(3) $\operatorname{Cl}^*(A \cup B) = (\operatorname{Cl}^* A) \cup (\operatorname{Cl}^* B)$;
(4) $\operatorname{Cl}^*(\operatorname{Cl}^* A) = \operatorname{Cl}^* A$.

Tõestada, et $\tau = \{U \subset X\colon\ \operatorname{Cl}^*(X \setminus U) = X \setminus U\}$ on topoloogia hulgal X ja iga $A \subset X$ korral $\operatorname{Cl}_\tau A = \operatorname{Cl}^* A$.

Näpunäide: kui $A \subset B \subset X$, siis $\operatorname{Cl}^* A \subset \operatorname{Cl}^* B$ (ka see vajab põhjendamist).

***Ülesanne 7.** Olgu X mingi hulk. Olgu $\operatorname{Int}^*\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ selline, et mis tahes $A, B \subset X$ korral

(1) $\operatorname{Int}^* X = X$;
(2) $\operatorname{Int}^* A \subset A$;
(3) $\operatorname{Int}^*(A \cap B) = (\operatorname{Int}^* A) \cap (\operatorname{Int}^* B)$;
(4) $\operatorname{Int}^*(\operatorname{Int}^* A) = \operatorname{Int}^* A$.

Tõestada, et $\tau = \{\operatorname{Int}^*(A)\colon\ A \subset X\}$ on topoloogia hulgal X ja iga $A \subset X$ korral on $\operatorname{Int}_\tau A = \operatorname{Int}^* A$.

Ülesanne 8.1. Põhjendada sisemuse ja sulundi omadused (1)–(12).

Ülesanne 8.2. Tuua näide $\mathbb{R}$ alamhulkadest A ja B, mille korral $\operatorname{Cl}(A \cap B) \not\supset \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$.

Tuua näide $\mathbb{R}$ alamhulkadest C ja D, mille korral $\operatorname{Int}(C \cup D) \not\subset \operatorname{Int} C \cup \operatorname{Int} D$.

Ülesanne 8.3. Tuua näide $\mathbb{R}$ hulkadest A_i, $i \in \mathbb{N}$, et $\operatorname{Cl} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \neq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Cl} A_i$.

Tuua näide $\mathbb{R}$ hulkadest B_i, $i \in \mathbb{N}$, et $\operatorname{Int} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \neq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} B_i$.

Ülesanne 8.4. Olgu hulgal X antud kaks topoloogiat τ_1 ja τ_2, kusjuures τ_1 on nõrgem kui τ_2. Olgu $A \subset X$. Kas $\operatorname{Cl}_{\tau_1} A$ ja $\operatorname{Cl}_{\tau_2} A$ on võrreldavad? Kas $\operatorname{Int}_{\tau_1} A$ ja $\operatorname{Int}_{\tau_2} A$ on võrreldavad?

Ülesanne 8.5. Leida topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$ hulga $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ sulund.

Ülesanne 8.6. Tõestada, et topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$ on $\operatorname{Int} \mathbb{Q} = \varnothing$ ja $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Ülesanne 8.7. Tõestada, et topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$ on $\operatorname{Cl} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ ja $\operatorname{Cl}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Ülesanne 8.8. Olgu A mittetühi tõkestatud reaalarvude hulk. Tõestada, et topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$ on hulga $\operatorname{Cl} A$ suurim element $\sup A$.

Ülesanne 8.9. Olgu (X, d) meetriline ruum. Olgu $x \in X$ ja $A \subset X$. Punkti x kaugus hulgast A defineeritakse kui $d(x, A) := \inf\{d(x, a) \colon a \in A\}$. Tõestada, et $x \in \operatorname{Cl} A$ parajasti siis, kui $d(x, A) = 0$.

Ülesanne 8.10. Olgu (X, d) meetriline ruum, $x \in X$ ja $r > 0$. Kas $\operatorname{Cl} B(x, r) = \overline{B}(x, r) := \{y \in X \colon d(x, y) \leq r\}$?

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $A, B \subset X$. Öeldakse, et A on *tihe* hulgas B, kui $B \subset \operatorname{Cl} A$. Öeldakse, et A on kõikjal tihe, kui A on tihe hulgas X; sel juhul on $X = \operatorname{Cl} A$. Näiteks on $\mathbb{Q}$ kõikjal tihe topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$.

Ülesanne 8.11. Tõestada, et kui $A \subset H \subset X$ ja A on tihe hulgas B, siis ka H on tihe hulgas B.

Ülesanne 8.12. Tõestada, et kui A on kõikjal tihe, siis mis tahes lahtise alamhulga $U \subset X$ korral on $\operatorname{Cl}(A \cap U) = \operatorname{Cl} U$.

9. **Hulga raja.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 9.1. Olgu $A \subset X$. Hulga A *rajaks* nimetatakse hulka $\operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$. Hulga A raja tähistatakse sümboliga $\operatorname{Fr} A$ (pr. k. *frontier*) või ∂A. Hulga A raja punkte nimetatakse hulga A rajapunktideks.

Märkus. Paneme tähele, et $\operatorname{Fr} A = (X \setminus \operatorname{Int} A) \cap \operatorname{Cl} A$, seega on $\operatorname{Fr} A$ kinnine.

Lause 9.1 (Raja omadusi)**.** Olgu $A, B \subset X$. Kehtivad järgmised omadused:

(1)	$\operatorname{Fr} \varnothing = \varnothing$; $\operatorname{Fr} X = \varnothing$;	(2)	$\operatorname{Fr} \operatorname{Fr} A \subset \operatorname{Fr} A$;
(3)	$\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl}(X \setminus A) \cap \operatorname{Cl} A$;	(4)	$\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$;
(5)	$\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$;	(6)	$\operatorname{Cl} A = A \cup \operatorname{Fr} A$;
(7)	$\operatorname{Fr} \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Fr} A$;	(8)	$\operatorname{Fr} \operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Fr} A$;
(9)	$\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$;	(10)	$\operatorname{Fr}(A \cap B) \subset \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$.

Tõestus. Ülesanne. □

Lause 9.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A \subset X$. Alamhulk A on lahtine parajasti siis, kui $A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$. Alamhulk A on kinnine parajasti siis, kui $\operatorname{Fr} A \subset A$. Alamhulk A on kinnis-lahtine parajasti siis, kui $\operatorname{Fr} A = \varnothing$.

Tõestus. Rakendada lauset 8.1. □

Sulundipunkti kriteeriumi vahetu järeldusena saame rajapunkti kriteeriumi.

Lause 9.3 (Rajapunkti kriteerium ümbruste abil)**.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum, $x \in X$ ja $A \subset X$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Samaväärsed on:

(1) $x \in \operatorname{Fr} A$;
(2) mis tahes punkti x (lahtise) ümbruse G_x korral $G_x \cap A \neq \varnothing$ ja $G_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$;
(3) mis tahes $B_x \in \mathfrak{B}_x$ korral $B_x \cap A \neq \varnothing$ ja $B_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

***Ülesanne 8.** Tõestada, et lahtise või kinnise hulga A korral $\operatorname{Int} \operatorname{Fr} A = \varnothing$ ehk $\operatorname{Fr} \operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A$. Näidata, et viimane võrdus ei kehti suvalise $A \subset \mathbb{R}$ korral.

Märkus. Kuna raja on kinnine, siis suvalise $A \subset X$ korral $\operatorname{Fr} \operatorname{Fr} \operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} \operatorname{Fr} A$.

Ülesanne 9.1. Olgu (X, d) meetriline ruum, $x \in X$ ja $r > 0$. Olgu $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$. Kas $\operatorname{Fr} B(x, r) = S(x, r)$? Eeldusel, et d on diskreetne meetrika hulgal X, milles on vähemalt kaks elementi, leida $\operatorname{Fr} B(x, 1)$ ja $S(x, 1)$.

Ülesanne 9.2. Põhjendada raja omadused (1)–(10). Omaduste (7)–(10) puhul anda näide, kus vastupidine sisaldus ei kehti.

Ülesanne 9.3. Anda näide $\mathbb{R}$ alamhulgast

Ülesanne 9.4. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A \subset X$. Tõestada, et $X \setminus \operatorname{Fr} A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$;

Ülesanne 9.5. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A \subset X$. Tõestada, et $\operatorname{Int} \operatorname{Fr} A = \varnothing$ parajasti siis, kui $\operatorname{Fr} \operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A$.

Ülesanne 9.6. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ tavalise topoloogiaga. Leida järgmise hulga sulund, sisemus, raja: (a) $A = \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$; (b) $B = (0, 1] \cup \{2\}$; (c) $C = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}$; (d) $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 9.7. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $A, B \subset X$. Eeldame, et $A \cap \operatorname{Cl} B = \varnothing$ ja $\operatorname{Cl} A \cap B = \varnothing$ (sellist eeldust rahuldavate alamhulkade kohta öeldakse, et nad on topoloogilise ruumi eraldatud alamhulgad). Tõestada, et $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B$.

Ülesanne 9.8. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X, kusjuures $\tau_1 \subset \tau_2$. Kuidas on võrreldavad $A \subset X$ korral $\operatorname{Fr}_{\tau_1} A$ ja $\operatorname{Fr}_{\tau_2} A$?

10. **Tuletishulk.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $A \subset X$. Teame, et $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A$, kusjuures $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$. Järgnevas liigitame hulga sulundi punkte teisel moel kaheks ühisosata liigiks.

Def 10.1. Olgu $x \in X$ ja $A \subset X$. Öeldakse, et punkt x on hulga A *piirpunkt* ehk *kuhjumispunkt* (ingl. k. limit point, accumulation point), kui $x \in \operatorname{Cl}(A \setminus \{x\})$, s.t. punkti x iga ümbruse G_x korral leidub $y \in A \cap G_x$ nii, et $x \neq y$.

Alamhulga A kõikide piirpunktide hulka nimetatakse hulga A *tuletishulgaks* või *tuletatud hulgaks* (ingl. k. derived set) ja tähistatakse sümboliga A'.

Öeldakse, et punkt x on hulga A *isoleeritud punkt* (ingl. k. isolated point), kui $x \in A \setminus A'$, s.t. punktil x leidub ümbrus G_x nii, et $G_x \cap A = \{x\}$.

Märkus. Tuletishulk ei pruugi olla kinnine (vt. ülesandeid). Alamhulka A nimetatakse *perfektseks hulgaks*, kui $A = A'$.

Lause 10.1 (Tuletishulga omadusi)**.** Olgu $A, B \subset X$. Kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \varnothing' = \varnothing;\ X' \subset X; \\
(2) & A' \subset \operatorname{Cl} A; \\
(3) & \operatorname{Cl} A = A \cup A'; \\
(4) & A \subset B \implies A' \subset B'; \\
(5) & (A \cup B)' = A' \cup B'; \\
(6) & (A \cap B)' \subset A' \cap B'.
\end{array}$$

Tõestus. Ülesanne. □

Lause 10.2. Hulk A on kinnine parajasti siis, kui $A' \subset A$.

Tõestus. Lause 8.1 ja omaduse (3) vahetu järeldus. □

***Ülesanne 9.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Tõestada, et kui kõik hulga X ühepunktilised alamhulgad on kinnised, siis iga alamhulga $A \subset X$ korral (a) A' on kinnine; (b) $A' = (\operatorname{Cl} A)'$.

Ülesanne 10.1. Põhjendada tuletishulga omadused (1)–(6).

Ülesanne 10.2. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ tavalise topoloogiaga. Leida järgmise hulga tuletishulk ja isoleeritud punktid: (a) $A = \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$; (b) $B = (0, 1] \cup \{2\}$; (c) $C = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$; (d) $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 10.3. Vaatleme kaheelemendilist hulka $X = \{a, b\}$ triviaalse topoloogiaga. Leida alamhulga $\{a\}$ tuletishulk.

Ülesanne 10.4. Vaadelda kolmeelemendilist hulka $X = \{a, b, c\}$ topoloogiaga $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ Leida hulga $\{b\}$ tuletishulk.

Ülesanne 10.5. Olgu $X, d)$ meetriline ruum, $x \in X$ ja $A \subset X$. Tõestada, et $x \in A'$ korral sisaldab iga kera $B(x, r)$ lõpmata palju hulga A elemente.

Ülesanne 10.6. Olgu (X, d) meetriline ruum. Öeldakse, et X elementide jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub elemendiks x, kui $d(x, x_n) \to 0$.

Olgu $A \subset X$ ja $x \in X$. Tõestada, et $x \in A'$ parajasti siis, kui leidub hulga $A \setminus \{x\}$ elementide jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, mis koondub elemendiks x.

Ülesanne 10.7. Tõestada, et kui A ja B on topoloogilise ruumi alamhulgad ja $B' \subset A \subset B$, siis A on kinnine. Tõestada, et kinnise hulga tuletishulk on kinnine.

Ülesanne 10.8. Tõestada, et topoloogilise ruumi piirpunktideta alamhulk on kinnine.

Ülesanne 10.9. Tõestada, et kui x on A piirpunkt, siis on x ka $A \setminus \{x\}$ piirpunkt.

Ülesanne 10.10. Konstrueerida reaalarvude hulk, millel on täpselt kolm piirpunkti.

Ülesanne 10.11. Vaatleme reaalarvude poollõiku $A = [0, 1)$. Kas $x = 1$ on hulga A piirpunkt topoloogilises ruumis $\mathbb{R}$ a) triviaalse topoloogia suhtes, b) diskreetse topoloogia suhtes, c) tavalise topoloogia suhtes, d) kofiniitse topoloogia suhtes. Milliste vaadeldud topoloogiate suhtes on $y = -1$ hulga A piirpunkt? Kirjeldada vaadeldud topoloogiate suhtes A'.

Ülesanne 10.12. Anda näide topoloogilisest ruumist (X, τ), alamhulgast $A \subset X$ ja punktist $x \in X$, mille korral a) $x \in A'$ ja $x \in A$; b) $x \in A'$ ja $x \notin A$; c) x on A isoleeritud punkt.

Ülesanne 10.13. Olgu x hulga A piirpunkt. Kas x on A piirpunkt esialgsest topoloogiast a) suurema topoloogia suhtes; b) väiksema topoloogia suhtes?

2. Topoloogilised konstruktsioonid

1. **Alamruum.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $Y \subset X$.

Def 1.1. Hulga Y topoloogiat

$$\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

nimetatakse *alamruumi topoloogiaks* (hulgal Y).

Hulka Y koos alamruumi topoloogiaga $\tau|_Y$ nimetatakse topoloogilise ruumi (X, τ) *alamruumiks.*

Märkus. Kontrollida, et alamruumi topoloogia on tõepoolest topoloogia.

Topoloogilise ruumi alamruumi alamhulga puhul tuleks segaduse vältimiseks täpsustada, millise topoloogia (kas lähteruumi või alamruumi topoloogia) suhtes vaadeldakse selle alamhulga lahtisust, kinnisust, sulundit, sisemust, raja, jne.

Lause 1.1. Olgu $A \subset Y$. Alamhulk A on $\tau|_Y$-kinnine parajasti siis, kui leidub τ-kinnine hulk F nii, et $A = F \cap Y$.

Tõestus. Alamhulk A on $\tau|_Y$-kinnine parajasti siis, kui $Y \setminus A = Y \cap U$ mingi τ-lahtise $U \subset X$ korral ehk $A = Y \setminus (Y \cap U)$ mingi τ-lahtise $U \subset X$ korral. Paneme tähele, et $Y \setminus (Y \cap U) = Y \setminus U = (X \setminus U) \cap Y$. □

Näide 1.1. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ tavalise topoloogiaga τ. Alamhulk $Y = [0, 1) \cup \{2\}$ ei ole kinnine ega lahtine. Kui vaadelda hulka Y topoloogilise ruumi $\mathbb{R}$ alamruumina ehk vaadelda topoloogilist ruumi $(Y, \tau|_Y)$, siis Y on selle alamruumi kinnis-lahtine alamhulk, ka alamhulgad $[0, 1)$ ja $\{2\}$ on selle alamruumi kinnis-lahtised hulgad. Veel on näiteks $\tau|_Y$-kinnised alamhulgad $[0, 1/2]$ ja $[1/2, 1)$ ning $\tau|_Y$-lahtised alamhulgad $[0, 1/2)$ ja $(0, 1/2)$.

Lause 1.2. (a) Kui Y on τ-lahtine ja $A \subset Y$ on $\tau|_Y$-lahtine, siis A on τ-lahtine.

(b) Kui Y on τ-kinnine ja $A \subset Y$ on $\tau|_Y$-kinnine, siis A on τ-kinnine.

Tõestus. (a) Kui Y on τ-lahtine, siis $U \cap Y$ on τ-lahtine iga τ-lahtise $U \subset X$ korral.

(b) Kui Y on τ-kinnine, siis $F \cap Y$ on τ-kinnnine iga τ-kinnise $F \subset X$ korral. (Vt. ka lause 1.1.) □

Lause 1.3 (Sisemuse ja sulundiga seotud omadusi alamruumis)**.** Olgu $A \subset Y$ ja olgu $B \subset X$.

(1)	$\operatorname{Int}_Y A \supset \operatorname{Int}_X A$;	(2)	$\operatorname{Int}_Y(Y \cap B) \supset Y \cap \operatorname{Int}_X B$;
(3)	$\operatorname{Cl}_Y A \subset \operatorname{Cl}_X A$ $\operatorname{Cl}_Y A = Y \cap \operatorname{Cl}_X A$;	(4)	$\operatorname{Cl}_Y(Y \cap B) = Y \cap \operatorname{Cl}_X(Y \cap B) \subset$ $\subset Y \cap \operatorname{Cl}_X B$;
(5)	$\operatorname{Fr}_Y A \subset \operatorname{Fr}_X A$;	(6)	$\operatorname{Fr}_Y(Y \cap B) \subset Y \cap \operatorname{Fr}_X B$.

Tõestus. Ülesanne. □

Lause 1.4 (Transitiivsus)**.** Olgu $Z \subset Y$. Siis $(\tau|_Y)|_Z = \tau|_Z$. Teisisõnu, kui Y on topoloogilise ruumi X alamruum ja Z on ruumi Y alamruum, siis Z on ruumi X alamruum.

Tõestus. Paneme tähele, et $U_X \cap Z = (U_X \cap Y) \cap Z$ iga $U_X \in \tau$ korral. □

Lause 1.5. (a) Kui $\mathfrak{B}$ on topoloogia τ baas, siis

$$\mathfrak{B}_Y = \{Y \cap B \colon B \in \mathfrak{B}\}$$

on alamruumi topoloogia $\tau|_Y$ baasiks.

(b) Olgu $y \in Y$. Kui $\mathfrak{B}_y$ on punkti y ümbruste baas topoloogia τ suhtes, siis

$$\mathfrak{B}_y^Y = \{Y \cap B_y \colon B_y \in \mathfrak{B}_y\}$$

on punkti y ümbruste baas topoloogia $\tau|_Y$ suhtes.

Tõestus. Vahetult definitsioonidest. □

Lause 1.6. Olgu $y \in Y$ ja $V \subset Y$. Siis on V punkti y $\tau|_Y$-ümbrus parajasti siis, kui leidub punkti y τ-ümbrus G nii, et $V = Y \cap G$.

Tõestus. Vahetult ümbruse ja alamruumi definitsioonist või eelmise lause osa (b) järeldusena. □

Ülesanne 1.1. Kontrollida, et alamruumi topoloogia on topoloogia.

Ülesanne 1.2. Tõestada, et diskreetse topoloogilise ruumi alamruumi topoloogia on diskreetne. Tõestada, et antidiskreetse (s.t. triviaalse) topologilise ruumi alamruumi topoloogia on triviaalne.

Ülesanne 1.3. Põhjendada alamruumi ja põhiruumi suhtes leitud sisemuse, sulundi ja raja seosed (1)–(6).

Ülesanne 1.4. Tõestada, et $\mathbb{R}$ alamruumi topoloogia hulgal $\mathbb{N}$ on diskreetne. Tõestada, et $\mathbb{R}$ alamruumi topoloogia hulgal $\mathbb{Q}$ ei ole diskreetne.

Ülesanne 1.5. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $Y \subset X$. Tõestada, et $\tau|_Y \subset \tau$ parajasti siis, kui $Y \in \tau$.

Ülesanne 1.6. Olgu (X, d) meetriline ruum ja $Y \subset X$. On teada, et $d_Y = d|_{Y\times Y}$ on meetrika hulgal Y, kusjuures $y \in Y$ ja $r > 0$ korral on $B_{d_Y}(y, r) = B_d(y, r) \cap Y$. Tõestada, et hulgal Y langevad kokku meetrika d_Y poolt indutseeritud topoloogia τ_{d_Y} ning alamruumi topoloogia $\tau_d|_Y$, kus τ_d on hulga X meetrika d poolt indutseeritud topoloogia, ehk lühidalt $\tau_d|_Y = \tau_{d_Y}$.

Ülesanne 1.7. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X, kusjuures $\tau_1 \subset \tau_2$. Kas vastavad alamruumi topoloogiad hulgal $Y \subset X$ on ka võrreldavad?

Ülesanne 1.8. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $Y, Z \subset X$. Tõestada, et kui $A \subset Y \cap Z$ on $\tau|_Y$-lahtine (kinnine) ja $\tau|_Z$-lahtine (kinnine), siis A on (X, τ) alamruumis $Y \cup Z$ lahtine (kinnine).

Ülesanne 1.9. Anda näide olukorrast, kus A on topoloogilise ruumi kõikjal tihe alamhulk, kuid $A \cap B$ ei ole kõikjal tihe vaadeldava topoloogilise ruumi alamruumis B.

Ülesanne 1.10. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum, $Y \subset X$ ja $A \subset Y$. Tõestada, et $\mathrm{Int}_Y A = Y \setminus \mathrm{Cl}_X(Y \setminus A)$ ja $\mathrm{Fr}_Y A = Y \cap (\mathrm{Cl}_X A \cap \mathrm{Cl}_X(Y \setminus A)$.

Ülesanne 1.11. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum, $Y \subset X$, $A \subset Y$ ja $y \in Y$. Tõestada, et y on $\tau|_Y$-piirpunkt hulgale A parajasti siis, kui y on τ-piirpunkt hulgale A.

2. **Pidev kujutus.** Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$.

Def 2.1. Öeldakse, et kujutus f on *pidev*, kui $f^{-1}(V) \in \tau_X$ mis tahes $V \in \tau_Y$ korral.

Märkus. Kui $\mathfrak{B}_Y$ on topoloogia τ_Y baas, siis kujutuse f pidevuseks piisab, kui $f^{-1}(B) \in \tau_X$ mis tahes $B \in \mathfrak{B}_Y$ korral. Tõepoolest, iga $V \in \tau_Y$ esitub baasielementide ühendina, seega $V = \bigcup_{i\in I} B_i$, kus $B_i \in \mathfrak{B}_Y$. Seetõttu $f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ja eelduse kohaselt on viimane τ_X-lahtine.

Näide 2.1. 1) Ühikoperaator $I\colon X \to X$, $I(x) = x$, on pidev. Selle näite juures on oluline, et lähtehulgal ja sihthulgal vaatleme sama topoloogiat. Erinevate topoloogiate puhul ei pruugi formaalne ühikoperaator olla pidev (vt. ülesandeid).

2) Olgu $y_0 \in Y$ fikseeritud. Kujutus $f\colon X \to Y$, $f(x) = y_0$, on pidev.

3) Kui τ_X on diskreetne topoloogia, siis suvaline $f\colon X \to Y$ on pidev.

4) Kui τ_Y on triviaalne (ehk antidiskreetne) topoloogia, siis suvaline $f\colon X \to Y$ on pidev.

Lause 2.1 (Pidevuse kriteerium kinniste hulkade abil)**.** Samaväärsed on:

(1) f on pidev;
(2) iga τ_Y-kinnise hulga $F \subset Y$ originaal $f^{-1}(F)$ on τ_X-kinnine;

Tõestus. Samaväärsus on ilmne, sest suvalise $A \subset Y$ korral on $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

Märkus. Pidev kujutus ei tarvitse lahtist alamhulka kujutada lahtiseks alamhulgaks ega kinnist alamhulka kujutada kinniseks alamhulgaks.

Lemma 2.2. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ sellised, et $f(E) \subset F$. Kui $f\colon X \to Y$ on pidev, siis ahend $f|_E^F\colon E \to F$, $x \mapsto f(x)$, on pidev.

Tõestus. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev. Kui $W \in \tau_F$, siis $W = F \cap V$ mingi $V \in \tau_Y$ korral ning

$$(f|_E^F)^{-1}(W) = E \cap f^{-1}(W) = E \cap f^{-1}(F) \cap f^{-1}(V) = E \cap f^{-1}(V).$$

□

Järeldus 2.3. Olgu (X, τ_X) topoloogiline ruum ja $(E, \tau|_E)$ tema alamruum. Sisestus $\iota\colon E \to X$, $\iota(x) = x$, on pidev.

Def 2.2. Olgu $x \in X$. Öeldakse, et kujutus f on *pidev punktis* x, kui punkti $f(x)$ iga τ_Y-ümbruse V korral leidub punkti x selline τ_X-ümbrus U, et $f(U) \subset V$.

Lause 2.4. Samaväärsed on:

(1) f on pidev;
(2) f on pidev punktis x iga $x \in X$ korral.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Eeldame, et f on pidev. Olgu $x \in X$ ja V punkti $f(x)$ mingi τ_Y-ümbrus. Olgu $W \subset V$ punkti $f(x)$ τ_Y-lahtine ümbrus. Võtame $U = f^{-1}(W)$. Ilmselt $x \in U$ ja $f(U) \subset V$, kusjuures eelduse kohaselt on U τ_X-lahtine, seega punkti x τ_X-ümbrus.

(2) $\Rightarrow$ (1). Eeldame nüüd, et iga $x \in X$ korral on f pidev punktis x. Näitame, et f on pidev. Olgu $V \in \tau_Y$. Fikseerime $x \in f^{-1}(V)$. Hulk $f^{-1}(V)$ on τ_X-lahtine, kui leidub punkti x ümbrus U nii, et $U \subset f^{-1}(V)$. Ilmselt on V punkti $f(x)$ τ_Y-ümbrus. Eelduse kohaselt leidub punkti x τ_X-ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$ ehk $U \subset f^{-1}(V)$. $\square$

Lause 2.5 (Pidevuse kriteerium ümbruste baasi abil)**.** Olgu $x \in X$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x τ_X-ümbruste baas ja $\mathfrak{C}_{f(x)}$ punkti $f(x)$ τ_Y-ümbruste baas. Samaväärsed on:

(1) f on pidev punktis x;
(2) iga $C \in \mathfrak{C}_{f(x)}$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $f(B) \subset C$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Eeldame, et f on pidev punktis x. Olgu $C \in \mathfrak{C}_{f(x)}$. Pidevuse tõttu leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(U) \subset C$. Ümbruste baasi mõiste kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $B \subset U$, seega $f(B) \subset f(U) \subset C$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olgu V punkti $f(x)$ ümbrus. Ümbruste baasi mõiste kohaselt leidub $C \in \mathfrak{C}_{f(x)}$ nii, et $C \subset V$. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $f(B) \subset C$. Kokkuvõttes oleme leidnud punkti x ümbruse B nii, et $f(B) \subset V$. Järelikult on f pidev punktis x. $\square$

Märkus. Kujutus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $x \in \mathbb{R}$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|x - \tilde{x}| < \delta \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Tõepoolest, vahemikud $(x - \delta, x + \delta)$, $\delta > 0$, moodustavad punkti x ümbruste baasi $\mathfrak{B}_x$ ja vahemikud $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, moodustavad punkti $f(x)$ ümbruste baasi $\mathfrak{C}_{f(x)}$. Lause 2.5 kohaselt on f pidev punktis x, kui suvalise $C \in \mathfrak{C}_{f(x)}$ korral leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $f(B) \subset C$ ehk

$$\tilde{x} \in B \implies f(\tilde{x}) \in C.$$

Lause 2.6. Olgu (X, τ_X), (Y, τ_Y) ja (Z, τ_Z) topoloogilised ruumid. Olgu $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$. Olgu $x \in X$. Kui f on pidev punktis x ja g on pidev punktis $f(x)$, siis $g \circ f\colon X \to Z$ on pidev punktis x.

Tõestus. Olgu W punkti $g(f(x))$ suvaline τ_Z-ümbrus. Kui g on pidev punktis $f(x)$, siis leidub punkti $f(x)$ τ_Y-ümbrus V nii, et $g(V) \subset W$. Kui f on pidev punktis x, siis leidub punkti x τ_X-ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$. Kokkuvõttes $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$. Seega on $g \circ f\colon X \to Z$ on pidev punktis x. □

Järeldus 2.7. Pidevate kujutuste kompositsioon on pidev.

Tõestus. Viimase lause ja lause 2.4 vahetu järeldus. (Selle tulemuse võib ka otse tõestada.) □

Järeldus 2.8. Kujutus $f\colon X \to Y$ on pidev parajasti siis, kui ahend $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$, on pidev.

Tõestus. Ühtepidi implikatsioon on lemma 2.2 järeldus. Teisipidi implikatsiooni saame järelduse 2.7 ja järelduse 2.3 põhjal, sest $f = \iota \circ f|^{f(X)}$, kus $\iota\colon f(X) \to Y$ on sisestus. □

***Ülesanne 10.** Olgu X mingi hulk, olgu I mingi mittetühi indeksite hulk ning olgu iga $i \in I$ korral (Y_i, τ_i) topoloogiline ruum ja $f_i\colon X \to Y_i$. Tõestada, et

$$\mathfrak{B} = \{\bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(V_{i_k})\colon V_{i_k} \in \tau_{i_k},\ i_1, \dots, i_n \in I,\ n \in \mathbb{N}\}$$

on baasiks hulga X teatud topoloogiale τ. Tõestada, et τ on nõrgim topoloogia hulgal X, mille suhtes iga $f_i\colon X \to Y_i$, $i \in I$, on pidev.

***Ülesanne 11.** Olgu (X, d) (mittetühi) meetriline ruum. Olgu A hulga X mittetühi alamhulk. Kui $x \in X$, siis *punkti x kauguseks hulgast A* nimetatakse arvu $d(x, A) = \inf\{d(x, a)\colon a \in A\}$.

Tõestada, et $f_A\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, on pidev. Tõestada, et meetrika d poolt määratud topoloogia on nõrgim topoloogia hulgal X, mille suhtes on iga f_A, $\varnothing \neq A \subset X$, pidev. *Näpunäide.* Kui B on d-kinnine ja $d(x, B) = 0$, siis $x \in B$.

Ülesanne 2.1. Olgu $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I$, pidevad. Tõestada, et $\bigcap_{i \in I} \ker f_i$ on kinnine.

Ülesanne 2.2. Olgu $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i \in I$, pidevad. Tõestada, et hulk

$$\{x \in X\colon f_i(x) \geq 0\ \forall i \in I\}$$

on kinnine.

Ülesanne 2.3. Olgu τ alampiiri topoloogia hulgal $\mathbb{R}$. Tõestada, et kujutus $f\colon (\mathbb{R}, \tau) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x \notin [0, 1), \end{cases}$ on pidev.

Ülesanne 2.4. Olgu τ alampiiri topoloogia hulgal $\mathbb{R}$. Tõestada, et formaalne ühikoperaator $I\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau)$, $I(x) = x$, ei ole pidev.

Ülesanne 2.5. Tõestada, et formaalne ühikoperaator $I\colon (X,\tau_1) \to (X,\tau_2)$, $I(x)=x$, on pidev parajasti siis, kui $\tau_2 \subset \tau_1$.

Ülesanne 2.6. Olgu (X,τ_X) ja (Y,τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ pidev. Tõestada, et f jääb pidevaks, kui τ_X asendada tugevama topoloogiaga või τ_Y asendada nõrgema topoloogiaga.

Ülesanne 2.7 (Pidevuse kriteeriumid sulundi ja sisemuse abil)**.** Olgu (X,τ_X) ja (Y,τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Tõestada, et järgmised tingimused on samaväärsed:

(1) f on pidev;
(2) iga $A \subset X$ korral $f(\operatorname{Cl}_X A) \subset \operatorname{Cl}_Y(f(A))$;
(3) iga $B \subset Y$ korral $\operatorname{Cl}_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\operatorname{Cl}_Y B)$;
(4) iga $B \subset Y$ korral $f^{-1}(\operatorname{Int}_Y B) \subset \operatorname{Int}_X f^{-1}(B)$.

Ülesanne 2.8. Vaatleme hulka $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tavalise topoloogiaga. Tõestada, et kujutus $f\colon X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/x, & x \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

on pidev, kuid $g = f|^{f(X)}$ korral g^{-1} ei ole pidev punktis 0, kuigi on pidev igas punktis $1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ülesanne 2.9. Olgu $x \in X$ ja G punkti x mingi τ_X-ümbrus. Kujutus f on pidev punktis x, kui tema ahend $f|_G\colon G \to Y$, $x \mapsto f(x)$, on pidev punktis x.

Ülesanne 2.10. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tõestada, et alampiiri topoloogia τ korral $\hat{f}\colon (\mathbb{R},\tau) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, on pidev parajasti siis, mis tahes $a \in \mathbb{R}$ korral $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$.

Ülesanne 2.11. Olgu (X,τ_X) ja (Y,τ_Y) topoloogilised ruumid. Eeldame, et leiduvad hulga X sellised kinnised (lahtised) alamhulgad A ja B, et $X = A \cup B$. Olgu $f\colon A \to Y$ ja $g\colon B \to Y$ sellised, et $f(x) = g(x)$, kui $x \in A \cap B$. Kujutus $h\colon X \to Y$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

on pidev, kui f ja g on pidevad.

Ülesanne 2.12. Olgu (X,d_X) ja (Y,d_Y) meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ kujutus. Tõestada, et f on pidev, kui

(a) f rahuldab *Lipschitzi tingimust*, s.t.

$$\exists L > 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in X \quad d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \le L \cdot d_X(x, \tilde{x});$$

(b) f rahuldab *Hölderi tingimust*, s.t.

$$\exists M > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in X \quad d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \le M \cdot [d_X(x, \tilde{x})]^\alpha.$$

3. **Homöomorfism.** Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$.

Def 3.1. Öeldakse, et f on *homöomorfism*, kui f on bijektiivne ning f ja f^{-1} on pidevad. Homöomorfismi nimetus on tuletatud kreeka keelest (ὅμοιος – sarnane, μορφή – kuju).

Öeldakse, et topoloogilised ruumid (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) on *homöomorfsed*, kui nende ruumide vahel leidub homöomorfism. Sel juhul kirjutame $(X, \tau_X) \cong (Y, \tau_Y)$ või $X \cong Y$.

Märkus. 1) Bijektiivne $f\colon X \to Y$ on homöomorfism parajasti siis, kui $\hat{f}\colon U \mapsto f(U)$ on bijektsioon τ_X ja τ_Y vahel.

2) Pidev bijektiivne kujutus ei pruugi olla homöomorfism. Näiteks $I\colon (\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ei ole homöomorfism ($\tau_{[\cdot,\cdot)}$ on alampiiri topoloogia). Samuti $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ korral ei ole kujutus $f\colon [0, 2\pi) \to S$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, homöomorfism.

Näide 3.1. 1) Suvalise topoloogilise ruumi (X, τ_X) korral on kujutus $I\colon X \to X$, $x \mapsto x$, homöomorfism.

2) Kui f on homöomorfism, siis ka f^{-1} on homöomorfism.

3) Kahe homöomorfismi kompositsioon on homöomorfism.

4) Reaalarvude kaks suvalist (mittetühja, tõkestatud või tõkestamata) vahemikku on homöomorfsed.

5) Reaalarvude kaks suvalist (mittetühja) lõiku on homöomorfsed.

6) Vahemik $(0, 1)$ ja lõik $[0, 1]$ ei ole homöomorfsed; samuti $\mathbb{R}^m \ncong \mathbb{R}^n$, kui $m \neq n$. (Neid praegu ei põhjenda!)

Lause 3.1. Olgu $f\colon X \to Y$ bijektiivne. Samaväärsed on:

(1) f^{-1} on pidev;
(2) iga τ_X-lahtise alamhulga $U \subset X$ kujutis $f(U)$ on τ_Y-lahtine, s.t. f on *lahtine kujutus*;
(3) iga τ_X-kinnise alamhulga $F \subset X$ kujutis $f(F)$ on τ_Y-kinnine, s.t. f on *kinnine kujutus.*

Tõestus. □

Näide 3.2. 1) Kui τ_Y on diskreetne topoloogia, siis $f\colon X \to Y$ on lahtine ja kinnine, kuid ei ole üldiselt pidev. Näiteks $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, on lahtine ja kinnine, kuid ei ole pidev.

2) Kujutus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (või $x \mapsto |x|$), on kinnine ja pidev, kuid ei ole lahtine ($f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ ei ole lahtine). (Ka konstantne funktsioon $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kinnine ja pidev, kuid ei ole lahtine!)

3) Kujutus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, on lahtine ja pidev, kuid ei ole kinnine ($A = \{(x,y)\colon x > 0, y \geq 1/x\}$ on kinnine, kuid $f(A) = (0,\infty)$ ei ole kinnine).

Lause 3.2. Olgu $f\colon X \to Y$ bijektiivne. Samaväärsed on:

(1) f on homöomorfism;
(2) iga $U \subset X$ korral U on τ_X-lahtine parajasti siis, kui $f(U)$ on τ_Y-lahtine.
(3) iga $F \subset X$ korral F on τ_X-kinnine parajasti siis, kui $f(F)$ on τ_Y-kinnine;

Tõestus. □

Lause 3.3. Olgu $f\colon X \to Y$ homöomorfism ja $A \subset X$. Siis

(1) $f(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} f(A)$;
(2) $f(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} f(A)$;
(3) $f(\operatorname{Fr} A) = \operatorname{Fr} f(A)$;
(4) A on punkti x ümbrus parajasti siis, kui $f(A)$ on punkti $f(x)$ ümbrus.

Tõestus. □

Def 3.2. *Topoloogiliseks omaduseks* nimetatakse niisugust topoloogilistel ruumidel vaadeldavat omadust, mille korral homöomorfsetel ruumidel on see omadus samaaegselt.

Märkus. Topoloogia klassikaliseks probleemiks on uuritava topoloogilise ruumi korral määrata, 1) millise (tuntud) topoloogilise ruumiga on vaadeldav ruum homöomorfne; 2) millised (tuntud) topoloogilised omadused vaadeldaval ruumil on ja milliseid omadusi tal pole (see omakorda aitab esimesele küsimusele vastamisel).

Def 3.3. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $\iota\colon X \to Y$. Öeldakse, et ι on *topoloogiline sisestus*, kui $\iota|^{\iota(X)}\colon X \to \iota(X)$ on homöomorfism.

Lause 3.4. Kujutus $\iota\colon X \to Y$ on topoloogiline sisestus parajasti siis, kui ι on injektiivne, pidev ja mis tahes $U \in \tau_X$ korral leidub $V \in \tau_Y$ nii, et $\iota(U) = \iota(X) \cap V$.

Tõestus. Kasutada järeldust 2.8 ja lauset 3.1 või lauset 3.2. □

Näide 3.3. Järgmises tabelis on $f\colon X \to Y$ homöomorfism ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

<table>
<tr><th>$X \cong Y$</th><th>$f\colon X \to Y$</th><th>$f^{-1}\colon Y \to X$</th></tr>
<tr><td>$[0,1] \cong [a,b]$</td><td rowspan="4">$x \mapsto a + x(b-a)$</td><td rowspan="4">$y \mapsto \dfrac{y-a}{b-a}$</td></tr>
<tr><td>$[0,1) \cong [a,b)$</td></tr>
<tr><td>$(0,1) \cong (a,b)$</td></tr>
<tr><td>$(0,1] \cong (a,b]$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R} \cong (0,\infty)$</td><td>$x \mapsto e^x$</td><td>$y \mapsto \ln y$</td></tr>
<tr><td>$(-\pi/2, \pi/2) \cong \mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \tan x$</td><td>$y \mapsto \arctan y$</td></tr>
<tr><td>$(-1,1) \cong \mathbb{R}$</td><td>$x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$</td><td>$y \mapsto \dfrac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$</td></tr>
<tr><td>$[0,1) \cong (-1,0]$</td><td rowspan="4">$x \mapsto -x$</td><td rowspan="4">$y \mapsto -y$</td></tr>
<tr><td>$(0,\infty) \cong (-\infty,0)$</td></tr>
<tr><td>$[0,\infty) \cong (-\infty,0]$</td></tr>
<tr><td>$[a,\infty) \cong (-\infty,-a]$</td></tr>
<tr><td>$(0,\infty) \cong (a,\infty)$</td><td rowspan="2">$x \mapsto x+a$</td><td rowspan="2">$y \mapsto y-a$</td></tr>
<tr><td>$[0,\infty) \cong [a,\infty)$</td></tr>
<tr><td>$[0,1) \cong [1,\infty)$</td><td rowspan="2">$x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$</td><td rowspan="2">$y \mapsto 1 - \dfrac{1}{y}$</td></tr>
<tr><td>$(0,1) \cong (1,\infty)$</td></tr>
</table>

Näide 3.4. Olgu $P = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ ja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$. Siis $S \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}$, kujutus $f\colon (x,y) \mapsto \dfrac{x}{1-y}$ on homöomorfism, $f^{-1}\colon t \mapsto \left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1}\right)$. Siin on võimalik arutleda ka nii, et $g\colon \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}\right) \to S \setminus \{P\}$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, on homöomorfism.

Näide 3.5.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x < 1\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < 1\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x, y > 0\}\end{aligned}$$

Näide 3.6.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \le 1\}$$

Näide 3.7.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \setminus (0,0) &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 < x^2 + y^2 < 1\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 1 < x^2 + y^2 < 4\}\\ &\cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 > 1\}\end{aligned}$$

Näide 3.8. Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidevad. Eeldame, et $f < g$. Siis

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x) \le y \le g(x)\} \cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le y \le 1\}.$$

Ülesanne 3.1. Tõestada, et kahe homöomorfismi kompositsioon on homöomorfism.

Ülesanne 3.2. Olgu $f\colon X \to Y$ homöomorfism ja $A \subset X$. Tõestada, et $f|_A^{f(A)}\colon A \to f(A)$ on homöomorfism.

Ülesanne 3.3. Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid. Olgu $f\colon X \to Y$ bijektiivne ja $d_X(x, \tilde{x}) = d_Y(f(x), f(\tilde{x}))$ mis tahes $x, \tilde{x} \in X$ korral (sel juhul öeldakse, et f on *isomeetria*). Tõestada, et f on homöomorfism.

Ülesanne 3.4. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ bijektiivne. Olgu $\mathfrak{B}$ topoloogia τ_X baas. Tõestada, et f on homöomorfism parajasti siis, kui $\mathfrak{C} = \{f(B)\colon B \in \mathfrak{B}\}$ on topoloogia τ_Y baas.

Ülesanne 3.5. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ bijektiivne. Olgu iga $x \in X$ korral $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas (topoloogia τ_X suhtes). Tõestada, et f on homöomorfism parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral on $\mathfrak{C}_{f(x)} = \{f(B)\colon B \in \mathfrak{B}_x\}$ punkti $f(x)$ ümbruste baas (topoloogia τ_Y suhtes).

Ülesanne 3.6. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Hulga $X \times Y$ tavalise topoloogia (ehk korrutistopoloogia) baasiks on $\mathfrak{B} = \{U \times V\colon U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}$. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev. Tõestada, et f graafik $\operatorname{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\colon x \in X\}$ on homöomorfne topoloogilise ruumiga X.

Ülesanne 3.7. Tõestada, et leidub topoloogiline sisestus ülesandes I.10.3 vaadeldud ruumist ülesandes I.10.4 vaadeldud topoloogilisse ruumi.

Ülesanne 3.8. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ injektiivne ja pidev. Tõestada, et kui f on lahtine või kinnine kujutus, siis f on topoloogiline sisestus. Tuua näide topoloogilisest sisestusest, mis ei ole lahtine ega kinnine. (Näpunäide. Vt. eelmist ülesannet.)

Ülesanne 3.9. Olgu (X, d) meetriline ruum ja $A \subset X$. Öeldakse, et A on tõkestatud, kui leidub reaalarv $M \geq 0$ nii, et iga $x, y \in A$ korral $d(x, y) \leq M$.

Defineerime kauguse $\hat{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\hat{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Tõestada, et d ja $\hat{d}$ indutseerivad sama topoloogia. See näitab, et tõkestatus ei ole topoloogiline omadus. Näpunäide. Topoloogia baasiks sobib $\{B(x, r)\colon x \in X,\ 0 < r < 1\}$.

4. **Korrutisruum.** Olgu $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ topoloogilised ruumid.

Def 4.1. *Korrutistopoloogiaks* hulgal $X_1 \times \dots \times X_n$ nimetatakse topoloogiat, mille baasiks on

$$\mathfrak{B} = \{U_1 \times \dots \times U_n \colon U_i \in \tau_i,\ i = 1, \dots, n\}.$$

Hulka $X_1 \times \dots \times X_n$ koos korrutistopoloogiaga nimetatakse *(topoloogiliseks) korrutisruumiks.*

Lause 4.1. Kui iga $i = 1, \dots, n$ korral on $F_i \subset X_i$ kinnised, siis $F_1 \times \dots \times F_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$ on kinnine korrutistopoloogia suhtes.

Tõestus. Olgu iga $i = 1, \dots, n$ korral $F_i \subset X_i$ kinnine. Paneme tähele, et

$$(X_1 \times \dots \times X_n) \setminus (F_1 \times \dots \times F_n) =$$
$$= ((X_1 \setminus F_1) \times X_2 \times \dots \times X_n) \cup \dots \cup (X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus F_n)).$$

Ilmselt on viimane lahtiste hulkade ühend, mistõttu lahtine hulk. $\square$

Teoreem 4.2 (Korrutistopoloogia karakteristlik omadus)**.** Mis tahes topoloogilise ruumi (Z, τ_Z) korral on $f \colon Z \to X_1 \times \dots \times X_n$ pidev parajasti siis, kui iga $i = 1, \dots, n$ korral on $f_i := \pi_i \circ f$ pidev, kus $\pi_i \colon X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, on loomulik projektor.

Tõestus. Olgu f pidev. Fikseerime vabalt $i \in \{1, \dots, n\}$. Olgu $U_i \in \tau_i$. Kuna f on pidev, siis $f_i^{-1}(U_i) = f^{-1}(X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_n)$ on lahtine.

Olgu iga $i = 1, \dots, n$ korral f_i pidev. Olgu $U_1 \in \tau_1, \dots, U_n \in \tau_n$. Piisab näidata, et $f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) \in \tau_Z$. Paneme tähele, et $f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) = f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(U_n)$. Eelduse kohaselt on iga $i = 1, \dots, n$ korral $f_i^{-1}(U_i) \in \tau_Z$, seega on $f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_n^{-1}(U_n) \in \tau_Z$. Järelikult on f pidev. $\square$

Järeldus 4.3. Olgu (Z, τ_Z) topoloogiline ruum ja $f_i \colon Z \to X_i$ $(i = 1, \dots, n)$ mingid kujutused. Kujutus $f \colon Z \to X_1 \times \dots \times X_n$, $z \mapsto (f_1(z), \dots, f_n(z))$, on pidev parajasti siis, kui iga f_i $(i = 1, \dots, n)$ on pidev.

Järeldus 4.4. Iga $i = 1, \dots, n$ korral on $\pi_i \colon X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, pidev.

Järeldus 4.5. Korrutistopoloogia on vähim sellistest topoloogiatest τ hulgal $X_1 \times \dots \times X_n$, mille suhtes iga $i = 1, \dots, n$ korral on $\hat{\pi}_i \colon (X_1 \times \dots \times X_n, \tau) \to X_i$, $\hat{\pi}_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, pidev.

Teoreem 4.6. Korrutistopoloogia on ainus topoloogia hulgal $X_1 \times \dots \times X_n$, mille korral eelmise teoreemi väide kehtib.

Tõestus. Eeldame, et τ on selline topoloogia hulgal $X_1\times\cdots\times X_n$. Kuna $(X_1\times\cdots\times X_n,\tau)$ samasusteisendus on pidev, siis eelduse põhjal on iga $i=1,\ldots,n$ korral ka $\hat{\pi}_i\colon (X_1\times\cdots\times X_n,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ pidev. Viimase järelduse põhjal seega on τ tugevam kui korrutistopoloogia.

Eelduse kohaselt on formaalne ühikoperaator $I\colon X_1\times\cdots\times X_n\to(X_1\times\cdots\times X_n,\tau)$ pidev, mistõttu on τ nõrgem kui korrutistopoloogia. Kokkuvõttes ongi τ korrutistopoloogia. □

Lause 4.7 (Korrutistopoloogia omadusi)**.** (a) Kui iga $i=1,\ldots,n$ korral on $\mathfrak{B}_i$ topoloogia τ_i baas, siis

$$\mathfrak{B}=\{B_1\times\cdots\times B_n\colon B_i\in\mathfrak{B}_i,\ i=1,\ldots,n\}$$

on korrutistopoloogia baas.

(b) Mis tahes $i=1,\ldots,n$ korral on $\pi_i\colon X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$ lahtine ja pidev.

(c) Mis tahes $i=1,\ldots,n$ ja punktide $x_j\in X_j$, $j\neq i$, korral on $\iota\colon X_i\to X_1\times\cdots\times X_n$, $x\mapsto(x_1,\ldots,\underset{i}{x},\ldots,x_n)$, topoloogiline sisestus.

(d) Kui iga $i=1,\ldots,n$ korral on $E_i\subset X_i$, siis (alamruumitopoloogiate) korrutistopoloogia ning (korrutistopoloogia) alamruumitopoloogia hulgal $E_1\times\cdots\times E_n\subset X_1\times\cdots\times X_n$ langevad kokku.

Tõestus. (a) Kasutada järeldust I.6.2.

(b) Teame, et π_i on pidev. Lahtisuse osa on ülesanne.

(c) Ülesanne.

(d) Vaadelda sobivaid baase. Kasutada lauset 1.5. □

Näide 4.1. Lause (a) osa põhjal moodustavad hulga $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ topoloogia baasi kõikvõimalikud lahtised ristkülikud $(a,b)\times(c,d)$, kus $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ ning $a<b$ ja $c<d$.

Hulk $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon x\geq 0,\ y\geq 0\}$ on kinnine, sest K on lahtise hulga $((-\infty,0)\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times(-\infty,0))$ täiendhulk.

Lause 4.8. Kui X ja Y on topoloogilised ruumid, siis $X\times Y\cong Y\times X$.

Tõestus. Ülesanne. □

Lause 4.9. Kui X,Y,Z on topoloogilised ruumid, siis $X\times Y\times Z\cong(X\times Y)\times Z\cong X\times(Y\times Z)$.

Tõestus. □

Alljärgnevates ülesannetes olgu (X,τ_X) ja (Y,τ_Y) topoloogilised ruumid.

Ülesanne 4.1. Olgu $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Tõestada, et $\operatorname{Cl}(A \times B) = (\operatorname{Cl} A) \times (\operatorname{Cl} B)$ ja $\operatorname{Int}(A \times B) = (\operatorname{Int} A) \times (\operatorname{Int} B)$. Kas alati $\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A) \times (\operatorname{Fr} B)$?

Ülesanne 4.2. Olgu $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Tõestada, et $\operatorname{Fr}(A \times B) = (\operatorname{Fr} A \times \operatorname{Cl} B) \cup (\operatorname{Cl} A \times \operatorname{Fr} B)$.

Ülesanne 4.3. Olgu X ja Y meetrilised ruumid. Ülesande I.4.3 põhjal teame, et $X \times Y$ on meetriline ruum, kusjuures kõik ülesandes I.4.3 vaadeldud meetrikad indutseerivad sama topoloogia.

Tõestada, et ülesandes I.4.3 vaadeldud meetrikad indutseerivad korrutistopoloogia.

Ülesanne 4.4. Leida korrutisruumis $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ järgmiste alamhulkade sulund ja sisemus:

(a) $\{(x, y)\colon y = 0\}$;
(b) $\{(x, y)\colon x > 0,\ y \neq 0\}$;
(c) $\{(x, y)\colon 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ülesanne 4.5. Tõestada, et $X \times Y$ ja $Y \times X$ on homöomorfsed.

Ülesanne 4.6. Tõestada, et kui X ja Y on diskreetsed topoloogilised ruumid, siis korrutisruum $X \times Y$ on diskreetne topoloogiline ruum.

Ülesanne 4.7. Tõestada, et korrutistopoloogia hulgal $X \times Y$ on vähim topoloogia, mille suhtes π_X ja π_Y on pidevad.

Ülesanne 4.8. Tõestada, et π_X ja π_Y on lahtised kujutused.

Ülesanne 4.9. Olgu $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$. Tõestada, et $i_X\colon X \to X \times Y$, $x \mapsto (x, y_0)$, ja $i_Y\colon Y \to X \times Y$, $y \mapsto (x_0, y)$, on topoloogilised sisestused.

Ülesanne 4.10. Olgu (X, d) meetriline ruum. Tõestada, et $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ on pidev.

Ülesanne 4.11. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning $X_1, \ldots, X_n$ ja $Y_1, \ldots, Y_n$ topoloogilised ruumid. Olgu $g_i\colon X_i \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, ja $f\colon X_1 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (g_1(x_1), \ldots, g_n(x_n))$. Tõestada, et

(1) kui iga $i = 1, \ldots, n$ korral on g_i pidev, siis f on pidev;
(2) kui iga $i = 1, \ldots, n$ korral on g_i homöomorfism, siis f on homöomorfism.

Ülesanne 4.12. Olgu (X, τ_X), (Y, τ_Y) ja (Z, τ_Z) topoloogilised ruumid. Tõestada, et kui $f\colon X \times Y \to Z$ on pidev, siis iga $x_0 \in X$ ja iga $y_0 \in Y$ korral on $f_{x_0}\colon Y \to Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$, ja $f_{y_0}\colon X \to Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$, pidevad.

Üldine korrutistopoloogia*. Olgu (X_i, τ_i), $i \in I$, topoloogilised ruumid. Vaatleme otsekorrutist

$$\prod_{i\in I} X_i = \{h\colon I \to \cup_{i\in I} X_i \colon \forall i \in I \quad h(i) \in X_i\}.$$

Korrutistopoloogiaks hulgal $\prod_{i\in I} X_i$ nimetatakse vähimat topoloogiat, mille suhtes iga $j \in I$ korral $\pi_j \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, $\pi_j(h) = h(j)$, on pidev. Tähistame korrutistopoloogiat sümboliga $\tau^{\times}$.

Korrutistopoloogia $\tau^{\times}$ baasiks on

$$\mathfrak{B} = \{\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \colon U_{i_k} \in \tau_{i_k},\ i_1, \dots, i_n \in I,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ilmselt

$$\mathfrak{B} = \{\prod_{i\in I} U_i \colon U_i \in \tau,\ U_j \neq X_j \text{ vaid lõpliku hulga indeksite } j \in I \text{ korral}\}.$$

Ka

$$\mathfrak{C} = \{\prod_{i\in I} U_i \colon U_i \in \tau_i\}$$

osutub baasiks hulga $\prod_{i\in I} X_i$ teatud topoloogiale $\tau^{\Box}$, kuid lõpmatu I korral pole üldiselt $\tau^{\Box}$ ja $\tau^{\times}$ üks ja sama topoloogia nagu lõpliku hulga I korral.

***Ülesanne 12** (5 p)**.** Olgu (Z, τ_Z) topoloogiline ruum. Olgu $f\colon (Z, \tau_Z) \to (\prod_{i\in I} X_i, \tau^{\times})$. Tõestada, et f on pidev parajasti siis, kui iga $i \in I$ korral on $\pi_i \circ f$ pidev.

Tõestada, et kui $g\colon (Z, \tau_Z) \to (\prod_{i\in I} X_i, \tau^{\Box})$ on pidev, siis iga $i \in I$ korral on $\hat{\pi}_i \circ g$ pidev, kus $\hat{\pi}_i \colon (\prod_{i\in I} X_i, \tau^{\Box}) \to (X_i, \tau_i)$, $\hat{\pi}_i(h) = \pi_i(h)$.

Tuua näide eelnevast olukorrast, kus g ei ole pidev, kuid iga $i \in I$ korral on $\hat{\pi}_i \circ g$ pidev. Näpunäide. Vaadelda kujutust $g\colon \mathbb{R} \to \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, $t \mapsto (t, t, \dots)$.

Olgu I mingi indeksite hulk ja iga $i \in I$ korral (X_i, τ_i) topoloogiline ruum.

Ülesanne 4.13. Tõestada, et iga $i_0 \in I$ korral on $\pi_{i_0} \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$, $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_{i_0}$, pidev, kui otsekorrutisel vaadelda topoloogiat $\tau^{\times}$ või $\tau^{\Box}$.

Ülesanne 4.14. Fikseerime $i_0 \in I$ ja iga $i \in I \setminus \{i_0\}$ korral $x_i \in X_i$. Tõestada, et $\iota\colon X_{i_0} \to \prod_{i\in I} X_i$, $x \mapsto h_x$, kus $h_x(i) = \begin{cases} x_i, & i \neq i_0, \\ x, & i = i_0, \end{cases}$ on topoloogiline sisestus, kui otsekorrutisel vaadelda topoloogiat $\tau^{\times}$ või $\tau^{\Box}$.

Ülesanne 4.15. Olgu $F_i \subset X_i$ kinnine iga $i \in I$ korral. Tõestada, et $\prod_{i\in I} F_i \subset \prod_{i\in I} X_i$ on kinnine, kui otsekorrutisel vaadelda topoloogiat $\tau^{\times}$ või $\tau^{\Box}$.

Ülesanne 4.16. Olgu $A_i \subset X_i$ iga $i \in I$ korral. Tõestada, et $\prod_{i\in I} \operatorname{Cl} A_i = \operatorname{Cl}(\prod_{i\in I} A_i)$, kui viimast sulundit vaadelda topoloogia $\tau^{\times}$ või $\tau^{\Box}$ suhtes.

5. **Jada.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 5.1. Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hulga X elementide jada ja $x \in X$. Öeldakse, et *jada* (x_n) *koondub punktiks* x (topoloogilises ruumis (X, τ)), kui punkti x iga ümbruse U korral

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies x_n \in U. \qquad (*).$$

Sel juhul öeldakse, et x on jada (x_n) *piirelement* ja kirjutatakse

$$x_n \to x \quad (X, \tau).$$

Öeldakse, et jada *koondub*, kui sel jadal leidub piirelement.

Märkus. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Jada (x_n) koondub elemendiks x, kui tingimus $(*)$ kehtib iga $U \in \mathfrak{B}_x$ korral.

Näide 5.1. 1) Statsionaarsed jadad koonduvad alati. (*Statsionaarseks* nimetatame sellist jada, mis mingist indeksist alates on konstantne. Leidub topoloogilisi ruume, milles koonduvad vaid statsionaarsed jadad.)

2) Kui τ on triviaalne topoloogia, siis hulga X mis tahes elementide jada koondub hulga X mis tahes elemendiks.

Lause 5.1. Olgu $A \subset X$ ja $x \in X$. Siis $x \in \operatorname{Cl} A$, kui leidub A elementide jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nii, et $a_n \to x$ (X, τ).

Tõestus. Eeldame, et hulga A elementide jada (a_n) koondub elemendiks x. Näitame, et $x \in \operatorname{Cl} A$. Kui U on punkti x ümbrus, siis eelduse kohaselt ei ole $U \cap A$ tühi. Seega $x \in \operatorname{Cl} A$. □

Lause 5.2. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Olgu $x \in X$. Kui f on pidev punktis x, siis

$$x_n \to x \quad (X, \tau_X) \implies f(x_n) \to f(x) \quad (Y, \tau_Y).$$

Tõestus. Eeldame, et f on pidev ja $x_n \to x$ (X, τ_X). Olgu V punkti $f(x)$ ümbrus. Kuna f on pidev, siis $f^{-1}(V)$ on punkti x ümbrus. Järelikult leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $n > N$ korral on $x_n \in f^{-1}(V)$ ehk $f(x_n) \in V$. Seega $f(x_n) \to f(x)$ (Y, τ_Y). □

Märkus. Ülesanne 5.6 näitab, et viimases kahes lauses vastupidine implikatsioon pole üldiselt tõene.

***Ülesanne 13** (5 p)**.** Tõestada, et kui punktil x leidub loenduv ümbruste baas, siis kahes viimases lauses kehtib ka vastupidine implikatsioon.

Märkus. Viimast fakti saab kasutada mittemetriseeruvuse näitamisel.

Näide 5.2. Näitame, et $(\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\tau^{\square})$ ei ole metriseeruv. Vaatleme alamhulka $A=\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon x_i>0\ \forall i\in\mathbb{N}\}$. Paneme tähele, et $0\in\mathrm{Cl}_{\tau^{\square}}A$. (Kasutada sulundipunkti kriteeriumit!) Kuid ei leidu A elementide jada, mis koondub elemendiks 0. Tõepoolest, olgu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selline jada. Siis $U=\prod_{i\in\mathbb{N}}(-\pi_i(a_i),\pi_i(a_i))$ on punkti 0 ümbrus, kuid ükski a_n ei kuulu ümbrusesse U. (Topoloogiline ruum $(\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R},\tau^{\times})$ on metriseeruv!)

***Ülesanne 14** (5 p)**.** Olgu (X_i,τ_i), $i\in I$, topoloogilised ruumid. Olgu $Z=\prod_{i\in I}X_i$. Tõestada, et

$$z_n\to z\quad (Z,\tau^{\times})\iff \forall i\in I\quad \pi_i(z_n)\to\pi_i(z)\quad (X_i,\tau_i).$$

Tõestada, et viimase samaväärsuse puhul on implikatsioon «$\Rightarrow$» tõene ka siis, kui topoloogia $\tau^{\times}$ asendada topoloogiaga $\tau^{\square}$.

Tuua näide, kus viimase samaväärsuse puhul implikatsioon «$\Leftarrow$» ei kehti, kui topoloogia $\tau^{\times}$ asendada topoloogiaga $\tau^{\square}$. Näpunäide. Vaadelda hulka $Z=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ ning jada $z_1=(1,1,\dots)$, $z_2=(0,2,2,\dots)$, $z_3=(0,0,3,3,\dots)$, $\dots$.

Näide 5.3. Olgu $\varphi=\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}\colon \{i\in\mathbb{N}\colon x_i\neq 0\}\text{ lõplik}\}$. Näitame, et $\mathrm{Cl}_{\tau^{\times}}\varphi=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Olgu $x=(x_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$ suvaline. Paneme tähele, et $y_n=(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots)\in\varphi$, $n\in\mathbb{N}$, ja iga $i\in\mathbb{N}$ korral $\pi_i(y_n)\to_n\pi_i(x)$, seega $y_n\to x$. Järelikult $x\in\mathrm{Cl}\,\varphi$.

Ülesanne 5.1. Jada piirväärtuse olemasolu võib vaadelda pideva jätkamise probleemina. Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jada topoloogilises ruumis (X,τ). Olgu $Z=\{1/n\colon n\in\mathbb{N}\}$ ja $\tilde{Z}=Z\cup\{0\}$. Kujutus $f\colon Z\to X$, $1/n\mapsto x_n$, on pidev. Tõestada, et jada (x_n) piirelemendi olemasolu on samaväärne sellega, et kujutusel f leidub pidev jätk $\tilde{f}\colon\tilde{Z}\to X$.

Ülesanne 5.2. Jada koonduvus ja piirelement ei sõltu jada elementide järjestusest. Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jada topoloogilises ruumis (X,τ) ning olgu $x\in X$ jada (x_n) piirelement. Tõestada, et bijektsiooni $\pi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ korral on x jada $(x_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ piirelement.

Ülesanne 5.3. Tuua näide jadast mingis topoloogilises ruumis, millel on mitu piirelementi. Näpunäide. Vaadelda näiteks jada triviaalse topoloogiaga hulgas, milles on mitu elementi.

Ülesanne 5.4. Tõestada, et meetrilises ruumis ei saa jadal olla mitu piirelementi.

Ülesanne 5.5. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ kofiniitse ehk Zariski topoloogiaga τ. Tõestada, et topoloogilises ruumis $(\mathbb{R},\tau)$ on iga $x\in\mathbb{R}$ jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n=n$, piirelement. Tõestada, et vaadeldavas topoloogilises ruumis ei ole 2 jada $(1,2,1,2,\dots)$ piirelement.

Ülesanne 5.6. Olgu τ koloenduv topoloogia hulgal $\mathbb{R}$, s.t. kinnisteks hulkadeks on parajasti loenduvad hulgad ja $\mathbb{R}$ (meie käsitluses on ka lõplikud hulgad loenduvad ning tühihulka peame lõplikuks hulgaks).

(a) Tõestada, et topoloogilises ruumis $(\mathbb{R}, \tau)$ koonduvad ainult statsionaarsed jadad.

(b) Olgu $A = (0, 1)$. Tõestada, et $\mathrm{Cl}_\tau A = \mathbb{R}$, kuid ei leidu A elementide jada (a_n), et $a_n \to 1$ $(\mathbb{R}, \tau)$.

(c) Tõestada, et $f\colon (\mathbb{R}, \tau) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ei ole pidev, kuigi f teisendab iga koonduva jada koonduvaks jadaks.

Ülesanne 5.7. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Tõestada, et

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \quad (X \times Y) \iff x_n \to x \quad (X), \quad y_n \to y \quad (Y).$$

6. **Pere.**

Def 6.1. Binaarset seost $\preceq$ hulgas $\mathcal{A}$ nimetatakse *osalise järjestuse seoseks*, kui on täidetud järgmised tingimused

(1) $\alpha \preceq \alpha$ iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral;
(2) kui $\alpha \preceq \beta$ ja $\beta \preceq \alpha$, siis $\alpha = \beta$;
(3) kui $\alpha \preceq \beta$ ja $\beta \preceq \gamma$, siis $\alpha \preceq \gamma$.

Hulka $\mathcal{A}$ koos osalise järjestuse seosega $\preceq$ hulgas $\mathcal{A}$ nimetatakse *suunatud hulgaks*, kui hulga $\mathcal{A}$ mis tahes elementide α ja β korral leidub $\gamma \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha \preceq \gamma$ ja $\beta \preceq \gamma$.

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Funktsiooni f mingist suunatud hulgast $\mathcal{A}$ hulka X nimetatakse *(suunatud) pereks* hulgas X. Kui iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $f(\alpha) = x_\alpha$, siis pere f tähistatakse ka sümboliga $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ või (x_α).

Näide 6.1. 1) Olgu X mingi hulk. Hulga X alamhulkade mingi kogum $\mathfrak{A}$ on osaliselt järjestatud hulk, kui $A, B \in \mathfrak{A}$ korral $A \preceq B$ parajasti siis, kui $A \subset B$. Kogum $\mathfrak{A}$ on osaliselt järjestatud hulk ka juhul, kui $A, B \in \mathfrak{A}$ korral $A \preceq B$ parajasti siis, kui $A \supset B$.

2) Iga jada on pere. Suunatud hulgaks on siin $\mathbb{N}$, kusjuures $m, n \in \mathbb{N}$ korral $m \preceq n$ parajasti siis, kui $m \leq n$.

Hulk $\mathbb{N}$ on suunatud hulk ka juhul, kui $m \preceq n$ parajasti siis, kui $m \geq n$. Fikseerides nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral $x_n \in X$, siis näeme, et perel ei ole «esimest elementi», kuid on «viimane element».

3) Olgu $E \subset \mathbb{R}$. Iga funktsioon $f \colon E \to X$ on pere.

4) Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Punkti $x \in X$ ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$ on suunatud hulk, kui $U, V \in \mathfrak{B}_x$ korral $U \preceq V$ parajasti siis, kui $U \supset V$. Kui iga $U \in \mathfrak{B}_x$ korral fikseerida $x_U \in U$, siis $(x_U)_{U \in \mathfrak{B}_x}$ on pere.

Def 6.2. Öeldakse, et topoloogilise ruumi (X, τ) *pere* $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *koondub elemendiks* $x \in X$, kui punkti x iga ümbruse U korral leidub $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha_0 \preceq \alpha \implies x_\alpha \in U.$$

Sel juhul öeldakse ka, et x on *pere* (x_α) *piirelement* ja kirjutatakse

$$x_\alpha \to x \quad (X, \tau).$$

Öeldakse, et pere koondub, kui sel perel leidub piirelement.

Lause 6.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $x \in X$ ja $A \subset X$. Element x on A puutepunkt (ehk $x \in \operatorname{Cl} A$) parajasti siis, kui leidub hulga A elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, mille piirelement on x, s.t $x_\alpha \to x$.

Tõestus. Eeldame, et $x \in \operatorname{Cl} A$. Olgu $\mathcal{A}$ punkti x kõigi ümbruste kogum. Hulk $\mathcal{A}$ on suunatud hulk, kui punkti x ümbruste U ja V korral $U \preceq V$

parajasti siis, kui $U \supset V$. Iga $U \in \mathcal{A}$ korral fikseerime vabalt $x_U \in U \cap A$. Pere $(x_U)_{U\in\mathcal{A}}$ koondub ilmselt elemendiks x.

Vastupidine implikatsioon järeldub vahetult sulundipunkti kriteeriumist ümbruste abil. □

Järeldus 6.2. Alamhulk A on kinnine parajasti siis, kui A sisaldab iga oma pere piirelemendi.

Järeldus 6.3. Element x on hulga A piirpunkt (ehk $x \in A'$) parajasti siis, kui leidub pere $x_\alpha \in A \setminus \{x\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$, mis koondub punktiks x.

Lause 6.4. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Olgu $x \in X$. Kujutus f on pidev punktis x parajasti siis, kui ruumis (X, τ_X) elemendiks x koonduva mis tahes pere (x_α) korral pere $(f(x_\alpha))$ koondub elemendiks $f(x)$ ruumis (Y, τ_Y).

Tõestus. Eeldame, et f on pidev punktis x. Olgu $x_\alpha \to_{\alpha\in\mathcal{A}} x$. Olgu V punkti $f(x)$ ümbrus. Eelduse kohaselt leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$. Olgu $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ selline, et $x_\alpha \in U$, kui $\alpha \in \mathcal{A}$ ja $\alpha_0 \preceq \alpha$. Sel juhul $f(x_\alpha) \in V$. Järelikult $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Eeldame, et $f(x_\alpha) \to f(x)$, kui $x_\alpha \to x$. Näitame, et f on pidev punktis x. Kui f ei ole pidev punktis x, siis leidub punkti $f(x)$ selline ümbrus V, et punkti x iga ümbruse U korral $f(U) \not\subset V$. Sel juhul olgu $x_U \in U$ niisugune, et $f(x_U) \notin V$. Pere (x_U) koondub küll elemendiks x, kuid $f(x_U) \not\to f(x)$. See on vastuolus eeldusega. □

Järeldus 6.5. Kujutus f on pidev parajasti siis, kui

$$x_\alpha \to x \quad (X, \tau_X) \implies f(x_\alpha) \to f(x) \quad (Y, \tau_Y).$$

Tõestus. See on viimase tulemuse vahetu järeldus.

Siin saaks implikatsiooni «$\Leftarrow$»puhul arutleda ka lause 6.1 abil. Piisab ju näidata (kujutuse pidevuse kriteerium sulundi abil), et $f(\operatorname{Cl} A) \subset \operatorname{Cl} f(A)$ iga $A \subset X$ korral. Kui $x \in \operatorname{Cl} A$, siis lause 6.1 põhjal leidub $a_\alpha \in A$, $\alpha \in \mathcal{A}$ nii, et $a_\alpha \to x$. Eelduse kohaselt $f(a_\alpha) \to f(x)$. Seega lause 6.1 põhjal $f(x) \in \operatorname{Cl} f(A)$. □

Järeldus 6.6. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X. Samaväärsed on:

(1) $\tau_1 = \tau_2$;
(2) $x_\alpha \to x \quad (X, \tau_1) \iff x_\alpha \to x \quad (X, \tau_2)$.

Tõestus. Mõlemad tingimused on ilmselt samaväärsed formaalse ühikteisenduse $I\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$, $x \mapsto x$, ja selle pöördkujutuse pidevusega. □

***Ülesanne 15.** Olgu X mingi hulk, olgu I mingi mittetühi indeksite hulk ning olgu iga $i \in I$ korral (Y_i, τ_i) topoloogiline ruum ja $f_i\colon X \to Y_i$.

Olgu τ vähim topoloogia hulgal X, mille suhtes iga f_i, $i \in I$, on pidev. Olgu $x \in X$ ja $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ pere hulgas X. Tõestada, et

$$x_\alpha \to x \quad (X, \tau) \iff \forall i \in I \quad f_i(x_\alpha) \to f_i(x) \quad (Y_i, \tau_i).$$

Järeldada sellest, et topoloogilise ruumi (Z, τ_Z) ja $g\colon Z \to X$ korral g on pidev parajasti siis, kui iga $i \in I$ korral $f_i \circ g$ on pidev.

Ülesanne 6.1. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Tõestada, et (x_α, y_α) koondub piirelemendiks (x, y) korrutisruumis $X \times Y$ parajasti siis, kui $x_\alpha \to x$ topoloogilises ruumis (X, τ_X) ja $y_\alpha \to y$ topoloogilises ruumis (Y, τ_Y). (Analoogiline tulemus kehtib üldise korrutisruumi korral.)

Ülesanne 6.2. Olgu τ_1 ja τ_2 topoloogiad hulgal X. Tõestada, et $\tau_1 \subset \tau_2$ korral

$$x_\alpha \to x \quad (X, \tau_2) \implies x_\alpha \to x \quad (X, \tau_1).$$

Ülesanne 6.3. Tõestada, et kui pere koondub topoloogilise ruumi (X, τ) alamruumis, siis pere koondub samaks piirelemendiks ka ruumis (X, τ).

Ülesanne 6.4. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Olgu $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Tõestada perede abil, et $\operatorname{Cl}(A \times B) = \operatorname{Cl} A \times \operatorname{Cl} B$.

7. **Filter.** Olgu X hulk.

Def 7.1. Öeldakse, et $\mathfrak{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filter* hulgas X, kui

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{F}$;
(2) $A, B \in \mathfrak{F} \implies A \cap B \in \mathfrak{F}$;
(3) $A \in \mathfrak{F},\ A \subset B \subset X \implies B \in \mathfrak{F}$.

Öeldakse, et $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ on *filtri baas* hulgas X, kui

(1) $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;
(2) $\forall A, B \in \mathfrak{B} \quad \exists C \in \mathfrak{B} \quad C \subset A \cap B$.

Märkus. Kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} = \{D \subset X \colon \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subset D\}$$

on filter hulgas X.

Näide 7.1. 1) Olgu $a \in \mathbb{R}$. Eelmise näite põhjal on hulgas $\mathbb{R}$ filtri baas kõigi vahemike $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ hulk $(\varepsilon > 0)$. Ka järgmised hulgad on filtri baasid hulgas $\mathbb{R}$:

(1) $\{(a, a + \varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$;
(2) $\{[a, a + \varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$;
(3) $\{(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \colon \varepsilon > 0\}$.

2) Hulk $\{[x, \infty) \colon x \in \mathbb{R}\}$ on filtri baas hulgas $\mathbb{R}$.

3) Hulk $\{\{n, n + 1, n + 2, \dots\} \colon n \in \mathbb{N}\}$ on filtri baas hulgas $\mathbb{N}$.

4) Olgu $A \subset X$ mittetühi alamhulk. Kõigi hulka A sisaldavate alamhulkade kogum on filter hulgas X.

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Näide 7.2. Kui $x \in X$, siis punkti x kõigi ümbruste hulk $\mathfrak{N}_x$ on filter ja punkti x ümbruste baas on filtri baas.

Def 7.2. Olgu $x \in X$ ja $\mathfrak{F}$ filter hulgas X. Öeldakse, et *filter* $\mathfrak{F}$ *koondub punktiks* x, kui punkti x iga ümbruse U korral $U \in \mathfrak{F}$. Sel juhul kirjutatakse $\mathfrak{F} \to x$.

Olgu $\mathfrak{B}$ filtri baas. Öeldakse, et *filtri baas* $\mathfrak{B}$ *koondub punktiks* x, kui filter $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ koondub punktiks x, s.t. punkti x iga ümbruse U korral leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$. Sel juhul kirjutatakse $\mathfrak{B} \to x$.

Märkus. Kui $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{G}$ on filtrid topoloogilises ruumis (X, τ), $x \in X$, $\mathfrak{F} \to x$ ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, siis $\mathfrak{G} \to x$.

Kui on teada punkti x ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$, siis filtri või filtri baasi koondumiseks piisab vaadelda juhtu, kus $U \in \mathfrak{B}_x$.

Näide 7.3. Punkti $x \in X$ kõigi ümbruste filter $\mathfrak{N}_x$ koondub punktiks x ning punkti x ümbruste baas $\mathfrak{B}_x$ kui filtri baas koondub punktiks x.

Lause 7.1. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $x \in X$ ja $A \subset X$. Siis $x \in \operatorname{Cl} A$ parajasti siis, kui leidub filtri baas hulgas A, mis koondub punktiks x.

Tõestus. ($\Rightarrow$) Olgu $x \in \operatorname{Cl} A$. Olgu $\mathfrak{B}_x$ punkti x ümbruste baas. Võtame $\mathfrak{B} = \{A \cap B \colon B \in \mathfrak{B}_x\}$. Ilmselt on $\mathfrak{B}$ filtri baas, kusjuures $\mathfrak{B} \to x$.

($\Leftarrow$) Olgu U punkti x suvaline ümbrus. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$. Kuna $\varnothing \neq B \subset A$, siis järelikult $A \cap U \neq \varnothing$. $\square$

Lause 7.2. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning $f \colon X \to Y$. Olgu $x \in X$. Kujutus f on pidev punktis x parajasti siis, kui hulgas X iga punktiks x koonduva filtri baasi $\mathfrak{B}$ korral filtri baas $f(\mathfrak{B}) = \{f(B) \colon B \in \mathfrak{B}\}$ koondub punktiks $f(x)$.

Tõestus. ($\Rightarrow$) Olgu $\mathfrak{B}$ filtri baas hulgas X. Eeldame, et $\mathfrak{B} \to x$. Olgu V punkti $f(x)$ ümbrus. Kui f on pidev punktis x, siis leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(U) \subset V$. Eelduse kohaselt leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $B \subset U$, seega $f(B) \subset V$. Järelikult $f(\mathfrak{B}) \to f(x)$.

($\Leftarrow$) Kui $\mathfrak{B}_x$ on punkti x ümbruste baas, siis $f(\mathfrak{B}_x) \to f(x)$, sest $\mathfrak{B}_x \to x$. Seega punkti $f(x)$ iga ümbruse V korral leidub $B \in \mathfrak{B}_x$ nii, et $f(B) \subset V$. Järelikult on f pidev punktis x. $\square$

Ülesanne 7.1. Tõestada, et kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} = \{A \subset X \colon \exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subset A\}$$

on filter hulgas X.

Ülesanne 7.2. Olgu X ja Y hulgad ning $f \colon X \to Y$. Tõestada, et kui $\mathfrak{B}$ on filtri baas hulgas X, siis $\mathfrak{C} = \{f(B) \colon B \in \mathfrak{B}\}$ on filtri baas hulgas Y.

Ülesanne 7.3. Olgu $\mathfrak{B} = \{(n, \infty) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Tõestada, et filtri baas $\mathfrak{B}$ ei koondu hulgas $\mathbb{R}$.

Ülesanne 7.4. Kirjutada välja Sierpinski ruumi kõik filtrid ja nende piirväärtused.

Filtrite ja perede vahekord. Mis tahes filter $\mathfrak{F}$ hulgas X on suunatud hulk (tagurpidi sisalduvuse suhtes).

Lause 7.3. Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgas X ja $x \in X$. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F} \to x$;
(2) iga pere $f \colon \mathfrak{F} \to X$, $f(A) = x_A \in A$, korral $x_A \to x$.

Tõestus. ($\Rightarrow$) Olgu U punkti x ümbrus. Eelduse kohaselt $U \in \mathfrak{F}$. Kui $A \in \mathfrak{F}$ ja $U \preceq A$ (s.t. $A \subset U$), siis $x_A \in A \subset U$.

($\Leftarrow$) Oletame, et $\mathfrak{F} \not\to x$. Mistõttu leidub punkti x selline ümbrus U, et $U \notin \mathfrak{F}$. Valime iga $A \in \mathfrak{F}$ korral $x_A \in A \setminus U$. Ilmselt $x_A \not\to x$, mis on vastuolu. $\square$

Lause 7.4. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ pere hulgas X ja $x \in X$. Samaväärsed on:

(1) $x_\alpha \to x$;
(2) filter $\mathfrak{F} = \{A \subset X \colon \exists \alpha_0 \in \mathcal{A} \quad \alpha_0 \preceq \alpha \implies x_\alpha \in A\}$ koondub punktiks x.

Tõestus. Tingimus $x_\alpha \to x$ on samaväärne sellega, et punkti x iga ümbrus $U \in \mathfrak{F}$ ehk $\mathfrak{F} \to x$. $\square$

8. **Faktorruum.** Olgu (X, τ_X) topoloogiline ruum, R ekvivalentsusseos hulgas X, X/R faktorhulk ja $q\colon X \to X/R$ loomulik faktorkujutus.

Def 8.1. Faktorhulga X/R topoloogiat

$$\tau = \{V \subset X/R\colon q^{-1}(V) \in \tau_X\}$$

nimetatakse *faktortopoloogiaks.* Faktorhulka koos faktortopoloogiaga nimetatakse *faktorruumiks* (ingl. k. *quotient space*).

Märkus. 1) Loomulik faktorkujutus faktorruumile on pidev.

2) Faktortopoloogia τ on suurim topoloogia faktorhulgal X/R, mille korral loomulik faktorkujutus $q\colon X \to X/R$ on pidev.

***Ülesanne 16** (5 p)**.** Olgu Z hulk ja (X_i, τ_i), $i \in I$, topoloogilised ruumid. Olgu $q_i\colon X_i \to Z$. Olgu

$$\tau = \{V \subset Z\colon q_i^{-1}(V) \in \tau_i \quad \forall i \in I\}.$$

Tõestada, et τ on topoloogia hulgal Z, iga q_i on pidev ning τ on tugevaim topoloogia, mille korral iga q_i on pidev. Tõestada, et mis tahes topoloogilise ruumi (Y, τ_Y) korral on $g\colon (Z, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ pidev parajasti siis, kui iga $i \in I$ korral $g \circ q_i$ on pidev.

Näide 8.1. 1) Olgu $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Olgu ekvivalentsusseos R hulgas I defineeritud tingimusega xRx, kui $x \in I$ ja $0R1$. Seega ekvivalentsusseos R on määratud hulga I tükeldusega, kus vaid $\{0, 1\}$ ei ole üheelemendiline. Lühemalt tähistame sellist seost $[0 \sim 1]$. Saab näidata, et $I/[0 \sim 1] \cong S^1$, kus S^1 on ühiksfäär ruumis $\mathbb{R}^2$. Vaadelda esmalt kujutust

$$f\colon I \to S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

Sobiv kujutus on $g\colon I/R \to S^1$, $g([t]) = f(t)$.

2) Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu B ruumi $\mathbb{R}^n$ kinnine ühikkera, s.t

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leq 1\}.$$

Hulgas $\mathbb{B}$ olgu ekvivalentsusseos R määratud tükeldusega, kus vaid alamhulk S (vastav sfäär) ei ole üheelemendiline. Saab näidata, et $B/R \cong S^n$, kus S^n on ühiksfäär ruumis $\mathbb{R}^{n+1}$. (Eelmine näide on sisuliselt selle näite erijuht juhul $n = 1$.) Sobiv kujutus on

$$f\colon x \mapsto (\frac{x}{|x|} \sin \pi|x|, -\cos \pi|x|).$$

3) Faktorruum $I^2/[(0, t) \sim (1, t),\ t \in I]$ on homöomorfne korrutisruumiga $S^1 \times I$. Vaadelda esmalt kujutust $f \times 1_I\colon I \times I \to S^1 \times I$, kus f on näites 1 defineeritud kujutus.

4) Faktorruum $I^2/[(0, t) \sim (1, t),\ (t, 0) \sim (t, 1),\ t \in I]$ on homöomorfne korrutisruumiga $S^1 \times S^1$. Vaadelda esmalt kujutust

$$f \times f\colon I \times I \to S^1 \times S^1.$$

5) *Möbiuse leht* on faktorruum

$$I^2/[(0,t) \sim (1,1-t),\ t \in I].$$

6) *Kleini pudel* on faktorruum

$$I^2/[(t,0) \sim (t,1),\ (0,t) \sim (1,1-t),\ t \in I].$$

7) Olgu $n \in \mathbb{N}$. Defineerime hulgas $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ekvivalentsusseose $\sim$ järgmiselt: $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1})$ parajasti siis, kui leidub reaalarv $\lambda \neq 0$ nii, et iga $i = 1, \dots, n+1$ korral $x_i = \lambda y_i$. Projektiivseks ruumiks $P^n\mathbb{R}$ nimetatakse faktorruumi $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$.

Lause 8.1. Faktorruumi X/R alamhulk F on kinnine parajasti siis, kui $q^{-1}(F)$ on kinnine (ruumis (X, τ_X)).

Tõestus. Alamhulga $F \subset X/R$ korral on ilmselt $q^{-1}((X/R) \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F)$. $\square$

Lause 8.2. Olgu (Y, τ_Y) topoloogiline ruum ja $g\colon X/R \to Y$. Kujutus g on pidev parajasti siis, kui $g \circ q\colon X \to Y$ on pidev.

Tõestus. Kui g on pidev, siis pidevate kujutuste kompositsioon $g \circ q$ on pidev.

Eeldame, et $g \circ q$ on pidev ja näitame, et g on pidev. Olgu $V \in \tau_Y$. Siis $q^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau_X$, mistõttu $g^{-1}(V) \in \tau$. $\square$

Järeldus 8.3. Olgu $f\colon X \to Y$ selline, et

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 R x_2 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Tekib kujutus

$$f/R\colon X/R \to Y,\ [x] \mapsto f(x).$$

Ilmselt $f = f/R \circ q$. Lause 8.2 põhjal on f/R pidev parajasti siis, kui f on pidev.

Olgu $f\colon X \to Y$. Vaatleme hulgas X ekvivalentsusseost $R(f)$,

$$x_1 R(f) x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

Seos $R(f)$ on järelikult määratud tükeldusega $\{f^{-1}(\{y\})\colon y \in Y\}$. Kujutuse f saame esitada kujul $g \circ q$, kus $q\colon X \to X/R(f)$ on loomulik faktorkujutus ja $g\colon X/R(f) \to Y$, $g([x]) = f(x)$, s.t. $g = f/R(f)$. Ilmselt on q sürjektiivne ja g injektiivne, kusjuures g on bijektiivne parajsti sürjektiivse f korral. Lause 8.2 põhjal on f ja g pidevad samaaegselt. Järgnevalt selgitame kujutuse f tingimusi, mille korral on g homöomorfism.

Kui $f\colon X \to Y$ on pidev ja sürjektiivne, siis g on küll pidev ja bijektiivne, kuid g ei ole üldjuhul homöomorfism (näiteks vaadelda hulka

$X = [0,1]$ diskreetse topoloogiaga ning hulka $Y = [0,1]$ tavalise topoloogiaga ning olgu $f\colon X \to Y$ formaalne ühikteisendus).

Lihtne piisav tingimus on järgmine.

Lause 8.4. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja sürjektiivne. Kui leidub pidev kujutus $h\colon Y \to X$ nii, et $f \circ h$ on hulga Y ühikteisendus, siis $g = f/R\colon X/R(f) \to Y$ on homöomorfism.

Tõestus. Ülesanne. □

Def 8.2. Kujutus $f\colon X \to Y$ on *faktorkujutus*, kui f esitub kujul $g \circ q$, kus q on mingi loomulik faktorkujutus ja g on homöomorfism.

Märkus. Loomulik faktorkujutus on ilmselt faktorkujutus.

Lause 8.5. Olgu $f\colon X \to Y$ sürjektiivne. Samaväärsed on:

(1) f on faktorkujutus;
(2) $f^{-1}(V) \subset X$ on lahtine parajasti siis, kui $V \subset Y$ on lahtine;
(3) $f^{-1}(F) \subset X$ on kinnine parajasti siis, kui $F \subset Y$ on kinnine;
(4) $X/R(f) \to Y$, $[x] \mapsto f(x)$, on homöomorfism.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Eeldame, et f on faktorkujutus. Olgu $f = g \circ q$, kus $q\colon X \to X/R$ on mingi loomulik faktorkujutus ning $g\colon X/R \to Y$ on homöomorfism. Olgu $V \subset Y$. Faktortopoloogia definitsiooni põhjal on $f^{-1}(V) = q^{-1}(g^{-1}(V))$ lahtine parajasti siis, kui $g^{-1}(V)$ on lahtine. Kuna g on homöomorfism, siis viimane on samaväärne sellega, et V on lahtine.

(2) $\Rightarrow$ (3). Olgu $F \subset Y$. Tingimuse (2) põhjal on $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ lahtine parajasti siis, kui $Y \setminus F$ on lahtine. Ehk $f^{-1}(F)$ on kinnine parajasti siis, kui F on kinnine.

(3) $\Rightarrow$ (4). Teame, et g on bijektiivne. Piisab näidata, et g kinnine. Olgu $K \subset X/R(f)$ kinnine. Paneme tähele, et $f^{-1}(g(K)) = q^{-1}(g^{-1}(g(K))) = q^{-1}(K)$ on kinnine. Tingimuse (3) põhjal on järelikult $g(K)$ kinnine.

(4) $\Rightarrow$ (1). Ilmne. □

Järeldus 8.6. Olgu f pidev ja sürjektiivne. Kui f on lahtine või kinnine, siis f on faktorkujutus.

Tõestus. Ülesanne. □

Näide 8.2. Olgu $X = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ ja $Y = [0,2] \subset \mathbb{R}$. Kujutus $f\colon X \to Y$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ x-1, & x \in [2,3], \end{cases}$$

on faktorkujutus, sest f on pidev, sürjektiivne ja kinnine. (Kujutus f ei ole lahtine.)

Näide 8.3. Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ isomeetria, s.o. isomeetriline bijektsioon. Siis on f faktorkujutus, sest f on pidev, sürjektiivne ja lahtine. Muidugi on selline f ka kinnine, f on ju homöomorfism.

Näide 8.4. Korrutisruumi loomulik projektor on pidev, sürjektiivne ja lahtine, seega faktorkujutus.

Näide 8.5. Vaatleme kujutust $f\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ehk $t \mapsto e^{2\pi ti}$. Osutub, et f on faktorkujutus. Ilmselt on f pidev ja sürjektiivne. Paneme tähele, et f teisendab lahtised vahemikud (a, b), kus $b - a < 1$ sfääri S^1 lahtisteks hulkadeks, järelikult on f lahtine kujutus. Seega on $\mathbb{R}/R(f) \cong S^1$ ehk $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Vaadeldud faktorhulka tähistatakse ka sümboliga $\mathbb{T}$ ja nimetatakse (ühemõõtmeliseks) tooriks.

Kujutuse f ahend $f|_{[0,1]}\colon [0, 1] \to S^1$ on samuti faktorkujutus. Ilmselt on $f|_{[0,1]}$ pidev ja sürjektiivne. Ahend $f|_{[0,1]}$ on ka kinnine (kuid mitte lahtine; f ise pole kinnine).

Märkus. Viimase näite teise osa põhjal võib samuti öelda, et f on faktorkujutus (võtta järgnevas tulemuses kujutuseks $\iota\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ sisestus).

Kui kahe pideva funktsiooni f ja ι korral on $f \circ \iota$ faktorkujutus, siis f on faktorkujutus. (Põhjendus on ülesanne.)

Olgu X ja Y hulgad ning R ja S ekvivalentsusseosed, vastavalt hulgal X ja Y. Hulgal $X \times Y$ tekib ekvivalentsusseos $R \times S$, kui $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ korral

$$(x_1, y_1)R \times S(x_2, y_2) \iff x_1Rx_2, \quad y_1Sy_2.$$

Tekib loomulik bijektiivne kujutus

$$g\colon X \times Y/R \times S \to X/R \times Y/S, \quad [(x, y)] \mapsto ([x], [y]).$$

Topoloogiliste ruumide (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) korral on selline g pidev, kuid ei pruugi olla homöomorfism.

Lause 8.7. Kui loomulikud faktorkujutused $q_R\colon X \to X/R$ ja $q_S\colon Y \to Y/S$ on lahtised, siis loomulik kujutus $g\colon X \times Y/R \times S \to X/R \times Y/S$ on homöomorfism.

Tõestus. Piisab näidata, et $f := g \circ q$ on lahtine, kus $q\colon X \times Y \to X \times Y/R \times S$ on loomulik faktorkujutus. Paneme tähele, et $f = q_X \times q_Y$. $\square$

Märkus. Viimane tulemus kehtib ka üldisel juhul, s.o. suvalise korrutisruumi $\prod_{i \in I} X_i$ ja ekvivalentsusseoste R_i korral hulgas X_i, $i \in I$, kui vastavad loomulikud faktorkujutused on lahtised.

Näide 8.6. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Vaatleme hulgas $\mathbb{R}^n$ ekvivalentsusseost R,

$$(x_i) \sim (\tilde{x}_i) \iff x_i - \tilde{x}_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Kuna faktorkujutus $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on lahtine, siis $\mathbb{R}^n/R \cong \mathbb{T}^n$ ehk $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n$. Hulka $\mathbb{T}^n$ nimetatakse ka n-mõõtmeliseks tooriks.

Näide 8.7. Ka kujutus $f|_{[0,1]} \times f|_{[0,1]}\colon I^2 \to S^1 \times S^1$ on faktorkujutus. Siin ei ole loomulik faktorkujutus $q\colon I \to I/R(f|_{[0,1]})$ lahtine!

Hiljem tõestame järgmise üldise tulemuse.

Teoreem 8.8. Kui $f\colon X \to Y$ on pidev ja sürjektiivne ning X on kompaktne ja Y on Hausdorffi ruum, siis f on faktorkujutus.

Ülesanne 8.1. Kontrollida, et faktortopoloogia on topoloogia.

Ülesanne 8.2. Olgu R ekvivalentsusseos hulgal X ja S ekvivalentsusseos hulgal Y. Olgu $f\colon X \to Y$ selline, et

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 R x_2 \implies f(x_1) S f(x_2).$$

Tõestada, et kui f on pidev, siis

$$\hat{f}\colon X/R \to Y/S, \quad [x] \mapsto [f(x)],$$

on pidev.

Ülesanne 8.3. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja sürjektiivne. Tõestada, et kui leidub pidev kujutus $h\colon Y \to X$ nii, et $f \circ h$ on hulga Y ühikteisendus, siis $g = f/R\colon X/R(f) \to Y$ on homöomorfism.

Ülesanne 8.4. Olgu $A \subset X$. Olgu $f\colon X \to A$ pidev ja sürjektiivne ning $f(a) = a$ iga $a \in A$ korral. Tõestada, et f on faktorkujutus.

Ülesanne 8.5. Olgu f pidev ja sürjektiivne. Tõestada, et kui f on lahtine või kinnine, siis f on faktorkujutus.

Ülesanne 8.6. Olgu $f\colon X \to Y$ faktorkujutus. Tõestada, et f on lahtine (kinnine) parajasti siis, kui iga lahtise (kinnise) $U \subset X$ korral on $f^{-1}(f(U)) \subset X$ lahtine (kinnine).

Ülesanne 8.7. Tõestada, et kui kahe pideva funktsiooni f ja ι korral on $f \circ \iota$ faktorkujutus, siis f on faktorkujutus.

Ülesanne 8.8. Tõestada, et kahe faktorkujutuse kompositsioon on faktorkujutus.

3. Topoloogilised omadused

Topoloogiline omadus on niisugune topoloogilistel ruumidel vaadeldav omadus, mis on homöomorfsetel ruumidel samaaegselt.

Näiteks on topoloogilised omadused: topoloogilise ruumi aluseks oleva hulga võimsus, topoloogia võimsus, vähim topoloogia baasi võimsus.

Topoloogia klassikaliseks ülesandeks on määrata uuritava topoloogilise ruumi korral

1) millise (tuntud) topoloogilise ruumiga on vaadeldav ruum homöomorfne;
2) millised (tuntud) topoloogilised omadused vaadeldaval ruumil on ja milliseid omadusi tal pole (see omakorda aitab esimesele küsimusele vastamisel).

1. **Loenduvuse aksioomid.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 1.1. Ruum (X, τ) rahuldab *esimest loenduvuse aksioomi*, kui hulga X mis tahes punktil x leidub loenduv ümbruste baas.

Ruum (X, τ) *rahuldab teist loenduvuse aksioomi*, kui topoloogial τ leidub loenduv baas.

Ruum (X, τ) on *separaabel*, kui hulgas X leidub loenduv kõikjal tihe alamhulk A, s.t. leidub hulga X selline loenduv alamhulk A, et $\operatorname{Cl} A = X$.

Lause 1.1. Kui topoloogiline ruum rahuldab teist loenduvuse aksioomi, siis ta

(a) rahuldab esimest loenduvuse aksioomi;
(b) on separaabel.

Tõestus. (a) Ilmne.

(b) Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Eeldame, et ruum (X, τ) rahuldab teist loenduvuse aksioomi. Olgu $\mathfrak{B}$ topoloogia τ loenduv baas. Näitame, et (X, τ) on separaabel. Fikseerime vabalt iga mittetühja $B \in \mathfrak{B}$ korral $x_B \in B$ (kui B on tühihulk, siis elementi x_B ei ole). Hulk $A := \{x_B \colon B \in \mathfrak{B}\}$ on ilmselt loenduv. Paneme tähele, et A on kõikjal tihe. Tõepoolest, kui x on hulga X suvaline element ja U on punkti x ümbrus, siis leidub $B \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B \subset U$. Kuna selline B ei ole tühihulk, siis $x_B \in A$. Seega $x_B \in A \cap U$, mistõttu $A \cap U \neq \varnothing$. Järelikult on $\operatorname{Cl} A = X$. $\square$

Näide 1.1. 1) Suvaline metriseeruv topoloogiline ruum rahuldab esimest loenduvuse aksioomi.

2) Tavalise topoloogiaga $\mathbb{R}$ rahuldab teist loenduvuse aksioomi. Loenduva baasi moodustavad näiteks kõikvõimalikud vahemikud kujul $(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n})$, kus $q \in \mathbb{Q}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Viimase lause põhjal on $\mathbb{R}$ separaabel. Ruumi $\mathbb{R}$ separaablust võib ka otse näidata, ruumi $\mathbb{R}$ kõikjal tihedaks loenduvaks alamhulgaks on näiteks $\mathbb{Q}$.

3) Suvalisel metriseeruval topoloogial ei tarvitse leiduda loenduvat baasi. Teame, et diskreetne topoloogia on metriseeruv, kuid diskreetse topoloogia baas peab sisaldama kõik üheelemendilised alamhulgad. Järelikult ei saa mitteloenduva hulga diskreetse topoloogia ükski baas olla loenduv.

4) Topoloogilist ruumi $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$ nimetatakse ka *Sorgenfrey sirgeks.* See ruum on separaabel ja rahuldab esimest loenduvuse aksioomi, kuid ei rahulda teist loenduvuse aksioomi. Punkti $x \in \mathbb{R}$ loenduvaks ümbruste baasiks sobib ilmselt $\mathfrak{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n})\colon n \in \mathbb{N}\}$ hulk. Kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks sobib (ilmselt) $\mathbb{Q}$. Näitame veel, et $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$ ei rahulda teist loenduvuse aksioomi, see oli ülesanne I. 6. 3. Olgu $\mathfrak{B}$ topoloogia $\tau_{[\cdot,\cdot)}$ baas. Fikseerime iga $x \in \mathbb{R}$ korral $B_x \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B_x \subset [x, x + 1)$. Paneme tähele, et $B_x \neq B_y$, kui $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x \neq y$. Seega ei saa $\mathfrak{B}$ olla loenduv.)

Lause 1.2. Metriseeruv separaabel topoloogiline ruum rahuldab teist loenduvuse aksioomi.

Tõestus. Olgu (X, τ) metriseeruv separaabel topoloogiline ruum. Olgu d vastav meetrika ja A hulga X loenduv kõikjal tihe alamhulk. Näitame, et $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n})\colon a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$ on topoloogia τ baas. Olgu U ruumi X lahtine alamhulk ja x hulga U element. Kuna punkti x ümbruste baasi moodustavad lahtised kerad keskpunktiga x, siis leidub kera $B(x, r) \subset U$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in A$ sellised, et $d(a, x) < \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$. Siis $x \in B(a, \frac{1}{n}) \subset B(x, r) \subset U$. Järelikult on $\mathfrak{B}$ topoloogia τ baas. Kuna $\mathfrak{B}$ on ilmselt loenduv, siis (X, τ) rahuldab teist loenduvuse aksioomi. $\square$

Järeldus 1.3. 1) Metriseeruv topoloogiline ruum on separaabel parajasti siis, kui ta rahuldab teist loenduvuse aksioomi.

2) Sorgenfrey sirge $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$ ei ole metriseeruv, sest ta on separaabel, kuid ei rahulda teist loenduvuse aksioomi.

Lause 1.4. (a) Separaabli topoloogilise ruumi pidev kujutis on separaabel.
(b) Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja lahtine. Kui (X, τ_X) rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi, siis alamruum $f(X) \subset Y$ rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi.

Tõestus. Ülesanne. $\square$

Järeldus 1.5. 1) Kolm vaadeldavat omadust on topoloogilised omadused.

2) Separaabli topoloogilise ruumi faktorruum on separaabel. (Vastav loomulik faktorkujutus on pidev.)

3) Kui korrutisruum rahuldab mingit loenduvuse aksioomi, siis ka iga komponentruum rahuldab sama loenduvuse aksioomi. (Projektsioon on pidev ja lahtine.)

Lause 1.6. Esimest (teist) loenduvuse aksioomi rahuldava topoloogilise ruumi alamruum rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi.

Tõestus. Vahetu järeldus definitsioonist ja lausest II. 1.5. □

Järeldus 1.7. Metriseeruva separaabli topoloogilise ruumi alamruum on separaabel.

Tõestus. Metriseeruva topoloogilise ruumi alamruum on metriseeruv! □

Märkus. Ülesanded näitavad, et separaabli topoloogilise ruumi alamruum ei tarvitse üldiselt olla separaabel; separaabli topoloogilise ruumi lahtine alamruum on separaabel.

Lause 1.8. (a) Kui topoloogilised ruumid (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) rahuldavad esimest (teist) loenduvuse aksioomi, siis korrutisruum $X \times Y$ rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi;
(b) Kui topoloogilised ruumid (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) on separaablid, siis korrutisruum $X \times Y$ on separaabel.

Tõestus. (a) Teise loenduvuse aksioomi juht on lause II. 4.7 vahetu järeldus. Esimese loenduvuse aksioomi juhul on tõestuse skeem analoogiline.

(b) Ülesanne. □

**Märkus.* 1) Pole raske kontrollida, et loenduva hulga esimest (teist) loenduvuse aksioomi rahuldavate topoloogiliste ruumide korrutisruum rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi. (Mitteloenduva hulga teist loenduvuse aksioomi rahuldavate topoloogiliste ruumide korrutisruum ei tarvitse rahuldada isegi esimest loenduvuse aksioomi.)

2) Separaablite ruumide korrutisruum on separaabel, kui indeksite hulga võimsus ei ületa kontiinumi võimsust.

Näide 1.2. Kuna $\mathbb{R}$ on separaabel, siis $\mathbb{R}^n$ on separaabel mis tahes $n \in \mathbb{N}$ korral.

Näide 1.3. Käesolevas paragrahvis nägime, et separaabli topoloogilise ruumi faktorruum on separaabel. Näitame, et esimest või teist loenduvuse aksioomi rahuldava topoloogilise ruumi faktorruum ei tarvitse rahuldada isegi esimest loenduvuse aksioomi.

Faktorruum $\mathbb{R}/[x \sim y \quad \forall x, y \in \mathbb{N}]$ ei rahulda esimest loenduvuse aksioomi. Olgu $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ vastav loomulik faktorkujutus. Oletame, et $\{U_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ on vaadeldava faktorruumi punkti $[1]$ ümbruste baas. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $q^{-1}(U_n)$ punkti n (isegi iga naturaalarvu) ümbrus. Olgu $0 < r_n < 1$ selline, et $B(n, r_n) \subset q^{-1}(U_n)$. Kuna $q(B(n, \frac{r_n}{2})) \subsetneqq q(B(n, r_n)) \subset U_n$, siis $U_n \not\subset q(B(n, \frac{r_n}{2}))$. Täpsemalt, ükski U_n ei sisaldu punkti $[1]$ (lahtises) ümbruses $q(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(n, \frac{r_n}{2}))$. Saime vastuolu.

***Ülesanne 17** (5 p)**.** Tõestada, et loenduva hulga separaablite topoloogiliste ruumide korrutisruum on separaabel. NB! Loenduvate hulkade korrutishulk ei pruugi olla loenduv, nt. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0, 1\}$ ei ole loenduv.

Ülesanne 1.1. Tõestada, et kui topoloogia mingi baas on loenduv, siis selle topoloogia iga baas sisaldab loenduva baasi.

Ülesanne 1.2. Tõestada, et $(\mathbb{R}, \tau)$, kus τ on kofiniitne topoloogia ei rahulda esimest loenduvuse aksioomi. (Ta ei ole seega ka metriseeruv.)

Ülesanne 1.3. Olgu τ_1, τ_2 topoloogiad hulgal X, kusjuures $\tau_1 \subset \tau_2$. Tõestada, et kui (X, τ_2) on separaabel, siis ka (X, τ_1) on separaabel.

Ülesanne 1.4. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja lahtine. Tõestada, et kui (X, τ_X) rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi, siis alamruum $f(X) \subset Y$ rahuldab esimest (teist) loenduvuse aksioomi.

Ülesanne 1.5. Tõestada, et separaabli topoloogilise ruumi pidev kujutis on separaabel.

Ülesanne 1.6. Sorgenfrey tasand on kahe Sorgenfrey sirge korrutisruum. Vaatleme korrutisruumi $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)}) \times (\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$. Topoloogia baasiks on siin $\mathfrak{B} = \{[a, b) \times [c, d)\colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\}$. Tõestada, et n.ö. anti-diagonaal $\Delta = \{(x, -x)\colon x \in \mathbb{R}\}$ ei ole vaadeldava korrutisruumi separaabel alamruum.

Ülesanne 1.7. Tõestada, et separaabli topoloogilise ruumi lahtine alamruum on separaabel.

***Lindelöfi ruum.**

Def 1.2. Hulga A *katteks* nimetatakse hulkade kogumit $\mathcal{K}$, mille korral $A \subset \bigcup_{C\in\mathcal{K}} C$. Hulga A katte $\mathcal{K}$ *alamkatteks* $\mathcal{L}$ nimetatakse $\mathcal{K}$ sellist alamkogumit, mis ise on hulga A kate.

Kui topoloogilise ruumi (X,τ) korral koosneb alamhulga $A \subset X$ kate τ-lahtistest hulkadest, siis räägitakse alamhulga A *lahtisest kattest.*

Öeldakse, et topoloogiline ruum (X,τ) on *Lindelöfi ruum*, kui hulga X igast lahtisest kattest saab eraldada loenduva alamkatte.

Näide 1.4. Topoloogia baas on vaadeldava topoloogilise ruumi (aluseks olev hulga) lahtine kate.

Lause 1.9 (Lindelöfi lemma, 1903)**.** Teist loenduvuse aksioomi rahuldav topoloogiline ruum on Lindelöfi ruum.

Tõestus. Olgu (X,τ) topoloogiline ruum ja olgu $\mathfrak{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ topoloogia τ loenduv baas. Eeldame, et $\mathcal{K}$ on hulga X lahtine kate. Olgu $I = \{i \in \mathbb{N} \colon \exists C \in \mathcal{K}\ B_i \subset C\}$. Iga $i \in I$ korral fikseerime vabalt $C_i \in \mathcal{K}$, mille korral $B_i \subset C_i$. Tähistame $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ ja $\mathcal{L} = \{C_i \in \mathcal{K} \colon i \in I\}$. Kui $\mathcal{B}$ on kate hulgale X, siis ilmselt on seda ka $\mathcal{L}$.

Näitamegi, et $\mathcal{B}$ on kate hulgale X. Olgu $x \in X$. Vaja on näidata, et $x \in B_i$ mingi $i \in I$ korral. Eelduse kohaselt leidub $C \in \mathcal{K}$ nii, et $x \in C$. Kuna C on lahtine, siis lause I. 6.1 põhjal leidub selline $i \in \mathbb{N}$, et $x \in B_i \subset C$. Viimane sisalduvus ütleb muuhulgas, et $i \in I$ ehk $B_i \in \mathcal{B}$. $\square$

Märkus. Lindelöfi originaaltulemus oli ilmselt sõnastatud teisiti (vist nii: reaalarvude mis tahes lahtine hulk on vahemike loenduv ühend).

Lause 1.10. Metriseeruv Lindelöfi ruum rahuldab teist loenduvuse aksioomi.

Tõestus. Olgu (X,τ) metriseeruv Lindelöfi ruum ja d vastav meetrika. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on $\{B(x,\frac{1}{n}) \colon x \in X\}$ hulga X lahtine kate; olgu $\mathcal{K}_n$ tema loenduv alamkate. Näitame, et $\mathfrak{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$ on topoloogia τ baas. Fikseerime selleks vabalt $U \in \tau$ ja $x \in U$. Leidub $B(x,r) \subset U$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et $1/n < r/2$. Leidub $C \in \mathcal{K}_n$ nii, et $x \in C$. Ilmselt $C \subset B(x,r)$ ja seega $x \in C \subset U$. Järelikult on $\mathfrak{B}$ topoloogia τ baas. $\square$

Lemma 1.11. Olgu (X,τ) topoloogiline ruum ja olgu $\mathfrak{B}$ topoloogia τ mingi baas. Kui hulga X mis tahes lahtine kate baasi $\mathfrak{B}$ hulkadest sisaldab loenduva alamkatte, siis (X,τ) on Lindelöfi ruum.

Tõestus. Olgu $\mathcal{K}$ hulga X suvaline lahtine kate. Mis tahes lahtine hulk on baasi $\mathfrak{B}$ hulkade ühend, seega mis tahes lahtisel hulgal leidub baasi $\mathfrak{B}$ hulkadest kate. $\square$

Näide 1.5. Sorgenfrey sirge $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$ on Lindelöfi ruum. Piisab näidata, et hulga $\mathbb{R}$ lahtine kate kujul $\mathcal{K} = \{[a_i, b_i) \colon a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ i \in I\}$ sisaldab loenduva alamkatte. (Olgu $\mathcal{K}$ täpselt selline.)

Olgu $C = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$ ja $A = \mathbb{R} \setminus C$. Vaatleme hulka $C \subset \mathbb{R}$ tavalise topoloogiaga (s.o. $\mathbb{R}$ alamruumitopoloogiaga). Siis on C meetriline ruum, seega Lindelöfi ruum. Kusjuures vahemikud (a_i, b_i), $i \in I$, moodustavad hulga C lahtise katte. Sellest kattest saame eraldada loenduva alamkatte (a_i, b_i), $i \in J \subset I$. Ilmselt on $[a_i, b_i)$, $i \in J$, loenduv lahtine kate hulgale C esialgses topoloogilises ruumis.

Paneme tähele, et A on loenduv. Näitame seda. Mis tahes $x \in A$ korral $x = a_{i_x}$ mingi $i_x \in I$ puhul; fikseerime vabalt $y_x \in \mathbb{Q} \cap (a_{i_x}, b_{i_x})$. Saame kujutuse $A \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto y_x$. Selline kujutus on injektiivne, sest (on rangelt kasvav:) $x_1, x_2 \in A$ ja $x_1 \neq x_2$ korral $y_{x_1} < y_{x_2}$ (vastasel juhul $x_1 < x_2 < y_{x_2} \leq y_{x_1}$ ja seega $x_2 \notin A$). Kõik poollõigud kujul $[a_i, b_i)$, kus $i \in I$ ja $a_i \in A$, moodustavad ilmselt loenduva lahtise katte hulgale A.

Kokkuvõttes annavad poollõigud $[a_i, b_i)$, kus $i \in I$ ja $a_i \in A$ või $i \in J$, hulga $\mathbb{R}$ esialgse katte loenduva alamkatte. Järelikult on Sorgenfrey sirge Lindelöfi ruum.

Näide 1.6. Lindelöfi ruumide korrutisruum ei tarvitse olla Lindelöfi ruum. Näitame, et kahe Sorgenfrey sirge korrutisruum ehk Sorgenfrey tasand ei ole Lindelöfi ruum. (Kuid on separaabel!) (Topoloogia baasiks on siin $\mathfrak{B} = \{[a, b) \times [c, d) \colon a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d\}$.) Lihtne on näha, et n.ö. anti-diagonaal $\Delta = \{(x, -x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ on vaadeldava korrutisruumi kinnine alamhulk. Hulga $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lahtisel kattel, mis koosneb hulgast $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta$ ning kõikidest hulkadest kujul $[a, a+1) \times [-a, -a+1)$, kus $a \in \mathbb{R}$ ei leidu loenduvat alamkatet, sest ühtki viimasel kujul olevat hulka ei saa ära jätta, sest vastasel juhul jääks punkt $(a - a)$ katmata.

Näide 1.7. Lindelöfi ruum, mis ei ole separaabel. Vaatleme hulka $X = \mathbb{R} \cup \{x\}$, kus x ei ole arv. Vaatleme hulgas X sellist topoloogiat τ, mis koosneb kõikidest $\mathbb{R}$ alamhulkadest ja sellistest elementi x sisaldavatest alamhulkadest, mille täiendhulk on lõplik. Topoloogiline ruum (X, τ) ei ole separaabel. Tõepoolest, mis tahes loenduv hulk ei sisalda kõiki reaalarve; ühest sellisest reaalarvust koosnev alamhulk on lahtine. Aga (X, τ) on Lindelöfi ruum. Kui $\mathcal{K}$ on hulga X lahtine kate, siis elementi x sisaldava lahtise hulga $C \in \mathcal{K}$ täiendhulk on lõplik ja iga täiendhulka kuuluva elemendi korral valime ühe lahtise hulga kattest $\mathcal{K}$. Koos hulgaga C moodustavad need hulgad lõpliku alamkatte.

Ülesanne. 1) Olgu $f\colon X \to Y$ pidev kujutus. Tõestada, et kui X on Lindelöfi ruum, siis ka $f(X)$ on Lindelöfi ruum.

2) Olgu $X = [-1, 1]$ ja $\tau = \{U \subset \mathcal{P}(X)\colon 0 \notin U$ või $(-1, 1) \subset U\}$. Tõestada, et topoloogiline ruum (X, τ) on Lindelöfi ruum, ei ole separaabel ja alamruum $[-1, 1] \setminus \{0\}$ ei ole Lindelöfi ruum.

2. **Eralduvusaksioomid.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Kolmogorovi aksioom.

Def 2.1. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on T_0-*ruum* ehk *rahuldab Kolmogorovi aksioomi*, kui hulga X mis tahes kahel erineval punktil leidub vähemalt ühel ümbrus, mis teist punkti ei sisalda, s.t. kahel erineval punktil ei ole täpselt ühed ja samad ümbrused, s.t. mis tahes $x, y \in X$, $x \neq y$, korral $x \notin \mathrm{Cl}\{y\}$ või $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$.

Näide 2.1. 1) Sierpinski ruum, $(\{0,1\}, \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\})$, on T_0-ruum.

2) Triviaalse topoloogiaga (vähemalt kahe punktiga) ruum ei ole T_0-ruum.

3) Semimeetrika on meetrika parajasti siis, kui vastav topoloogiline ruum on T_0-ruum. (Vt. vastavat ülesannet.)

Fréchet' aksioom.

Def 2.2. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on T_1-*ruum* ehk *rahuldab Fréchet' aksioomi*, kui hulga X mis tahes kahe erineva punkti korral leidub kummalgi ümbrus, mis teist punkti ei sisalda, s.t. mis tahes $x, y \in X$, $x \neq y$, korral $x \notin \mathrm{Cl}\{y\}$ ja $y \notin \mathrm{Cl}\{x\}$.

Märkus. Ilmselt on iga T_1-ruum ka T_0-ruum.

Näide 2.2. 1) Diskreetne ruum on T_1-ruum.

2) Kofiniitse topoloogiaga hulk on T_1-ruum. Koloenduva topoloogiaga hulk on T_1-ruum. Sorgenfrey sirge $(\mathbb{R}, \tau_{[\cdot,\cdot)})$ on T_1-ruum.

3) Iga meetriline ruum on T_1-ruum.

4) Sierpinski ruum ei ole T_1-ruum. (On kaks üldisemat klassi topoloogilisi ruume, mis ei ole T_1-ruumid, kuid on T_0-ruumid. Olgu hulgas X vähemalt kaks elementi ja $x \in X$. Olgu $\tau_1 = \{U \subset X : x \in U$ või $U = \varnothing\}$ ja $\tau_2 = \{U \subset X : x \notin U$ või $U = X\}$. Topoloogilised ruumid (X, τ_1) ja (X, τ_2) ei ole T_1-ruumid, kuid on T_0-ruumid.)

Lause 2.1. Topoloogiline ruum on T_1-ruum parajasti siis, kui tema kõik ühepunktilised alamhulgad on kinnised.

Tõestus. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Eeldame, et (X, τ) on T_1-ruum ja olgu $x \in X$. Alamhulk $X \setminus \{x\}$ on lahtine, sest punktil $y \in X \setminus \{x\}$ leidub punkti x mittesisaldav ümbrus U_y. Järelikult on $\{x\}$ kinnine.

Kui $x, y \in X$ ja $x \neq y$, siis $X \setminus \{x\}$ on punkti y (lahtine) ümbrus, mis ei sisalda punkti x, ja $X \setminus \{y\}$ on punkti x (lahtine) ümbrus, mis ei sisalda punkti y. Järelikult on (X, τ) T_1-ruum. $\square$

Järeldus 2.2. Topoloogiline ruum on T_1-ruum parajasti siis, kui tema kõik lõplikud alamhulgad on kinnised.

Järeldus 2.3. Lõplik hulk koos mingi topoloogiaga on T_1-ruum parajasti siis, kui vaadeldav topoloogia on diskreetne.

Lause 2.4. Topoloogiline ruum on T_1-ruum parajasti siis, kui tema mis tahes punkti kõigi (lahtiste) ümbruste ühisosa on ühepunktiline, s.t. topoloogiline ruum (X, τ) on T_1-ruum parajasti siis, kui tema iga punkti x kõigi (lahtiste) ümbruste ühisosa on $\{x\}$.

Tõestus. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Eeldame, et (X, τ) on T_1-ruum ja olgu $x \in X$. Suvalise $y \in X$, $y \neq x$, korral on $X \setminus \{y\}$ punkti x ümbrus. Seega y ei kuulu punkti x igasse ümbrusse.

Eeldame, et hulga X iga punkti kõigi ümbruste ühisosa on ühepunktiline. Olgu $x, y \in X$, kusjuures $x \neq y$. Kui $y \in \mathrm{Cl}\{x\}$, siis punkti y iga ümbrus sisaldab punkti x (punkti y iga ümbrus lõikab hulka $\{x\}$). Seega x kuulub punkti y igasse ümbrusse, mis on vastuolu eeldusega. Järelikult on hulga X kõik ühepunktilised alamhulgad kinnised. $\square$

Hausdorffi aksioom.

Def 2.3. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on T_2-ruum ehk Hausdorffi ruum, kui hulga X mis tahes kahel erineval punktil leiduvad lõikumatud ümbrused, s.t. mis tahes $x, y \in X$, $x \neq y$, korral leiduvad punkti x ümbrus U ja punkti y ümbrus V nii, et $U \cap V = \varnothing$.

Märkus. 1) Ilmselt on iga T_2-ruum ka T_1-ruum.

Näide 2.3. 1) Iga meetriline ruum on Hausdorffi ruum.

2) Sorgenfrey sirge on Hausdorffi ruum, mis ei ole metriseeruv.

3) Kofiniitse topoloogiaga $\mathbb{R}$ (või kofiniitse topoloogiaga suvaline lõpmatu hulk) ei ole Hausdorffi ruum.

Lause 2.5. Topoloogiline ruum (X, τ) on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui ruumis (X, τ) mis tahes koonduval perel leidub parajasti üks piirväärtus.

Tõestus. Olgu (X, τ) Hausdorffi ruum. Olgu hulga X pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ piirväärtused x ja y. Kui $x \neq y$, siis leiduvad neil lõikumatud ümbrused U ja V. Ühelt poolt leidub $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha_1 \preceq \alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ korral $x_\alpha \in U$. Teisalt, leidub $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha_2 \preceq \alpha$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ korral $x_\alpha \in V$. Suunatuse tõttu leidub $\alpha \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha_1, \alpha_2 \preceq \alpha$. Nüüd $x_\alpha \in U \cap V$, mis on vastuolu.

Eeldame, et hulga X igal perel leidub ülimalt üks piirväärtus. Olgu $x, y \in X$, $x \neq y$. Oletame, et punktidel x ja y ei leidu lõikumatuid ümbrusi. Vaatleme punkti x kõigi ümbruste hulga $\mathfrak{N}_x$ ja punkti y kõigi ümbruste hulga $\mathfrak{N}_y$ korrutishulka $\mathfrak{N}_x \times \mathfrak{N}_y$ suunatud hulgana: $U_1 \times V_1 \preceq U_2 \times V_2$ parajasti siis, kui $U_1 \supset U_2$ ja $V_1 \supset V_2$. Fikseerime punkti x ümbruse U ja punkti y ümbruse V korral $x_{U,V} \in U \cap V$. Saame pere, mille piirväärtused on x ja y. See on vastuolus eeldusega. Järelikult on (X, τ) Hausdorffi ruum. □

Näide 2.4. Topoloogiline ruum, mis ei ole Hausdorffi ruum, kuid mille igal jadal leidub ülimalt üks piirväärtus. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$ koloenduva topoloogiaga. (Kofiniitne topoloogia peaks ka siin sobima.) Ilmselt ei ole see ruum Hausdorffi ruum, sest iga punkti ümbruse täiendhulk peab olema loenduv. Vaadeldavas ruum on T_1-ruum ja temas koonduvad parajasti statsionaarsed jadad, seega (vt. vastavat ülesannet) on iga koonduva jada piirväärtus ühene. (Sellist topoloogilist ruumi, milles igal koonduva jada piirväärtus on ühene, nimetatakse US-ruumiks. Pole raske näha, et selline ruum on T_1-ruum. Vt. vastavat ülesannet.)

Lause 2.6. Topoloogiline ruum (X, τ) on Hausdorffi ruum parajasti siis, kui n.ö. diagonaal $\Delta = \{(x, x) \colon x \in X\}$ on korrutisruumi $X \times X$ kinnine alamruum.

Tõestus. Diagonaal Δ on korrutisruumi kinnine alamhulk parajasti siis, kui mis tahes $x, y \in X$, $x \neq y$, korral leiduvad hulgas X lahtine $U \ni x$ ja lahtine $V \ni y$ nii, et $U \times V \cap \Delta = \varnothing$ ehk punktidel x ja y leiduvad lõikumatud ümbrused. □

*__Ülesanne 18__ (5 p). Olgu hulga X topoloogia τ indutseeritud kujutuste $f_i \colon X \to Y_i$ poolt, kus iga (Y_i, τ_i) on T_n-ruum ($n = 0, 1, 2$) ja $i \in I$ (vt. *ül. 5). Tõestada, et kui iga $x_1, x_2 \in X$ korral leidub $i \in I$ nii, et $f_i(x_1) \neq f(x_2)$ (s.t. vaadeldavad funktsioonid eraldavad hulga X punktid), siis (X, τ) on T_n-ruum.

Järeldada sellest, et T_n-ruumide ($n = 0, 1, 2$) suvaline korrutisruum on T_n-ruum.

Ülesanne 2.1. Tõestada, et (a) T_0-ruumi alamruum on T_0-ruum; (b) T_0-ruum on tugevama topoloogia suhtes T_0-ruum; (c) kui (X, τ_X) on T_0-ruum ja $f \colon X \to Y$ on lahtine ja injektiivne, siis $f(X) \subset Y$ on T_0-ruum.

Ülesanne 2.2. Tõestada, et semimeetriline ruum on meetriline ruum parajasti siis, kui vastav topoloogiline ruum on T_0-ruum.

Ülesanne 2.3. Tõestada, et (a) T_1-ruumi alamruum on T_1-ruum; (b) T_1-ruum on tugevama topoloogia suhtes T_1-ruum; (c) kui (X, τ_X) on T_1-ruum ja $f \colon X \to Y$ on lahtine ja injektiivne, siis $f(X) \subset Y$ on T_1-ruum.

Ülesanne 2.4. Olgu (X, τ_X) topoloogiline ruum. Tõestada, et kui hulga X erinevate punktide x_1 ja x_2 korral leidub T_1-ruum Y ja pidev kujutus $f\colon X \to Y$ nii, et $f(x_1) \neq f(x_2)$, siis (X, τ_X) on T_1-ruum.

Ülesanne 2.5. Olgu (X, τ_X) T_1-ruum. Tõestada, et kui $f\colon X \to Y$ on kinnine, siis $f(X) \subset Y$ on T_1-ruum.

Ülesanne 2.6. Olgu (X, τ_X) triviaalse topoloogiaga topoloogiline ruum ja (Y, τ_Y) T_1-ruum. Tõestada, et kui $f\colon X \to Y$ on pidev, siis f on konstantne.

Ülesanne 2.7. Mis on kõige väiksem topoloogia τ hulgal X nii, et (X, τ) on T_1-ruum. Näpunäide. Kofiniitne topoloogia.

Ülesanne 2.8. Tõestada, et topoloogilise ruumi (X, τ) faktorruum X/R on T_1-ruum parajasti siis, kui iga ekvivalentsiklass $[x]$ $(x \in X)$ on hulga X kinnine alamhulk.

Ülesanne 2.9. Tõestada, et T_1-ruumi alamhulga A piirpunkti iga ümbrus sisaldab lõpmata palju A elemente.

Ülesanne 2.10. Tõestada, et T_1-ruumi statsionaarsel perel leidub parajasti üks piirväärtus.

Ülesanne 2.11. Tõestada, et topoloogiline ruum on T_1-ruum, kui tema igal koonduval jadal leidub täpselt üks piirväärtus.

Ülesanne 2.12. Tõestada, et (a) T_2-ruumi alamruum on T_2-ruum; (b) T_2-ruum on tugevama topoloogia suhtes T_2-ruum; (c) kui (X, τ_X) on T_2-ruum ja $f\colon X \to Y$ on lahtine ja injektiivne, siis $f(X) \subset Y$ on T_2-ruum.

Ülesanne 2.13. Olgu f ja g pidevad kujutused topoloogilisest ruumist X Hausdorffi ruumi Y. Tõestada, et $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ on kinnine.

Ülesanne 2.14. Olgu (X, τ) Hausdorffi ruum. Olgu $f\colon X \to X$ pidev kujutus. Näidata, et kujutuse f püsipunktide hulk $\{x \in X\colon f(x) = x\}$ on kinnine.

Ülesanne 2.15. Olgu f ja g pidevad kujutused topoloogilisest ruumist X Hausdorffi ruumi Y. Olgu $A \subset X$ kõikjal tihe, s.t. $\operatorname{Cl} A = X$. Tõestada, et kui $f(a) = g(a)$ iga $a \in A$ korral, siis $f = g$.

Ülesanne 2.16. Tõestada, et topoloogiline ruum $(\mathbb{R}, \tau)$, kus τ on kofiniitne topoloogia ei ole metriseeruv. Näpunäide. Vaadelda jada $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Iga $x \in \mathbb{R}$ on selle jada piirväärtus, seega pole vaadeldav topoloogiline ruum Hausdorffi ruum.

Ülesanne 2.17. Tõestada, et faktorruum $[0, 4]/[x \sim y\ \forall x, y \in (2, 3)]$ ei ole Hausdorffi ruum. Näpunäide. Näidata, et faktorruumi punktidel $[2]$ ja $[3]$ puuduvad lõikumatud ümbrused.

3. **Regulaarsed ja normaalsed ruumid.**

Def 3.1. Topoloogilist ruumi (X, τ) nimetatakse *regulaarseks*, kui mis tahes $x \in X$ ja mis tahes kinnise $F \subset X$, $x \notin F$, korral leiduvad lõikumatud lahtised hulgad U ja V nii, et $x \in U$ ja $F \subset V$.

Regulaarset Hausdorffi ruumi nimetatakse T_3-*ruumiks.*

Märkus. Ilmselt on regulaarne T_1-ruum Hausdorffi ruum, seega T_3-ruum. (Seega T_1-ruum, mis ei ole T_2-ruum, ei sa olla regulaarne.) Pole raske näha, et juba regulaarne T_0-ruum on Hausdorffi ruum. Tõepoolest, olgu (X, τ) regulaarne T_0-ruum. Olgu $x, y \in X$, $x \neq y$. Eeldame, et $x \notin \mathrm{Cl}\{y\}$. Regulaarsuse tõttu leiduvad lõikumatud lahtised hulgad U ja V nii, et $x \in U$ ja $\mathrm{Cl}\{y\} \subset V$. Kuna U on punkti x ümbrus ja V on punkti y ümbrus, siis (X, τ) on Hausdorffi ruum.

Mõnikord defineeritaksegi T_3-ruum, kui regulaarne T_1-ruum või T_0-ruum.

NB! Eksisteerib kaks parallelset sisu mõistetele regulaarne topoloogiline ruum ja T_3-ruum — vaadeldud tähenduse kõrval eksisteerib käsitlus, kus nende kahe mõiste sisu on omavahel vahetatud. Meie valiku puhul on T_3-ruum ilmselt T_2-ruum; teisel juhul ei pruugi see nii olla!

Näide 3.1. 1) Regulaarne topoloogiline ruum ei pruugi olla Hausdorffi ruum ega isegi T_0-ruum. Vaatleme näiteks hulka $X = \{a, b, c\}$ ja temal topoloogiat $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Sel juhul on iga lahtine hulk parajasti ka kinnine. Seega on (X, τ) regulaarne, kuna aga punktidel b ja c on täpselt samad ümbrused, siis pole ta T_0-ruum. (Põhimõtteliselt sobib selliseks näiteks ka triviaalse topoloogiaga vähemalt kahepunktiline hulk.)

2) Hausdorffi ruum, mis ei ole regulaarne. Vaatleme hulka $\mathbb{R}$. Aga teeme tavalise topoloogia peenemaks. Olgu τ vähim selline topoloogia hulgal $\mathbb{R}$, mille suhtes tavalises topoloogias lahtistele hulkadele lisaks on lahtine ka $\mathbb{Q}$. Seega on $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kinnine. Kui $\mathbb{I} \subset U$ mingi τ-lahtise $U \subset \mathbb{R}$ korral, siis $\mathrm{Cl}_\tau U = \mathbb{R}$. Seega ei leidu ühelgi punktil $q \in \mathbb{Q}$ lahtist ümbrust V nii, et $U \cap V = \varnothing$.

3) Iga metriseeruv topoloogiline ruum on regulaarne. (Ülesanne.)

4) Iga diskreetne topoloogiline ruum on regulaarne.

5) Sorgefrey sirge on regulaarne. (Ülesanne.)

6) Sierpinski ruum ei ole regulaarne.

Lause 3.1. Topoloogiline ruum on regulaarne parajasti siis, kui tema mis tahes punkti ümbrus sisaldab selle punkti kinnise ümbruse ehk igal punktil leidub kinnistest hulkadest ümbruste baas.

Tõestus. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Eeldame, et ta on regulaarne. Olgu $x \in X$ ja olgu U punkti x lahtine ümbrus. Seega on $X \setminus U$ kinnine ja $x \notin X \setminus U$. Regulaarsuse tõttu leiduvad lahtised hulgad V ja W nii, et $V \cap W = \varnothing$, $x \in V$ ja $X \setminus U \subset W$. Järelikult $V \subset X \setminus W \subset U$. Kuna $X \setminus W$ on kinnine, siis $\operatorname{Cl} V \subset X \setminus W$. Kokkuvõttes oleme leidnud punkti x kinnise ümbruse $\operatorname{Cl} V \subset U$.

Eeldame nüüd, et iga punkti $x \in X$ ümbrus sisaldab punkti x kinnise ümbruse. Näitame, et (X, τ) on regulaarne. Olgu $x \in X$ ja olgu $F \subset X$ kinnine, kusjuures $x \notin F$. Seega on $X \setminus F$ punkti x (lahtine) ümbrus. Olgu $V \subset X \setminus F$ punkti x kinnine ümbrus. Järelikult on $F \subset X \setminus V$, kusjuures $X \setminus V$ on lahtine. Lõpetuseks võtame vabalt V seest punkti x lahtise ümbruse. □

Järeldus 3.2. Topoloogiline ruum (X, τ) on regulaarne parajasti siis, kui mis tahes $x \in X$ ja kinnise $F \subset X$, $x \notin F$, korral leidub punkti x kinnine ümbrus U nii, et $U \cap F = \varnothing$.

Tõestus. Ülesanne. □

Def 3.2. Topoloogilist ruumi (X, τ) nimetatakse *normaalseks*, kui tema mis tahes kahe lõikumatu kinnise alamhulga F ja G korral leiduvad lõikumatud lahtised hulgad U ja V nii, et $F \subset U$ ja $G \subset V$.

Normaalset Hausdorffi ruumi nimetatakse *T_4-ruumiks*.

Märkus. Normaalne Hausdorffi ruum on ilmselt regulaarne.

Normaalne T_1-ruum on Hausdorffi ruum, seega T_4-ruum. Normaalne T_0-ruum ei pruugi olla T_4-ruum.

NB! Eksisteerib kaks parallelset sisu mõistetele normaalne topoloogiline ruum ja T_4-ruum — vaadeldud tähenduse kõrval eksisteerib käsitlus, kus nende kahe mõiste sisu on omavahel vahetatud. Meie valiku puhul on T_4-ruum ilmselt T_3-ruum; teisel juhul ei pruugi see nii olla!

Näide 3.2. 1) Sierpinski ruum on (triviaalselt) normaalne aga ei ole regulaarne.

2) Iga metriseeruv ruum on normaalne. (Ülesanne.)

3) Sorgenfrey sirge on normaalne. (Ülesanne.)

4) Sorgenfrey tasand ei ole normaalne. On võimalik näidata (see pole päris lihtne), et Sorgenfrey tasandi kinniste alamhulkade $A = \{(x, -x) \colon x \in \mathbb{Q}\}$ ja $B = \{(x, -x) \colon x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ korral ei leidu lõikumatuid lahtisi hulki U ja V nii, et $A \subset U$ ja $B \subset V$.

***Ülesanne 19** (5 p). Tõestada, et Sorgenfrey tasand ei ole normaalne.

Lause 3.3. Topoloogiline ruum (X, τ) on normaalne parajasti siis, kui mis tahes kinnise $A \subset X$ ja hulka A sisaldava lahtise $U \subset X$ korral leidub lahtine $V \subset X$ nii, et

$$A \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset U.$$

Tõestus. $\Rightarrow$. Eeldame, et (X,τ) on normaalne topoloogiline ruum. Olgu $A \subset X$ kinnine ja $U \subset X$ lahtine, kusjuures $A \subset U$. Normaalsuse tõttu leiduvad kinniste hulkade A ja $B = X \setminus U$ lõikumatud lahtised ülemhulgad V ja W. Kuna $V \subset X \setminus W$ ja viimane on kinnine, siis $\operatorname{Cl} V \subset X \setminus W$. Kokkuvõttes saamegi

$$A \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset X \setminus W \subset U.$$

$\Leftarrow$. Olgu A ja B hulga X lõikumatud kinnised alamhulgad. Võtame $U = X \setminus B$ ja leiame lahtise hulga V nii, et $A \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$. Ilmselt on $X \setminus \operatorname{Cl} V$ lahtine hulk ning B tema alamhulk. $\square$

***Ülesanne 20** (5 p)**.** Tõestada, et teist loenduvuse aksioomi rahuldav regulaarne topoloogiline ruum on normaalne. (Üldisem tulemus on: regulaarne Lindelöfi ruum on normaalne.)

Ülesanne 3.1. Tõestada, et regulaarsus on topoloogiline omadus.

Ülesanne 3.2. Tõestada, et topoloogiline ruum (X,τ) on regulaarne parajasti siis, kui mis tahes $x \in X$ ja kinnise $F \subset X$, $x \notin F$, korral leidub punkti x kinnine ümbrus U nii, et $U \cap F = \varnothing$.

Ülesanne 3.3. Tõestada, et iga metriseeruv topoloogiline ruum on regulaarne. Järelikult on iga metriseeruv topoloogiline ruum T_3-ruum.

Ülesanne 3.4. Tõestada, et Sorgenfrey sirge on regulaarne. Järelikult on Sorgenfrey sirge T_3-ruum.

Ülesanne 3.5. Tõestada, et regulaarse ruumi alamruum on regulaarne. Kas T_3-ruumi alamruum on T_3-ruum?

Ülesanne 3.6. Tõestada, et korrutisruum on regulaarne parajasti siis, kui tegurid on regulaarsed. (Võib piirduda kahe ruumi korrutisega.)

Ülesanne 3.7. Olgu (X,τ) T_3-ruum ja $F \subset X$ kinnine. Tõestada, et faktorruum $X/[x \sim y \quad \forall x, y \in F]$ on Hausdorffi ruum.

Ülesanne 3.8. Tõestada, et T_3-ruumi mis tahes kahel erineval punktil leiduvad lõikumatud kinnised ümbrused.

Ülesanne 3.9. Olgu X mingi hulk ja $x \in X$. Tõestada, et

$$\tau = \{U \subset X \colon U = X \text{ või } x \notin U\}$$

korral on (X,τ) normaalne topoloogiline ruum, mis ei ole Hausdorffi ruum.

Ülesanne 3.10. Tõestada, et normaalse ruumi alamruum on normaalne. Kas T_4-ruumi alamruum on T_4-ruum?

Ülesanne 3.11. Tõestada, et iga metriseeruv topoloogiline ruum on normaalne.

Ülesanne 3.12. Tõestada, et Sorgenfrey sirge on normaalne.

Ülesanne 3.13. Olgu (X, τ_X), (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid, kusjuures (X, τ_X) olgu normaalne. Tõestada, et kui $f\colon X \to Y$ on pidev, kinnine ja sürjektiivne, siis Y on normaalne.

Ülesanne 3.14. Tõestada, et kui korrutisruum on normaalne, siis tegurid on normaalsed. (Vastupidine implikatsioon üldiselt ei kehti.)

Täiendav materjal.

Teoreem 3.4 (Urysohn'i lemma)**.** Kui (X,τ) on normaalne topoloogiline ruum ning $A, B \subset X$ on lõikumatud ja kinnised, siis leidub pidev funktsioon $f\colon X \to \mathbb{R}$ nii, et $f(x) = 0$ iga $x \in A$ korral ja $f(x) = 1$ iga $x \in B$ korral. Sellise funktsiooni saab valida nii, et $f(X) \subset [0,1]$.

Tõestus. Olgu A ja B lõikumatud kinnised alamhulgad normaalses topoloogilises ruumis (X,τ). Olgu $U_1 = X \setminus B$. Normaalsuse tõttu leidub lahtine $U_{\frac{1}{2}}$ nii, et

$$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \operatorname{Cl} U_{\frac{1}{2}} \subset U_1.$$

Veel kord normaalsust kasutades leiame lahtised $U_{\frac{1}{4}} \subset X$ ja $U_{\frac{3}{4}} \subset X$ nii, et

$$A \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \operatorname{Cl} U_{\frac{1}{4}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \operatorname{Cl} U_{\frac{1}{2}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \operatorname{Cl} U_{\frac{3}{4}} \subset U_1.$$

Jätkates analoogiliselt saame iga $\alpha \in \mathcal{A} = \{\frac{m}{2^n}\colon m,n \in \mathbb{N},\ m < 2^n\}$ korral U_α nii, et $A \subset U_\alpha \subset \operatorname{Cl} U_\alpha \subset U_1$, kusjuures $\operatorname{Cl} U_\alpha \subset U_\beta$, kui $\alpha < \beta$ ja $\beta \in \mathcal{A}$.

Defineerime $f\colon X \to [0,1]$ järgmiselt

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{\alpha \in \mathcal{A}\colon x \in U_\alpha\}, & \text{kui } x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha, \\ 1, & \text{vastasel juhul.} \end{cases}$$

Ilmselt $f(x) = 0$, kui $x \in A$, ja $f(x) = 1$, kui $x \in B$. Lõpetuseks näitame, et f on pidev.

1. Olgu $0 \le a < 1$. Näitame, et $f^{-1}((a,1])$ on lahtine. Paneme tähele, et $x \in X$ korral

$$a < f(x) \le 1 \iff \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad a < \alpha,\ x \notin \operatorname{Cl} U_\alpha.$$

Seega on $f^{-1}((a,1]) = \bigcup_{a<\alpha\in\mathcal{A}} X \setminus \operatorname{Cl} U_\alpha$ lahtine.

2. Olgu $0 < b \le 1$. Näitame, et $f^{-1}([0,b))$ on lahtine. Paneme tähele, et

$$0 \le f(x) < b \iff \exists \alpha \in \mathcal{A} \quad \alpha < b,\ x \in U_\alpha.$$

Seega on $f^{-1}([0,b)) = \bigcup_{A\ni\alpha<b} U_\alpha$ lahtine.

3. Kui $(a,b) \subset [0,1]$ $(a < b)$, siis $f^{-1}((a,b)) = f^{-1}([0,b) \cap (a,1]) = f^{-1}([0,b)) \cap f^{-1}((a,1])$ on samuti lahtine.

Järelikult on f pidev. $\square$

Märkus. Urysohni lemmas kehtib ka vastupidine implikatsioon. Olgu A ja B kinnised alamhulgad. Olgu $f\colon X \to [0,1]$ pidev ja $f(x) = 0$, kui $x \in A$, ja $f(x) = 1$, kui $x \in B$. Kuna $[0,\frac{1}{2})$ ja $(\frac{1}{2},1]$ on $[0,1]$ lahtised lõikumatud alamhulgad, siis $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ ja $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ on hulga

X lahtised lõikumatud alamhulgad, kusjuures $A \subset f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ ja $B \subset f^{-1}(\frac{1}{2}, 1])$.

Teoreem 3.5 (Urysohn'i metriseeruvusteoreem)**.** Teist loenduvuse aksioomi rahuldav T_3-ruum on metriseeruv.

Tõestuse skeem. Urysohni lemma põhjal saame leida sellised pidevad funktsioonid $f_n \colon X \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, et mis tahes $x \in X$ ja tema ümbruse U korral

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) > 0 \quad \text{ja} \quad f_n|_{X \setminus U} = 0.$$

(Eeldame, et topoloogia loenduv baas $\mathfrak{B}$. Sellised funktsioonid f_n leitakse nii, et regulaarsuse tõttu saame leida $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ nii, et $x \in B_2 \subset \operatorname{Cl} B_2 \subset B_1 \subset \operatorname{Cl} B_1 \subset U$. Urysohni lemma põhjal leiame f nii, et $f|_{\operatorname{Cl} B_2} = 1$ ja $f|_{X \setminus B_1} = 0$.)

Näitame, et X on homöomorfne metriseeruva korrutisruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alamruumiga.

Vaatleme $f \colon X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots)$. Selge on, et f on pidev ja injektiive (vahetu kontroll; selle jaoks on vaja, et ruum on Hausdorffi ruum).

Lõpetuseks piisab näidata, et lahtise $U \subset X$ korral on $f(U)$ alamruumis $f(X)$ lahtine. Olgu $y \in f(U)$. Olgu $x \in X$ selline, et $f(x) = y$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et $f(x) > 0$ ja $f|_{X \setminus U} = 0$. Olgu $\pi_n \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ loomulik projektsioon n-ndale tegurile. Võtame $V = \pi_n^{-1}((0, \infty))$. Siis on V lahtine ja $f(X) \cap V \subset f(U)$. □

Regulaarsus ja normaalsus on olulised omadused pidevate kujutuste (pideval) jätkamisel.

Teoreem 3.6. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid, kusjuures (Y, τ_Y) T_3-ruum. Olgu $A \subset X$ kõikjal tihe. Selleks, et pideval kujutusel $f \colon A \to Y$ leiduks pidev jätk $\hat{f} \colon X \to Y$ on tarvilik ja piisav, et

$$\forall x \in X \quad \exists y_x \in Y \quad a_\alpha \in A,\ a_\alpha \to x \implies f(a_\alpha) \to y_x.$$

Sel juhul on jätk $\hat{f}$ ühene.

Tõestus. Jätk $\hat{f}$ on ühene, sest Y on Hausdorffi ruum. (Meil oli ka vastav ülesanne: kui Hausdorffi ruumi tegutsevad kujutused langevad kokku kõikjal tihedal hulgal, siis ei ole tegu erinevate kujutustega.)

$\Rightarrow$. Olgu $\hat{f}$ kujutuse f pidev jätk. Kui $x \in X$, siis võtame $y_x = f(x)$.

$\Leftarrow$. Defineerime $x \in X$ korral $\hat{f}(x) = y_x$. Ilmselt on $\hat{f}$ kujutuse f jätk. Näitame, et $\hat{f}$ on pidev punktis x. Olgu V punkti $\hat{f}(x)$ kinnine ümbrus. Leidub punkti x ümbrus U nii, et $f(A \cap U) \subset V$. Paneme tähele, et

$\hat{f}(U) \subset \operatorname{Cl} f(A \cap U) \subset V$. Tõepoolest, $z \in U$ korral olgu (a_α) hulga A elementide pere, mis koondub punktiks z; siis

$$f(z) = \lim_\alpha f(a_\alpha) \in \operatorname{Cl} f(A \cap U).$$

□

Teoreem 3.7 (Tietze jätkuteoreem)**.** Kui A on kinnine alamhulk T_4-ruumis (X, τ), siis pideval kujutusel $f\colon A \to \mathbb{R}$ leidub pidev jätk $F\colon X \to Y$.

Tõestus. Me ei tõesta seda siin. Märgime vaid, et see on üsnagi vahetult järeldatav Urysohni lemmast. □

4. **Kompaktsed ruumid.** Olgu (X, τ) topoloogiline ruum.

Def 4.1. Hulga X alamhulga E *lahtine kate* on selline hulga X lahtiste alamhulkade kogum, mille ühend sisaldab hulka E.

Öeldakse, et hulga X alamhulk E on *kompaktne*, kui E mis tahes lahtisest kattest saab eraldada lõpliku lahtise katte, s.t. lõpliku alamkogumi, mille ühend sisaldab hulka E. Kui X on kompaktne, siis öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on kompaktne.

Lause 4.1. Hulga X alamhulk E on kompaktne parajasti siis, kui ta on kompaktne alamruumina.

Tõestus. Ülesanne. □

Näide 4.1. 1. $\mathbb{R}$ ei ole kompaktne. Lahtisest kattest $(x-1, x+1)$, $x \in \mathbb{Z}$, ei saa eraldada lõplikku katet.

2. $(0, 1]$ ei ole kompaktne. Lahtisel kattel $\{(1/n, 1] \colon n \in \mathbb{N}\}$ ei leidu lõplikku alamkatet.

3. Triviaalne topoloogiline ruum on kompaktne.

4. Diskreetne topoloogiline ruum on kompaktne parajasti siis, kui selle aluseks olev hulk on lõplik.

Teoreem 4.2 (Heine-Borel'i-Lebesgue'i teoreem)**.** Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $E \subset \mathbb{R}^n$. Alamhulk E on kompaktne parajasti siis, kui E on kinnine ja tõkestatud.

Tõestus. Tõestuse esitame juhul $n = 1$. Üldine juht teha analoogiliselt ISE.

$\Rightarrow$. Olgu $E \subset \mathbb{R}$ kompaktne. Näitame, et E on tõkestatud. Hulkade $U_x = (x-1, x+1)$, $x \in E$, kogum on alamhulga E lahtine kate. Olgu $x_1, \dots, x_n \in E$ sellised, et $E \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Järelikult on E tõkestatud, sest $E \subset [-M, M]$, kus $M = \max\{|x_i| + 1 \colon i = 1, \dots, n\}$.

Näitame, et E on kinnine ehk $\operatorname{Cl} E = E$. Oletame, et $x \in \operatorname{Cl} E \setminus E$. Näitame, et hulga E lahtisel kattel $V_k = \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}]$, $k \in \mathbb{N}$, ei leidu lõplikku alamkatet. Oletame, et $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ korral $E \subset \bigcup_{i=1}^n V_{k_i} = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i=1}^n [x - \frac{1}{k_i}, x + \frac{1}{k_i}]$. Võttes $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ näeme, et $E \subset \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k}]$, mistõttu $x \notin \operatorname{Cl} E$. Vastuolu tõttu on E kinnine.

$\Leftarrow$. Olgu $E \subset \mathbb{R}$ kinnine ja tõkestatud. Näitame, et E on kompaktne. Kuna E on tõkestatud, siis leiduvad sellised $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $E \subset [a, b]$. 1) Vaatleme juhtu, kus $E = [a, b]$. Olgu $\mathcal{K}$ hulga E lahtine kate. Tähistame $d = \sup\{c \in [a, b] \colon$ lõigul $[a, c]$ leidub $\mathcal{K}$ lõplik alamkate$\}$. Ka lõigul $[a, d]$ leidub $\mathcal{K}$ lõplik alamkate (ISE!). Kui $a < d < b$, siis saame vastuolu d tähendusega. Olgu $d \in U \in \mathcal{K}$. Mingi $\varepsilon > 0$ korral

$a < d - \varepsilon < d + \varepsilon < b]$ ja $[d - \varepsilon, d + \varepsilon] \subset U$. Nüüd on selge, et hulgal $[a, d + \varepsilon]$ leidub $\mathcal{K}$ lõplik alamkate, näiteks lisades vajadusel U hulga $[a, d - \varepsilon]$ lõplikule kattele. Kuna $a < d$, siis $d = b$.

2) Vaatleme nüüd üldist juhtu $E \subset [a, b]$. Olgu $\mathcal{K}$ hulga E lahtine kate. Lisame kogumile $\mathcal{K}$ lahtise hulga $\mathbb{R} \setminus E$ ja saame $[a, b]$ lahtise katte, millest 1) põhjal saame eraldada lõpliku alamkatte. Jätame saadud alamkattes ära hulga $\mathbb{R} \setminus E$ (kui see üldse alamkattes on) ja saame hulga E lahtise katte $\mathcal{K}$ lõpliku alamkatte. Järelikult on E kompaktne. □

Lause 4.3. Kompaktse topoloogilise ruumi kinnine alamhulk on kompaktne.

Tõestus. Olgu (X, τ) kompaktne topoloogiline ruum ning olgu $E \subset X$ kinnine. Olgu $\mathcal{K}$ alamhulga E lahtine kate. Lisame kogumile $\mathcal{K}$ lahtise hulga $X \setminus E$. Saame hulga X lahtise katte, millest saame eraldada lõpliku alamkatte. Jätame saadud alamkattes ära hulga $X \setminus E$ (kui see üldse alamkattes on) ja saame hulga E lahtise katte $\mathcal{K}$ lõpliku alamkatte. Järelikult on E kompaktne. □

Lause 4.4. Hausdorffi ruumi kompaktne alamhulk on kinnine.

Tõestus. Olgu (X, τ) Hausdorffi ruum ja olgu $E \subset X$ kompaktne. Näitame, et E on kinnine. Võime eeldada, et $E \neq \varnothing$. Näitame, et $X \setminus E$ on lahtine. Olgu $x \in X \setminus E$. Otsime punkti x ümbrust, mis ei lõika hulka E. Iga $e \in E$ korral leiame punkti e lahtise ümbruse U_e ja punkti x ümbruse V_x^e nii, et $U_e \cap V_x^e = \varnothing$. Hulga E lahtisest kattest U_e, $e \in E$, eraldame lõpliku alamkatte $U_{e_1}, \ldots, U_{e_n}$. Ilmselt on $\bigcap_{i=1}^n V_x^{e_i}$ punkti x sobiv ümbrus. □

Näide 4.2. Üldiselt ei pruugi kompaktne alamhulk kinnine olla. Vaatleme näiteks hulka $\mathbb{R}$ kofiniitse topoloogiaga. Iga $E \subset \mathbb{R}$ on selle topoloogia suhtes kompaktne, kuid kinnisteks hulkadeks on parajasti lõplikud hulgad.

Lause 4.5. Olgu (X, τ_X), (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja sürjektiivne. Tõestada, et kui (X, τ_X) on kompaktne, siis (Y, τ_Y) on kompaktne.

Tõestus. Olgu $\mathcal{K}$ hulga Y lahtine kate. Kujutuse f pidevuse tõttu on $f^{-1}(V)$, $V \in \mathcal{K}$, hulga X lahtine kate, millest eraldame lõpliku alamkatte $f^{-1}(V_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Kuna f on sürjektiivne, siis $Y = f(X) = f(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i)) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_i)) = \bigcup_{i=1}^n V_i$. □

Märkus. Viimase lause põhjal on kompaktsus topoloogiline omadus.

Järeldus 4.6. Kui $f\colon X \to Y$ on pidev ja $E \subset X$ on kompaktne, siis $f(E) \subset Y$ on kompaktne.

Tõestus. See on vahetu järeldus; vaadelda pidevat sürjektiivset kujutust $f|_E^{f(E)} : E \to f(E)$. $\square$

Näide 4.3. $(0,1] \not\cong [0,1]$, sest üks neist on kompaktne ja teine ei ole kompaktne.

Teoreem 4.7. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Olgu $f : X \to Y$ bijektiivne ja pidev. Kui (X, τ_X) on kompaktne ja (Y, τ_Y) on Hausdorffi ruum, siis on f homöomorfism.

Tõestus. Tõestus on (lihtne) ülesanne. Näidata, et f on kinnine, s.t. iga kinnise $E \subset X$ kujutis $f(E) \subset Y$ on kinnine. $\square$

Märkus. Viimast tulemust saame kasutada näiteks faktorruumide teema juures toodud faktorruumiga homöomorfsete topoloogiliste ruumide näidete põhjendamisel.

Teoreem 4.8. Kompaktne Hausdorffi ruum on normaalne.

Tõestus. 1) Kompaktne Hausdorffi ruum on regulaarne. Olgu $F \subset X$ kinnine ja $y \in X$, $y \notin F$. Iga $x \in F$ korral leiduvad lõikumatud lahtised hulgad $U_x, V^x \subset X$ nii, et $x \in U_x$ ja $y \in V^x$. Nõnda saame hulga F lahtise katte U_x, $x \in F$, millest kompaktsuse tõttu saame eraldada lõpliku alamkatte $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Võtame $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ja $V = \bigcap_{i=1}^n V^{x_i}$. Seega on U ja V lõikumatud lahtised hulgad, kusjuures $F \subset U$ ja $y \in V$.

2) Kompaktne (regulaarne) Hausdorffi ruum on normaalne. Olgu $F, G \subset X$ kinnised ja lõikumatud. Regulaarsuse tõttu saame iga $x \in F$ korral leida lõikumatud lahtised hulgad U_x ja V^x nii, et $x \in U$ ja $G \subset V^x$. Nõnda saame hulga F lahtise katte U_x, $x \in F$, millest kompaktsuse tõttu saame eraldada lõpliku alamkatte $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Võtame $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ ja $V = \bigcap_{i=1}^n V^{x_i}$. Seega on U ja V lõikumatud lahtised hulgad, kusjuures $F \subset U$ ja $G \subset V$. $\square$

Järeldus 4.9. Olgu (X, τ) kompaktne Hausdorffi ruum. Olgu $F \subset X$ kinnine ja $U \subset X$ lahtine, kusjuures $F \subset U$. Leidub lahtine $V \subset X$ nii, et $F \subset V \subset \operatorname{Cl} V \subset U$, kusjuures $\operatorname{Cl} V$ on kompaktne.

***Ülesanne 21** (5 p)**.** Tõestada, et topoloogiline ruum on kompaktne parajasti siis, kui tema igal perel leidub koonduv osapere.

Def 4.2. Hulga X pere $f : \mathcal{A} \to X$ osapereks nimetatakse peret $h : \mathcal{B} \to X$, mille korral leidub $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nii, et $h = f \circ g$ ja

(1) $\beta_1 \preceq_{\mathcal{B}} \beta_2 \implies g(\beta_1) \preceq_{\mathcal{A}} g(\beta_2)$ (g on monotoonne);
(2) $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \exists \beta_\alpha \in \mathcal{B} \quad \alpha \preceq g(\beta_\alpha)$ (g on kofinaalne).

Pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ osapere võiks seega tähistada $(x_{g(\alpha)})$ või hoopis kujul $(y_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$, kuigi mõnikord tähistatakse seda ka kujul $(x_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$.

Näide 4.4. Jada osapere ei pea olema jada. Naturaalarvude hulk on suunatud hulk, kui defineerida iga $n \in \mathbb{N}$ korral $2n - 1 \preceq 2n$ ja $2n \preceq 2(n+1)$. Sellise järjestusega naturaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathcal{B}$, kujutuseks $g : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$ olgu formaalne ühikteisendus. Osapere definitsiooni tingimused (1) ja (2) on ($\mathcal{A} = \mathbb{N}$ korral) täidetud.

Ülesanne 4.1. Olgu E ja F topoloogilise ruumi (X, τ) kompaktsed alamhulgad. Tõestada, et $E \cup F$ on kompaktne.

Ülesanne 4.2. Tõestada, et topoloogiline ruum (X, τ) on kompaktne parajasti siis, kui mis tahes tema kinniste hulkade ühisosata kogumi korral leidub lõplik ühisosata alamkogum. Viimane tingimus tähendab seda, et kui kinniste hulkade kogumi mis tahes lõpliku alamkogumi hulkade ühisosa pole tühi, siis selle kogumi hulkade ühisosa ei ole tühi.

Ülesanne 4.3. Näidata, et pidev kujutus kompaktsest ruumist Hausdorffi ruumi on kinnine.

Ülesanne 4.4. Olgu $f\colon X \to Y$ pidev ja bijektiivne. Kui X on kompaktne ja Y on Hausdorffi ruum, siis f on homöomorfism.

Ülesanne 4.5. Olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$ pidev, kusjuures X on kompaktne. Tõestada, et leiduvad $c, d \in X$ nii, et $f(c) \le f(x) \le f(d)$ iga $x \in X$ korral.

***Kompaktsus ja filtrid. Tihhonovi teoreem.**

Def 4.3. Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgal X. Öeldakse, et filter $\mathfrak{F}$ on *ultrafilter*, kui mis tahes $E \subset X$ korral $E \in \mathfrak{F}$ või $X \setminus E \in \mathfrak{F}$.

Piltlikult öeldes jaotab ultrafilter kõik alamhulgad kaheks — suurteks ja väikesteks.

Lemma 4.10. Olgu $\mathfrak{F}$ hulga X filter. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F}$ on ultrafilter;
(2) $\mathfrak{F}$ on maksimaalne filter ehk kui $\mathfrak{G}$ on hulga X filter ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, siis $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Olgu $\mathfrak{F}$ ja $\mathfrak{G}$ filtrid, kusjuures $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Oletame, et $A \in \mathfrak{G}$ ja $A \notin \mathfrak{F}$. Seega $X \setminus A \in \mathfrak{F}$. Järelikult $\varnothing = A \cap (X \setminus A) \in \mathfrak{G}$, mis on vastuolu.

(2) $\Rightarrow$ (1). Olgu $A \subset X$ selline, et $A \notin \mathfrak{F}$ ja $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$. Siis on vahetult kontrollitav, et $\mathfrak{G} = \{B \cap C \colon B \in \mathfrak{F},\ A \subset C \subset X\}$ on filter, kusjuures $A \in \mathfrak{G}$ ja $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$. Eelduse kohaselt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, seega $A \in \mathfrak{F}$, mis on vastuolu. $\square$

Teoreem 4.11 (Ultrafiltrite teoreem)**.** Iga filter sisaldub ultrafiltris.

Tõestus. Anname tõestuse Zorni lemma abil. (Märgime, et ultrafiltrite teoreem on rangelt nõrgem tulemus kui valikuaksioom ehk Zorni lemma. On teada, et ultrafiltrite teoreem on rangelt tugevam kui Hahn-Banachi teoreem.)

Olgu $\mathfrak{F}$ filter hulgas X. Hulga X filtrite hulk $\mathcal{A} = \{\mathfrak{G} \colon \mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}\}$ on osaliselt järjestatud hulk tavalise sisalduvuse suhtes. Vahetult on kontrollitav, et $\mathcal{A}$ suvalise ahela $\mathcal{B}$ korral on $\bigcup_{\mathfrak{G} \in \mathcal{B}} \mathfrak{G}$ filter hulgas X. Zorni lemma põhjal leidub hulgas $\mathcal{A}$ maksimaalne element $\mathfrak{H}$. Lemma 4.10 põhjal on $\mathfrak{H}$ ultrafilter. $\square$

Lause 4.12. Topoloogiline ruum on kompaktne parajasti siis, kui tema iga ultrafilter koondub.

Tõestus. $\Rightarrow$. Eeldame, et topoloogiline ruum (X, τ) on kompaktne. Olgu $\mathfrak{F}$ ultrafilter hulgas X, mis ei koondu. Järelikult iga $x \in X$ korral leidub punkti x lahtine ümbrus U_x, mis ei kuulu filtrisse $\mathfrak{F}$, järelikult $X \setminus U_x \in \mathfrak{F}$. Hulga X lahtisest kattest $\{U_x \colon x \in X\}$ saame ruumi kompaktsuse tõttu eraldada lõpliku alamkatte $\{U_{x_i} \colon i = 1, \dots, n\}$. Nüüd saame $\varnothing = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = \bigcap_{i=1}^n X \setminus U_{x_i} \in \mathfrak{F}$, mis on vastuolu.

$\Leftarrow$. Eeldame, et topoloogilise ruumis (X, τ) iga ultrafilter koondub. Oletame, et (X, τ) ei ole kompaktne. Seega leidub hulga X lahtine kate $\{U_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$, millel ei leidu lõplikku alamkatet. Vahetult on kontrollitav, et $\mathfrak{B} = \{X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha \colon \mathcal{I} \subset \mathcal{A} \text{ lõplik}\}$ on filtri baas. Olgu

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ vastav filter. Ultrafiltrite teoreemi põhjal sisaldub see filter mingis ultrafiltris $\mathfrak{F}$, mis eelduse kohaselt koondub mingiks punktiks $x \in X$. Mingi $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $x \in U_\alpha$, järelikult $U_\alpha \in \mathfrak{F}$. Kuid konstruktsiooni põhjal ka $X \setminus U_\alpha \in \mathfrak{F}$. Saime vastuolu. $\square$

Lemma 4.13. Olgu X ja Y hulgad ning $f\colon X \to Y$. Kui $\mathfrak{U}$ on ultrafilter hulgas X, siis filtri baasi $f(\mathfrak{U}) = \{f(A)\colon A \in \mathfrak{F}\}$ tekitatud filter $\mathfrak{F}_{f(\mathfrak{U})}$ on ultrafilter hulgas Y.

Tõestus. Vahetu kontroll. $\square$

Lemma 4.14. Olgu $\mathfrak{F}$ filter korrutisruumis $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ ja $x \in \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. Samaväärsed on:

(1) $\mathfrak{F} \to x$;
(2) $\forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \pi_\alpha(\mathfrak{F}) \to \pi_\alpha(x) \quad (X_\alpha)$.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Ilmne, sest loomulik projektor π_α on pidev.

(2) $\Rightarrow$ (1). ISE! $\square$

Teoreem 4.15 (Tihhonovi teoreem)**.** Topoloogilised ruumid (X_α, τ_α), $\alpha \in \mathcal{A}$, on kompaktsed parajasti siis, kui vastav korrutisruum $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ on kompaktne.

Tõestus. $\Leftarrow$. Ilmne, sest iga loomulik projektor on pidev.

$\Rightarrow$. Olgu $\mathfrak{F}$ ultrafilter korrutisruumis $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. Näitame, et filter $\mathfrak{F}$ koondub. Fikseerime vabalt $\alpha \in \mathcal{A}$. Lause 4.12 ja lemma 4.13 põhjal $\pi_\alpha(\mathfrak{F})$ koondub mingiks punktiks x_α. Lemma 4.14 põhjal $\mathfrak{F} \to (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$. $\square$

5. **Sidusad ruumid.**

Def 5.1. Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on *sidus*, kui hulka X ei saa esitada kahe ühisosata mittetühja lahtise alamhulga ühendina. Öeldakse, et topoloogilise ruumi (X, τ) alamhulk $E \subset X$ on sidus, kui alamruum $(E, \tau|_E)$ on sidus.

Märkus. 0) Topoloogiline ruum on sidus parajasti siis, kui hulka X ei saa esitada kahe ühisosata mittetühja kinnise alamhulga ühendina.

1) Topoloogilise ruumi üheelemendiline alamhulk on sidus ja tühi alamhulk on sidus; neid nimetame triviaalseteks sidusateks alamhulkadeks.

2) Sidus topoloogiline ruum jääb sidusaks, kui esialgne topoloogia asendada nõrgema topoloogiaga.

3) Sidusa topoloogilise ruumi alamruum ei tarvitse olla sidus.

Näide 5.1. 1) Sierpinski ruum on sidus.

2) Kofiniitse topoloogiaga lõpmatu hulk on sidus.

3) Diskreetne topoloogiline ruum ei ole sidus, kui selles ruumis on vähemalt kaks elementi.

4) Sorgenfrey sirge ei ole sidus, sest nt. $\{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\}$ ja $\{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$ on lõikumatud lahtised hulgad, mille ühend on kogu $\mathbb{R}$.

5) $\mathbb{R}$ kõigi ratsionaalarvude alamhulk $\mathbb{Q}$ ei ole sidus; näiteks $\{x \in \mathbb{Q} \colon x < \pi\}$ ja $\{x \in \mathbb{Q} \colon x > \pi\}$ on lõikumatud lahtised alamhulgad, mille ühend on $\mathbb{Q}$. Ilmselt võib eelnevas π asemel võtta mis tahes irratsionaalarvu.

Teoreem 5.1. $\mathbb{R}$ mittetriviaalsed sidusad alamhulgad on parajasti (tõkestatud või tõkestamata) vahemikud ja poollõigud ning lõigud, ühesõnaga intervallid.

Tõestus. Olgu $E \subset \mathbb{R}$ sidus, kusjuures eeldame, et alamhulgas E on rohkem kui üks element. Oletame, et E ei ole vahemik, poollõik ega lõik. Siis leiduvad sellised $a, b, c \in \mathbb{R}$, et $a < b < c$, $a, c \in E$ ja $b \notin E$. Seega võime hulga E esitada kahe mittetühja lahtise hulga $E \cap \{x \in \mathbb{R} \colon x < b\}$ ja $E \cap \{x \in \mathbb{R} \colon x > b\}$ ühendina. Saame vastuolu.

Oletame, et intervall $E \subset \mathbb{R}$ ei ole sidus. Seega leiduvad ühisosata mittetühjad lahtised alamhulgad $U, V \subset E$ nii, et $U \cup V = E$. Fikseerime vabalt $u \in U$ ja $v \in V$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $u < v$. Tähistame $w = \sup\{x \in \mathbb{R} \colon [u, x) \subset U\}$. Siis on $u < w \leq v$, seega $w \in E$. Ilmselt $w \in \mathrm{Cl}_E U = U$. Teisalt on U lahtine, mistõttu mingi $\varepsilon > 0$ korral $(w - \varepsilon, w + \varepsilon) \subset U$, mis on vastuolus w tähendusega. □

Lause 5.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Samaväärsed on:

(1) (X, τ) on sidus;

(2) X ja $\varnothing$ on ainsad kinnis-lahtised alamhulgad ruumis (X, τ);
(3) ei leidu pidevat sürjektsiooni ruumist (X, τ) diskreetse topoloogiaga kaheelemendilisele ruumile.

Tõestus. (1) $\Rightarrow$ (2). Kui $U \subset X$ on kinnis-lahtine, siis esitub X lahtiste alamhulkade U ja $X \setminus U$ ühendina. Kuna X on sidus, siis peab olema $U = \varnothing$ või $X \setminus U = \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Oletame, et $f\colon X \to \{a, b\}$ on pidev ja sürjektiivne, kusjuures kaheelemendilist hulka $\{a, b\}$ vaadeldakse diskreetse topoloogiaga. Pidevuse tõttu on $f^{-1}(\{a\})$ ja $f^{-1}(\{b\})$ kinnis-lahtised (muidugi ka mittetühjad ja lõikumatud). Vastuolu eeldusega (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Oletame, et $X = U \cup V$, kus U ja V on lõikumatud, mittetühjad ja lahtised. Hulga U karakteristlik funktsioon $f\colon X \to \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in U, \\ 0, & x \notin U, \end{cases}$ on sürjektiivne ja pidev. Saame vastuolu eeldusega (3). $\square$

Lause 5.3. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid. Kui $f\colon X \to Y$ on pidev ja (X, τ_X) on sidus, siis $f(X) \subset (Y, \tau_Y)$ on sidus. (Lühemalt: sidusa topoloogilise ruumi pidev kujutis on sidus.)

Tõestus. Kui $f(X)$ ei ole sidus, siis eelmise tulemuse tingimuse (3) põhjal leidub pidev sürjektiivne kujutus alamruumist $f(X) \subset Y$ mingile diskreetse topoloogiaga kaheelemendilisele hulgale. Selle kujutuse kompositsioon kujutusega $f|^{f(X)}\colon X \to f(X)$ annab vastuolu (X, τ_X) sidususega. $\square$

Järeldus 5.4. Sidusa topoloogilise ruumi faktorruum on sidus.

Tõestus. Ilmne; loomulik faktorkujutus on pidev sürjektsioon. $\square$

Lause 5.5. Olgu (X, τ) sidus topoloogiline ruum ja olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$ pidev. Kui $f(x_1) \neq f(x_2)$ ruumi X mingite elementide x_1 ja x_2 korral, siis iga arvu c korral, mis paikneb arvude $f(x_1)$ ja $f(x_2)$ vahel, leidub $x \in X$ nii, et $f(x) = c$.

Tõestus. Teame, et $f(X) \subset \mathbb{R}$ on sidus, seega mittetriviaalsel juhul intervall, järelikult kumer. $\square$

Lause 5.6. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $E \subset X$. Kui E on sidus, siis $E \subset Y \subset \mathrm{Cl}_X E$ on sidus.

Tõestus. Olgu E sidus ja $E \subset Y \subset \mathrm{Cl}\, E$. Oletame, et f on pidev sürjektiivne kujutus alamruumist Y mingile diskreetse topoloogiaga kaheelemendilisele hulgale. Kuna E on sidus, siis $f|_E$ ei ole sürjektiivne. Paneme tähele, et $Y = Y \cap \mathrm{Cl}\, E = \mathrm{Cl}_Y E$. Seega $f(Y) = f(\mathrm{Cl}_Y E) \subset$

$\mathrm{Cl}\, f(E) = f(E)$. Järelikult ei ole f sürjektiivne. Saime vastuolu tehtud oletusega. □

Näide 5.2. Olgu $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sin 1/x,\ x \in (0, 1]\}$ on sidus, sest E on sidusa hulga $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ pidev kujutis. Eelmise tulemuse põhjal on järelikult ka $\mathrm{Cl}\, E = E \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [-1, 1]\}$ sidus. (Ka siis, kui hulgale E lisada vaid punktid $(0, 1)$ ja $(0, -1)$, saame sidusa hulga.)

Märkus. Eelmise tulemuse põhjal on sidusa alamhulga sulund sidus. Sidusa alamhulga sisemus ei tarvitse olla sidus (näiteks võiks mõelda tasandi peale, kus kaks kera on omavahel ühendatud sirglõiguga).

Lause 5.7. Topoloogilise ruumi mittetühja ühisosaga sidusate alamhulkade ühend on sidus.

Tõestus. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $E_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathcal{A}$, sidusad. Eeldame, et leidub $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$. Näitame, et $E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$ on sidus. Oletame, et f on pidev sürjektiivne kujutus alamruumist E kaheelemendilisele diskreetse topoloogiaga ruumile. Kuna iga E_α on sidus, siis ükski $f|_{E_\alpha}$ ei ole sürjektiivne. Kuna $x_0 \in E_\alpha$ iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral, siis järelikult $f(x) = f(x_0)$ iga $x \in E$ korral. Seega ei ole f sürjektiivne. Saime vastuolu tehtud oletusega. □

Märkus. Sidusate hulkade ühisosa ei tarvitse olla sidus. (Näite võiks anda tasandil.)

Lause 5.8. Topoloogiliste ruumide korrutisruum on sidus parajasti siis, kui kõik selle tegurid on sidusad topoloogilised ruumid.

Tõestus. Ühtepidi implikatsioon on siis lihtne; kui korrutisruum on sidus, siis iga tegur on korrutisruumi pidev kujutis (vastava loomuliku projektori suhtes).

Piisavus (erijuht). Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) sidusad topoloogilised ruumid. Näitame, et korrutisruum $X \times Y$ on sidus. Fikseerime vabalt $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Paneme tähele, et suvalise $x \in X$ korral on korrutisruumi $X \times Y$ alamhulgad $X \times \{y_0\}$ ja $\{x\} \times Y$ on sidusad, sest nad on vastavalt homöomorfsed sidusate ruumidega (X, τ_X) ja (Y, τ_Y). Vaadeldavatel alamhulkadel on ühine punkt (x, y_0). Järelikult ka nende alamhulkade ühend $E_x = X \times \{y_0\} \cup \{x\} \times Y$ on sidus. Paneme tähele, et alati $(x_0, y_0) \in E_x$. Seega on ka korrutisruum $X \times Y = \bigcup_{x \in X} E_x$ on sidus. □

***Ülesanne 22** (5 p)**.** Tõestada, et sidusate topoloogiliste ruumide suvaline korrutisruum on sidus.

Lemma 5.9. Olgu $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $n > 1$. Olgu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Siis on $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ sidus.

Tõestus. Ilmne. □

Teoreem 5.10. Kui $n > 1$, siis $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^n$.

Tõestus. Oletame, et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on homöomorfism. Fikseerime vabalt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ilmselt peab f ahend olema homöomorfism alamruumide $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ ja $\mathbb{R} \setminus \{f(x_0)\}$ vahel. Kuid see on võimatu, sest üks neist ruumidest on sidus ja teine ei ole. $\square$

Märkus. Analoogiliselt tõestatakse, et $n > 1$ korral $[0,1] \not\cong [0,1]^n$. Sarnast tõestusideed kasutades on võimalik tõestada, et $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$, kui $m \neq n$!

Ülesanne 5.1. Tõestada, et sidusa topoloogilise ruumi mittetühjal pärisalamhulgal ei ole rajapunktide hulk tühi.

Ülesanne 5.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $E \subset X$ sidus. Olgu $A \subset X$ selline, et $A \cap E \neq \varnothing$ ja $(X \setminus A) \cap E \neq \varnothing$. Tõestada, et $\operatorname{Fr} A \cap E \neq \varnothing$.

Ülesanne 5.3. Tõestada, et $[0,1] \cup (2,3] \subset \mathbb{R}$ ei ole sidus.

Ülesanne 5.4. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. Olgu $E \subset X$ sidus. Olgu iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $E_\alpha \subset X$ sidus, kusjuures $E \cap E_\alpha \neq \varnothing$. Tõestada, et $E \cup \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$ on sidus. (Järelikult sidusate alamhulkade ühend on sidus niipea, kui nendest alamhulkadest mis tahes kahe hulga ühisosa ei ole tühi.)

Ülesanne 5.5. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) sidusad topoloogilised ruumid. Olgu $E \subset X$ ja $F \subset Y$ pärisalamhulgad. Tõestada, et $X \times Y \setminus E \times F$ on sidus.

Liinsidusus.

Def 5.2. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. *Liin* ehk *tee* topoloogilises ruumis (X, τ) on mis tahes pidev kujutus $f\colon [0,1] \to X$. Punkti $f(0)$ nimetatakse sel juhul liini f lähtepunktiks ja punkti $f(1)$ nimetatakse lõpp-punktiks. Sel juhul öeldakse ka, et liin f ühendab punktid $f(0)$ ja $f(1)$.

Öeldakse, et topoloogiline ruum (X, τ) on *liinsidus*, kui hulga X mis tahes kahe punkti korral leidub selline liin, mis need kaks punkti ühendab.

Näide 5.3. 1) $\mathbb{R}^n$ on liinsidus.

2) $\mathbb{R}^n$ iga (lahtine või kinnine) kera on liinsidus. Iga selline kera on kumer. Seega mis tahes kera kahe elemendi x ja y korral ka $\lambda x + (1-\lambda) y$ on selle kera element suvalise $\lambda \in [0,1]$ korral.

3) $n > 1$ korral on $\mathbb{R}^n$ ühiksfäär S^{n-1} liinsidus. Kujutus $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$, $x \mapsto x/|x|$, on pidev ja sürjektiivne.

4) Sierpinski ruum on liinsidus.

Lemma 5.11. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja $x_0 \in X$. Topoloogiline ruum (X, τ) on liinsidus parajasti siis, kui mis tahes $x \in X$ ja punkt x_0 on liiniga ühendatavad.

Tõestus. Ühtpidi implikatsioon on siin triviaalne ühendatavad.

Eeldame, et mis tahes punkt $x \in X$ ja x_0 on liiniga ühendatavad. Olgu $x_1, x_2 \in X$ suvalised. Olgu $f_1\colon [0,1] \to X$ ja $f_2\colon [0,1] \to X$ pidevad, kusjuures f_1 lähtepunkt on x_1 ja lõpp-punkt on x_0 ning f_2 lähtepunkt on x_0 ja lõpp-punkt on x_2. Siis

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t), & t \in [0, 1/2], \\ f_2(2t-1), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

on liin, mis ühendab punkte x_1 ja x_2. □

Teoreem 5.12. Liinsidus topoloogiline ruum on sidus.

Tõestus. Eeldame, et (X, τ) on liinsidus. Fikseerime $x_0 \in X$. Iga $x \in X$ korral leidub liin $f_x\colon [0,1] \to X$, mis ühendab punktid x_0 ja x. Kuna selline f_x on pidev, siis $f_x([0,1])$ on sidus. Seega on sidus ka $X = \bigcup_{x \in X} f_x([0,1])$. □

Näide 5.4. Tüüpiline näide sidusast topoloogilisest ruumist, mis ei ole liinsidus. Olgu E funktsiooni $\sin 1/x$, $x \in (0,1]$, graafik tasandil $\mathbb{R}^2$. Teame, et $\operatorname{Cl} E = E \cup \{(0, y) \colon y \in [0,1]\}$ on sidus. Kuid $\operatorname{Cl} E$ ei ole liinsidus, sest ei leidu liini, mis ühendaks punktid $(0,0)$ ja $(1/\pi, 0)$. Oletame, et selline liin f leidub. Teame, et korrutisruumi tegutsev kujutus on pidev parajasti siis, kui selle kujutuse kompositsioon iga loomuliku projektoriga on pidev. Pole raske nähe, et praegusel juhul kujutuse f

kompositsioon loomuliku projektoriga teisele tegurile ei ole pidev punktis 0.

Lause 5.13. Topoloogiline ruum (X, τ) on liinsidus parajasti siis, kui ta on sidus ja igal punktil $x \in X$ leidub liinsidus ümbrus.

Tõestus. Tarvilikkus on siin triviaalne.

Piisavus. □

Järeldus 5.14. Ruumi $\mathbb{R}^n$ lahtine alamhulk on sidus parajasti siis, kui ta on liinsidus.

Tõestus. Kui $U \subset \mathbb{R}^n$ on lahtine, siis iga $x \in U$ korral leidub kera $B(x, r_x) \subset U$. Selline kera on punkti x liinsidus ümbrus. □

Liinsidusus.

Ülesanne 5.6. Tõestada, et liinsidusa topoloogilise ruumi pidev kujutis on liinsidus. (Järelikult on liinsidusus topoloogiline omadus.)

Ülesanne 5.7. Kui topoloogilise ruumi liinsidusate alamhulkade ühisosa ei ole tühi, siis nende alamhulkade ühend on liinsidus.

Ülesanne 5.8. Tõestada, et topoloogiliste ruumide korrutisruum on liinsidus parajasti siis, kui iga tegur on liinsidus. (Piirduda kahe teguriga.)

Kujutused. Olgu X ja Y hulgad. Olgu $f\colon X \to Y$.

Öeldakse, et f on *injektiivne*, kui

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Öeldakse, et f on *sürjektiivne*, kui

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y.$$

Öeldakse, et f on *bijektiivne*, kui f on injektiivne ja sürjektiivne.

Olgu $A \subset X$. *Alamhulga A kujutiseks* (funktsiooni f suhtes) nimetatakse hulga Y alamhulka

$$f(A) = \{y \in Y\colon \exists x \in A \quad f(x) = y\}.$$

Ilmselt

$$x \in A \implies f(x) \in f(A)$$

(kusjuures vastupidine implikatsioon üldiselt ei kehti) ja

$$A \neq \varnothing \iff f(A) \neq \varnothing.$$

Kehtivad järgmised omadused:

(1) $f(\varnothing) = \varnothing$;
(2) $f(X) \subset Y$;
(3) $A_1 \subset A_2 \subset X \implies f(A_1) \subset f(A_2)$;
(4) $A_i \subset X \quad (i \in I) \implies f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
(5) $A_i \subset X \quad (i \in I) \implies f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Märgime, et f on injektiivne parajasti siis, kui

$$\forall A_1, A_2 \subset X \quad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Paneme tähele, et

$$\forall A_1, A_2 \subset X \quad f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2);$$

kusjuures vastupidine sisalduvus üldiselt ei kehti ning $f(X \setminus A)$ ja $Y \setminus f(A)$ ei pruugi üldse olla sisalduvuse suhtes võrreldavad.

Olgu $B \subset Y$. *Alamhulga B originaaliks* (funktsiooni f suhtes) nimetatakse hulga X alamhulka $f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}$.

Ilmselt

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

ja

$$f^{-1}(B) \neq \varnothing \implies B \neq \varnothing$$

(kusjuures vastupidine implikatsioon üldiselt ei kehti).

Kehtivad järgmised omadused:

(1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;
(2) $f^{-1}(Y) = X$;
(3) $B_1 \subset B_2 \subset Y \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
(4) $B_i \subset Y \quad (i \in I) \implies f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
(5) $B_i \subset Y \quad (i \in I) \implies f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
(6) $\forall B_1, B_2 \subset Y \quad f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

Märgime, et tingimusest $f^{-1}(B) = \varnothing$ ei järeldu üldiselt $B = \varnothing$.

Paneme tähele, et

(1) $A \subset f^{-1}(f(A))$;
(2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Kusjuures vastupidised sisalduvused siin üldiselt ei kehti. Täpsemalt, omaduses (1) on võrdus iga $A \subset X$ korral parajasti siis, kui f on injektiivne; omaduses (2) on võrdus iga $B \subset Y$ korral parajasti siis, kui f on sürjektiivne.

Olgu Z mingi hulka ja $g\colon Y \to Z$.

Funktsioonide f ja g korrutiseks ehk *kompositsiooniks* nimetatakse kujutust $g \circ f\colon X \to Z$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Olgu $C \subset Z$. Paneme tähele, et

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$