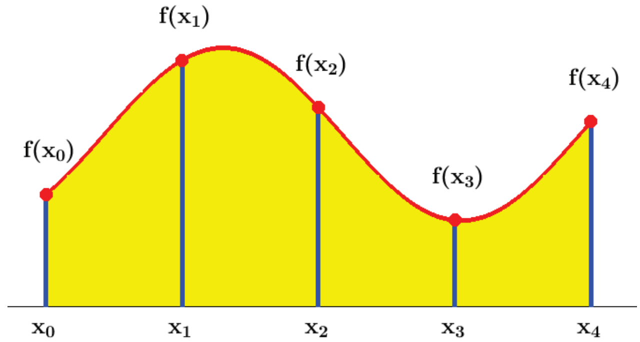
MTMM.00.340
Kõrgem matemaatika I



2019/2020 õa
sügissemester

Ülesannete kogu
1. osa

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$
\begin{aligned}
(Const)' &= 0 & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' &= -\sin x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(e^x)' &= e^x & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(a^x)' &= a^x \ln a & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0\,dx = C$

(2) $\int dx = x + C$

(3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

Sisukord

Praktikum 1

Maatriksid ja determinandid

NB!

ISESEISVALT lahendamiseks ülesannetekogust ülesanded 1.1-1.34

Praktikumis 1 lahendatakse koos teatud valik ülesannetest 1.15, 1.16 ning 1.28-1.30

1.1 Reaalarvu absoluutväärtus

Definitsioon 1.1

Reaalarvu a absoluutväärtus $|a|$ defineeritakse valemiga $|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Omadus 1.1

(a) $|a| \geq 0$; *(b)* $|-a| = |a|$; *(c)* $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$;

(d) $\pm a \leq |a|$; *(e)* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; *(f)* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$.

Ülesanne 1.1. Leidke järgmised väärtused.

(a) $|-3-5|$ **(b)** $|-|-8||$ **(c)** $\sqrt{9}$ **(d)** $|-|c||,\ c < 0$

Ülesanne 1.2. Lahendage järgmised võrrandid ja võrratused.

(a) $|x| = 3$ **(c)** $|2x + 6| = 4$ **(e)** $|x| < 2$ **(g)** $x^2 < 2$

(b) $|2x - 3| = 7$ **(d)** $|8 - 3x| = 9$ **(f)** $|1 - x| > 1$ **(h)** $4 < x^2 < 9$

Ülesanne 1.3. Skitseerige xy-tasandil punktihulk (kujund) $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

1.2 Summa sümbol

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Ülesanne 1.4. Kirjutage summa sümboli Σ abil järgmised summad.

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ **(c)** $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ **(e)** $1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5 + \frac{1}{6} + 7$

(b) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ **(d)** $1 - 4 + 9 - 16 + 25$ **(f)** $1 + q + q^2 + \ldots + q^k$

Ülesanne 1.5. Kirjutage ilma summa sümbolita järgmised summad.

(a) $\sum_{k=1}^{6} b_k$ **(b)** $\sum_{j=2}^{5} 3^j$ **(c)** $\sum_{n=1}^{1} (-1)^{n+1} 5^n$ **(d)** $\sum_{k=0}^{n} 3$

1.3 Maatriksid

Definitsioon 1.2

*$(m \times n)$-järku **maatriksiks** nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ülesanne 1.6. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n. Tähistage lühidalt maatriks tema üldelemendi kaudu.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{30} \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(i) $I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(j) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(k) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(l) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(m) $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.4 Tehted maatriksitega

Definitsioon 1.3

*$(m \times n)$-järku maatriksi $A = (a_{ij}), (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse $(n \times m)$-järku maatriksit $A^T = (a_{ji})$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, s.t maatriks, mis saadakse, kui esialgses maatriksis vahetada read veergudega (või vastupidi, veerud ridadega).*

*Olgu antud kaks $(m \times n)$-järku maatriksit $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$. Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui nende vastavad elemendid on võrdsed, s.t $A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.*

*Maatriksite A ja B **summaks (vaheks)** nimetatakse maatriksit C, mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t $C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.*

*Maatriksi **korrutamisel skalaariga** ehk arvuga λ, korrutuvad selle arvuga maatriksi kõik elemendid, s.t $\lambda A = (\lambda a_{ij}), i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$.*

Ülesanne 1.7. Leidke ülesandes 1.6 : 1) võrdsed maatriksid, 2) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 1.8. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a, b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Ülesanne 1.9. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 1.6 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

(a) $2A - 3A$ (d) $-H + 2I^T$ (g) $A^T - B$ (j) $F - E$

(b) $3B + 2B^T$ (e) $A + B$ (h) $B^T + A$ (k) $C + D$

(c) $4E^T$ (f) $C + \frac{1}{2}E^T$ (i) $E + G$ (l) $D^T - C$

1.5 Maatriksite korrutamine

Definitsioon 1.4

Maatriksite A ja B ***korrutiseks*** *AB nimetatakse maatriksit C, mille elementideks on*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

kus

$$\begin{aligned} A &= (a_{ij}), & m \times n, \quad & i = 1, \ldots, m, & j = 1, \ldots, n, \\ B &= (b_{ij}), & n \times p, \quad & i = 1, \ldots, n, & j = 1, \ldots, p, \\ C &= (c_{ij}), & m \times p, \quad & i = 1, \ldots, m, & j = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Ülesanne 1.10. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 1.6 antud maatriksite korral? Jaatava vastuse korral leidke korrutis ning esitage valem nende maatriksite korrutamiseks.

(a) AB (c) A^TB (e) DC (g) FE (i) B^TC (k) O^TB

(b) BA (d) CD (f) EF (h) F^TE (j) D^TB (l) $A^T\theta$

Ülesanne 1.11. Leidke maatriksite korrutised.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ülesanne 1.12. Antud on maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

(a) AB (b) BA (c) $B^2 - A^2$ (d) $(B - A)^2$

Ülesanne 1.13. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

(a) $A^2 = A$ (b) $B^3 = B$ (c) $C^2 - 4C - 5E = O$.

Ülesanne 1.14. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdus.

1.6 Maatriksi omadused, tehted

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks θ ühesuguste järkudega maatriksid ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$A + B = B + A$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$A + \theta = A = \theta + A$$
$$\left(A^T\right)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks θ sellised, et allpool toodud tehted on määratud ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis

$$A\,B \neq B\,A \text{ üldjuhul}$$
$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$
$$(AB)C = A(BC)$$
$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$A\theta = \theta$$
$$\theta A = \theta$$

Ülesanne 1.15. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 1.6 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

(a) $\frac{1}{2}EB^TD - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^TE^6A - \frac{1}{2}BE^4B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2AC$

(g) $\frac{3}{2}H^TEAC - \frac{1}{2}H^TAC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^TFI^T - A^TEH$

(j) $IF^TH + H^TE^2H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^TH$

(l) $AB + FI^TH^T$

(m) $FI^TH^T - E^THH^T$

(n) $3H^TEFI^T - \frac{1}{12}H^T(HI)I^T$

(o) $BHH^TA - C^3D$

(p) $DD^T - D^TD + DC - CD + C^2$

(q) $(-1)\,(2D - C)$

(r) $\theta B - A^TO$

(s) $4D\theta - OA$

(t) $\theta(C - 2D^T)$

(u) $OA + \theta B$

(v) $A + O^T - (10B)^T\theta$

(w) $0\,(CA + AD)$

(x) $0\,(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 1.16. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 1.6 antud maatriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^T C$

(b) $(C^T)^T D = D(C^T)^T C$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(i) $(BA)^T = A^T B^T$

(j) $ABA = B^T A^T B^T$

(k) $(C+D)A^T = CA^T + DA^T$

(l) $B^T(D-C) = B^T D - B^T C$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$

(n) $(CD)^T = D^T C^T$

(o) $(5C)D = C(5D) = 5CD$

(p) $(CD)C = C(DC)$

(q) $AD - B^T D = (A - B^T)D$

(r) $(C^T - D)^T A^T = A^T(C^T - D)$

(s) $A(D^T - C)^T = A(D - C^T)$

(t) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$

(u) $(2A + 3B)^T = (2A)^T + (3B)^T$

(v) $5((H^T)^T + EH)^T = 10(H^T)$

(w) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$

(x) $I^T(3H^T) = 3(HI)^T$

(y) $(HI)^T = I^T H^T$

(õ) $CD + (DC)^T = CD + C^T D^T$

(ä) $(A - B^T)C = AC - B^T C$

(ö) $C(A^T + B) = CA^T + CB$

(ü) $(A^T - B)^T C = AC - B^T C$

(ii) $C(8A^T - 3B)^T D = 8C(AD) - 3C(B^T D)$

(iii) $(5B - 5A^T)^T(2C^T)D^T = 10(B^T - A)(DC)^T$

Ülesanne 1.17. (M) Tõestage, et maatriks $A = BB^T$ on sümmeetriline (s.t $A = A^T$) iga maatriksi B korral.

Ülesanne 1.18. (M) Tõestage, et kahe kaldsümmeetrilise maatriksi (s.t $A^T = -A$) korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui need maatriksid kommuteeruvad.

1.7 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 1.19. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B_3-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A. Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C. Laost viiaks välja kaks korda sama kogust kaste B. Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 1.20. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t}.

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P, et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 1.21. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 1.22. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

1.8 Determinandi arvutamine

Definitsioon 1.5

*Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$. Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendi a_{ij} miinor ehk elemendile a_{ij} vastav $(n-1)$-järku determinant. Sellisel juhul räägitakse maatriksi A determinandi arendamisest i-nda rea järgi. Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j-nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A.

Definitsioon 1.6

*Determinanti M_{ij} nimetatakse ruutmaatriksi A **elemendi**le a_{ij} vastavaks **miinoriks**, mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.*

Definitsioon 1.7

*Determinandi D_A **elemendi** a_{ij} **alamdeterminandiks** A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Alamdeterminanti A_{ij} nimetatakse ka elemendi a_{ij} algebraliseks täiendiks.

Ülesanne 1.23. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

1.9 Determinantide põhiomadused

Omadus 1.2

1. *Maatriksi transponeerimine ei muuda maatriksi determinandi väärtust.*
2. *Kahe rea (või veeru) omavaheline vahetamine muudab determinandi märgi vastupidiseks.*
3. *Determinandi mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k korrutub determinandi väärtus selle sama arvuga.*
4. *Kui determinandi mingi rea (või veeru) elemendid on kõik nullid, siis determinant võrdub nulliga.*
5. *Determinant, milles on kaks võrdset rida (või veergu), võrdub nulliga.*
6. *Determinandi väärtus ei muutu, kui tema mingile reale (veerule) liita mistahes nullist erineva teguriga korrutatud teine rida (veerg).*
7. *Kui determinandi mingis reas (või veerus) elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.*

Kolmnurkse maatriksi determinant, mille peadiagonaalist allpool (üleval pool) asuvad elemendid on kõik nullid, võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.

Ülesanne 1.24. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$

(f) $\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

Ülesanne 1.25. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$

Ülesanne 1.26. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Ülesanne 1.27. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

1.10 Determinantide arendamine

Ülesanne 1.28. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

Ülesanne 1.29. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$

Ülesanne 1.30. Arvutage determinandi väärtus.

(a) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (j) $\begin{vmatrix} x^3+1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3+1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3+1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^{\pi} \\ 9999 & -e^{\pi} & 0 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (k) $\begin{vmatrix} e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t & 0 \\ -e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$ **(m)** $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$

1.11 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 1.31. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S, kui

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1,4)$, $B(3,1)$, $C(2,6)$

(b) $A(-2,2)$, $B(1,5)$, $C(6,-1)$

(c) $A(1,0)$, $B(2,2)$, $C(4,3)$

(d) $A(3,6)$, $B(10,1)$, $C(-2,-3)$

Ülesanne 1.32. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V, kui

$$V = \pm\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(4,0,0)$, $B(5,2,2)$, $C(2,6,0)$

(b) $K(2,0,0)$, $L(0,4,0)$, $M(0,0,3)$

(c) $P(1,2,3)$, $Q(0,4,5)$, $R(6,0,7)$

Ülesanne 1.33. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilsesse seisu, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ, siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P-\lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^{4} x_i$ suhtes.

Ülesanne 1.34. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückel'i meetodit (vt. konspekti lisa), kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

(a) $\begin{vmatrix} \alpha-E & \beta \\ \beta & \alpha-E \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} \alpha-E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha-E \end{vmatrix}$

Praktikum 2

Pöördmaatriks ja maatriksvõrrandite lahendamine

2.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 2.1

Ühikmaatriksiks *nimetatakse niisugust n-järku ruutmaatriksit E, mille peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga ning kehtib $AE = EA = A$ suvalise n-järku maatriksi A korral.*

Näiteks (3×3)-järku ühikmaatriks on $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definitsioon 2.2

Ruutmaatriksi *A* ***pöördmaatriksiks*** *A^{-1} nimetatakse sellist maatriksit, millega antud maatriksit A vasakult või paremalt poolt korrutades saadakse ühikmaatriks E, s.t*

$$A^{-1}A = E = AA^{-1}.$$

Omadus 2.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis nende kahe maatriksi korrutise pöördmaatriks leitakse valemiga $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ülesanne 2.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

(a) $B = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $C = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $D = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 2.3. Olgu A $(n \times n)$-maatriks ja E $(n \times n)$-ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 2.4. Olgu A, B ja C pööratavad $(n \times n)$-maatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 2.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

Ülesanne 2.6. (M) Olgu E ühikmaatriks ning A ja B sama järku ruutmaatriksid.

Tõestage, et kui maatriks $E + AB$ on pööratav, siis on pööratav ka $E + BA$. *Näpunäide:* Võib näidata, et kui maatriks C on maatriksi $E + AB$ pöördmaatriks, siis maatriks $E - BCA$ on maatriksi $E + BA$ pöördmaatriks.

Ülesanne 2.7. (M) Tõestage, et $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$, kui $A^{k-1} \neq O$ ja $A^k = O$.

2.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 2.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1}, mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant ehk elemendi a_{ij} algebraline täiend.

Definitsioon 2.4

*Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse järgmisi teisendusi:*

1. *Maatriksi kahe rea äravahetamine.*
2. *Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.*
3. *Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.*

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1}, siis kirjutades maatriksi A kõrvale paremale ühikmaatriksi E, kujul $(A\,|\,E)$, saame ridade elementaarteisenduste abil paremale otsitava pöördkmaatriksi $\left(E\,|\,A^{-1}\right)$.

Ülesanne 2.8. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.9. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(c)** $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.10. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(b)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **(e)** $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(f)** $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.11. Leidke pöördmaatriksid.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.12. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

2.3 Maatriksvõrrandite lahendamine

Olgu A, B ja X sama järku ruutmaatriksid, kus A ja B on teada ning A on regulaarne. Maatriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Näiteks:
Maatriksvõrrandi $AX = B$ lahendiks on $X = A^{-1}B$.
Maatriksvõrrandi $XA = B$ lahendiks on $X = BA^{-1}$.

Ülesanne 2.13. Lahendage võrrandisüsteemid maatrikskujul.

(a) $\begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$

Ülesanne 2.14. Lahendage maatriksvõrrandid.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$

(f) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.15. Lahendage maatriksvõrrandid.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

(c) $XR = PQ$, kui $R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $KXL = M$, kui $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 2.16. **(F)** Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 2.17. **(IT)** Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. `https://goo.gl/z0Xml4`). Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Dekodeerige järgmised sõnumid.

(a) $M = \begin{pmatrix} 99 & 28 & 27 & 108 & 61 & 69 & 61 & 70 \\ 62 & 26 & 10 & 84 & 70 & 69 & 38 & 82 \\ 256 & 42 & 96 & 220 & 41 & 86 & 159 & 41 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$

(d) $M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$

(e) $M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.18. **(K)** Uue lahuse tegemiseks segatakse kokku neli erinevat lahust, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe). Esimene lahus sisaldab 80 % Cu ja 20 % Ni. Teine lahus sisaldab 60 % Cu, 20% Ni ja 20 % Zn. Kolmas lahus sisaldab 30 % Cu, 60% Ni ja 10 % Fe. Neljas lahus sisaldab 20% Ni, 40 % Zn ja 40 % Fe. Kui palju on igat lahust vaja, et lõpplahuses oleks 56 g Cu, 28 g Ni, 10 g Zn ja 6 g Fe? Koostage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = F$ ning lahendage see pöördmaatriksi leidmise abil.

Ülesanne 2.19. **(M)** $< * >$ Olgu A (4×2)-maatriks ja B (2×4)-maatriks, mille korral

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke maatriks BA.

Praktikum 3

Lineaarvõrrandisüsteemid

3.1 Cramer'i valemid

Olgu antud lineaarvõrrandisüsteem $Ax = b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Lause 3.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemis esineb Cramer'i peajuht (s.t võrrndeid on sama palju kui tundmatuid ja $|A| \neq 0$), siis on süsteemil $Ax{=}b$ üks ja ainult üks lahend x.

Cramer'i valemid lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

kus D_i on maatriksi A determinant D, milles i-s veerg on vahetatud vabaliikme vektori b vastu.

Ülesanne 3.1. Lahendage võrrandisüsteemid Cramer'i valemite abil.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + \quad - 5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z \quad = 4 \end{cases}$

3.2 Maatriksi astaku leidmine

Definitsioon 3.1

Valime maatriksist A välja k suvalist rida ja k suvalist veergu, $k \leq m, n$. Nende ridade ja veergude ühistest elementidest moodustatud k-järku determinanti M nimetatakse maatriksi A ***k-järku miinoriks****.*

Definitsioon 3.2

Maatriksi A ***astakuks*** $\operatorname{rank}(A)$ *nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku.*

Ülesanne 3.2. Millised alljärgnevatest on (4×4)-maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$ **(f)** $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$ **(g)** $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$ **(h)** $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$ **(j)** $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$ **(k)** $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ **(l)** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Ülesanne 3.3. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ülesanne 3.4. Leidke maatriksi astak sõltuvalt parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtustest.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right)$ **(b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{array}\right)$ **(c)** $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2 & -4 & 5 \\ a & a & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{array}\right)$

3.3 Võrrandisüsteemi üldlahend ja erilahend

Lühidalt:
võrrandisüsteemi lahend - tundmatute komplekt, mille asendamine süsteemi võrranditesse muudab kõik võrdused samasusteks;
võrrandisüsteemi üldlahend - lahend, mis sisaldab suvalisi konstante $c_i \in \mathbb{R}$;
võrrandisüsteemi erilahend - üldlahendis konstantidele c_i konkreetse arvulise väärtuse andmise teel saadud lahend.

Lause 3.2

Kronecker-Capelli lause. *Lineaarne võrrandisüsteem $Ax=b$ on lahenduv siis ja ainult siis, kui süsteemimaatriksi A ja laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakud on võrdsed, so $r(A)=r(L)$. Seda tingimust nimetatakse ka* ***astakutingimuseks****.*

Olgu tundmatute arv n, võrrandite arv m ja astak r. Kui kehtib $r(A) = r(L) = r$, kus $L = (A|b)$, siis võrrandisüsteem on lahenduv ning sõltuvalt suurustest n, m ja r, on võrrandisüsteemil:

1. $m = n = r$, üks lahend (Cramer'i peajuht).
2. $m = r < n$, lõpmata palju lahendeid (võrrandeid vähem kui tundmatuid, $n - r$ vaba tundmatut).
3. $r < m \le n$, lõpmata palju lahendeid (süsteemis on $n - r$ vaba tundmatut).
4. $n = r < m$, osad võrrandid üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem, ainult üks lahend).

Homogeense võrrandisüsteemi $Ax = 0$ laiendatud maatriks $(A|b)$ erineb süsteemi maatriksist nullveeru poolest, mis astakut ei mõjuta. Süsteemi rahuldab alati triviaalne lahend $x = 0$. Kui $n = m$ ja $D = 0$, siis astak $r < n$ ja süsteemil $Ax = 0$ on lõpmata palju lahendeid, vabu tundmatuid on $n - r$.

Ülesanne 3.5. Lineaarse võrrandisüsteemi $AX = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige (nn astakutingimuse põhjal), kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke võrrandisüsteemi lahend.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(g) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

(h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3.4 Gaussi elimineerimise meetod

Gaussi meetod. Teisendame ridade elementaarteisenduste abil elemendid allpool peadiagonaali nullideks. Viimasest võrrandist saame avaldada tundmatu x_n, asendada eelviimasesse, eelviimasest saame avaldada x_{n-1} jne. Seda meetodit nimetatakse ka tundmatute järkjärgulise elimineerimise meetodiks.

Ülesanne 3.6. Lahendage võrrandisüsteemid Gaussi meetodil.

(a) $\begin{cases} x - y + 2z + 2v = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 3y + v = -1 \\ 3z - 2v = -2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}$

Ülesanne 3.7. Tehke kindlaks, kas võrrandisüsteem on lahenduv ning lahenduvuse korral lahendage see.

(a) $\{4x - y + 2z = 10$

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

Ülesanne 3.8. Leidke milliste parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtuste korral süsteemil: 1) on üks lahend, 2) on lõpmata palju lahendeid, 3) lahendid puuduvad. Punkti 2) korral leidke lahend.

(a) $\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 4x - 2y + az = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y + 2z - w = 4 \\ ay + z + 2w = 0 \\ -x + 2y + z + w = -4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x + y + az = 5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 3x + 6y + z = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + az = -1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 6x + 2y + 3w = 16 \\ 3x + y + 2z + aw = 14 \\ x - y - z + 3w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 2 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 2x + 3y + 2w = 3 \\ x + y + az - 2w = -6 \\ 2x - y + 2z + = 9 \\ x + 3z + w = 6 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + az = 3 \\ 2x + 3y + z = b \end{cases}$

(h) $\begin{cases} ax + 3y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + y + 7z = 14 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x - y + 2z = 1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$

(l) $\begin{cases} ax + y + 4z = 2 \\ 2x - y + a^2 z = 2 \\ x + - 3z = a \end{cases}$

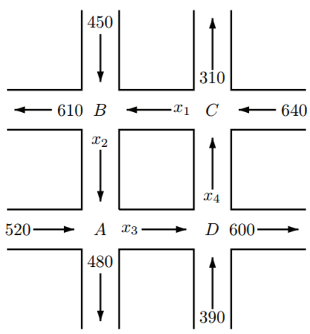
Ülesanne 3.9. Leidke millise parameetri $a \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on süsteemil: 1) ainult triviaalne lahend, 2) mittetriviaalsed lahendid. Punkti 2) korral leidke mittetriviaalne lahend.

(a) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - 9y + z = 0 \end{cases}$

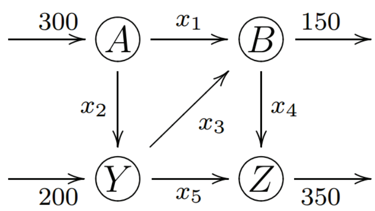
(b) $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ -8x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + az = 0 \end{cases}$

3.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 3.10. Joonisel on toodud tänavaliikluse keskmised sõidukite arvud (ühes tunnis). Leidke arvud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5.



(a)



(b)

Ülesanne 3.11. (B) Mäletseja päevategevuse võib jagada jämedalt kolmeks tegevuseks: söömine, liikumine (uude söögikohta või kiskja eest põgenemine) ja puhkamine. Olgu söömisest saadav puhasenergia 200 kalorit tunnis. Liikumisel kaotatakse 150 cal/h ja puhkamisel 50 cal/h. Kuidas tuleks ööpäev jaotada nende kolme tegevuse vahel, et energiat kuluks sama palju, kui energiat saadakse? Kas selline jaotus on ühene? Kui loom peab ööpäevas puhkama vähemalt 6 tundi, kuidas peaks siis tegevused olema jaotunud? Kui ülesöömise vastu peaks loom liikuma ja sööma sama pikalt, kuidas on jaotus siis?

Ülesanne 3.12. (K) Taimed kasutavad fotosünteesis päikeseenergiat, et toota süsihappegaasist (CO_2) ja veest (H_2O) glükoosi ($C_6H_{12}O_6$) ja hapnikku (O_2). Leidke iga aine kogused x_1, x_2, x_3 ja x_4, kui keemiline reaktsioon on kirja pandav võrrandiga

$$x_1\, CO_2 + x_2\, H_2O \to x_3\, O_2 + x_4\, C_6H_{12}O_6.$$

Praktikum 4

Funktsioonid

4.1 Funktsionaalsed sõltuvused

Kui suurus y on võrdeline (proportsionaalne) suurusega $f(x)$, siis seda sõltuvust iseloomustab funktsioon $y = k\,f(x)$, kus k on mingi konstant (võrdetegur).

Ülesanne 4.1. Kirjutage välja järgmised funktsionaalsed sõltuvused.

(a) Ümara lati tugevus S on võrdeline tema jämeduse h neljanda astmega

(b) Delfiini energiakulu E ujudes on proportsionaalne tema liikumiskiiruse v kuubiga

(c) Teekonna keskmine kiirus v on pöördvõrdeline kulutatud ajaga t

(d) Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud G on pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga

Ülesanne 4.2. (K) Keemilise elemendi erisoojus s on energia hulk kalorites, mida on vaja 1 grammi elemendi 1 kraadiliseks soojendamiseks.

Otsustage järgmise tabeli põhjal, kas erisoojus s on võrdeline või pöördvõrdeline aatommassiga w. Kui seos kehtib, leidke vastav võrdetegur k.

element	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6,9	24,3	27,0	55,8	107,9	207,2	200,6
s	0,92	0,25	0,21	0,11	0,056	0,031	0,033

4.2 Funktsioonide graafikud

Ülesanne 4.3. Selgitage, kas funktsioonide $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ korral kehtib võrdus $f = g$? Skitseerige nende funktsioonide graafikud.

Ülesanne 4.4. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud.

(a) $f(x) = -x^2 + 1$

(b) $f(x) = \log(-x)$

(c) $f(x) = \sin(x - \pi)$

(d) $f(x) = \arcsin x + \pi/2$

(e) $f(x) = e^{-2x}$

(f) $f(x) = \cos x$

(g) $f(x) = \cos 2x$

(h) $f(x) = \cos 3x$

(i) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

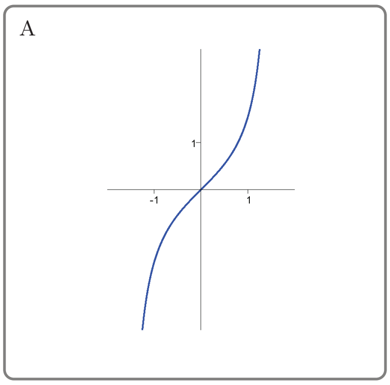
(j) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$

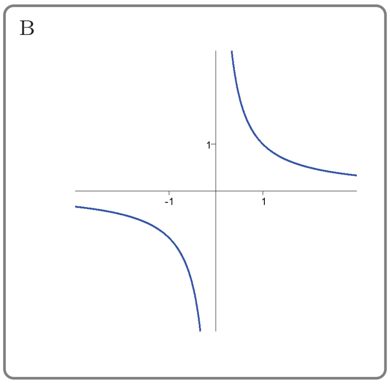
(k) $f(x) = \tan 2x$

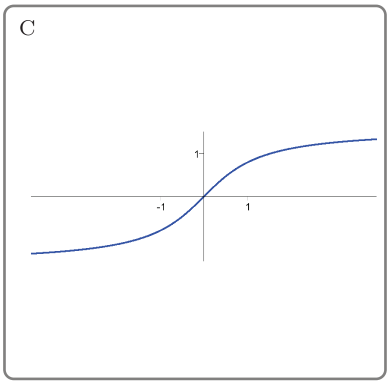
(l) $f(x) = \tan(x - 2\pi)$

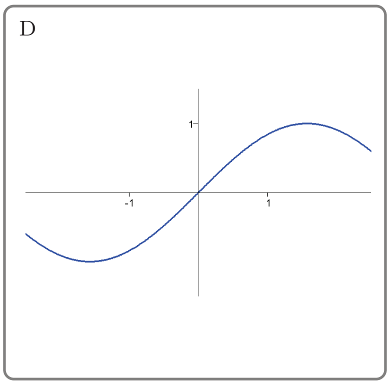
Ülesanne 4.5. (IT) Multiprotsessoriga arvuti suudab töötada S korda kiiremini, kui ühe protsessoriga arvuti. Skitseerige S graafik protsessorite arvu n järgi, kui $S = \frac{5n}{4+n}$.

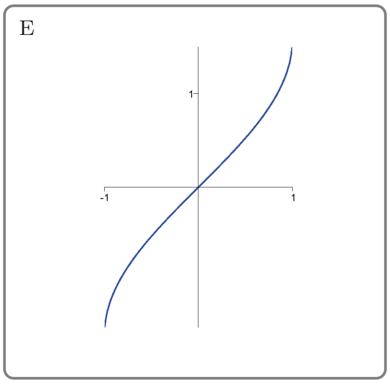
Ülesanne 4.6. Milliste põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud on kujutatud järgmistel joonistel?

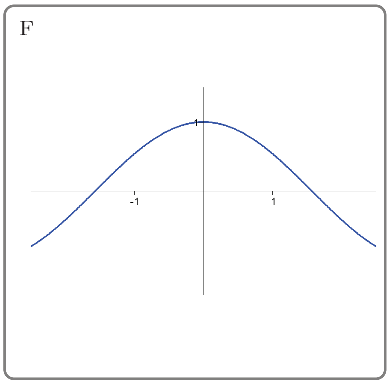

A
1
-1
1

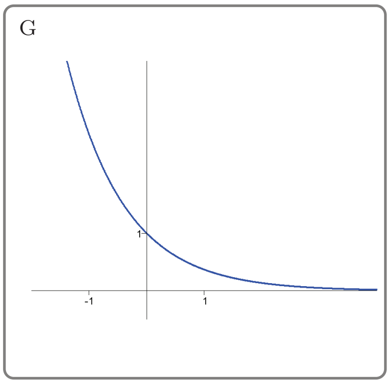

B
1
-1
1

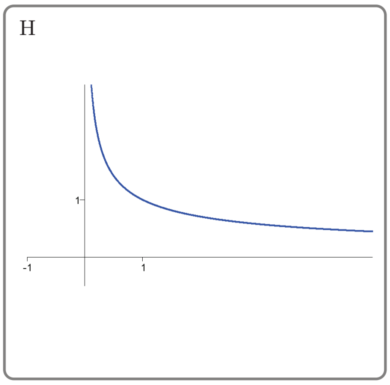

C
1
-1
1

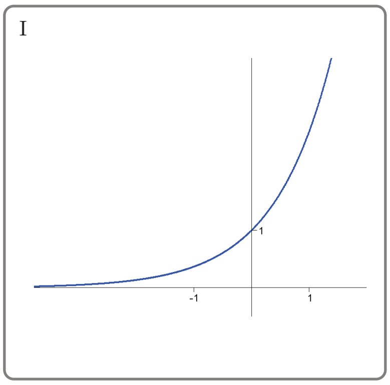

D
1
-1
1

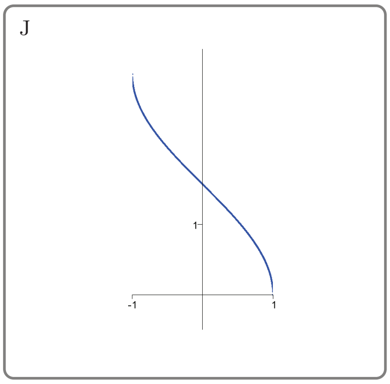

E
1
-1
1

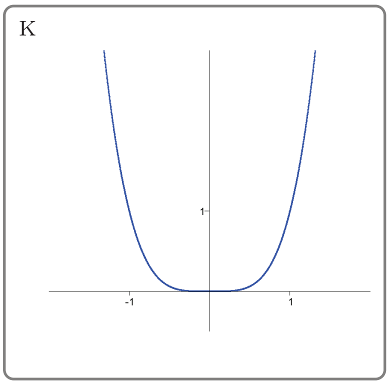

F
1
-1
1

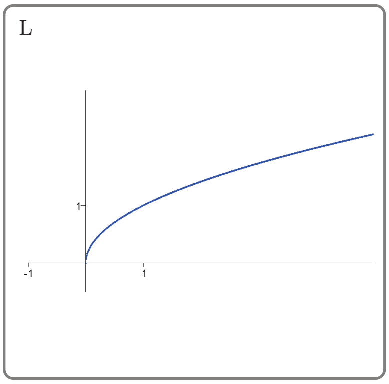

G
1
-1
1

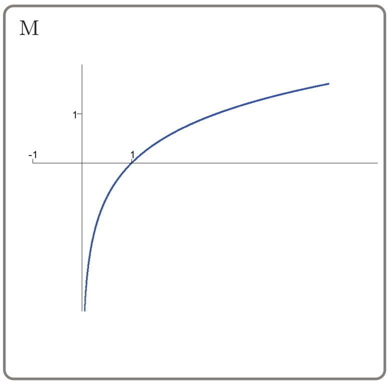

H
1
-1
1

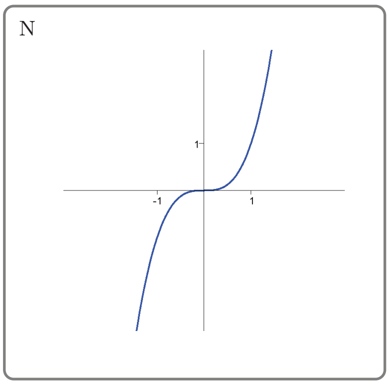

I
1
-1
1

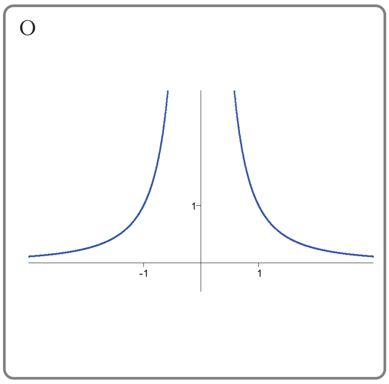

J
1
-1
1


K
1
-1
1

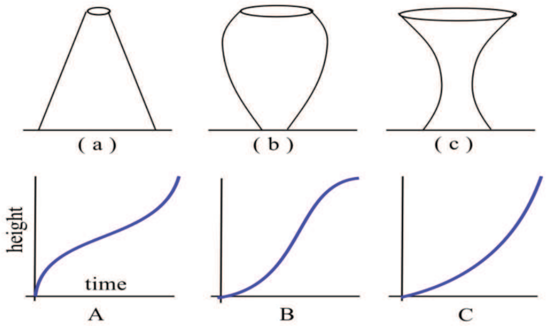

L
1
-1
1

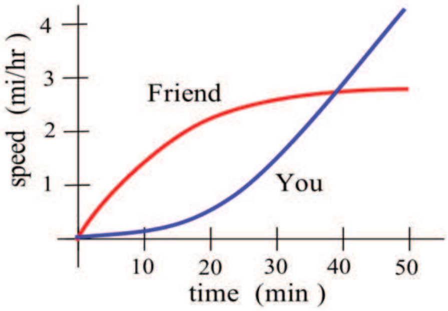

M
1
-1
1


N
1
-1
1


O
1
-1
1

Ülesanne 4.7. Kolmel graafikul on toodud anuma veega täitumise kõrgus, kui veevool on ühtlane. Milline anum vastab millisele graafikule?





Ülesanne 4.8. Graafikul (ülal paremal) on toodud sinu ja sõbra liikumise kiirus ajas. Liikumist alustatakse samast punktist ja liigutakse samas sihis.

(a) Kes liigub kiiremini hetkel $t = 20$?

(b) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 20$?

(c) Millal on teie vahemaa suurim?

(d) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 50$?

4.3 Funktsioonid ja nende omadused

Definitsioon 4.1

Kõikide elementide x hulka, mille puhul funktsioon $y = f(x)$ on määratud, nimetatakse funktsiooni f ***määramispiirkonnaks****. Funktsiooni f kõigi väärtuste hulka*

$$Y = \{y : y = f(x),\ x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni f ***muutumispiirkonnaks****.*

Definitsioon 4.2

Funktsiooni $f\colon X \to Y$ nimetatakse

1. ***paarisfunktsiooniks****, kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;*
2. ***paarituks funktsiooniks****, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral;*
3. ***perioodiliseks****, kui leidub arv $T \neq 0$ nii, et $f(x+T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;*
4. ***üksüheseks****, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Ülesanne 4.9. Leidke järgmiste funktsioonide määramis- ja muutumispiirkonnad.

(a) $f(x) = \sqrt{x+4}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

(c) $f(x) = \log(x-6)$

(d) $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$

(f) $f(x) = \arcsin(2x-1)$

(g) $f(x) = \arccos \frac{2}{1+x}$

Ülesanne 4.10. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid.

(a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$

(b) $f(x) = x(5^{2x} - 5^{-2x})$

(c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$

(d) $f(x) = \sin x - x\cos x$

(e) $f(x) = \sin x - \cos x$

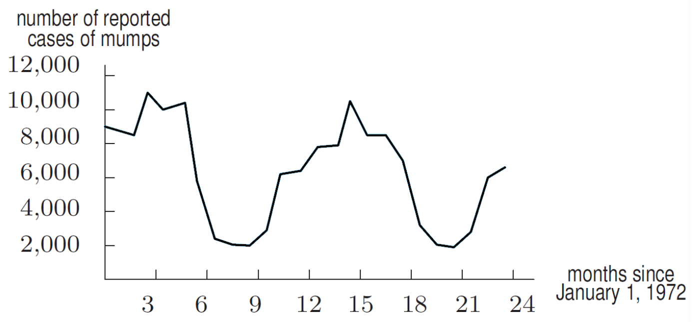
Ülesanne 4.11. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leidke vähim periood T.

(a) $f(x) = \sin 2x$ **(b)** $f(x) = \cos 3x$ **(c)** $f(x) = x^2$ **(d)** $f(x) = \tan \frac{x}{2} + 3$

Ülesanne 4.12. Graafikul on toodud aastatel 1972-73 USA-s registreeritud mumpsi juhtumite arv kuude lõikes.

(a) Leidke (ligikaudu) toodud funktsiooni periood ja amplituud

(b) Ennustage mumpsi haigestumiste arvu 30 ja 45 kuu pärast 1. jaanuari 1972



Ülesanne 4.13. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid $f^{-1} : Y \to X$.

(a) $f(x) = x^2,\ x \in [0, \infty)$

(b) $f(x) = x^2,\ x \in (-\infty, 0)$

(c) $f(x) = 10^x + 1$

(d) $f(x) = 1 + \log|x-2|,\ x \in (-\infty, 2)$

(e) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3},\ x \in [-3, 0]$

(f) $f(x) = 1 + \arccos(1-x)$

Ülesanne 4.14. Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutage ilmutatud kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

(a) $x = t + 5, \quad y = t + \ln t$

(b) $x = t^5 + t, \quad y = e^t$

Ülesanne 4.15. Leidke järgmised ilmutamata kujul antud funktsioonid $y = f(x)$.

(a) $\ln(y - \sin x) = x$

(b) $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$

Ülesanne 4.16. Määrake, kas funktsioon f on üksühene.

(a) $f(x) = 3x - 2$

(b) $f(x) = 2^x$

(c) $f(x) = x^2$

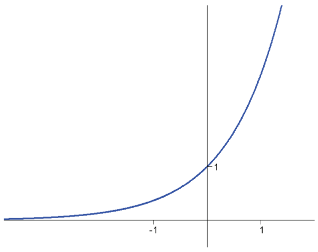
(d) $f(x) = x^2,\ x \in [0, \infty)$

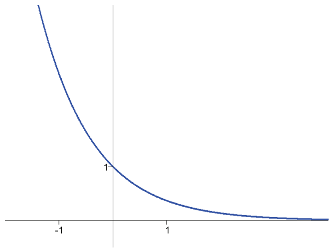
(e) $f(x) = x^3$

(f) $f(x) = \sin x$

Ülesanne 4.17. (M) $< * >$ Leidke funktsioon $f(x)$, kui $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

4.4 Eksponentfunktsioon





Eksponentfunktsioon on $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Üliolulised on funktsioonid $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$, kus esimese korral räägitakse eksponentsiaalsest kasvust ja teise puhul eksponentsiaalsest langusest.

Omadus 4.1

Eksponentfunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

(a) $a^0 = 1$ (c) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (e) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ (g) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(b) $a^x > 0$ (d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ (f) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Ülesanne 4.18. Lihtsustage avaldis $\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, kui $f(x) = Ae^{kx}$.

Ülesanne 4.19. Turule investeeritakse 300 eurot intressiga 3 % aastas. Leidke investeeringu suurus 10 aasta pärast.

Ülesanne 4.20. (K) Mõõteseade registreerib jões 1 km eemal kemikaali lekkekohast 620 osakest miljoni kohta (ppm) ning seadme näitajad suurenevad 12,5 % iga kilomeetri kohta lekkekohast eemal. Kui kaugel on seadme näit 100 ppm?

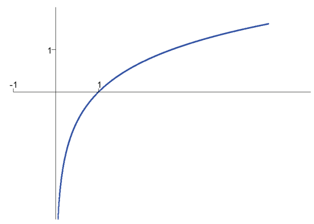
4.5 Logaritmfunktsioon

Definitsioon 4.3

*Positiivse **arvu** x **logaritmiks alusel** a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse arvu c, millega alust a astendades saadakse arv x, s.t.*

$$\log_a x = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = x.$$

Logaritm- ja eksponentfunktsioon on teineteise pöördfunktsioonid.



Omadus 4.2

Logaritmfunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

(a) $\log 1 = 0$ (d) $\log \frac{x}{y} = \log|x| - \log|y|$ (g) $a^{\log_a x} = x$

(b) $\ln e = 1$ (e) $\log x^a = a \log|x|$ (h) $e^{\ln x} = x$

(c) $\log xy = \log|x| + \log|y|$ (f) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a}$

Ülesanne 4.21. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $e^{5 \ln x}$ (b) $\ln \frac{1}{e^{3x}}$ (c) $e^{(3 \ln 9)/2}$

(d) $4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln x^{1/3}$ (e) $16^{\log_2 \sqrt[4]{48} - 1}$ (f) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$

(g) $-\log_8 \log_4 \log_2 16$ (h) $e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2$

Ülesanne 4.22. Lihtsustage järgmised avaldised.

(a) $5\log_5 25 + 8\log_2 64 - 4\log_3 27 + \log_2 2 + \log_5 1$

(b) $3^{1-\log_3 7} + 5^{\log_5 8+1} - 2{,}4^{\log_{2,4} 10+1}$

(c) $\log_2 12 + \log_2 25/3 + 2\log_2 4/5 - \log_2 2^7$

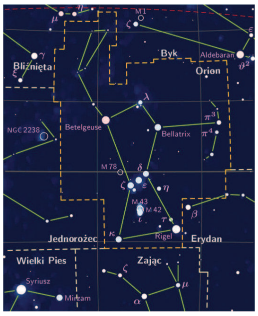
(d) $4 \cdot \left(81^{1/4-1/2\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right)$

Ülesanne 4.23. Vesi kuumutatakse nõus 90 kraadini ja asetatakse ruumi, mille temperatuur on 0 kraadi. Newtoni jahtumisseadusest tuletatakse võrrand $\ln T = \ln 90 - 0{,}23t$, kus T on vee temperatuur ja t on aeg minutites. Esitage T ajast t sõltuva funktsioonina.

Ülesanne 4.24. (F) Kahe tähe näivheledused m_1 ja m_2 on seotud nende tegelike heledustega b_1 ja b_2 järgmise logaritmilise seose abil:

$$m_1 - m_2 = 2{,}5\,\log_{10}\frac{b_2}{b_1}.$$

Avaldage b_2.
Siiriuse näivheledus on $-1{,}4$ ning veel silmaga nähtavate tähtede näivheledus on u. 6,0. Mitu korda on Siiriuse tegelik heledus suurem, kui veel silmaga nähtavatel tähtedel?



Ülesanne 4.25. (K) Putukamürk DDT keelati USA-s 1972. aastal. Olgu A_0 alghetkel piirkonda pritsitud DDT kogus ning A hetkel t (aastat) veel lagundamata DDT kogus. Neid kahte suurust seob võrrand

$$\log_{10} A = \log_{10} A_0 + 0{,}1t\log_{10} 0{,}8.$$

Avaldage A kui aja t-funktsioon.

Ülesanne 4.26. (M) Näidake, et kehtib võrdus $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

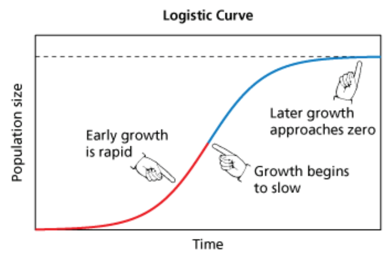
Ülesanne 4.27. (M) Arvutage b^b, kui $a^b = 8$, $b^c = 10$ ja $a^c = 2$.

4.6 Logistiline kõver

Logistiline S-kõver

$$y = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} = \frac{L}{1 + b\,e^{-kx}}$$

on laialt kasutusel populatsiooni modelleerimisel. Siin L on kõvera maksimaalne väärtus, k iseloomustab kasvu kiirust ja x_0 on keskpunkti asukoht. Logistilist kõverat kasutatakse palju ka statistikas ja IT-s masinõppes, kuna lubab modelleerida 0 ja 1 tüüpi väärtusi.



Joonis: http://www.math.andyou.com/161

Ülesanne 4.28. Ülikoolilinnakus on 5000 tudengit. Üks tudeng naaseb puhkuselt linnakusse kaua kestva gripiviirusega. Viiruse levikut modelleeritakse parajasti logisilise mudeliga $y = d\frac{5000}{1+4999e^{-0{,}8t}}$, kus t on aeg päevades ja y näitab nakatunud tudengite arvu. Mitme päeva pärast tuleb õppetöö lõpetada, kui eeskirja järgi tehakse seda olukorras, kus on vähemalt 40 % nakatunuid.

Praktikum 5

Kontrolltöö nr. 1

NB!

Kontrolltöö sisaldab **ülesandeid** ja **vähemalt ühte teooriapunkti** (definitsioonid, teoreemid, omadused, valemid, vmt) kontrolltöö teemade põhjal.

1. Maatriksid

1. Maatriksite liigid.
2. Maatriksite omadused.
3. Tehted maatriksitega.
4. Pöördmaatriks.
5. aatriksvõrrandite lahendamine.
6. Maatriksi astaku leidmine.

2. Determinandid

1. Determinantide põhiomadused.
2. Determinantide arendamine rea või veeru järgi.

3. Lineaarvõrrandite süsteemid

1. Gaussi meetod.
2. Lineaarvõrrandite süsteemi lahend, üldlahend ja erilahend.
3. Crameri peajuht ja valemeid.

4. Funktsioonid

1. Määramispiirkond, muutumispiirkond, paaris- ja paaritufunktsioon, üksühesus.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, nende skitseerimine.
3. Eksponent ja logaritmfunktsioonide omadused.
4. Pöördfunktsiooni leidmine.

Praktikum 6

Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 6.1

Öeldakse, et punkt $a \in \mathbb{R}$ on hulga $X \subset \mathbb{R}$ ***kuhjumispunkt,*** *kui punkti a iga ümbrus sisaldab temast erinevaid hulga X punkte.*

Definitsioon 6.2

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f ***piirväärtuseks*** *punktis a ja kirjutatakse*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

kui punktile a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kui tahes vähe.

Määramatused: $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$

6.1 Piirväärtuse omadusi

Teoreem 6.1

Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning eksisteerigu ***lõplikud*** *piirväärtused $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Siis eksisteerivad ka piirväärtused*

$$\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big) = c\cdot A, \quad \lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big) = A\pm B, \quad \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B, \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (\textit{kui } B\neq 0.)$$

Teoreem 6.2

Kui $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ja funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses, siis $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0$.

Teoreem 6.3

Kui

(1) *a on liitfunktsiooni $y = f\big(g(x)\big)$ määramispiirkonna kuhjumispunkt;*

(2) *eksisteerivad piirväärtused $\lim_{x\to a} g(x) = b$ ja $\lim_{v\to b} f(v) = c$ $(b, c \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$,*

siis eksisteerib ka piirväärtus

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{v\to b} f(v) = c.$$

Teoreem 6.4

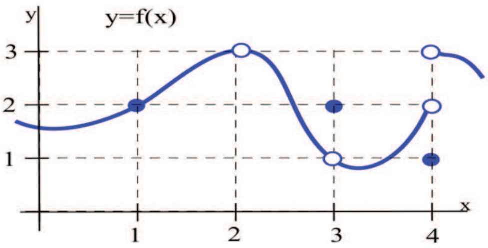
Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Teoreem 6.5

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x\to a+} f(x)$ ja $\lim_{x\to a-} f(x)$, siis piirväärtus $\lim_{x\to a} f(x) = L$ eksisteerib parajasti siis, kui kehtivad võrdused

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L.$$

Ülesanne 6.1. Leidke joonise põhjal järgmised piirväärtused.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

(a) $\lim_{x\to 2+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to 4-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 2-} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to 4+} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to 4} f(x)$

Ülesanne 6.2. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1, \\ x-1, & 1 < x \le 3, \end{cases}, \quad \begin{matrix} a & = 1 \\ b & = 2 \end{matrix}$ **(b)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ x-1, & 1 < x \le 2, \end{cases}, \quad \begin{matrix} a & = 0 \\ b & = 1 \end{matrix}$

Ülesanne 6.3. Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning olgu $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Millistele piirväärtuse omadustele tuginedes on tehtud järgmised teisendused?

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{\big(f(x)+7\big)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}\big(2f(x)-g(x)\big)}{\lim_{x\to 0}\big(f(x)+7\big)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\Big(\lim_{x\to 0}\big(f(x)+7\big)\Big)^{2/3}} = \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\Big(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\Big)^{2/3}} = \frac{7}{4}.$$

Ülesanne 6.4. Kas kehtib võrdus $\lim_{x\to 0+} 2^{1/x} = \lim_{x\to 0-} 2^{1/x}$? Põhjendage!

Ülesanne 6.5. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x\to 25} (\sqrt{x} - 5)$ **(e)** $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos 2x$ **(i)** $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}$

(b) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2-7}$ **(f)** $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+4x}{x}$ **(j)** $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{x}$ **(g)** $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

(d) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **(h)** $\lim_{x\to -1} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)$ **(k)** $\lim_{x\to 0+} \frac{4+x}{2+e^{\frac{-1}{\sin x}}}$

6.2 Piirväärtuse arvutamine

Ülesanne 6.6. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)^2-1}{2x-2}$ **(e)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{(2x^2-8)x^2}$ **(i)** $\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ **(f)** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$ **(j)** $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

(c) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^3+1}$ **(g)** $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$ **(k)** $\lim_{x\to -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$

(d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{3-x}$ **(h)** $\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$ **(l)** $\lim_{x\to 4} \frac{|x-4|}{x-4}$

Ülesanne 6.7. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(c) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{4-\sqrt{y+16}}{y}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1/3}-1}{\sqrt{x}-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+5x}}$

Ülesanne 6.8. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4}{x^2-x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0+}(\log x-\log 2x)$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{(4x+3)^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+3}{5x^2+7}$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-7x+1}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

6.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 6.9. (B) Loomade õppimisvõime uurimiseks teostas üliõpilane eksperimendi, kus rotil lasti korduvalt läbida labürinti. Mõõtmistulemused näitasid, et n-dal korral läbis rott labürindi ajaga $T(n)=(5n+17)/n$ minutit. Mis juhtub labürindi läbimiseks kuluva ajaga, kui katsete arv tõkestamatult kasvab?

Ülesanne 6.10. (B) Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega $S=\dfrac{36+24y^3}{1+4y^3}$ (mm^2), kus y on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pupilli pindala teoreetiliselt muutuda?

Ülesanne 6.11. (F) Einstein'i erirelatiivsusteooria järgi on liikuva keha mass leitav valemiga $M(v)=\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m>0$ on seisumass ja v on keha liikumise kiirus. Arvutage järgmiste avaldiste väärtused. Mis on vastavate tulemuste füüsikaline sisu?

(a) $M(0)$

(b) $M\left(\frac{c}{2}\right)$

(c) $\lim\limits_{v\to c-}M(v)$

(d) $\lim\limits_{v\to c+}M(v)$

Ülesanne 6.12. (F) Punktmassi liikumist aja t järgi kirjeldab seos $f(t)=t^3-3t^2+5t$. Leidke punktmassi liikumise kiirus hetkel $t=2$, s.t leidke piirväärtus $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$.

Ülesanne 6.13. On ennustatud, et t aasta pärast on eeslinna populatsioon $p=p(t)$ tuhat inimest, kus $p(t)=20-\dfrac{7}{t+2}$. Keskkonnaameti uuring näitas, et keskmine süsihappegaasi tase on c osakest miljoni osakese kohta, kus $c(p)=\dfrac{2\sqrt{p^2+p+21}}{5}$. Mis juhtub süsihappegaasi tasemega pikas perspektiivis, kui $t\to\infty$?

Ülesanne 6.14. (K) Analüüsige vesiniku aatomi $3s$-orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa $R_{3s}(r)$ väärtusi protsessides $r\to 0+$ ja $r\to\infty$. Siin N ja a_0 on konstandid, r on elektroni kaugus tuumast:

$$R_{3s}(r)=N\cdot\left(27-\frac{18}{a_0}r+\frac{2}{a_0^2}r^2\right)\cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}.$$

6.4 Tähtsad piirväärtused

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

Ülesanne 6.15. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\,\tan 5x}{(x-x^3)^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 3x}{3x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{\sin 4x}$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

(m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{3/x}$

(n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$

(o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

6.5 Erinevaid piirväärtuse ülesandeid

Ülesanne 6.16. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{1-\sqrt{x+3}}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x}{(x+1)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\tan 5x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\arcsin 6x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{(x-1)^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\cos x-1}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\dfrac{2}{x}-1\right)$

6.6 Pidevad ja katkevad funktsioonid

Definitsioon 6.3

Öeldakse, et funktsioon f on

- ***pidev punktis** a, kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;*
- ***pidev hulgas** X, kui ta on pidev hulga X igas punktis;*
- ***pidev,** kui ta on pidev oma määramispiirkonnas (s.t ta on pidev oma määramispiirkonna igas punktis).*

Teoreem 6.6

Iga elementaarfunktsioon on pidev.

Definitsioon 6.4

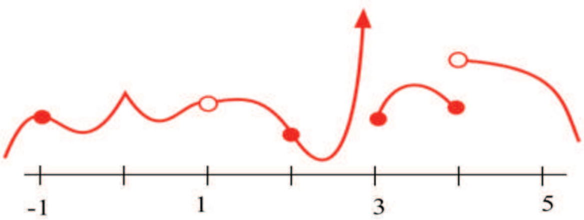
*Funktsiooni **katkevuspunktideks** nimetatakse tema määramispiirkonna punkte, milles see funktsioon ei ole pidev, ning määramispiirkonna kuhjumispunkte, mis ei kuulu määramispiirkonda.*

Definitsioon 6.5

Olgu a funktsiooni f katkevuspunkt.

- *Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **esimest liiki katkevus,** kui eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$. Kui seejuures need ühepoolsed piirväärtused on võrdsed, siis öeldakse, et katkevus punktis a on **kõrvaldatav.***
- *Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a **teist liiki katkevus,** kui vähemalt üks ühepoolsetest piirväärtustest $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ on lõpmatu või ei eksisteeri.*

Ülesanne 6.17. Leidke joonise põhjal intervallid, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta ei ole pidev.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

Ülesanne 6.18. Joonestage ühe funktsiooni f graafik, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

(a) funktsioon f on määratud lõigus $[0,5]$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

(c) $f(1) = 0$

(d) funktsioon f on tõkestatud lõigus $[4,5]$

(e) funktsioon f ei ole pidev punktis $x = 3$

Ülesanne 6.19. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

(a) $f(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$

(b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 6x}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$

Ülesanne 6.20. Leidke parameetrite a ja b väärtused, mille korral järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

(a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2, & x \le 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \le 2 \\ 2x+b, & x > 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 3+ax^2, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x-a, & x < 1 \\ \cos \pi x, & x \ge 1 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x + b, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Ülesanne 6.21. Määrake järgmiste funktsioonide katkevuste liigid. Kui võimalik, siis kõrvaldage katkevused.

(a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$

(c) $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$

(d) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

(f) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(g) $f(x) = \ln|\sin x|$

(h) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

(i) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x^2}$

Ülesanne 6.22. Töötaja leping näeb ette, et tema esialgne palk on 1000 € ning eduka töö korral ootab teda iga poole aasta tagant palgatõus 3%. Joonistage töötaja palga graafik järgmise 5 aasta jaoks ning uurida palgafunktsiooni pidevust.

Praktikum 7

Funktsiooni tuletis

7.1 Funktsiooni tuletis

Definitsioon 7.1

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ (tõkestatud või tõkestamata) intervall, $f\colon X \to \mathbb{R}$, ning olgu a hulga X sisepunkt. Funktsiooni f ***tuletiseks*** *punktis a nimetatakse (lõplikku või lõpmatut) piirväärtust*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$(const)' = 0$

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \ \alpha \neq 0$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1-x^2}$

Tehetega seotud diferentseerimisreeglid

$(cu)' = cu'$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad v \neq 0$

Ülesanne 7.1. Lähtudes definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = 6x - 1$

(b) $f(x) = 2x^2 - 5$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = \sqrt{3x}$

(e) $f(x) = \cos x$

(f) $f(x) = \frac{1}{x}$

Ülesanne 7.2. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = 3x^5$

(b) $f(x) = x + 6x^{\frac{1}{3}}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2e$

(d) $f(x) = 2^x - e^x$

(e) $f(x) = \log_2|x| + \sin x$

(f) $f(x) = \frac{1}{2x} - 3\arccos x$

(g) $f(x) = 21x^{-7} - \frac{\arcsin x}{2}$

(h) $f(x) = -\ln|x| + \frac{x^3}{6}$

(i) $f(x) = 3\pi^2 + 6\sqrt[3]{x^4}$

Ülesanne 7.3. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a, b ja α on konstandid).

(a) $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$

(b) $f(x) = x^a b^x$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

(d) $f(t) = 2t\sin t - (t^2-2)\cos t$

(e) $f(u) = \frac{\sin u}{u} - \ln u \cdot \cos u$

(f) $f(x) = -\frac{5x}{x-6}$

(g) $f(x) = \dfrac{e^x a^x}{1 + \ln a}$

(h) $f(x) = \dfrac{x \tan\alpha}{1 + x^2} + x \ln x$

(i) $f(x) = \arccos x \arcsin x$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + a^2 \arctan x$

Ülesanne 7.4. Leidke funktsiooni $f(x) = (3x - 1)(3x + 1)(x^2 - 4)$ tuletis

(a) kasutades korrutise tuletise valemit

(b) korrutades sulud läbi

Ülesanne 7.5. Arvutage järgmiste funktsioonide tuletised punktis t.

(a) $f(t) = 15t^3 e^t$ ja $t = 1$

(b) $f(t) = \dfrac{t^2(1 - 2t)}{3t - 7}$ ja $t = -1$

Ülesanne 7.6. (F) Laserite teoorias avaldub kiirgusvõimsus valemiga

$$P = \frac{kf^2}{\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2},$$

kus f on sagedus ning a, k ja ω on teatud konstandid. Leidke $\frac{dP}{df}$.

Ülesanne 7.7. (IT) Arvutisüsteem töötleb N bitti andmeid ajaga t, mis on võrdeline arvuga $N \ln(N)$. Leidke aja muutumise kiirus bittide arvu suhtes, dt/dN.

Ülesanne 7.8. (K) Termodünaamikas seob temperatuuri T, rõhku p ja gaasi ruumala V valem, kus a, b ja R on konstandid. Leidke $\frac{dT}{dV}$, kui rõhk on konstantne ja

$$T = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)\left(\frac{V - b}{R}\right).$$

Ülesanne 7.9. (M) < ∗ > Leidke $h'(1)$, kui $h(x) = xe^x \operatorname{arccot}(x) g(x)$ ning $g(1) = 2$ ja $g'(1) = -4$.

7.2 Liitfunktsiooni tuletis

Valem 7.1

Kui $y = f(g(x))$, siis $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ülesanne 7.10. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = (4x - 3)^5 + (-3x)^2$

(b) $y = 5(3x^6 - 4)^{\frac{2}{3}}$

(c) $y = (\sin x)^{-1}$

(d) $y = x\sqrt{1 - x^2}$

(e) $y = \ln(x + \ln x)$

(f) $y = 6^{\sqrt{x}} + 4^{6x}$

(g) $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{4}\right)$

(h) $y = \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{2x}$

Ülesanne 7.11. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = \left(\dfrac{2x + 1}{3x - 2}\right)^2$

(b) $y = \sqrt{\dfrac{2x + 1}{4x + 1}}$

(c) $y = \ln(4x - 3)^3$

(d) $y = \cos(-9x + 2) + \sin^3 4x^5$

(e) $y = \dfrac{1}{\cos(-7x)} + \dfrac{1}{\sin(-7x)}$

(f) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{1 + 2\sin^2 2x}$

(g) $y = \ln\tan 2x + \ln\cot 2x$

(h) $y = 6 \arcsin\sqrt{2 - x}$

(i) $y = \arctan\dfrac{1 - x}{1 + x}$

(j) $y = \arccos x \cdot \ln\arctan x$

Ülesanne 7.12. Tabelis on antud funktsioonide f ja g ning nende tuletiste väärtused kohal $x = 3$. Leidke funktsiooni $u(x) = \sqrt{f(x)^2 + 2 \cdot g(x)^2}$ tuletise väärtus punktis $x = 3$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	3	4	6	−5

Ülesanne 7.13. **(F)** Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k \cdot \sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel (a, k ja m on konstandid, L laine pikkus). Leidke L väärtused, mille korral $v'(L) = 0$.

$t=\sqrt{a^2+x^2}\frac{}{v_1+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}}$

Ülesanne 7.14. **(B)** Näidaku funktsioon $y = y(t)$ mingi liigi isendite, taime osade, rakkude arvu vms ajahetkel t. Sel juhul tuletist $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ nimetatakse ka absoluutseks kasvukiiruseks hetkel t. Absoluutne kasvukiirus võib erisuurustes organismide vahel palju erineda ja see ei anna meile infot nn efektiivsuse kohta. Olgu kasvukiirus $y'(t) = G(t)$, s.t. ajast sõltuv funktsioon. Sel juhul jagades mõlemat poolt suurusega y saame

$$\frac{y'(t)}{y} = \frac{G(t)}{y}.$$

Jagatist $R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ nimetatakse suhteliseks kasvukiiruseks ja see iseloomustab nn materjali efektiivsust toota uut materjali (näiteks metsa kasv). Sookase (*Betula pubescens*) ja mägivahtra (*Acer pseudoplatanus*) seemned istuti maha ja kasvanud taimed kärbiti iga kahe nädala tagant. Esimese 18 nädalaga selgus mõõtetulemustest, et puud kasvasid seaduste

$$W_{kask}(t) = 0{,}0441\, e^{0{,}3041\, t}, \qquad W_{vaher}(t) = 0{,}3837\, e^{0{,}2243\, t}$$

alusel, kus t ühikuks olid nädalad ja W ühikuks grammid. Kirjutage välja mõlema liigi suhtelised kasvukiirused $R(t)$. Milline liik taastoodab ennast efektiivsemalt?

Ülesanne 7.15. **(K)** Kui gaasi ruumala muutub väga kiiresti, siis rõhk P muutub ligikaudu pöördvõrdeliselt ruumala 3/2-astmega. On teada mõõtmistulemus, et 300 kPa rõhuga $V = 100$ cm^3. Leidke rõhu P muutumise kiirus ruumala V järgi hetkel, mil $V = 100$ cm^3.

7.3 Kõrgemat järku tuletis

Funktsiooni $y = f(x)$ teist järku tuletis on

$$y'' = (y')'.$$

Üldisemalt n-järku tuletis on

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = (y')^{(n-1)}.$$

Ülesanne 7.16. Leidke järgmised kõrgemat järku tuletised.

(a) $f(x) = \ln x$, leidke f''

(b) $f(x) = \sin x$, leidke $f^{(13)}$

(c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2$, leidke $f^{(10)}$

(d) $f(x) = \tan x$, leidke f''

Ülesanne 7.17. Leidke nõutud kõrgemat järku tuletised, kui funktsioon $u = u(x)$ on vajalik arv kordi diferentseeruv.

(a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f''

(b) $f(x) = u(\mathrm{e}^x)$, leidke f'''

(c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f'''

(d) $f(x) = \frac{u(x^2)}{x}$, leidke f''

Ülesanne 7.18. Arvutage nõutud kõrgemat järku tuletise väärtus.

(a) $f'''(\frac{\pi}{4})$, kui $f(x) = \cos^2 x$

(b) $f^{(4)}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$

Ülesanne 7.19. Leidke

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}$, kui $y = \frac{\ln x}{x}$

(b) $\frac{d^2p}{dq^2}$, kui $p = qe^{q^2}$

(c) $\frac{d^3s}{dt^3}$, kui $s = \frac{t}{2+3t}$

7.4 Logaritmiline diferentseerimine *

Logaritmilise diferentseerimise võte on vältimatu $[u(x)]^{v(x)}$ tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui f sisaldab palju korrutisi ja jagatisi.

1. Kirjutame
$$|y| = |f(x)|$$
2. Võtame võrdusest logaritmi
$$\ln|y| = \ln|f(x)|$$
3. Võtame mõlemast poolest tuletise
$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln|f(x)|)'$$
4. Saadud seosest avaldame y'
$$y' = y \cdot (\ln|f(x)|)'$$

Ülesanne 7.20. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = x^x$, kui $x > 0$

(b) $f(x) = x^{\sin x}$, kui $x > 0$

(c) $f(x) = (\ln x)^x$, kui $x > 1$

(d) $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{x^2} \sin 2x$

(e) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

7.5 L'Hospitali reegel

Valem 7.2

L'Hospitali reegel *määramatuste* $\frac{0}{0}$ *ja* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ *korral,*

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ kui leidub } \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ülesanne 7.21. Leidke l'Hospitali reegli abil järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+9}{5x^2-x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-6x^3+5}{x^4+5x^3-6}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x-1}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^{4x}}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln\sin 6x}{\ln\sin 3x}$

(l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln x}{x+\ln x}$

Ülesanne 7.22. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos x}{(\pi-x)^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \ln x$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln x$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to\pi/2-} (1-\sin x)\tan x$

(h) $\lim\limits_{x\to 1+} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$

Ülesanne 7.23. (M) Leidke järgmised piirväärtused, veendudes eelnevalt, et neid l'Hospitali reegliga leida ei saa, kuigi esineb sobiv määramatus.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

Ülesanne 7.24. (M) Leidke definitsioonist lähtudes funktsiooni f tuletis punktis 0 (*näpunäide:* L'Hospitali reegel):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{1}{2^x-1}, & \text{kui } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Ülesanne 7.25. (F) Kui langeva keha õhutakistus on võrdeline langemiskiirusega, siis kiirus v avaldub valemiga $v = \frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m})$, kus m on keha mass, t aeg alates langemise algusest, g raskuskiirendus ja k on positiivne konstant. Leidke piirväärtus $\lim\limits_{k\to 0+} v$.

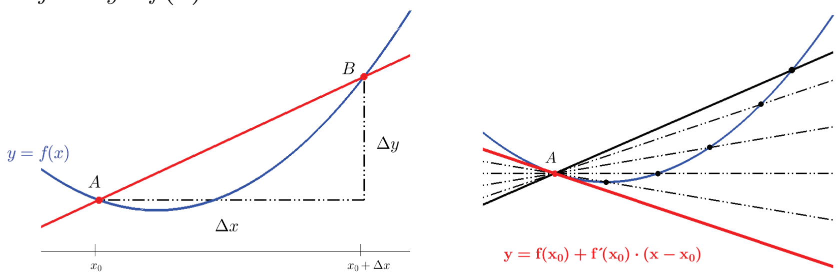
Praktikum 8

Diferentsiaali ja tuletise rakendused

8.1 Joone puutuja ja normaal

Definitsioon 8.1

*Joone **puutujaks** punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.*



Joone $y = f(x)$ tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{8.1}$$

Definitsioon 8.2

*Joone $y = f(x)$ **normaaliks** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda sama punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand punktis $(x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt*

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \tag{8.2}$$

Ülesanne 8.1. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja normaal nõutud punktis $(x_0, f(x_0))$.

(a) $y = x^2 + 2x$ punktis $(2, 8)$

(b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ punktis $(3, -6)$

(c) $y = 4 - x^2$ punktis $(3, -5)$

(d) $y = \frac{1}{x^2+1}$ punktis $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Ülesanne 8.2. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja/või normaal etteantud tõusuga.

(a) $y = x^2 - 2x$ puutuja, tõusuga 2

(b) $y = \sqrt{2x - 9}$ puutuja, tõusuga 1

(c) $y = (2x - 1)^3$ normaal, tõusuga $-\frac{1}{24}$, $x > 0$

(d) $y = \frac{x^4}{2} + 1$ normaal, tõusuga 4

Ülesanne 8.3. Arvutimängus liiguvad lennukid ekraanil vasakult paremale eeskirja $y = 2 + \frac{1}{x}$ järgi. Lennukite relvadeks on raketid, mida tulistatakse ainult liikumise suunas. Sihtmärgid asuvad x-teljel: $x = 1, 2, 3, 4$. Kas punktist $(1, 3)$ lastud rakett tabab ühte sihtmärkidest?

Ülesanne 8.4. Näidake, et joone $y = x + 2x^2 - x^4$ puutuja punktis $(1, 2)$ on selle joone puutujaks ka punktis $(-1, 0)$.

Ülesanne 8.5. Käiaga terariistu teritades lendavad sädemed mööda käia välispinna puutujat. Leidke punktist $(3, 4)$ lenduva sädeme trajektoor (sirge), kui käi on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ kujuga.

8.2 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 8.3

Anname argumendile x muudu Δx. Korrutist

$$f'(x) \cdot \Delta x \tag{8.3}$$

nimetatakse funktsiooni f ***diferentsiaaliks*** *punktis x. Tähistame dy või $df(x)$, seega*

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{ehk ka} \quad dy = f'(x) \cdot dx. \tag{8.4}$$

Ülesanne 8.6. Leidke funktsioonide diferentsiaalid.

(a) $y = x^5 + 4x$

(b) $y = 3x^2 + 6$

(c) $T = \dfrac{2}{r^5} + 3\pi^2$

(d) $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{8x}$

(e) $y = xe^x$

(f) $R = \sqrt{\dfrac{6u}{1+2u}}$

(g) $y = 6x\sqrt{1-4x}$

(h) $y = \dfrac{x}{5x+2}$

(i) $y = \dfrac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}$

Ülesanne 8.7. Arvutage funktsioonide diferentsiaalid ette antud väärtustel.

(a) $y = 7x^2 + 4x,\ x = 4,\ \Delta x = 0{,}2$

(b) $y = (x^2 + 2x)^3,\ x = 7,\ \Delta x = 0{,}02$

(c) $y = (x^2 + 1)^2, x = 1$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+4x}, x = 12, \Delta x = 0{,}06$

(e) $y = \dfrac{x}{\sqrt{6x-1}},\ x = 3{,}5,\ \Delta x = 0{,}025$

(f) $f(x) = \tan x, \Delta x = \frac{\pi}{180}$

8.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Funktsiooni $y = f(x)$ muut on $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Kui Δx on küllalt väike, siis

$$\Delta y \approx dy \quad \text{ehk} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Ülesanne 8.8. Avaldage ringi pindala S raadiuse funktsioonina. Leidke selle funktsiooni muut ΔS ning diferentsiaali definitsiooni põhjal funktsiooni diferentsiaal dS. Leidke suurus, mille võrra erinevad funktsiooni muut ja diferntsiaal.

Ülesanne 8.9. Arvutage, kui palju ligikaudu suureneb kera pinna pindala, kui raadiust pikendada 50 cm-lt 51 cm-ni.

Ülesanne 8.10. Arvutage ligikaudu, kui palju on vaja värvi, et katta 55 m raadiusega poolkerakujuline klaasist kuppel 0,5 mm paksuse värvikihiga.

Ülesanne 8.11. Ilmajaam ripub raadiusega 3,5 m kerakujulise õhupalli otsas. Õhupall kattub ühtlase jää kihiga, mille paksus on 1,2 mm. Leidke jää ligikaudne ruumala.

Ülesanne 8.12. Näidake, et kerakujulise lumepalli ruumala arvutamisel tehtav suhteline viga $\Delta V/V$ võrdub ligikaudu kolmekordse suhtelise veaga, mida tehakse raadiuse mõõtmisel.

8.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Ülesanne 8.13. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $\sqrt{1{,}08}$
(b) $\sqrt{15{,}93}$
(c) $(3{,}02)^5$
(d) $\sin 46°$
(e) $\log 11$
(f) $e^{0{,}1}$
(g) $\sqrt[3]{1{,}02}$
(h) $\sqrt{\frac{2{,}92^2-5}{2{,}92^2+7}}$
(i) $\arctan 1{,}05$

Ülesanne 8.14. Esitage ligikaudne valem funktsiooni väärtuse arvutamiseks etteantud punkti a ümbruses ning arvutage saadud valemi põhjal funktsiooni väärtus kohal b.

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 8}$, $a = 2$, $b = 1.92$
(b) $f(x) = x^2(x+1)^4$, $a = -2$, $b = -1.87$

Ülesanne 8.15. (B) Inimese ellujäämise tõenäosus y põletushaavade korral x % kehast on ligikaudselt esitatav valemiga $y = \dfrac{300}{0{,}0005x^2 + 2} - 50$. Esitage y ligikaudse arvutamise valem kohal $x = 50$ %. Arvutage saadud valemi põhjal inimese ellujäämise tõenäosus y, kui kehal on põletushaavu 45 % .

Ülesanne 8.16. (F) Elektroonilise tuuneri ühe elemendi mahtuvus on $C = \dfrac{3.6}{\sqrt{1+2V}}$ μF, kus V on pinge. Esitage C ligikaudse arvutamise valem kohal $V = 4{,}0$ volti.

8.5 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus *

Ülesanne 8.17. Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala) hetkel, kui $r = 25$ m?

Ülesanne 8.18. Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega 20 cm^3/min. Kui kiiresti suureneb kera raadius r, kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6$ cm?

Ülesanne 8.19. Silindri kõrgus h suureneb kiirusega 7 m/sek ja aluse raadius r suureneb 3 m/sek. Kui kiiresti suureneb silindri ruumala, kui $h(0) = 5$ m ja $r(0) = 6$ m?

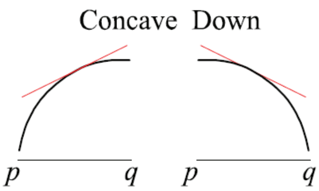
Praktikum 9

Funktsiooni uurimine

9.1 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, nõgusus- ja kumeruspiirkonnad

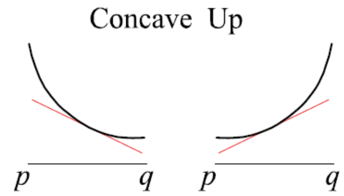
Definitsioon 9.1

*Joont $y = f(x)$ nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b), kui selle joone puutuja on igas punktis $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, ülalpool joont.*



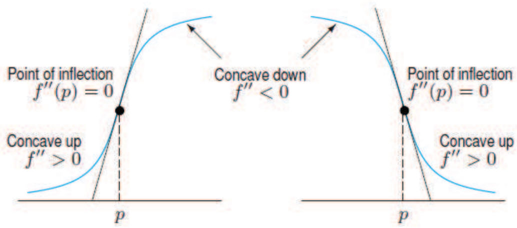
Definitsioon 9.2

*Joont $y = f(x)$ nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b), kui selle joone puutuja on igas punktis $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, allpool joont.*



Definitsioon 9.3

*Pideva joone $y = f(x)$ punkti $(c, f(c))$, milles joone kumerus läheb üle nõgususeks (või vastupidi), nimetatakse selle joone **käänupunktiks**.*



Ülesanne 9.1. Leidke järgmiste funktsioonide kasvamise ja kahanemise piirkonnad.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(c) $f(x) = x - \sin x$

(d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \arccos(1 + x)$

(f) $f(x) = xe^{-x}$, kus $x > 0$

Ülesanne 9.2. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid.

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{x - 4}$

(c) $f(x) = \arctan x - x$

(d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

(e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

(f) $f(x) = x^3 - 6x^2$

(g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

(h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

Ülesanne 9.3. Skitseerige pidevate funktsioonide $y = f(x)$ graafikud, millel on nimetatud omadused.

(a) $f(0) = -1$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$

(b) $f(1) = 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral

(c) $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral; $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f''(x) > 0$, kui $x > 0$

(d) $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$; $f'(x) < 0$, kui $x < -1$; $f'(x) > 0$, kui $x > -1$; $f''(x) < 0$, kui $0 < x < 2$; $f''(x) > 0$, kui $x < 0$ või $x > 2$

9.2 Ekstreemumid

Definitsioon 9.4

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a ***lokaalne maksimum****, kui leidub selle punkti ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, nii et*

$$f(x) \le f(a), \quad \text{iga } x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ korral .}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis a ***lokaalne miinimum****, kui leidub selle punkti ümbrus $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, nii et*

$$f(x) \ge f(a), \quad \text{iga } x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ korral .}$$

Definitsioon 9.5

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f ***kriitilisteks punktideks****. Punkte x, kus $f'(x) = 0$, nimetatakse* ***statsionaarseteks punktideks****.*

Ülesanne 9.4. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(c) $f(x) = x \ln x$

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(e) $f(x) = x \ln^2 x$

(f) $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$

(g) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

(h) $f(x) = x - \arctan x$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

(j) $f(x) = \ln(x^4 + 4x^3 + 30)$

(k) $f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{kui } x \ne 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \end{cases}$

(l) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ \cos x, & \text{kui } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(m) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x > 0, \\ -1, & \text{kui } x = 0, \\ -x^2 - 2, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$

Ülesanne 9.5. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in [0, 5]$

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \ x \in (0, 5)$

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 1, \ x \in [-2, 3]$

(d) $f(x) = x - \ln x, \ x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

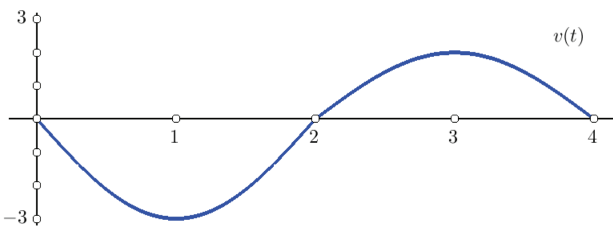
(e) $f(x) = \sin^2 x, \ x \in (-\pi, \pi)$

(f) $f(x) = \arccos x$

(g) $f(x) = e^{-x^2}$

(h) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Ülesanne 9.6. (F) Joonisel on toodud osakese kiiruse $v = v(t)$ graafik.



(a) Millal on joonise järgi osakese kiirendus null?

(b) Millal on osakese kiirus kõige suurem ja millal kõige väiksem?

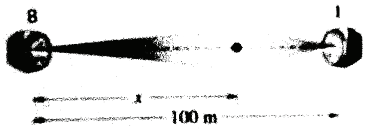
9.3 Optimiseerimine *

Ülesanne 9.7. Risttahukakujuline karp on tehtud nii, et on võetud 12×8 mõõtmetega papist ristkülik, lõigatud igast nurgast välja $x \times x$ ruut ning keeratud vastavad servad üles. Koostage karbi ruumala arvutamiseks funktsioon, mis sõltub argumendist x. Skitseerige ruumala $V = V(x)$ graafik. Leidke x väärtus nii, et sellise karbi ruumala oleks suurim.

Ülesanne 9.8. Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1,2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2,5, siis mis mõõdus koti ruumala oleks suurim?

Ülesanne 9.9. (B) Katsed näitavad, et kui inimene köhib, siis õhu kiirus kõris on $v = kr^2(a - r)$, kus a on kõri raadius normaalasendis ja k on konstant. Leidke r väärtus, mille korral kiirus v on suurim.

Ülesanne 9.10. (F) Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga.



Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem? Näpunäide: valgustihedused liidetakse.

Ülesanne 9.11. (K) Teatud kemikaali reageerimiskiirus R mg/s sõltub kemikaali hulgast m mg. Leidke kogus m, et reageerimiskiirus R oleks maksimaalne, kui $R = 12\sqrt{m}(27 - m)$.

9.4 Graafiku asümptoodid *

Definitsioon 9.6

*Sirget $x = a$ nimetatakse joone $y = f(x)$ **püstasümptoodiks**, kui $|f(a+)| = \infty$ või $|f(a-)| = \infty$.*

Definitsioon 9.7

*Sirget $y = kx + b$ nimetatakse joone $y = f(x)$ parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, s.t*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0\right). \tag{9.1}$$

Ülesanne 9.12. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+1}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$

(f) $f(x) = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$

Ülesanne 9.13. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{4(x+1)}{x^2}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$

(d) $f(x) = \dfrac{(1+\ln x)^2}{2}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

(f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$

(g) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

Ülesanne 9.14. (F) Eeldades lihtsustatult, et vihmapiisk on kerakujuline ja langedes piisa raadius väheneb ühest kuni r_0 millimeetrini, siis piisa kiirus avaldub valemiga

$$v = k\left(r - \frac{1}{r^3}\right) \qquad \text{mm/s}.$$

Skitseerige kiiruse graafik juhul, kui $k = 1$.

Praktikum 10

Määramata integraal

10.1 Määramata integraali mõiste

Definitsioon 10.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f ***algfunktsiooniks*** *vahemikus (a,b), kui*

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a,b)$ korral.

Definitsioon 10.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x)+C$ nimetatakse funktsiooni f ***määramata integraaliks****:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Ülesanne 10.1. Veenduge, et järgmised valemid kehtivad.

(a) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ **(b)** $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ **(c)** $\int d\,f(x) = f(x) + C$

Ülesanne 10.2. Leidke järgmiste funktsioonide algfunktsioonid.

(a) $12x^5 + 6x$ **(b)** $4\sqrt{x} + 3$ **(c)** $\frac{5}{2}x^{3/2}$ **(d)** $3(R^2+1)^2(2R)$

Ülesanne 10.3. Miks on nii, et $(x+5)^3$ on funktsiooni $3(x+5)^2$ algfunktsiooniks, aga $(2x+5)^3$ ei ole funktsiooni $3(2x+5)^2$ algfunktsiooniks?

10.2 Määramata integraali leidmine

Valem 10.1

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0\,dx = C$

(2) $\int dx = x + C$

(3) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C,\quad a \neq -1$

(4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(5) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(10) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Omadus 10.1

Määramata integraal on lineaarne:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)dx \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Valem 10.2

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

Ülesanne 10.4. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (2)-(4)

(a) $\int 2x\,dx$

(b) $\int \frac{y^3}{3}\,dy$

(c) $\int (2+x)\,dx$

(d) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\int (3\sqrt{x}-4)\,dx$

(f) $\int 5x\sqrt{x}\,dx$

(g) $\int \sqrt{x}(x^2-5x)\,dx$

(h) $\int (2x^{-2/3}+3^{-2})\,dx$

(i) $\int \left(\frac{t^2}{2}-\frac{2}{t^2}\right)dt$

(j) $\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(k) $\int \frac{3x^2-4x+5\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

(l) $\int \frac{x^2-2x+\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

Ülesanne 10.5. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (5) ja (6)

(a) $\int (2^x 5^x + e)\,dx$ (b) $\int (e^x+\ln 2)^2\,dx$ (c) $\int \frac{dx}{e^x}$ (d) $\int \frac{2^x}{4^x}\,dx$

Ülesanne 10.6. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (11) ja (12)

(a) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$

(b) $\int \frac{(1+x)^2\,dx}{x(1+x^2)}$

(c) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$

(d) $\int \sqrt{1+\frac{x^2+x^4}{1-x^4}}\,dx$

(e) $\int \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2-2x^2}}\,dx$

Ülesanne 10.7. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \left(2\cos^2 x-\cos 2x\right)\,dx$

(b) $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx$

(c) $\int \tan^2 x\,dx$

(d) $\int (\sin\alpha + 3\cos(\pi+x))\,dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

Ülesanne 10.8. Tõestage või lükake ümber järgmine väide. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad mingis vahemikus, siis selles vahemikus

$$f(x)=g(x) \iff \int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx\ .$$

10.3 Diferentsiaali märgi alla viimine

Valem 10.3

(13.1) $f'(x)\,dx = d\,f(x)$

(13.2) $dx = d(x+b)$

(13.3) $dx = \frac{1}{a}\,d\,ax$

(13.4) $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b)$

(13.5) $x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,d\,x^{n+1}$, $n\neq -1$

(13.6) $\frac{dx}{x} = d\ln|x|$

(13.7) $\cos x\,dx = d\sin x$

(13.8) $\sin x\,dx = -d\cos x$

Ülesanne 10.9. On antud funktsiooni diferentsiaal. Leidke see funktsioon.

(a) $3\,dx$ (b) $x\,dx$ (c) $2\sqrt{x}\,dx$ (d) $\frac{dx}{x^3}$ (e) $-\frac{3\,dx}{x}$ (f) $\frac{dx}{\cos^2 x}$ (g) $e^2 x\,dx$ (h) $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Ülesanne 10.10. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (13.2)-(13.4).

(a) $\int \cos(x+2)\,dx$ (b) $\int \sin 3x\,dx$ (c) $\int (3x-2)^7\,dx$ (d) $\int \sqrt[3]{7-2x}\,dx$ (e) $\int e^{-2x+8}\,dx$ (f) $\int \frac{dx}{3x+5}$ (g) $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-5)}$ (h) $\int \sin^2 x\,dx$

Ülesanne 10.11. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (13.5) ja (13.6).

(a) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$ (b) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\int x^2 e^{x^3}\,dx$ (d) $\int \frac{(2x+7)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\int \frac{\ln x^3}{2x}\,dx$ (f) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

Ülesanne 10.12. Leidke järgmised integraalid kasutades valemeid (13.7) ja (13.8).

(a) $\int \cos^2 x \sin x\,dx$ (b) $\int \tan x\,dx$ (c) $\int \cos^3 x\,dx$ (d) $\int \tan^3 x\,dx$

Ülesanne 10.13. Leidke integraalid diferentsiaali märgi alla viimise võttega.

(a) $\int \frac{e^{3x}}{5-e^{3x}}\,dx$ (b) $\int \frac{2x\,dx}{x^4+3}$ (c) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+5}$ (d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(e) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ (f) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$ (g) $\int x\cos x^2 \sin^2 x^2\,dx$ (h) $\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$

(i) $\int \frac{4z-4}{\sqrt{z^2-2z}}\,dz$ (j) $\int (x^2+4x+4)^{1/3}\,dx$ (k) $\int (x^2-x)\left(x^3-\frac{3}{2}x^2\right)^8\,dx$

Ülesanne 10.14. (IT) Karpe kokkupanev robot peab avaldama jõudu $F = 6\int e^{\sin(\pi t)}\cos(\pi t)\,dt$ N, kus t on aeg sekundites. Milline funktsioon $F = F(t)$ tuleb lisada arvuti programmi, kui $t = 1.5$ s korral peab jõud $F = 0$?

Ülesanne 10.15. (Maj) Ettevõtte andmed näitavad, et x generaatori tootmisel muutub päevase kasumi p (eurodes) kiirus ligikaudu seaduse $\frac{dp}{dx} = \frac{600(30-x)}{\sqrt{60x-x^2}}$ alusel. Leidke x generaatori tootmise kasum p, kui null generaatori tootmisel saadakse 5000 eurot kahjumit.

10.4 Muutujavahetus

Lause 10.1

*Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga U ja f on pidev määramispiirkonnas U, siis kehtib **muutujavahetuse valem***

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du. \tag{10.1}$$

Ülesanne 10.16. Leidke järgmised integraalid märgitud muutuja vahetusega.

(a) $\int x\sqrt{1-x}\,dx,\ t=\sqrt{1-x}$

(b) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx,\ t=\sqrt{1-x^2}$

(c) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx,\ x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

(d) $\int \frac{dx}{\sin 2x},\ t=\tan x$

(e) $\int \tan^3 x\,dx,\ t=\cos x$

(f) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}},\ x=t-\frac{1}{t},\ t>0$

Ülesanne 10.17. Leidke sobiva muutuja vahetusega järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (c) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$ (d) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$

Ülesanne 10.18. < * > Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$ (c) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{9-\cos^4 x}}dx$

10.5 Ositi integreerimine

Valem 10.4

Ositi integreerimise valem:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{10.2}$$

ehk

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \tag{10.3}$$

Ülesanne 10.19. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int xe^x\,dx$ (d) $\int x3^{-x}\,dx$ (g) $\int \ln x\,dx$

(b) $\int x\cos x\,dx$ (e) $\int \arctan x\,dx$ (h) $\int \ln(x^2+1)\,dx$

(c) $\int x\sin(2x+1)\,dx$ (f) $\int \arcsin x\,dx$ (i) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$

Ülesanne 10.20. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise valemi mitmekordsel rakendamisel.

(a) $\int x^2\sin x\,dx$ (c) $\int x^3e^{-2x}\,dx$ (e) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

(b) $\int x^3e^x\,dx$ (d) $\int e^x\sin x\,dx$ (f) $\int \sin\ln x\,dx$

Ülesanne 10.21. (K) Et leida teatud tüüpi molekulide keskmine läbimõõt, tuleb leida integraal $\int x^3e^{-x^2/8}\,dx$. Leidke antud integraal.

Ülesanne 10.22. Leidke viga järgmises "tõestuses". Et $e^{-x}e^x=1$, siis $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u=e^{-x}$ ja $dv=e^x\,dx$. Siis $du=-e^{-x}\,dx$ ja $v=e^x$ ning ositi integreerimise valemist:

$$\int dx = e^{-x}e^x + \int e^{-x}e^x\,dx \quad \text{ehk} \quad \int dx = 1+\int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame $0=1$.

10.6 Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine *

Definitsioon 10.3

*Kui polünoomi $f(x)$ aste on väiksem polünoomi $g(x)$ astmest, siis ratsionaalset funktsiooni $\frac{f(x)}{g(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.*

Valem 10.5

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise valem.

Olgu $\frac{f(x)}{g(x)}$ lihtmurd. Kui $g(x) = a(x-x_1)^k(x-x_2)^l \dots (x^2+p_1x+q_1)^m \dots$ (kus ruutpolünoomidel ei ole nullkohti), siis

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k} + \frac{B_1}{x-x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x-x_2)^l} + \dots$$
$$\dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+p_1x+q_1)^m} + \dots,$$

kus $A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_l; \dots; C_1, \dots, C_m; D_1, \dots D_m; \dots \in \mathbb{R}$.

Ülesanne 10.23. Lahutage ratsionaalmurrud osamurdude summaks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)}\,dx$ **(e)** $\int \frac{dt}{t^3-t^2}$ **(i)** $\int \frac{2\,dx}{x^4-x^2}$

(b) $\int \frac{x-2}{x(x+1)}\,dx$ **(f)** $\int \frac{2\,dx}{x^2(x^2-1)}$ **(j)** $\int \frac{(x-2)(x+2)\,dx}{x^3(x-1)}$

(c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$ **(g)** $\int \frac{(y-9)\,dy}{2y^2-3y+1}$ **(k)** $\int \frac{(x+4)\,dx}{x(x^2+2x+2)}$

(d) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$ **(h)** $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ **(l)** $\int \frac{(16x+32)\,dx}{x^4-16}$

Ülesanne 10.24. Miks ei saa integraali $\int \frac{x^2\,dx}{(x-2)(x+3)}$ leidmisel kirjutada

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}?$$

Ülesanne 10.25. Eraldage murru täisosa, lahutage lihtmurd osamurdudeks, integreerige.

(a) $\int \frac{x^2+3}{x^2+3x}\,dx$ **(b)** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$ **(c)** $\int \frac{(x^3+x+2)\,dx}{(x-1)(x+1)}$ **(d)** $\int \frac{(x^3+4x^2)\,dx}{x^2+3x+2}$

Ülesanne 10.26. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(3-\sin x)^3}$ **(d)** $\int \frac{2r^3\,dr}{r^4+2r^2+1}$ **(g)** $\int \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^3}\,dx$

(b) $\int \frac{(2x^3+3x-5)\,dx}{(x^2+x-2)^2}$ **(e)** $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3-1}$ **(h)** $\int \frac{3x+4}{x^2+2}\,dx$

(c) $\int \frac{(2x^3+x^2+8x+10)\,dx}{(x^2+1)(x^2+6x+10)}$ **(f)** $\int \frac{x^3+1}{x(x^2-1)}\,dx$ **(i)** $\int \frac{x+4}{x^2+2x+2}\,dx$

Ülesanne 10.27. < * > Leidke integraalid **(a)** $\int \frac{x^2+1}{(x^2+4)^2}\,dx$ **(b)** $\int \frac{1-x^4}{1+x^4}\,dx$.

Praktikum 11

Diferentsiaalvõrrandid

11.1 Harilik diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 11.1

Diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.*

Definitsioon 11.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon $y = f(x)$ sõltub ühest argumendist x.*

Ülesanne 11.1. (B) Olgu mingis levialas küülikute arv hetkel t aastat märgitud funktsiooniga $R = R(t)$. Ühendage vastav diferentsiaalvõrrand vastava kirjeldusega (igale olukorrale vastab ainult üks diferentsiaalvõrrand).

(a) Küülikute arv on konstantne

(b) Igal aastal sünnib 10 uut küülikut

(c) Keskmiselt toodab iga küülik 10 uut küülikut aastas

(d) Igal aastal toodab iga küülik 10 küülikut juurde, kuid 100 saab surma

(e) Levialas küülikuid ei ole

(a) $R = 0$

(b) $dR/dt = 10\,R$

(c) $dR/dt = 10$

(d) $dR/dt = 0$

(e) $dR/dt = 10\,R - 100$

11.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 11.3

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks *mittetühjas vahemikus (a,b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, kui ta on selles vahemikus pidevalt diferentseeruv ning tema asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles vahemikus.*

Ülesanne 11.2. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?

(a) $y = x^2$ (b) $y = x^2 + 1$ (c) $y = x^2 - 0.5$ (d) $y = (5x)^2$

Ülesanne 11.3. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?

(a) $y = e^x$

(b) $y = e^{-x}$

(c) $y = e^{0.5x}$

(d) $y = 4e^x$

(e) $y = -7e^x$

(f) $y = e^{2x}$

(g) $y = e^{2x} - 3$

(h) $y = e^x + e^{2x}$

(i) $y = 2e^x - e^{2x}$

Ülesanne 11.4. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon. Siin C, C_1, C_2, C_3 on suvalised reaalarvud.

(a) $x^2y' + (1-2x)y = x^2,\ y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(b) $y'' = x + \sin x,\ y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(c) $y'' - y' = x,\ y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}$

(d) $y' \tan x - y = 1,\ y = C \sin x - 1$

(e) $xy' = y \ln \dfrac{y}{x},\ y = xe^{Cx+1}$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0,\ y = Cx + C - C^2$

(h) $y''' + \dfrac{3}{x} y'' = 0,\ y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + C_3$

(i) $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = \left(x^2 - y^2 - a^2\right)\dfrac{dy}{dx},\ y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2 C}{1+C}$

11.3 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 11.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul*

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles diferentsiaali dx kordaja $f(x)$ ja diferentsiaali dy kordaja $g(y)$ on antud funktsioonid, mis sõltuvad vastavalt ainult muutujast x ja ainult muutujast y.

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$. Võrrandi üldlahend ilmutamata kujul on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant

Definitsioon 11.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul*

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

milles diferentsiaalide dx ja dy kordajad on kahe etteantud funktsiooni korrutised, millest üks sõltub ainult muutujast x ja teine sõltub ainult muutujast y.

Muutujate eraldamiseks jagatakse diferentsiaalvõrrandi mõlemaid pooli avaldisega

$$g_1(y) \cdot f_2(x),$$

mille tulemusena saadakse eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Erilahendi saamiseks asendatakse algtingimus üldlahendisse ja avaldatakse saadud võrdusest konstant C.

Ülesanne 11.5. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Joonestada mõned integraaljooned.

(a) $dy = 2dx$

(b) $dy = \cos x dx$

(c) $dy = \dfrac{dx}{x}$

(d) $dy = e^x dx$

(e) $\dfrac{1}{x^4}y' = 1$

(f) $yy' - x = 5$

(g) $xy' = x + 1$

(h) $y' = \dfrac{1}{y}$

(i) $y' = 2\sqrt{y}$

(j) $xy' = y + 1$

Ülesanne 11.6. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $x(yy' - x + 1) = -1$

(b) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$

(c) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$

(d) $xy' = y(y - 1)$

(e) $x(x + 1)y' + y = y^2$

(f) $2yy' \cos x = 1$

(g) $(1+x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(h) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(i) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$

Ülesanne 11.7. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi erilahend.

(a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x,\ y(2) = -1$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y},\ y(0) = 0$

(c) $y^2y' + 2x = 1,\ y(2) = -1$

(d) $yxdy + (x^2 - 1)dx = 0,\ y(1) = 0$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y^2)/(1 + x^2),\ y(0) = 1$

11.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 11.8. (Maj) Pangaarvel olev raha teenib intresse. Eeldades, et raha hulga R kasvamise kiirus on võrdeline raha hulgaga pangaarvel antud ajamomendil t, väljendage see seos diferentsiaalvõrrandi abil. Leidke selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Ülesanne 11.9. (B) Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t. Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leidke bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t = 0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Ülesanne 11.10. (K) Esimest järku reaktsiooni integraalne kiirusevõrrand. Vesinikperoksiidi lagunemine

$$H_2O_2 \longrightarrow H_2O + \frac{1}{2}O_2$$

on esimest järku reaktsioon, st vastav kineetiline võrrand on kujul

$$\text{lagunemise kiirus} = -\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2]\ \frac{\text{mol}}{\text{l}\cdot\text{min}},$$

kus $[H_2O_2] = [H_2O_2]_t$ on aine molaarne kontsentratsioon ajahetkel t ning k on kiiruskonstant. Olgu $k = 0,51\ \text{min}^{-1}$ ja aine algkontsentratsioon $[H_2O_2]_0 = 10\ \text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$. Leidke $\mathrm{H_2O_2}$ kontsentratsioon aja t funktsioonina ja poolestusaeg $t_{1/2}$ (aeg, mille jooksul kontsentratsioon väheneb pooleni esialgsest).

Ülesanne 11.11. **(F)** Hubble'i seaduse kohaselt paisub universum kiirusega

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3c^2}} \cdot a,$$

kus a on kaugus kahe vaadeldava objekti vahel ja ρ on universumi energiatihedus. Kasutades erinevaid stsenaariume, lahendage võrrand ning analüüsige lahendi käitumist.

(a) Eeldades, et universum koosneb enamasti ainest, siis $\rho = \frac{k}{a^3}$.

(b) Kui universum koosneb enamasti kiirgusest, siis $\rho = \frac{k}{a^4}$.

(c) Kui universum koosneb enamasti tumedast energiast (Einstein), siis $\rho = Const$.

Ülesanne 11.12. **(M)** Sotsioloogid kasutavad informatsiooni levimise kohta populatsiooni sees väljendit "sotsiaalne difusioon". Informatsioon ise võib olla kuulujutt, pärimus või uudis uuest tehnilisest leiutisest. Olgu piisavalt suure populatsioonis informatsiooni kuulnud inimeste arv x (hetkel t). Uudise levimise kiirus on võrdeline uudist kuulnud inimeste arvuga korda uudist veel mitte kuulnud inimeste arvuga:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

kus N on inimeste arv populatsioonis. Olgu t päevade arv, $k = 1/250$ ja kaks inimest on kuulnud kuulujuttu ajahetkel $t = 0$ ning $N = 1000$. Leidke x ajast t sõltuva funktsioonina. Mis hetkeks on mudeli järgi pool elanikkonnast seda kuulujuttu kuulnud?

11.5 Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 11.6

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse võrrandit kujul*

$$y'(x) + p(x)y = q(x),$$

kus $p(x)$ ja $q(x)$ on ette antud pidevad funktsioonid vahemikus (a,b) ja $y = y(x)$ on otsitav funktsioon.

Ülesanne 11.13. Millised on lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid?

(a) $y = x(y' - x\cos x)$

(b) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(c) $y' = 3x^2 + 1$

(d) $y' - \sin x = xy^2$

(e) $y \ln xy' + y^2 = xy$

(f) $y'' - xy' = \frac{1}{x}$

11.6 Lineaarse esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Integreerimisteguri kasutamine

1. Korrutame võrrandi läbi nullist erineva funktsiooniga $\mu = \mu(x)$,

$$\mu y' + (\mu p)\, y = \mu q.$$

2. Paneme tähele, et vasak pool oleks korrutise $\mu \cdot y$ tuletis $(\mu \cdot y)'$, kui kehtiks $\mu \cdot p = \mu'$. Kuna μ on suvaline funktsioon, siis võimegi nõuda, et ta oleks selline, et ta rahuldaks diferentsiaalvõrrandit

$$\mu'(x) = \mu(x) \cdot p(x).$$

3. Eelmisest võrrandist leiame μ ja sel juhul võrrandist $(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$ saame mõlemat poolt integreerides lahendi

$$\mathbf{y(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mu(\mathbf{x})} \int \mu(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q(x)}\, \mathbf{dx}.$$

Üldlahendi leidmise valem

$$\mathbf{y(x)} = \mathbf{e}^{-\int \mathbf{p(x)\,dx}} \Big(\mathbf{C} + \int \mathbf{q(x)}\, \mathbf{e}^{\int \mathbf{p(x)\,dx}}\, \mathbf{dx} \Big),$$

kus C on suvaline konstant

Peale integreerimisteguri võtte on kasutusel ka muutuja vahetuse võte ning konstandi varieerimise meetod. Kõik nad on umbes sarnase töö mahuga.

Ülesanne 11.14. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$

(c) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$

(d) $y' - y\cos x = x^2 e^{\sin x}$

(e) $(1+x^2)y' = 2xy$

(f) $xy' + x^2 - y = 0$

(g) $y' - y = x - 1$

(h) $xe^x y' + ye^x = 1$

(i) $y' = \dfrac{y+1}{x}$

(j) $y' + 2y = 4x$

(k) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(l) $y' + y = x$

(m) $x^2 y' + xy = -1$

(n) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

(o) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(p) $xy' + y - e^x = 0,\ y(a) = b$

(q) $xy' + \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0$

11.7 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 11.15. (K) Esimest järku keemiliste reaktsioonide protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:

$$A \longrightarrow^{k_1} B \longrightarrow^{k_2} C \longrightarrow^{k_3} D$$

ja modelleeritakse järgmiste võrranditega

$$\frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \quad \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z.$$

Leidke aine C kontsentratsioon sõltuvalt ajast t.

Aine A kontsentratsioon alghetkel $t = 0$ on a ja ajahetkel t on $a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on y. Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on z. Alustada tuleks esimese võrrandi lahendamisest, saadud lahend asendada teise võrrandisse, seejärel lahendada teine võrrand ja saadud lahend asendada kolmandasse.

Praktikum 12

Kontrolltöö nr. 2

NB!

Kontrolltöö sisaldab **ülesandeid** ja **vähemalt ühte teooriapunkti** (definitsioonid, teoreemid, omadused, valemid, vmt) kontrolltöö teemade põhjal.

1. Funktsiooni piirväärtus, tuletis ja diferentsiaal

1. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus.
2. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal (näiteks astmefunktsioonidest).
3. Tuletiste tabel.
4. Diferentseerimise reeglid.
5. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
6. Tuletis kui kiirus ja teine tuletis kui kiirendus.
7. Graafiku puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
8. Funktsiooni diferentsiaal ja selle geomeetriline tõlgendus.

2. Tuletise ja diferentsiaali rakendused

1. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine. Vaja võib minna kera ruumala valemit ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$).
2. Suuruse muutumise kiirus.
3. Maksimum- ja miinimumkoha leidmine (optimiseerimine).
4. L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks.
5. Funktsiooni graafiku uurimine. Kasvamise ja kahanemise piirkonnad, ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

3. Määramata integraal

1. Algfunktsiooni leidmine. Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
2. Diferentsiaali märgi alla viimise võte.
3. Ositi integreerimine.