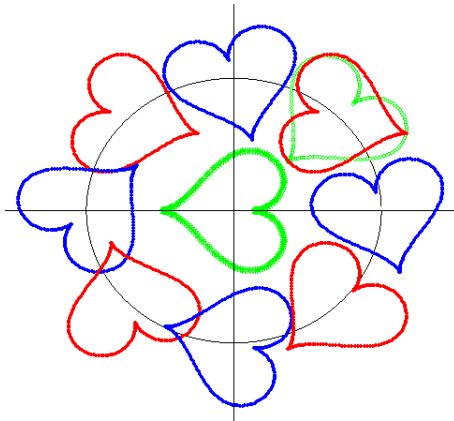


MTMM.00.340  
Kõrgem matemaatika I



2019/2020 õa

LOENGUKONSPEKT

Marek Kolk, 2016  
Täiendanud ja muutnud Annely Mürk, 2018-2019



# Sisukord

<b>0</b>	<b>Tähistused. Reaalrvud *</b>	<b>1</b>
0.1	Tähistused . . . . .	2
0.2	Kreeka tähestik . . . . .	3
0.3	Reaalrvud . . . . .	4
0.4	Summa sümbol . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Maatriksid ja determinandid</b>	<b>9</b>
1.1	Maatriksi mõiste . . . . .	10
1.2	Tehted maatriksitega . . . . .	11
1.3	Maatriksite korrutamine . . . . .	13
1.4	Teist ja kolmandat järku determinant . . . . .	16
1.5	Kõrgemat järku determinant . . . . .	18
1.6	Determinantide omadused . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Pöördmaatriks. Lineaarvõrrandisüsteemid</b>	<b>25</b>
2.1	Maatriksi pöördmaatriks . . . . .	26
2.2	Maatriksvõrrandite lahendamisest . . . . .	29
2.3	Pöördmaatriksi leidmine valemi abil . . . . .	32
2.4	Maatriksi astak . . . . .	33
2.5	Lineaarvõrrandisüsteemid . . . . .	36
2.6	Cramer'i peajuht . . . . .	38
2.7	Gauss'i elimineerimise meetod . . . . .	40
2.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend . . . . .	42
2.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Funktsioonid ja jaded</b>	<b>47</b>
3.1	Funktsiooni mõiste . . . . .	48
3.2	Üksühesus ja pealekujutus . . . . .	51
3.3	Liitfunktsioon . . . . .	52
3.4	Pöördfunktsioon . . . . .	53
3.5	Põhilised elementaarfunktsioonid . . . . .	55

3.6	Elementaarfunktsioonid	61
3.7	Jadad *	62
<b>4</b>	<b>Funktsiooni piirväärtus ja pidevus</b>	<b>63</b>
4.1	Jada piirväärtus *	64
4.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	69
4.3	Ühepoolsed piirväärtused	71
4.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	73
4.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	75
4.6	Tähtsad piirväärtused	78
4.7	Pidevad funktsioonid	81
4.8	Funktsiooni katkevusi	82
4.9	Pidevate funktsioonide omadused	84
<b>5</b>	<b>Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal</b>	<b>87</b>
5.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus	88
5.2	Tuletise definitsioon	90
5.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised	92
5.4	Diferentseerimise reeglid	93
5.5	Liitfunktsiooni tuletis	95
5.6	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus	96
5.7	Kõrgemat järku tuletis	97
5.8	Joone puutuja ja normaali võrrandid	99
5.9	Funktsiooni diferentsiaal	101
<b>6</b>	<b>Funktsiooni uurimine</b>	<b>107</b>
6.1	Diferentsiaalrvtuse keskväertusteoreemid	108
6.2	L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks	113
6.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	116
6.4	Funktsiooni ekstreemumid	117
6.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	121
6.6	Funktsiooni graafiku joonestamine *	123
<b>7</b>	<b>Algfunktsioon ja määramata integraal</b>	<b>127</b>
7.1	Sissejuhatus	128
7.2	Algfunktsioon	128
7.3	Määramata integraal	129
7.4	Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest	130
7.5	Tehetega seotud integreerimisreeglid	132
7.6	Muutuajavahetus	133
7.7	Ositi integreerimine	135



7.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine . . . . .	138
<b>8</b>	<b>Diferentsiaalvõrrandid</b>	<b>143</b>
8.1	Sissejuhatus . . . . .	144
8.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt . . . . .	146
8.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid . . . . .	147
8.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid . . . . .	148
8.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid . . . . .	150
<b>9</b>	<b>Pindala ja Riemann'i integraal</b>	<b>155</b>
9.1	Pindala leidmine lõplike summade abil . . . . .	156
9.2	Riemann'i summad . . . . .	159
9.3	Määratud (Riemann'i) integraal . . . . .	161
9.4	Määratud integraali omadused . . . . .	163
9.5	Kõvertrapetsi pindala . . . . .	164
9.6	Numbriline integreerimine * . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Määratud integraal</b>	<b>171</b>
10.1	Newton-Leibniz'i valem . . . . .	172
10.2	Integraalarvutuse keskväärtusteoreem . . . . .	175
10.3	Määratud integraali arvutamine . . . . .	176
10.4	Määratud integraal ülemise raja funktsioonina . . . . .	182
<b>11</b>	<b>Määratud integraali rakendusi</b>	<b>185</b>
11.1	Pindala parameetriliste võrrandite korral * . . . . .	186
11.2	Kõversektori pindala . . . . .	187
11.3	Joone kaare pikkuse arvutamine . . . . .	188
11.4	Keha ruumala . . . . .	191
11.5	Integraali füüsikalisi rakendusi . . . . .	193
<b>12</b>	<b>Päratud integraalid ja nende rakendused</b>	<b>201</b>
12.1	Päratud integraalid . . . . .	202
12.2	Lõpmatute rajadega integraalid . . . . .	202
12.3	Integraal tõkestamata funktsioonist . . . . .	206
12.4	Integraalide rakendusi statistikas * . . . . .	208
12.5	Euler'i integraalid * . . . . .	211
12.6	Irratsionaalfunktsioonide integreerimine . . . . .	214
12.7	Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine * . . . . .	218

<b>13</b>	<b>Vektorid ruumis</b>	<b>219</b>
13.1	Suunatud lõikude hulk	220
13.2	Vabavektorid	222
13.3	Projektsioonivektor	224
13.4	Kohavektorid	225
13.5	Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$	226
13.6	Skalaarkorrutis	228
13.7	Vektorkorrutis	232
13.8	Segakorrutis	234
<b>14</b>	<b>Sirge ja tasand ruumis</b>	<b>237</b>
14.1	Tasandi vektorvõrrandid	238
14.2	Tasandi üldvõrrand	239
14.3	Sirge vektorvõrrandid	242
14.4	Sirge võrrandid ruumis	243
14.5	Punkti kaugus sirgeni	244
14.6	Punkti kaugus tasandini	246
14.7	Nurk kahe sirge vahel	248
14.8	Nurk kahe tasandi vahel	248
14.9	Nurk sirge ja tasandi vahel	249
<b>15</b>	<b>Kompleksarvud. Algebraalne ja trigonomeetriline kuju</b>	<b>253</b>
15.1	Sissejuhatatus	254
15.2	Kompleksarvud	256
15.3	Kompleksarvu algebraalne kuju	256
15.4	Tehted kompleksarvudega	257
15.5	Kompleksarvu trigonomeetriline kuju	259
15.6	Siinus ja koosinus	261
15.7	Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega	262
<b>16</b>	<b>Kompleksarvu juured. Eksponentkuju</b>	<b>265</b>
16.1	Kompleksarvu $n$ -astme juured	266
16.2	Kompleksarvu eksponentkuju	267
16.3	Algebraaliste võrrandite lahendamisest	270
16.4	Loome ise Piparkoogimehikese *	272
<b>A</b>	<b>Lineaarvõrrandisüsteemid</b>	<b>273</b>
A.1	Maatriksi omaväärtused *	273
A.2	Hückel'i meetod keemias *	274

<b>B</b>	<b>Funktsioonid</b>	<b>279</b>
B.1	Hüperboolsed funktsioonid *	279
<b>C</b>	<b>Aritmeetiline ja geomeetriline jada</b>	<b>285</b>
<b>D</b>	<b>Funktsiooni piirväärtus</b>	<b>289</b>
D.1	Piirväärtuse $(\varepsilon, \delta)$ -keelne definitsioon *	289
D.2	Lõpmatud piirväärtused *	293
D.3	Funktsiooni piirväärtuse omadused *	294
D.4	Absoluutse vea leidmise seos piirväärtuse definitsiooniga *	298
D.5	Ühepoolsed piirväärtused *	299
D.6	Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid *	301
<b>E</b>	<b>Pidevus loodusnähtuste korral</b>	<b>303</b>
E.1	Lõigu poolitamise meetod *	304
E.2	Pidevus ja katkevus loodusnähtuste korral *	307
<b>F</b>	<b>Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal</b>	<b>313</b>
F.1	Ilmutamata funktsiooni $F(x, y)$ diferentseerimine *	313
F.2	Parameetrilisel kujul antud funktsiooni diferentseerimine *	316
F.3	Diferentseeruv funktsioon *	319
F.4	Logaritmiline diferentseerimine *	321
F.5	Kõrgemat järku diferentsiaal *	322
F.6	Tuletise erinevad tähistused *	324
F.7	Ligikaudne maksimaalse vea leidmine *	326
F.8	Pöördfunktsiooni tuletis *	328
<b>G</b>	<b>Tuletise rakendused</b>	<b>329</b>
G.1	Taylor'i valem *	330
G.2	Piirväärtus funktsioonidest $(f(x))^{g(x)}$ *	334
G.3	Newton'i meetod võrrandite ligikaudseks lahendamiseks *	335
<b>H</b>	<b>Määratud integraali rakendusi</b>	<b>337</b>
H.1	Pöördkeha pinna pindala *	337
H.2	Massikeskme leidmine *	338
H.3	Pöördkeha ruumala *	340
<b>I</b>	<b>Kompleksarvud</b>	<b>343</b>
I.1	Kompleksarvude ajaloost *	343
I.2	Kompleksarvude kasutamisest *	345
I.3	Fraktalid *	346
I.4	Kompleksarvud kujundi pööramiseks *	348

I.5 Kompleksarvude kasutamine vooluahelates \* . . . . . 351

# Peatükk 0

## Tähistused. Reaalarvud \*

---

0.1	Tähistused	2
0.2	Kreeka tähestik	3
0.3	Reaalarvud	4
0.4	Summa sümbol	7

---

### Kontrolltöö teemad

1. Reaalarvu absoluutväärtus ja selle omadused.
2. Naturaalarvud.
3. Täisarvud.
4. Ratsionaalarvud.
5. Irratsionaalarvud.
6. Reaalarvud.
7. Summa sümbol.

## 0.1 Tähistused

$:=$	definiitsioon (võrdub, rõhutatult)
$a \in X$	element $a$ kuulub hulka $X$
$a \notin X$	$a$ ei kuulu hulka $X$
$X \subset Y$	hulk $X$ sisaldub hulgas $Y$ (NB! mitterange kuulumine) mujal võidakse eristada $\subset$ ja $\subseteq$ , meil $\subset = \subseteq$
$A \cup B$	hulkade ühend
$A \cap B$	hulkade ühisosa
$X \setminus Y$	hulgast $X$ lahutatakse hulk $Y$
$\Rightarrow$	järeldub
$\Leftrightarrow$	on samaväärne (mõlematpidi järeldumine)
$\forall x$	kehtib iga $x$ korral
$\exists x$	leidub selline $x$
$\mathbb{N}$	naturaalarvud $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}_0$	naturaalarvud koos nulliga $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	täisarvud $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	ratsionaalarvud $\frac{p}{q}$ , $q \neq 0$
$\mathbb{I}$	irratsionaalarvud
$\mathbb{R}$	reaalarvud
$\mathbb{C}$	kompleksarvud
$n!$	faktoriaal $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

## 0.2 Kreeka tähestik

$\alpha$	alfa
$\beta$	beeta
$\gamma, \Gamma$	gamma
$\delta, \Delta$	delta
$\epsilon, \varepsilon$	epsilon
$\zeta$	dzeeta
$\eta$	eeta
$\theta, \Theta$	teeta
$i$	ioota
$\kappa$	kapa
$\lambda, \Lambda$	lambda
$\mu$	müü
$\nu$	nüü
$\xi, \Xi$	ksii
$o$	omikron
$\pi, \Pi$	pii
$\rho, \varrho$	roo
$\sigma, \Sigma$	sigma
$\tau$	tau
$\upsilon, \Upsilon$	üpsilon
$\phi, \varphi, \Phi$	fi
$\chi$	hii
$\psi, \Psi$	psii
$\omega, \Omega$	oomega

### 0.3 Reaalarvud

Arvud moodustavad mingis mõttes matemaatika vundamendi. Erinevat tüüpi arvudel võivad olla erinevad omadused ja kasutusvaldkonnad. Enne reaalarvudeni jõudmist peame tutvuma veidi lihtsamate arvudega.

Saksa matemaatiku Leopold Kronecker'i (1823 - 1891) sõnul (vabas tõlkes) on "naturaalarvud loodud Jumala poolt. Kõik teised arvud on loodud inimese poolt."

#### Definitsioon 0.1

Tähistame sümboliga  $\mathbb{N}$  kõigi naturaalarvude hulka,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ja sümboliga  $\mathbb{Z}$  kõigi täisarvude hulka

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Negatiivsete arvude sissetoomisega saab esitada näiteks järgmise anekdoodi: *Füüsik, bioloog ja matemaatik näevad, kuidas majja siseneb kaks inimest. Hiljem väljub sealt aga kolm inimest. Füüsik mõtleb: "Algne vaatlemine toimus teatud veaga." Bioloog arvab, et inimesed vahepeal paljunesid ja matemaatik ütleb: "Kui nüüd täpselt üks inimene siseneb majja, siis on maja uuesti tühi."*

#### Definitsioon 0.2

Ratsionaalarvudeks nimetatakse arve kujul  $\frac{p}{q}$ , kus  $p$  ja  $q$  on täisarvud ja  $q \neq 0$ . Kõigi ratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga  $\mathbb{Q}$ .

Ratsionaalarvudeks on parajasti need arvud, mis on esitatavad lõplike kümnendmurdudena (näiteks 3.895) või **lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena** (näiteks 15.98787..., mida kirjutatakse lühemalt kujul 15.9(87)). Kümnendmurdude korral kasutatakse antud konseptsis kümnendkoha eraldamiseks punkti.

Eksamil (ka praktikumi tunnikontrollis) võidakse näiteks küsida ratsionaalarvu definitsiooni. Proovige seda sõnastada parajasti siis, kui konsepti käepärast ei ole ning nii, et teie vanatädi ka asjast aru saaks. Kas see, mille te sõnastasite, defineerib ikka küsitud ratsionaalarvu mõiste üheselt ära?

Analoogiliselt võidakse küsida irratsionaalarvu, reaalarvu ja kompleksarvu kohta.

**Näide 0.1** Ratsionaalarvuks ei ole  $\sqrt{2}$ . Näitame seda.

Oletame vastuväiteliselt, et  $\sqrt{2}$  on ratsionaalarv, s.t esitub kujul  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , kus  $q \neq 0$  ja  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Seejuures eeldame, et harilik murd  $\frac{p}{q}$  on antud taandatud kujul (näiteks  $\frac{1}{2}$ , aga mitte  $\frac{2}{4}$ ). Siit järeldub, et  $p$  ja  $q$  ei saa mõlemad korraga olla paarisarvud (muidu saaksime kahega läbi jagada). Algest võrdusest saame ruutu tõstmisel seose

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Siit järeldub, et  $p$  on paarisarv, kuna tema ruut esitub kahekordse arvu  $q^2$  korrutisena. Kuna  $p$  on paarisarv, siis ta esitub kujul  $p = 2r$ , kus  $r$  on mingi tundmatu arv. Vaatleme uuesti oma eelmist avaldist,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2 = \frac{4r^2}{q^2} \Rightarrow q^2 = 2r^2.$$

Viimane tähendab, et ka  $q$  peab olema paarisarv (kuna paaritu arvu ruut on ise ka paaritu). Saime vastuolu sellega, et  $q$  ja  $p$  ei tohi korraga olla paarisarvud. Järelikult eeldus  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  oli väär.

◇ ◇ ◇



Igapäeva elus saaksime hakkama ka ainult ratsionaalarve (murde) kasutades, matemaatilises teoorias aga mitte. Nagu just  $\sqrt{2}$  näol näitasime, leidub veel teistsuguseid arve.

**Definitsioon 0.3**

Arve, mis on esitatavad lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurduena, nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga  $\mathbb{I}$ .

Irratsionaalarvudeks on näiteks  $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ ,  $\pi = 3.14159265359\dots$ ,  $e = 2.71828182846\dots$  (naturaallogaritmi alus),  $\varphi = 1.61803398875\dots$  (kuldlõike parameeter), jne.

**Definitsioon 0.4**

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud moodustavad reaalarvude hulga. Kõigi reaalarvude hulga tähistame sümboliga  $\mathbb{R}$ .

Reaalarvude hulga kirjapanekuks kasutatakse kirjutusviisi

$$\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\} \quad \text{või} \quad \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Iga lõplikku kümnendmurdu  $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$  (näiteks 8.765210448) saab esitada lõpmatu kümnendmurruna kahel erineval viisil:

$$a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n00\dots \quad \text{või} \quad a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n - 1)99\dots$$

Näiteks, 2.500... või 2.499....

**Märkus 0.1**

Edaspidi välistame kümnendmuru esitamise kujul, mis lõpeb numbriga 9 perioodis. See eeldus võimaldab hõlpsamini defineerida reaalarvude võrdlemise eeskirjad. Seega reaalarvudeks nimetame kõiki lõpmatuid kümnendmurde, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis.

**Reaalarvude võrdlemine.** Reaalarve  $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$  ja  $b = \beta, \beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots$  nimetame võrdseteks, kui

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n = \beta_n, \quad \dots$$

Ütleme, et reaalarv  $a$  on suurem kui reaalarv  $b$  (ehk  $b$  on väiksem kui  $a$ ), kui  $\alpha > \beta$  või leidub indeks  $k \geq 1$ , nii et

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k > \beta_k.$$

Kuna irratsionaalarvudel on lõpmatu arv kümnendkohti, siis on selge, et päriselus ei ole võimalik lõpliku aja jooksul nende kõiki komakohti välja arvutada. Mõõtmistel võib kasutada näiteks järgmist lähenemisviisi:

$$3.14155 \leq \pi \leq 3.14165$$

või

$$|\pi - 3.1416| \leq 0.00005.$$

Arvuhulkade vahel valitseb seos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

Siinjuures  $\infty$  ja  $-\infty$  ei ole mingid arvud, nendega ei saa sooritada aritmetilisi tehteid ning nad ei asetse kuskil reaalteljel, vaid on matemaatikas abivahendina kaasatud kui „lõpmatuse“ sümbolid, mida kasutatakse reaalarvude ja nende hulkadega seotud omaduste kirjeldamisel. Antud („lõpmatuse“) sümboli kasutuselevõtt pannakse inglise matemaatiku John Wallis'e (1616-1703) arvele.

Reaalarvude võrdlus käib sisuliselt „komakohtade“ järgi.

Reaal arv  $a$  on määratud, kui on teada eeskiri tema täiskoha ja iga küm-  
nendkoha leidmiseks. Praktikas kasutatakse irratsionaalarvude asemel nen-  
de ratsionaalarvulisi lähendeid. Näiteks, igat reaalarvu  $x \in \mathbb{R}$  saab esitada  
üheselt ahelmurruna (seda teemat antud kursus lähemalt ei vaatle)

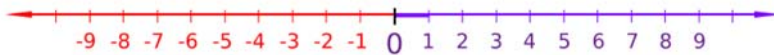
$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \quad (0.1)$$

kus  $a_0$  on mingi täisarv ja  $a_k$  ( $k \geq 1$ ) on positiivsed täisarvud. Ligikaudseks  
arvutamiseks võib kasutada “piisavalt” pikka ahelat.

**Märkus 0.2**

Reaal arve kujutatakse arvsirge punktidenä. Arvsirge punktide hulga  
ja reaalarvude hulga vahel on üks-ühene vastavus: igale reaalarvule  
 $a$  vastab parajasti üks punkt  $A$  arvsirgel (reaalarvu  $a$  kujutis), igale  
punktile  $A$  arvsirgel vastab parajasti üks reaalarv  $a$  (punkti  $A$  koordi-  
naat). Seetõttu kasutataksegi “reaalarv  $a$ ” asemel ka väljendit “punkt  
 $a$ ”.

Vastaku reaalarvule  $a$  arvsirge  
punkt  $A$  ja reaalarvule  $b$  arvsir-  
ge punkt  $B$ . Siis arv  $|a - b|$  on  
võrdne punktide  $A$  ja  $B$  vahelise  
kaugusega. Erijuhul  $b = 0$ , saa-  
me, et  $|a|$  on punkti  $A$  kaugus  
nullpunktist.



**Reaal arvu absoluutväärtus.** Reaal arvu  $a$  absoluutväärtuseks nimeta-  
takse arvu  $|a|$ , mis rahuldab tingimust

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

Absoluutväärtuse tähtsamad omadused:

1.  $|a| \geq 0$ ;
2.  $|-a| = |a|$ ;
3.  $\pm a \leq |a|$ ;
4.  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ ;
5.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ;
6.  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ,  $b \neq 0$ .

Pea mees, et iga reaalarvu  $a \in \mathbb{R}$  korral kehtib

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Näiteks,  $\sqrt{25} = 5$  ja mitte  
 $-5$ , kuna juurimine kui funkt-  
sioon on defineeritud alati ühe-  
selt mittenegatiivse arvuna. Se-  
da ei tohi segamini ajada võr-  
randil lahendamiseks. Võrrandil  
võib olla rohkem kui üks lahend,  
näiteks  $x^2 = 25$  lahenditeks on  
 $x_1 = 5$  ja  $x_2 = -5$ .

Alustades naturaalarvudest, laiendasime arvude valdkonda kuni reaalar-  
vudeni. Sellisel juhul on näiteks võrrandil  $x^2 - 2 = 0$  kaks reaalarvulist  
lahendit:  $x_1 = \sqrt{2}$  ja  $x_2 = -\sqrt{2}$ . Mida teha aga võrrandiga  $x^2 + 1 = 0$ ?  
Sellisel juhul tekib arvu ruut  $x^2$ , mille väärtus on negatiivne:  $-1$ . Meil oleks  
vaja, et kehtiks  $x_1 = \sqrt{-1}$  ja  $x_2 = -\sqrt{-1}$ . Kuna ruutjuur negatiivsest ar-  
vust ei ole defineeritud, siis tulebki välja, et puhtalt reaalarvudest ei piisa  
ning meil tuleb arvude valdkonda veelgi laiendada. Osutub, et selline samm  
on väga hästi kooskõlas üldisema matemaatilise teooriaga.

## 0.4 Summa sümbol

Kui meil on vaja liita arvud  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , siis seda saab lühidalt märkida sigma sümboli (ehk *summamärgi*) abil

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

kus  $a_i$  on summa *üldliige*,  $i$  on *summeerimisindeks* ( $i = 0, \dots, n$ ).

Summa sümbol tuleb kreeka suurtähest sigma  $\Sigma$ , mille väike täht on kujul  $\sigma$ .

Summamärgi  $\sum$  abil tähistatakse ühelaadsete liidetavate summat, seejuures sümboli  $\sum$  järel on näidatud, millise “kujuga” liidetavaid tuleb liita.

Näiteks

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

korral leitakse summa antud summa üldliikme  $a_i$  põhjal, kus kõigi liidetavate saamiseks liidetakse järjest liikmed alates indeksiga  $m$  kuni indeksiga  $n$ , lähtudes *summeerimisrajadest*  $m$  ja  $n$ .

---

**Näide 0.2** Esimese 100 arvu liitmistehte saab kirja panna kujul

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 0.3** Kirjutame summa lahti

$$\sum_{n=2}^N (-1)^{n-1} \frac{n}{n+3} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{6} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{N}{N+3}.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 0.4** Kirjutame summa lahti

$$\sum_{k=5}^{90} f(k) = f(5) + f(6) + \dots + f(90).$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 0.5** Keerulisem näide, binoomvalem:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} b^i.$$

◇ ◇ ◇



# Peatükk 1

## Maatriksid ja determinandid

---

1.1	Maatriksi mõiste . . . . .	10
1.2	Tehted maatriksitega . . . . .	11
1.3	Maatriksite korrutamine . . . . .	13
1.4	Teist ja kolmandat järku determinant . . . . .	16
1.5	Kõrgemat järku determinant . . . . .	18
1.6	Determinantide omadused . . . . .	20

---

### Kontrolltöö teemad

1. Maatriksid: omadused ja tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinantide omadused.
4. Determinandi väärtuse arvutamine, arendades determinanti rea või veeru järgi.

### Eksamiteemad

1. Maatriksid: mõisted, omadused, tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinandi mõiste ja omadused.
4. Determinandi arendamine rea või veeru järgi.

## 1.1 Maatriksi mõiste

### Definitsioon 1.1

**Maatriksiks** nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud  $m$  reast ja  $n$  veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

kus arve  $a_{ij}$  nimetatakse maatriksi **elementideks**,  $i = 1, 2, \dots, m$  ja  $j = 1, 2, \dots, n$ . Sellisel juhul öeldakse, et maatriks on **(m × n)-järku**.

Maatriksi elemendi  $a_{ij}$  esimene indeks  $i$  näitab rida (*reaindeks*) ja teine indeks  $j$  näitab veergu (*veeraindeks*), milles element asetseb. Tavaliselt tähistatakse maatriksit ladina tähestiku suure tähega (näiteks  $A, B, \dots$ ) ning maatriksi elemente tähistatakse indeksi(te)ga varustatud väikse tähega (näiteks  $a_{ij}, b_{ij}, \dots$ ). Lühidalt saab sama maatriksit  $A$  esitada ka kujul

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

või veelgi lüheamalt

$$A = (a_{ij}).$$

**Näide 1.1** Maatriksiteks on näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (5), \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Siinjuures  $a_{12} = 8$ ,  $b_{11} = 5$ ,  $c_{43} = -\pi$  ja  $d_{21} = 0$ .

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 1.2

Kui maatriksi ridade ja veergude arv on võrdne,  $m = n$ , siis nimetame maatriksit **ruutmaatriksiks** või ka **n-järku ruutmaatriksiks**.

Kui maatriksis on ainult üks rida või veerg, siis nimetame seda maatriksit ka **vektoriks**, täpsemalt **reavektoriks** ja **veeruvektoriks**. Üldine  $(m \times n)$ -maatriks koosneb  $m$  reavektorist ja  $n$  veeruvektorist.

**Näide 1.2** Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad C = \begin{pmatrix} 1.12 \\ 2.28 \end{pmatrix}.$$

Siin  $A$  on 3-järku ruutmaatriks,  $B$  on reavektor ja  $C$  on veeruvektor.

◇ ◇ ◇

Maatriksi tähistamiseks kasutatakse ümarsulge selleks, et eristada maatriksit mõnest teisest matemaatilisest objektist. Sulgude  $(\cdot)$  asemel kasutatakse ka kandilisi sulge  $[\ ]$  või siis topeltkriipse  $\| \cdot \|$ .

### NB!

Maatriksi tähistusena **ei tohi kasutada ühekordseid püst-kriipse**  $| \cdot |$ , kuna viimane on meil ühe teise olulise suuruse tähistamiseks.

Maatriksi ridade arv  $m$  ja veergude arv  $n$  määravad maatriksi **järku** ehk *maatriksi mõõtmed* (dimensiooni).

$$\begin{matrix} & & & \text{veerg } j & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \text{rida } i & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & & & & \end{matrix}$$

Maatriksi sõna tuleb ladina keelest *matrix*, mis tähendab algupäraselt „makas; allikas, algus“. Maatriks on nii matemaatikas kui arvutite maailmas väga oluliseks (eraldiseisvaks) **objektiks**, mis tunduvalt lihtsustab informatsiooni salvestamist, ülekandmist ja mõningaste süsteemide uurimist.

**Maatriksi diagonaaliks** nimetatakse  $n$ -järku ruutmaatriksi  $(a_{ij})$  elementide järjendit:

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  – **peadiagonaal**  
 $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1}$  – **kõrvaldiagonaal**.

Kui  $n$ -järku ruutmaatriksis erinevad nullist ainult peadiagonaalil asuvad elemendid, siis öeldakse, et tegemist on **diagonaalmaatriksiga**.

## 1.2 Tehted maatriksitega

### Definitsioon 1.3

Maatrikseid  $A$  ja  $B$  nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne arv ridu ja veerge ning kõik nende vastavad elemendid on võrdsed, s.t

$$A = B, \text{ kui } a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

**Näide 1.3** Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hoolimata sellest, et maatriksi  $C$  viimase veeru elemendid on kõik nullid, ei ole maatriksid  $A$  ja  $C$  võrdsed. Maatriksid  $A$  ja  $C$  ei ole omavahel võrdsed, sest neil on erinev arv veerge. Seejuures maatriksid  $A$  ja  $B$  on võrdsed ainult siis, kui  $b_{11} = 1$ ,  $b_{12} = 2$ ,  $b_{21} = 4$  ja  $b_{22} = 5$ .

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 1.4

Kui maatriksitel  $A$  ja  $B$  on võrdne arv ridu ja veerge, siis  $A$  ja  $B$  **summaks** nimetatakse maatriksit  $C$ , mille elementideks on vastavate elementide summad, s.t

$$C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Maatriksite liitmisele sarnaselt saab defineerida ka maatriksite lahutamise.

### Definitsioon 1.5

Kui maatriksitel  $A$  ja  $B$  on võrdne arv ridu ja veerge, siis  $A$  ja  $B$  **vaheks** nimetatakse maatriksit  $C$ , mille elementideks on vastavate elementide vahed, s.t

$$C = A - B, \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

**Näide 1.4** Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid  $A$  ja  $C$  (ning  $B$  ja  $C$ ) ei ole võimalik omavahel liita ega lahutada, kuna  $A$  ja  $C$  on erinevate mõõtmetega, täpsemalt – nende ridade ja veergude arv on erinev. Küll aga saame leida  $A$  ja  $B$  summa ning vahe

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 11 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Sellist liitmist ja lahutamist nimetatakse ka punktiviisiliseks liitmiseks (lahutamiseks).

**Definitsioon 1.6**

Maatriksi  $A$  **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga  $\lambda$  nimetatakse maatriksit  $\lambda A = C$ , mille elemendid saadakse maatriksi  $A$  kõigi elementide läbikorrutamisel arvuga  $\lambda$ , s.t

$$\lambda A = C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Arv  $\lambda$  on üldjuhul reaalarv, kuid võib olla ka kompleksne.

Maatriksi  $A$  **vastandmaatriksiks** nimetatakse maatriksit  $-A$  ehk arvuga  $-1$  läbikorrutatud maatriksit  $A$ .

**Näide 1.5** Korrutame eelmise näite maatriksit  $A$  arvuga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2A = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 4 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sama tulemuse saaksime, kui liidaksime  $A + A = 2A$ .

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 1.7**

**Nullmaatriksiks** nimetatakse maatriksit, mille kõik elemendid võrduvad nulliga, s.t

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad o_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Nullmaatriksit tähistatakse sageli ka sümboliga  $\theta$ .

Olgu maatriksid  $A, B, C$  ja nullmaatriks  $O$  kõik sama järku maatriksid ning  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sel juhul maatrikstehete jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, && \text{(liitmise kommutatiivsus)} \\ A + (B + C) &= (A + B) + C, && \text{(liitmise assotsiatiivsus)} \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, \\ A + O &= A = O + A. \end{aligned}$$

Sageli on vaja antud maatriksi ridades esinevad arvud paigutada hoopis veergudesse.

**Definitsioon 1.8**

Maatriksi  $A = (a_{ij})$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit  $A^T$ , mis saadakse maatriksi  $A$  ridade ja veergude äravahetamisel, s.t

$$A^T = (a_{ji}), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Üleminekut maatriksilt  $A$  maatriksile  $A^T$ , kus maatriksi  $A$  read kirjutatakse  $A^T$  veergudeks, nimetatakse maatriksi  $A$  **transponeerimiseks**.



**Näide 1.6** Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Olgu maatriksid  $A$  ja  $B$  sama järku maatriksid ning  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sel juhul transponeeritud maatriksite jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ (A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T. \end{aligned}$$

## 1.3 Maatriksite korrutamine

Maatriksite korrutamine on samuti maatrikstehe, kuid on oluliselt keerulisem ning seetõttu pühendame sellele spetsiaalselt eraldi alapeatüki. Maatriksite korrutamine ei ole kergesti tajutav. Vaatleme esiteks lihtsa näite varal, miks korrutustehe niimoodi defineeritakse, nagu me selles peatükis seda teeme.

Olgu meil kaks lineaarset võrrandit

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 7x + 3y &= 5. \end{aligned}$$

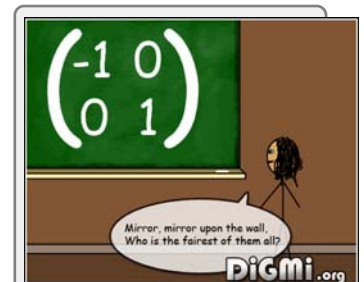
Selle süsteemi lahendiks on  $x = 2$  ja  $y = -3$ . Kontrollimaks vastust, asendame  $x$  ja  $y$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) &= 1, \\ 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) &= 5. \end{aligned}$$

Märkides võrrandisüsteemi kordajad ühte maatriksisse ja lahendi  $x$  ja  $y$  väärtused teise maatriksisse (vektorisse) ning viies korrutamise läbi järjest:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \\ 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

saame maatriksi, mis kirjeldab õigesti võrrandisüsteemi paremat poolt.



Tahvlil on nn. „peegeldusmaatriks“.

**Definitsioon 1.9**

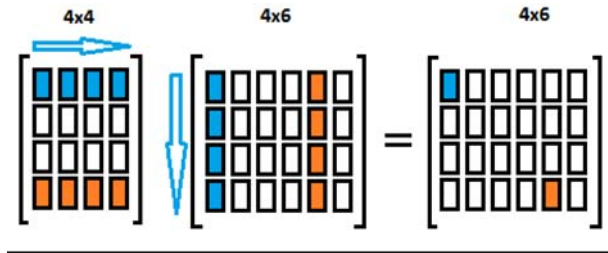
Kui maatriksi  $A$  veergude arv võrdub maatriksi  $B$  ridade arvuga, siis maatriksite  $A$  ja  $B$  **korrutiseks**  $AB$  nimetatakse maatriksit  $C$ , mille  $i$ -nda rea ja  $j$ -nda veeru elemendi  $c_{ij}$  saamiseks korrutatakse maatriksi  $A$   $i$ -nda rea elemendid maatriksi  $B$   $j$ -inda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (1.7)$$

Seega saab omavahel korrutada vaid maatrikseid, mille mõõtmed on vastavalt

$$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p).$$

Siin definitsioonis  $i = 1, \dots, m$  ja  $j = 1, \dots, p$ .



Joonis: <http://www.cmssoft.com.br/opencl-tutorial/case-study-matrix-multiplication/>

**Näide 1.7** Olgu antud maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriks  $A$  on  $(2 \times 1)$ -maatriks,  $B$  on  $(1 \times 2)$ -maatriks ja  $C$  on  $(2 \times 3)$ -maatriks. Seega saab maatrikseid  $A$  ja  $B$  korrutada järgmiselt:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2) = (11).$$

Omavahel ei ole võimalik korrutada  $AC$  ega  $CA$ , kuna nende ridade ja veergude arv omavahel ei sobi. Küll aga saab leida korrutise  $BC$ :

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 + 32 & 18 + 36 & 21 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 1.1**

Viimasest näitest nägime, et  $AB$  ja  $BA$  andsid erineva tulemuse. Selle kohta öeldakse, et **maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne** ehk üldjuhul (ka ruutmaatriksite korral)

$$AB \neq BA.$$

Võrreldes reaalarvudega on see tulemus teistsugune.

Olgu matriksid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  sellist järku, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav. Siis matriksite korrutamisel on järgmised omadused:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad (\text{distributiivsus})$$

$$(AB)C = A(BC), \quad (\text{korrutamise assotsiatiivsus})$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \text{iga } \lambda \in \mathbb{R} \text{ korral}$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$A\theta = \theta, \quad (\theta - \text{nullmatriks})$$

$$\theta A = \theta. \quad (\theta - \text{nullmatriks})$$

**Näide 1.8** Matriksitel on palju kasutusvaldkondi. Vaatleme ühte nendest. Olgu antud punkt tasandil koordinaatidega  $(x, y)$ . Sel juhul

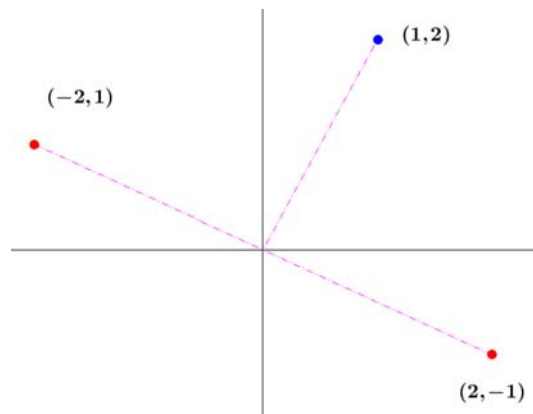
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

s.t et veeruvektorit matriksiga  $A$  (vasakult) korrutades saadakse tasandil punkt, mida on pööratud  $90^\circ$  ( $x$ -telje suhes). Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kui me tahame punkti pöörata  $270^\circ$ , siis tuleb veeruvektorit korrutada matriksiga  $A$  kolm korda. Seega

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Sedalaadi teisendusi on rohkesti. Matrikskuju võimaldab neid teisendusi lihtsamalt kirja panna. Näiteks järgmine matriks pöörab punkti kolmemõõtmelises ruumis  $-30^\circ$  ümber  $x$ -telje:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Enne üldise determinandi mõiste juurde minekut vaatleme eraldi teist ja kolmandat järku determinante.

## 1.4 Teist ja kolmandat järku determinant

Paljude sisult hoopis erinevate probleemide lahendamine viib sageli ühe ja sellesama seaduse järgi koostatud avaldistele (vt. [27]). Sellisel juhul tasub nende avaldiste omadusi uurida omaette küsimusena. Väga paljud probleemid viivad avaldisteni, mida nimetatakse teist järku determinantideks. Olgu meil näiteks neli arvu  $a$ ,  $b$  ja  $c$ ,  $d$  võrdelised, s.t

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis  $ad = cb$  ehk

$$ad - cb = 0.$$

Seda võrdust on võimalik esitada teisiti kujul

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0.$$

### Definitsioon 1.10

Teist järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Toodud tabelit tuleb mõista avaldisena, mis saadakse, korrutades tabeli peadiagonaalil seisvad arvud  $a$  ja  $d$  ning lahutades tulemusest kõrvaldiagonaalil seisvate arvude  $b$  ja  $c$  korrutise.

Vaatleme näiteks võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 5x - 2y &= -11. \end{aligned}$$

Korrutades esimest võrrandit arvuga  $-2$ , saame võrrandisüsteemi esitada kujul

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2)x + 1 \cdot (-2)y &= 1 \cdot (-2), \\ 5 \cdot 1x + (-2) \cdot 1y &= -11 \cdot 1. \end{aligned}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise

$$(2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1)x = 1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1,$$

näeme, et avaldades  $x$ , tekivad jagatistes teist järku determinantide avaldised

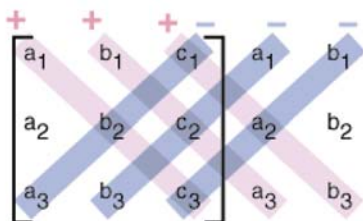
$$x = \frac{1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1}{2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-9} = -1.$$

**Definitsioon 1.11**

Kolmandat järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Ilma süsteemse lähenemiseta on viimast avaldist pisut raske meelde jätta. Seetõttu kasutataksegi koolimatemaatikas pigem lihtsamat viisi: determinandi parempoolse kriipsu järelle kirjutatakse esimene ja teine veerg. Sel juhul tekib kuus diagonaali („jooksevad“ vasakult paremale), millel on täpselt kolm elementi.



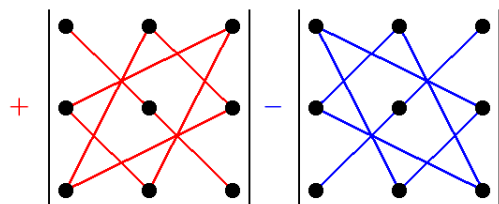
Seda determinandi arvutamise eeskirja meeldejätmise reeglit kutsutakse ka **Sarrus'i reegliks**, mis on nime saanud prantsuse matemaatiku Pierre Frederic Sarrus'i (1798-1861) järgi.

Joonis: <http://www.sparknotes.com/math/algebra2/systemsofthreeequations/section3.rhtml>

Kui diagonaalid jooksevad ülalt alla, siis need korrutised liidetakse. Kui diagonaalid jooksevad alt üles, siis need korrutised lahutatakse.

Sellist lisaveergude abi **ei saa kasutada** kõrgemat (alates 4.-dat) järku determinantide korral.

Kolmandat järku determinandi arvutamise eeskirja tegelik skemaatiline esitus näeks välja aga järgmine:



Paneme tähele, et kolmnurkade väikseim külg on paralleelne suure diagonaaliga. Nüüd peaks valemi visuaalne tuletamine olema üsna lihtne.

**Näide 1.9** Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

väärtuse (n-ö kolmnurkadega graafilise esituse abil).

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ &\quad - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 \\ &= 15 - 10 + 8 - 24 - 1 + 50 = 38. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Arvutades nüüd lisaveergude abil (Sarrus'i meetod), näeme, et tekivad samasugused kolmeliikmelised korrutised:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 = 38.$$

◇ ◇ ◇

## 1.5 Kõrgemat järku determinant

Olgu antud  $n$ -järku **ruutmaatriks**  $A = (a_{ij})$ . Maatriksi  $A$  determinanti tähistame

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.8)$$

Toome ära determinandi rekursiivse definitsiooni.

### Definitsioon 1.12

Esimest järku ruutmaatriksi  $A$  determinant  $|A| = a_{11}$ .

Kõrgemat järku ruutmaatriksi  $A = (a_{ij})$  **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus  $M_{ij}$  on elemendile  $a_{ij}$  vastav miinor ehk  $(n-1)$ -järku determinant. Antud summat nimetatakse **determinandi arendiseks**  $i$ -nda **rea jär- gi**. Determinandi väärtus ei muutu, kui nn arendamine toimub ridade asemel veergudega. Determinandi tähistusi:  $\det A$ ,  $\det(a_{ij})$  või  $D_A$ .

### Definitsioon 1.13

Ruutmaatriksi  $A$  **elemendile**  $a_{ij}$  vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti  $M_{ij}$ , mis saadakse, kui maatriksi  $A$  determinandis jätta välja elementi  $a_{ij}$  läbiv rida ja veerg.

**Näide 1.10** Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele  $a_{13} = 4$ ,  $a_{21} = 2$  ja  $a_{32} = 3$  vastavad järgmised miinorid:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Täpsemalt öeldes, determinant on teisendus (teatud liiki funktsioon), mis seab igale ruutmaatriksile vastavusse ühe kindla arvu. Tüüpiliselt tähistatakse siis seda teisendust nimega  $\det(A)$ . Kui me räägime determinandi elementidest, ridadest ja veergudest, siis me mõtleme selle all tegelikult maatriksi elemente, ridu ja veerge. Teisalt, antud konspektis ei ole determinandi esitust nii rangelt tehtud, kui seda matemaatikas tegelikult tehakse.

Determinandi elemendid on arvud  $a_{ij}$ . Determinandi read on horisontaalsed ning tähistatud esimese indeksiga  $i$ . Determinandi veerud on vertikaalsed ning tähistatud teise indeksiga  $j$ . **Determinandi järk** määratakse ridade ja veergude arvuga  $n$ . Determinandi **peadiagonaal** koosneb ühesuguste indeksitega elementidest  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  ja suundub ülevalt vasakust nurgast alla paremasse nurka.

$m \times n$ -järku **maatriksi**  $k$ -järku **miinoriks** nimetatakse sellest maatriksist väljavalitud mingi  $k$  rea ja mingi  $k$  veeru ühistest elementidest moodustatud  $k$ -järku alamruutmaatriksi determinanti  $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  (või  $M_k$ , kui ridu ja veerge ei ole vaja rõhutada).

On olemas ka teistsuguseid definitsioone, kuid nende jaoks on lisaks vaja teada mitmeid uusi mõisteid.

**Näide 1.11** Leiame determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & \mathbf{0} & 2 \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} & 4 \\ -3 & 1 & \mathbf{2} & -2 \\ 2 & -1 & \mathbf{0} & -1 \end{vmatrix}.$$

Arendame selle näiteks kolmanda veeru järgi:

$$D = (-1)^{1+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot \mathbf{(-1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + (-1)^{3+3} \cdot \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Esimene ja viimane liidetav on null. Edasi arvutame teise ja kolmanda liidetava kolmandat järku determinantid ning tulemuseks saame

$$D = 7 - 16 = -9.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 1.2**

Determinandi väärtuse leidmiseks arendame seda maatriksi mingi rea või veeru järgi (kasulik on valida selline, kus on palju nulle). Edasi saab tekkinud ühe võrra madalamat järku determinanti omakorda arendada mistahes rea või veeru järgi, jne. Siinjuures on enne arendamist kasulik determinanti eelnevalt lihtsustada. Näiteks, determinandi arendamisel mingi rea(veeru) järgi teisendada rida(veergu) nii, et sellesse jääks ainult üks nullist erinev element.

Olgu antud  $n$ -järku determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \mathbf{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Definitsioon 1.14**

Determinandi  $D$  elemendi  $a_{ij}$  **alamdeterminandiks**  $A_{ij}$  nimetatakse sellele elemendile vastava miinori  $M_{ij}$  korrutist teguriga  $(-1)^{i+j}$ , s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.9)$$

Alamdeterminanti  $A_{ij}$  nimetatakse ka **elemendi**  $a_{ij}$  **algebra-liseks täiendiks**.

**Näide 1.12** Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele  $a_{13} = 4$ ,  $a_{21} = 2$  ja  $a_{32} = 3$  vastavad järgmised alamdeteminandid:

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13}, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21}, \\ A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

## 1.6 Determinantide omadused

### Omadus 1.1

Determinandi väärtus ei muutu, kui matriksi read teha veergudeks (või veerud ridadeks) ehk

$$|A| = |A^T|. \quad (1.10)$$

**Näide 1.13** Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$|A| = 0 - 24 - 10 - 0 + 36 - 20 = -18, \quad |A^T| = 0 - 10 - 24 - 0 + 36 - 20 = -18.$$

◇ ◇ ◇

### Märkus 1.3

Viimasest lausest järeldub, et kõik determinantide omadused, mis kehtivad ridade kohta, kehtivad ka veergude kohta. Järgmistes determinantide omaduste sõnastustes mõeldakse ridade, veergude ja elementide all matriksi ridu, veerge ja elemente.

### Omadus 1.2

Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinantide märk vastupidiseks.

**Näide 1.14** Leiame

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = bc - da = -(ad - cb).$$

◇ ◇ ◇



**Omadus 1.3**

Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) puhul on determinandi väärtus null.

Põhjendus (võrdus). Olgu esialgne determinant  $|A|$ . Teise omaduse järgi nende kahe võrdse rea vahetamine muudab determinandi märki, s.t  $|A| = -|A|$  ehk  $2|A| = 0$ . Viimane kehtib vaid juhul, kui  $|A| = 0$ .

**Näide 1.15** Järgmisel determinandil on I ja III rida võrdsed,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 0 - 2 - 12 - 0 = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Omadus 1.4**

Kui determinandi mingis reas (või veerus) on kõik elemendid nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.

Põhjendus. Determinandi arvutamisel kasutatavas summas on igas liidetavas vaadeldava rea element, milleks on alati 0.

**Näide 1.16** Kuna järgneval determinandil koosneb kolmas veerg nullidest, siis determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Omadus 1.5**

Mistahes rea (või veeru) elementides esineva ühise kordaja võib tuua kordajaks determinandi sümboli ette, s.t

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.11)$$

**Näide 1.17** Võime võtta 10 sulgude ette,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 30 & 10 & -10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

**Omadus 1.6**

Kui determinandi mõne rea (või veeru) elemendid esinevad kahe liidetava summana, siis ka determinant ise avaldub kahe determinandi summana. Need determinandid saadakse antud determinandist üks kord ühe, teine kord teise liidetava rea (või veeru) kustutamisel.

**Märkus 1.4**

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Näide 1.18** Näites 1.13 leidsime, et järgmine determinant  $|A| = -18$ . Omaduse (1.6) põhjal on võimalik arvutusi kolmanda veeru korral teha näiteks järgmiselt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6+5 \\ 2 & 0 & 6-2 \\ -2 & 5 & -6+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} + (0 + 12 + 50 - 0 + 10 - 0) \\ &= 6 \cdot (0 - 6 - 10 - 0 - 5 + 6) + 72 = -90 + 72 = -18. \end{aligned}$$

Lahenduse teises reas tõime esimese determinandi kolmandast veerust ühise teguri 6 determinandi ette.

◇ ◇ ◇

**Omadus 1.7**

Determinandi väärtus ei muutu, kui ühe rea (või veeru) elementidele liita ühe ja sama teguriga korrutatud teise rea (või veeru) elemendid.

**Märkus 1.5**

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 5a_3 & b_2 + 5b_3 & c_2 + 5c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Antud omadust kasutatakse arvutuste lihtsustamisel kõige sagedamini siis, kui soovitakse teatud elemendid teisenduse abil nullideks viia.

---

**Näide 1.19** Arvutame 2. järku determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Teist järku determinandi arvutuseeskirja põhjal teame, et  $D = 4 - 6 = -2$ . Vaatame, kuidas toimib viimane omadus. Lahutame teisest reast kolmekordse esimese rea:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-3 & 4-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Edasi ei ole otsest vajadust lihtsustada, aga kui teisendada element 2 nulliks (selleks liidame esimesele reale teise rea), siis on determinanti juba väga lihtne arvutada

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 2+(-2) \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 1.20** Arvutame 3. järku determinandi

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Lihtsustame viimase omaduse põhjal teist rida

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2I \\ \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2+8 & 2-2 & 1+6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -10III \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 10-10 & 0-0 & 7+30 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 37 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 37 + 0 - 0 - 0 - 0 = -37. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 1.21** Arvutame determinandi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ -3I \end{matrix} &= \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28-26 & 33-34 & 8-8 \\ 40-39 & 54-51 & 13-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4III \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



## Peatükk 2

# Pöördmaatriks.

# Lineaarvõrrandisüsteemid

---

2.1	Maatriksi pöördmaatriks . . . . .	26
2.2	Maatriksvõrrandite lahendamisest . . . . .	29
2.3	Pöördmaatriksi leidmine valemi abil . . . . .	32
2.4	Maatriksi astak . . . . .	33
2.5	Lineaarvõrrandisüsteemid . . . . .	36
2.6	Cramer'i peajuht . . . . .	38
2.7	Gauss'i elimineerimise meetod . . . . .	40
2.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend . . . . .	42
2.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem . . . . .	44

---

### Kontrolltöö teemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Pöördmaatriksi leidmine valemi ja ridade elementaarteisendustega.
2. Maatriksvõrrandite lahendamine. Maatriksi astaku leidmine.
3. Gauss'i meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahendi leidmine.

### Eksamiteemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Ühikmaatriks. Regulaarne ja singulaarne maatriks.
2. Maatriksi astak ja selle leidmine.
3. Lineaarvõrrandisüsteemi mõiste, lahend, süsteemi maatriks ja laiendatud maatriks.
4. Kronecker-Capelli teoreemi sõnastus. Cramer'i peajuht.
5. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahend. Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem. Triviaalne lahend.

## 2.1 Maatriksi pöördmaatriks

Antud alapeatükis eeldame, et maatriksid on  $n$ -järku ruutmaatriksid kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Definitsioon 2.1

Öeldakse, et arvud  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$  asuvad maatriksi  $A$  **peadia-gonaalil** ning elemendid  $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}$  asuvad kõrvaldia-gonaalil.

### Definitsioon 2.2

Ruutmaatriksit  $E$  nimetatakse ( $n$ -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadia-gonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

### Märkus 2.1

Suvalise  $n$ -järku ruutmaatriksi  $A$  korral kehtib

$$AE = A, \quad EA = A, \quad (2.1)$$

kus  $E$  on  $n$ -järku ühikmaatriks.

**Näide 2.1** Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$AE = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 2.3**

Ruutmatriksi  $A$  **pöördmatriksiks** nimetatakse sellist matriksit  $A^{-1}$ , millega antud matriksit  $A$  paremalt või vasakult poolt korrutades saadakse ühikmatriks  $E$ , s.t

$$AA^{-1} = E = A^{-1}A. \quad (2.2)$$

**Märkus 2.2**

Matriksi  $A$  pöördmatriks, juhul, kui ta eksisteerib, on üheselt määratud (vt. [26]).

On selge, et  $n$ -järku nullmatriksil  $O$  ei saa leiduda pöördmatriksit, kuna  $O \cdot A = O$  ja  $A \cdot O = O$  suvalise  $n$ -järku matriksi  $A$  korral.

**Näide 2.2** Matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on aga teineteise pöördmatriksid, kuna

$$AB = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

**Omadus 2.1**

Olgu  $A$  ja  $B$  sama järku ruutmatriksid, millel leiduvad pöördmatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Tõestus.* Näitame seda. Tähistame  $AB = C$ . Siis

$$A = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = CB^{-1},$$

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}C.$$

Siit saame, et

$$C = AB = CB^{-1}A^{-1}C = (CB^{-1}A^{-1})C.$$

Seega peab kehtima võrdus

$$CB^{-1}A^{-1} = E$$

ehk

$$C^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Viimast oligi vaja näidata. □

Kui maatriksil  $A$  leidub pöördmaatriks, siis saab selle leida Gauss-Jordan'i meetodiga, teisendades maatriksi  $A$  (ridade elementaarteisenduste abil) ühikmaatriksiks  $E$  ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks  $A^{-1}$ .

$$(A | E) \rightarrow (E | A^{-1}).$$

Meetod tuleb saksa matemaatiku Carl Friedrich Gauss'i (1777-1855) ja saksa geodeedi (kaardistus- ja maamõõduõpetus) Wilhelm Jordani (1842-1899) nimedest.

Paremaks eristamiseks on maatriksid  $A$  ja  $E$  eraldatud püstkriipsuga.

#### Definitsioon 2.4

Maatriksi  $A$  **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt  $A$  maatriksile  $B$  järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

**Näide 2.3** Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi  $A^{-1}$ . Selleks kirjutame kõrvuti maatriksi  $A$  ja ühikmaatriksi  $E$  (eraldades püstkriipsuga)

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Kuna me soovime maatriksi  $A$  teisendada ühikmaatriksiks, siis alustame elemendist  $a_{11}$  ja teeme sellest ühe ning siis elemendi  $a_{21}$  nulliks. Selleks korrutame laiendatud maatriksi  $(A | E)$  esimese rea läbi arvuga  $\frac{1}{2}$  ning tekkinud maatriksis lahutame teisest reast 4-kordse esimese rea:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) -4I \rightarrow$$

kirjutame viimati märgitud teisenduse siinkohal n-ö nähtaval kujul

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4-4 \cdot 1 & -7-4 \cdot (-\frac{3}{2}) & 0-4 \cdot \frac{1}{2} & 1-4 \cdot 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Peadiagonaalile ühe saamiseks korrutame viimati saadud maatriksi teist rida arvuga  $-1$  ning järgmises etapis teisendame elemendi  $-\frac{3}{2}$  nulliks (selleks peame esimesele reale liitma  $\frac{3}{2}$ -kordse teise rea)

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \frac{3}{2}II \rightarrow$$

◇ ◇ ◇

NB! Need teisendused on mõeldud millegi leidmiseks. Seega on nad vahetehted, abivahendid, mis ei riku otsitava leidmist. Kui te aga rakendate neid esialgsele maatriksile endale, siis maatriks muutub, s.t et näiteks üldjuhul maatriksis ei ole lubatud kahte rida omavahel vahetada.



esitame ka viimati kirja pandud teisenduse n-ö nähtaval kujul, seega

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1+0 & -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} + 3 & 0 + (-\frac{3}{2}) \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Näeme, et oleme matriksi  $A$  viinud ridade elementaarteisenduste abil ühikmatriksiks. Seega  $A$  pöördmatriksiks on püstkriipsust paremal pool olev matriks

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On lihtne veenduda, et  $AA^{-1} = E$  (või  $A^{-1}A = E$ ). Seega definitsiooni põhjal on matriks  $A^{-1}$  tõepoolest matriksi  $A$  pöördmatriks.

◇ ◇ ◇

## 2.2 Matriksvõrrandite lahendamisest

Esitleme matriksvõrrandite ideed näite varal. Olgu antud kolm lineaarset võrrandit

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= f_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= f_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= f_3. \end{aligned}$$

Otsitavaks on siin tundmatud  $x, y$  ja  $z$ . Matriksite võrdumise omadusest saaksime selle süsteemi kirja panna kujul

$$\begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Tähistades

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

näeme, et esialgne süsteem on korrutamise  $AX$  reegli tõttu esitatav kujul

$$AX = F. \quad (2.3)$$

**Kui matriksil  $A$  leidub pöördmatriks  $A^{-1}$ , siis saaksime viimast võrdust korrutada (vasakult) pöördmatriksiga  $A^{-1}$**

$$A^{-1}AX = A^{-1}F.$$

Kuna  $A^{-1}A = E$  ja  $EX = X$ , siis saamegi võrrandisüsteemi lahendi

$$X = A^{-1}F. \quad (2.4)$$

NB! Korrutamine toimub vasakult, mitte paremalt. Kui korrutaksime paremalt

$$AXA^{-1} = FA^{-1},$$

siis teeksime olukorra hoopis keerulisemaks.

**Näide 2.4** Olgu meil vaja lahendada süsteem

$$\begin{aligned}x + 4y - z &= 4, \\x + 3y + z &= 8, \\2x + 6y + z &= 13.\end{aligned}$$

Selle süsteemi võiksime lahendada ka tavalisel viisil, et avaldame näiteks  $x$  esimesest võrrandist ja asendame ta teise ja kolmandasse võrrandisse jne. Maatrikskujul lahendades ei pruugi töömaht olla väiksem, küll aga on lahendus selgem. Tähistame

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Kui leidub  $A^{-1}$ , siis lahend avaldub kujul  $X = A^{-1} \cdot F$ . Osutub, et siin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 80 + 91 \\ 4 + 24 - 26 \\ 0 + 16 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Võrrandisüsteemi lahendiks on  $x = -1$ ,  $y = 2$  ja  $z = 3$ . Võib kontrollida, et tõepoolest

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = F.$$

Näitame, kuidas saadakse pöördmaatriks Gauss-Jordan'i meetodiga:

$$\begin{aligned}(A|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -I \\ -2I \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ 2II \end{array} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} III \\ 2III \\ \cdot(-1) \end{array} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) -4II \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) = (E|A^{-1}).\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 2.5**

Vaatleme ühte lihtsat ideed salakoodi loomiseks. Vastaku eesti (lihtsas) tähestikus igale tähele naturaalarv

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>o</i>	<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	õ	ä	ö	ü			
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			

Näiteks

$$\left( \begin{array}{cccc} 12 & 22 & 21 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \text{lõvi} .$$

On teada, et tähtede vastavatest arvudest on koostatud sõnum, mis mahutatakse  $(3 \times 6)$ -matriksisse  $S$ . Sõnum korrutatakse läbi „kodeerijaga“  $A$  (see on saatjale ja samuti teile teada)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} .$$

Teile jõuab kodeeritud sõnum

$$AS = \begin{pmatrix} 90 & 91 & 93 & 87 & 81 & 132 \\ 82 & 79 & 66 & 89 & 96 & 113 \\ 137 & 154 & 213 & 99 & 44 & 231 \end{pmatrix} .$$

Sõnumi saate teada, kui korrutate viimast võrdust vasakult poolt pöördmatriksiga  $A^{-1}$ . Leidke pöördmatriks  $A^{-1}$  ja „muukige“ esialgne sõnum lahti.

◇ ◇ ◇

## 2.3 Pöördmaatriksi leidmine valemi abil

### Definitsioon 2.5

Ruutmaatriksit  $A$ , mille determinant ei võrdu nulliga, nimetatakse **regulaarseks**. Vastasel juhul nimetatakse ruutmaatriksit  $A$  **singulaarseks**.

### Teoreem 2.1

Kui ruutmaatriksi  $A = (a_{ij})$  on regulaarne, s.o kui  $|A| \neq 0$ , siis maatriksil  $A$  leidub pöördmaatriks  $A^{-1}$ , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T, \quad (2.5)$$

kus  $A_{ij}$  on maatriksi  $A$  determinandi  $|A|$  elemendile  $a_{ij}$  vastav alamdeterminant.

### Märkus 2.3

Igal maatriksil ei ole pöördmaatriksit. Pöördmaatriks on olemas ainult regulaarsetel ruutmaatriksitel.

**Näide 2.6** Olgu antud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leiame esiteks maatriksi  $A$  determinandi  $|A|$ . Selleks teisendame eelnevalt determinandis teist veergu, liites teisele reale kolmanda rea. Seejärel arendame saadud determinanti teise veeru järgi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Kuna  $|A| = 2 \neq 0$ , siis maatriks  $A$  on regulaarne ja pöördmaatriks  $A^{-1}$  on olemas. Leiame maatriksi  $A$  kõigile elementidele vastavad alamdeterminandid

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

◇ ◇ ◇

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ja kõige viimaks

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Seega

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Lähtudes pöördmaatriksi definitsioonist teeme kontrolli. Selleks leiame

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

või

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

◇ ◇ ◇

## 2.4 Maatriksi astak

Olgu antud suvaline  $(m \times n)$ -järku maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

### Definitsioon 2.6

Valime maatriksist  $A$  välja  $k$  suvalist rida ja  $k$  suvalist veergu,  $k \leq m, n$ . Sel juhul nende ridade ja veergude ühistest elementidest moodustatud determinanti  $M$  nimetatakse **maatriksi  $A$   $k$ -ndat järku miinoriks**.

Igale nullmaatriksist erinevale maatriksile  $A$  pannakse vastavusse sellega üheselt määratud naturaalarv – maatriksi  $A$  astak.

**Näide 2.7** Vaatleme maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi  $A$  esimest järku miinoriteks on tema elemendid  $1, 3, 5, \dots, 6$  (kokku 12). Kui me valime 2. ja 3. rea, siis teist järku miinoriteks on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Teist järku miinoreid on kokku 18. Kolmandat järku miinoreid on 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Kõrgemat järku miinoreid ei ole võimalik moodustada, kuna maatriksil on ainult kolm rida.

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 2.7**

Maatriksi  $A$  **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku. Tähistatakse  $\text{rank}(A)$  või  $r(A)$ .

**Näide 2.8** Vaatleme ühte lihtsamat tüüpi maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi  $A$  kõik kolmandat järku miinorid võrduvad nulliga, kuna neis on vähemalt üks nullidest koosnev veerg. Leiame teist järku miinorid, kus nulliseid veerge ei ole

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega on kõik nii teist kui kolmandat järku miinorid võrdsed nulliga. Kuna esimest järku miinoriteks on maatriksi elemendid ja tegemist ei ole nullmaatriksiga, siis leidub nullist erinev esimest järku miinor ( $1, 3, 4, -2, -6$  ja  $-8$ ) ning maatriksi  $A$  astak on üks ehk  $\text{rank}(A) = 1$ . Näeme, et astaku leidmine miinorite abil väga töömahukas protsess.

◇ ◇ ◇

Efektiivsem viis **maatriksi astaku leidmiseks** on: kasutada maatriksi ridade elementaarteisendusi, eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks. **Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.**

**Näide 2.9** Leiame järgmise  $(5 \times 6)$ -järku matriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

astaku ridade elementaarteisenduste abil. Alustame sellest, et muudame esimeses veerus peale esimese rea elemendi kõik nullideks. Selleks tuleb teistele ridadele liita vastav arv kordi esimene rida:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2I \\ 2I \\ -6I \\ I \end{array} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3II \\ -4II \\ II \end{array} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} III \\ -III \end{array} \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} & -1 & -1 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & 2 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = B. \end{aligned}$$

Teisendasime matriksi  $A$  matriksiks  $B$ . Näeme, et matriksil  $B$  leidub vähemalt üks nullist erinev kolmandat järku miinor

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

ja seega  $\text{rank}(B) = 3$ . Järelikult on ka  $\text{rank}(A) = 3$ .

◇ ◇ ◇

## 2.5 Lineaarvõrrandisüsteemid

Vaatleme võrrandisüsteemi kujul

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \mathbf{x}_1 + a_{12} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{1n} \mathbf{x}_n = b_1 \\ a_{21} \mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{2n} \mathbf{x}_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \mathbf{x}_1 + a_{m2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{mn} \mathbf{x}_n = b_m \end{array} \right\}, \quad (2.6)$$

milles on  $m$  võrrandit ja  $n$  tundmatut  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

### Definitsioon 2.8

Võrrandisüsteemi (2.6) nimetatakse **linearseks**, kuna tundmatud  $x_1, x_2, \dots, x_n$  esinevad ainult esimeses astmes. Etteantud arvud  $a_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ ) on võrrandisüsteemi **kordajad** ja  $b_1, \dots, b_m$  on võrrandisüsteemi **vabaliikmed**.

### Definitsioon 2.9

Võrrandisüsteemi (2.6) **lahendiks** nimetatakse selliseid tundmatute  $x_1, \dots, x_n$  väärtusi  $l_1, \dots, l_n \in \mathbb{R}$ , mille asendamine süsteemi (2.6) võrranditesse tundmatute  $x_1, \dots, x_n$  asemele muudab kõik võrdused samasusteks.

Samasused on näiteks avaldised  $0 = 0, 1 = 1, 2.23 = 2.23$  jne. Samasused ei ole  $0 = 1, 1 = 2$  jne.

### Definitsioon 2.10

Süsteemi (2.6), mille lahend puudub, nimetatakse vastuoluliseks.

### Näide 2.10 Võrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$$

on vastuoluline, kuna mõlemad võrrandid ei saa korraga olla tõesed. Näiteks, kui asendada  $x = 1 - y$  teise võrrandisse, saaksime väärade lause  $1 = 2$ . Seevastu ühest võrrandist koosneval „süsteemil“

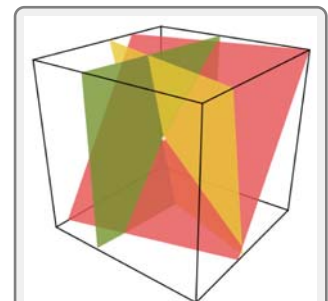
$$\left\{ x + y = 1 \right\}$$

on lõpmata palju lahendeid ning need asuvad kõik ühel sirgel  $y = 1 - x$ .

◇ ◇ ◇

### Märkus 2.4

Olenevalt võrrandite ja tundmatute arvust (ning kordajatest) võib lineaarvõrrandisüsteem (2.6) omada üheainsa lahendi, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid.



Joonis: Wikipedia.

Kui süsteem koosneb kolmest võrrandist, siis geomeetriliselt tähendab see seda, et otsitakse kolme tasandi lõikepunkti. Kui süsteem on üheselt lahenduv, siis lahendiks on nende tasandite üks ühine lõikepunkt. Kui süsteemil lahend puudub, siis tasandid on paralleelsed (või kolmnurkselt lõikuvad) ja üksteisest eemal. Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis on tasanditel üks ühine lõikesirge või vähemalt kaks tasandit ühtivad.



**Definitsioon 2.11**

Lineaarvõrrandisüsteemi (2.6) kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

nimetatakse **süsteemi (2.6) maatriksiks**. Veeurvektoreid  $x$  ja  $b$  nimetatakse vastavalt tundmatute ja vabaliikmete vektoriks

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Lineaarvõrrandisüsteem (2.6) on esitatav **maatrikskujul** võrdusega

$$Ax = b. \quad (2.9)$$

**Teoreem 2.2**

[16, 17]. **Kronecker-Capelli teoreem**. Lineaarvõrrandisüsteem (2.6), kujul

$$Ax = b, \quad (2.10)$$

on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi  $A$  astak  $r(A)$  võrdub laiendatud maatriksi

$$L = (A | b)$$

astakuga  $r(L)$ . Teisiti öeldes, lineaarvõrrandisüsteem (2.6) on lahenduv parajasti siis, kui

$$r(A) = r(L).$$

Teoreem on nime saanud saksa matemaatiku Leopold Kronecker'i (1823-1891) ja itaalia matemaatiku Alfredo Capelli (1855-1910) järgi.

Antud teoreemi on lihtsam rakendada siis, kui oleme tutvunud Gauss'i elimineerimise meetodiga.

**Näide 2.11** Vaatleme juba tuttavat võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Maatriksi  $A$  determinant  $|A| = 0$ . Seega maatriksi  $A$  astak saab olla vaid 1 (nullist erinevate miinorite kõrgeim järk). Laiendatud maatriksil leidub aga nullist erinev teist järku miinor  $M$

$$(A | b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Kuna  $A$  ja  $(A | b)$  astakud on erinevad, siis süsteemil ei leidu lahendit. Viimast selgitasime juba eespool.

◇ ◇ ◇

## 2.6 Cramer'i peajuht

### Definitsioon 2.12

Õeldakse, et lineaarvõrrandisüsteemi (2.6), kujul

$$Ax = b,$$

korral on tegemist **Cramer'i peajuhuga**, kui

- 1) tundmatute arv  $n$  võrdub võrrandite arvuga  $m$ , s.t  $n = m$ ;
- 2) süsteemi maatriks  $A$  on regulaarne, s.t  $|A| \neq 0$ .

Šveitsi matemaatik Gabriel Cramer (1704-1752).

### Lause 2.1

[17]. Kui lineaarvõrrandisüsteemi korral on tegemist Cramer'i peajuhuga, siis on sellel süsteemil täpselt üks lahend.

Igat lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b,$$

mille korral on tegemist Cramer'i peajuhuga, on võimalik lahendada **Cramer'i valemite** abil

$$x_i = \frac{|\tilde{A}_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

kus  $A$  on süsteemi maatriks ning  $\tilde{A}_i$  on maatriks, mis saadakse maatriksist  $A$  tema  $i$ -nda veeru asendamisel vabaliikmete vektoriga  $b$ .

Tegemist on rohkem teoreetilise väärtusega, kuna praktikas osutuvad Cramer'i valemid suuremate süsteemide korral liiga töömahukaks.

**Näide 2.12** Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9.$$

Sel juhul

$$x = \frac{|\tilde{A}_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{-11} & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-2 + 11}{-9} = \frac{9}{-9} = -1$$

ja

$$y = \frac{|\tilde{A}_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 5 & \mathbf{-11} \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-22 - 5}{-9} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 2.13** Vaatleme süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 & & & = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 & & - 5x_4 & = 12 \\ x_1 + & & - 2x_3 + 3x_4 & = -4 \\ & + x_2 - 3x_3 + 4x_4 & & = -5 \end{array} \right\}.$$

Arvutame esiteks determinandi

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ I-4III \\ II-3III}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{= \\ I \leftrightarrow III}}{=} 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{= \\ III+I}}{=} 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{= \\ I \leftrightarrow III}}{=} 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 24 \cdot (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} \\ &= 24 \cdot (-7 + 8) = 24. \end{aligned}$$

Edasi leiame lahendid Cramer'i valemite abil. Jätame siinkohal determinantide leidmise lugeja kontrollida, kirjutades ainult valemid ja tulemuse

$$x_1 = \frac{\tilde{A}_1}{|A|} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{5} & 3 & -5 & 0 \\ \mathbf{12} & 2 & 0 & -5 \\ \mathbf{-4} & 0 & -2 & 3 \\ \mathbf{-5} & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{24}{24} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\tilde{A}_2}{|A|} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 4 & \mathbf{5} & -5 & 0 \\ 3 & \mathbf{12} & 0 & -5 \\ 1 & \mathbf{-4} & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{-5} & -3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{48}{24} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\tilde{A}_3}{|A|} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & \mathbf{5} & 0 \\ 3 & 2 & \mathbf{12} & -5 \\ 1 & 0 & \mathbf{-4} & 3 \\ 0 & 1 & \mathbf{-5} & 4 \end{vmatrix} = \frac{24}{24} = 1$$

ja viimaks

$$x_4 = \frac{\tilde{A}_4}{|A|} = \frac{1}{24} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & \mathbf{5} \\ 3 & 2 & 0 & \mathbf{12} \\ 1 & 0 & -2 & \mathbf{-4} \\ 0 & 1 & -3 & \mathbf{-5} \end{vmatrix} = \frac{-24}{24} = -1.$$

◇ ◇ ◇

## 2.7 Gauss'i elimineerimise meetod

Vaatleme järgmist kolmevõrrandilist süsteemi:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & x + 3y - 2z = -5 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & 2x - y + 4z = 7 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & -3x + 2y - 3z = -1 \end{array} .$$

Idee on see teisendada kolmnurksele kujule

$$\begin{array}{l|l} x + b_4y + c_4z = d_4 & x + 3y - 2z = -5 \\ y + c_5z = d_5 & y - \frac{8}{7}z = -\frac{17}{7} \\ z = d_6 & z = 3 \end{array} .$$

Nüüd saab viimasest võrrandist esimese suunas järk järgult muutujad asendada.

**Gauss'i elimineerimise meetod.** Olgu antud lineaarvõrrandisüsteem

$$Ax = b.$$

1. Võrrandisüsteem esitatakse laiendatud maatriksina

$$(A|b) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

2. Laiendatud maatriks  $(A|b)$  teisendatakse **ridade elementaarteisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi  $A$  peadiagonaalist allpool (või ülalpool) tekitatakse nullid. Seejuures võib kasutada järgmisi teisendusi ridadega:

- (a) Maatriksi kahe rea äravahetamine.
- (b) Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
- (c) Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui ridade teisendamisega tekitatakse nullid maatriksi  $A$  mõlemale poole (pea)diagonaali, siis räägitakse nn *Gauss'i täielikust elimineerimismeetodist* või *Gauss-Jordani elimineerimismeetodist*.

### Märkus 2.5

Laiendatud maatriksi kahe rea vahetamine ei tähenda midagi muud, kui kahe võrrandi vahetamist. Nullist erineva arvuga korrutamine tähendab tegelikult ühe võrrandi vasaku ja parema poole korrutamist selle sama arvuga. Mingile reale mingi teise rea liitmine tähendab aga ühele võrrandile mingi teise võrrandi juurde liitmist.

Seega sisuliselt teisendatakse võrrandisüsteemi, jättes aja kokkuhoiu huvides tundmatud  $x_1, \dots, x_n$  ja tehtemärgid kirjutamata.

Meetod tuleb saksa matemaatiku **Carl Friedrich Gauss'i** (1777-1855) järgi ja töötati välja 19. sajandi alguses. Sama meetod on lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks kasutusel ka tänapäeva arvutites.



Maali autor:  
Christian Albrecht Jensen  
(Wikipedia)

Gauss'i panus matemaatikasse on väga märkimisväärne. Lisaks tegeles ta astronoomiaga, geodeesiaga, optikaga, statistikaga, magnetismiga jne. See on see sama Gauss, kes esitas algebra põhiteoreemi kohta esimese arvestava tõestuse. Statistikas on siiani tuntud normaaljaotus ja Gauss'i kõver. Kui meil kroonis punasel 10-kupüürilisel kroonil Jakob Hurt, siis sakslastel oli kuulus 10-margane, kuhu peale oli paigutatud Carl Friedrich Gauss.



Gauss'ile omistatakse ilus lause:

*Matemaatika on loodusteaduse kuninganna, arvuteooria - matemaatika kuninganna.*

**Märkus 2.6**

Gauss'i elimineerimise meetod võimaldab teada saada, kas antud võrrandisüsteem on lahenduv ja kui on, siis ka leida selle lahendi.

**Näide 2.14** Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}.$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi  $(A|b)$  ja teisendame selle Gauss-Jordan'i meetodi põhjal nõutud kujule

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ -3I \end{array} &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}II \\ \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 2.15** Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ -3x + 2y - 3z = -1 \end{cases}.$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi  $(A|b)$  ja rakendame Gauss'i täielikku elimineerimise meetodit

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2I \\ 3I \end{array} &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -11III \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{25}{7} & \frac{75}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} 2III \\ \frac{8}{7}III \\ \cdot \frac{7}{25} \end{array} \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3II \\ \\ \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Kui maatriks  $A$  teisendatakse kolmnurksele kujule (allpool peadiagonaali on kõik nullid), siis räägitakse tüüpiliselt Gauss'i elimineerimise meetodist. Kui maatriksit  $A$  teisendatakse veel edasi (luues ka ülalpool peadiagonaali võimalikult palju nulle), siis räägitakse Gauss-Jordan'i elimineerimise meetodist.



Logo: Wikipedia.

**Küsimus.** Why would defeating the Chicago Bulls in the playoffs be like solving a system of linear equations?

**Vastus.** Because one would accomplish a Krause-Jordan elimination. - (Bulls GM Jerry Krause, Bulls player Michael Jordan).

**Näide 2.16** Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Kasutame teisenduste jaoks Gauss'i meetodit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 3 & -1 & | & 1 \\ 4 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3I \\ -4I \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & -7 & | & -14 \\ 0 & -7 & | & -14 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -II \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Viimane rida muutus nullideks, sest kolmas võrrand osutus esimese kahe summaks (s.t sisuliselt kehtib samasus  $0 = 0$ ). Näeme, et  $A$  ja  $(A|b) = L$  astakud  $r(A) = r(L) = 2$  ja Kronecker-Capelli teoreemi tõttu leidub süsteemil vähemalt üks lahend, milleks on  $y = 2$  ja  $x = 1$ . Lahend on ühene, kuna tegemist on Cramer'i peajuhuga ( $n = m = 2$ ).

◇ ◇ ◇

## 2.8 Süsteemi üldlahend ja erilahend

### Definitsioon 2.13

Lineaarvõrrandisüsteemi  $Ax = b$  **üldlahendiks** nimetatakse suvalist konstanti (konstante) sisaldavat lahendit, milles konstandile  $c \in \mathbb{R}$  (konstantidele  $c_i$ ) väärtuste (väärtuste komplektide) omistamise teel on võimalik saada süsteemi kõik lahendid. Tundmatuid, mis on valitud suvalisteks konstantideks, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

### Definitsioon 2.14

Lineaarvõrrandisüsteemi  $Ax = b$  **erilahendiks** nimetatakse sellist lahendit, mis saadakse üldlahendist konstandile  $c$  (konstantidele  $c_i$ ) mingi(te) konkreetse(te) arvulis(t)e väärtus(t)e andmisel.

**Näide 2.17** Lahendame järgmise süsteemi Gauss'i meetodiga

$$\begin{cases} 4y + z = 2 \\ 2x + 6y - 2z = 3 \\ 4x + 8y - 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Erinevate etappide teisendused paneme siinjuhul kirja järjekorranumbrite 1), 2), ... abil.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & | & 2 \\ 2 & 6 & -2 & | & 3 \\ 4 & 8 & -5 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1) I \leftrightarrow \frac{1}{2} II \\ 2) II \leftrightarrow \frac{1}{2} I \\ 3) -4I \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 1 & | & 2 \\ 0 & -4 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2) \cdot \frac{1}{4} \\ 1) II \end{array} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3II \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{4} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näeme, et maatriksite  $A$  ja  $(A|b) = L$  astakud  $r(A) = r(L) = 2$ , s.t astak  $r = 2$ . Seega leidub lahend, mille kirjutame välja võrrandite kujul

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{4}z \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z \end{array} \right\}.$$

Näeme, et kõik lahendid saab avaldada muutuja  $z$  kaudu, kusjuures  $z$  võib olla suvaline reaalarv. Seetõttu nimetataksegi muutujat  $z$  ka **vabaks tundmatuks**. Seega on võrrandisüsteemi **üldlahendiks**

$$x = \frac{7}{4}c, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, \quad z = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

mis on ühe vaba tundmatuga lahend (*vabade tundmatute arv* on võrdne  $n - r = 3 - 2 = 1$ ). Üldlahendi võib ka kirja panna kujul

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{4}c, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Erilahenditeks on näiteks  $c = 0$ ,  $c = 1$  ja  $c = 2$  korral

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \quad (x, y, z) = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 1\right), \quad (x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, 0, 2\right).$$

◇ ◇ ◇

**Näide 2.18** Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\left\{ 2x + 6y - 2z = 3 \right\}.$$

Siin on 3 tundmatut ja 1 võrrand. On selge, et lahendeid on lõpmata palju. Antud juhul on vabade tundmatute arvuks  $n - r = 3 - 1 = 2$ . Olgu vabadeks tundmatuteks muutujad  $x$  ja  $y$ . Sel juhul

$$2z = -3 + 2x + 6y \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{3}{2} + x + 3y$$

ja süsteemi üldlahend on esitatav kujul

$$(x, y, z) = \left(c_1, c_2, -\frac{3}{2} + c_1 + 3c_2\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Süsteemi erilahendid on näiteks

$$(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{3}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right), \quad (x, y, z) = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right).$$

◇ ◇ ◇

### Märkus 2.7

Lineaarvõrrandisüsteemil  $Ax = b$  leidub lahend, kui maatriksite  $A$  ja  $(A|b)$  astakud võrduvad (olgu selleks astakuks  $r$ ). Kui meil on  $m$  võrrandit ja  $n$  tundmatut, siis

$\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{r}$ , süsteemil on üks ja ainus lahend;

$\mathbf{n} = \mathbf{r} < \mathbf{m}$ , süsteemil üks ja ainus lahend;

$\mathbf{m} = \mathbf{r} < \mathbf{n}$ , lõpmata palju lahendeid,  $n - r$  vaba tundmatut;

$\mathbf{r} < \mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ , lõpmata palju lahendeid,  $n - r$  vaba tundmatut.

## 2.9 Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem

### Definitsioon 2.15

Lineaarvõrrandisüsteemi (2.6)

$$Ax = b$$

nimetatakse **homogeenseks**, kui kõigi tema võrrandite vabaliikmed võrduvad nulliga, s.t kui  $b$  on nullvektor  $b = 0$ . Vastasel korral nimetatakse võrrandisüsteemi **mittehomogeenseks**.

### Märkus 2.8

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil

$$Ax = 0$$

on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend  $x = 0$  (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend.

### Märkus 2.9

Kui võrrandisüsteemi maatriksi  $A$  determinant  $|A| = 0$  (juhul  $n = m$ ), siis maatriksi  $A$  astak  $r$  on väiksem kui tundmatute arv  $n$ . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on  $n - r$ .

**Näide 2.19** Vaatleme homogeenet süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} -2I \\ -3I \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-II} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Näeme, et homogeenne süsteemi korral ei ole vaja süsteemimaatriksit laiendada, sest astakutingimus on alati täidetud. Viimasest teisendusmaatriksist on näha, et  $|A| = 0$ . Kuna maatriksi  $A$  astak  $r = 2 < 3$ , siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Vabu tundmatuid on  $n - r = 3 - 2 = 1$ . Valime vabaks tundmatuks tundmatu  $x_3$ , s.t  $x_3 = c$ , kus  $c \in \mathbb{R}$  on suvaline reaalarv.

◇ ◇ ◇



Sel juhul süsteemi üldlahend avaldub kujul

$$x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Viimast võib kirja panna ka kujul

$$x = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

s.t. süsteemi lahend avaldub vektori  $x = (1, -1, 1)^T$  kordsena. Kui fikseerida arv  $c$ , näiteks  $c = 2$ , siis süsteemi üheks erilahendiks on

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

◇ ◇ ◇

### Teoreem 2.3

[17] Suvalise lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b$$

üldlahend  $x$  võrdub tema mingi erilahendi  $x_*$  ning vastava homogeenise süsteemi

$$Ax_0 = 0$$

üldlahendi  $x_0$  summaga

$$x = x_* + x_0.$$

Mõnikord võib antud teoreem osutada väga kasulikuks ja lubab süsteemi lahenduvuse uurimist veidi lihtsustada. Meie kursuses seda otseselt teadma ei pea.

**Näide 2.20** Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\{ x + y + z = 3 \}.$$

Vastavaks homogeeniseks süsteemiks on

$$\{ x + y + z = 0 \}.$$

Lihtne on näha, et esialgse süsteemi erilahendiks sobib vektor ühtedest,

$$x_* = (1, 1, 1)^T, \quad (1 + 1 + 1 = 3).$$

Homogeensel võrrandil on kaks vaba tundmatut. Kirjutame selle üldlahendi kujul

$$x_0 = (c_1, c_2, -c_1 - c_2)^T, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sel juhul esialgse süsteemi üldlahend avaldub kahe vektori summana:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_* + x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◇ ◇ ◇



# Peatükk 3

## Funktsioonid ja jadad

---

3.1	Funktsiooni mõiste . . . . .	48
3.2	Üksühesus ja pealekujutus . . . . .	51
3.3	Liitfunktsioon . . . . .	52
3.4	Pöördfunktsioon . . . . .	53
3.5	Põhilised elementaarfunktsioonid . . . . .	55
3.6	Elementaarfunktsioonid . . . . .	61
3.7	Jadad * . . . . .	62

---

### Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond ning nende leidmine.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud (v.a.  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$  ja nende pöördfunktsioonid). Enamasti on need loogiliselt tuletatavad.
3. Eksponent- ja logaritmfunktsiooni omadused.

### Eksamiteemad

1. Funktsiooni mõiste. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond.
2. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon.
3. Põhilised elementaarfunktsioonid (mõiste ja graafikud) ja elementaarfunktsioonid (mõiste).

### 3.1 Funktsiooni mõiste

Kaks suurust võivad esineda teineteist sõltuvatena või teineteisest sõltumatutena. Näiteks, pileti hind kahe raudteejaama vaheliseks sõiduks ei sõltu reisija kaalust; seevastu pagasi veohind samade jaamade vahel sõltub pagasi kaalust.

„Sinu eksamihinne on funktsioon ajast, mida sa panustad õpingutesse.“

Jälgides mõnda protsessi, näeme, et selle kulgemine seisneb ikka ühe suuruse muutumises teise suuruse muutumisel: õhu temperatuur muutub aja muutudes, õhurõhk muutub kõrguse muutumisel, soola lahustuvus vees muutub temperatuuri muutumisel jne.

#### Definitsioon 3.1

Suurust  $y$  nimetame **sõltuvaks** suurusest  $x$ , kui kindlatele  $x$  väärtustele vastavad kindlad  $y$  väärtused.

Sõnastuste lühendamise eesmärgil nimetame suurust  $x$  *sõltumatuks muutujaks*, suurust  $y$  *sõltuvaks muutujaks*.

Oma kursuses vaatleme enamasti reaalarvulisi funktsioone, mingid teised funktsioonid saab defineerida analoogiliselt.

Mõiste *sõltumatu muutuja* asemel kasutatakse matemaatikas sõna **argument**.

#### Definitsioon 3.2

Olgu antud mittetühi hulk  $X \subset \mathbb{R}$ . Kui igale arvule  $x \in X$  on vastavusse seatud **üks ja ainult üks reaalarv**  $y$ , siis öeldakse, et hulgal  $X$  on defineeritud **funktsioon**  $f$  ehk

$$y = f(x).$$

Elementi  $x$  nimetatakse funktsiooni  $f$  argumentiks ja elementi  $y$  elemendi  $x$  kujutiseks, elementi  $x$  ka elemendi  $y$  originaaliks.

Oma olemuselt on funktsioon mingi “reegel” (reeglite kogu, algoritm, protsess), mis igale sisendväärtusele leiab mingi väljundväärtuse. Matemaatikas formuleeritakse funktsiooni mõiste veidi rangemalt.

Kui läbi punkti  $x$  tõmmata vertikaalne sirge, siis joon  $y = f(x)$  kujutab endast funktsiooni ainult siis, kui tõmmatud sirge lõikab joont  $y = f(x)$  ainult ühes punktis.

**Näide 3.1** Näiteks, seos  $u = \pm\sqrt{|v|}$  ei kujuta endast funktsiooni, kuna argumentidele  $v$  on vastavusse seatud rohkem kui üks väärtus  $u$  ( $\sqrt{|v|}$  ja  $-\sqrt{|v|}$ ). Küll on aga funktsiooniks  $u = \sqrt{v}$ ,  $v \in [0, \infty)$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 3.2** Valem (eeskiri)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

kujutab endast funktsiooni, mille väärtuseks on raadiusega  $r$  kera ruumala  $V$ . Viimane sõltub kera raadiusest  $r$  ja seda sõltuvust märgitakse  $V = V(r)$ .

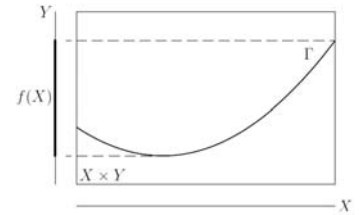
◇ ◇ ◇

**Definitsioon 3.3**

Kõikide elementide hulka  $x \in X$ , mille puhul funktsioon  $y = f(x)$  on määratud, nimetakse funktsiooni  $f$  **määramispiirkonnaks**. Funktsiooni  $f$  kõikide väärtuste hulka

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulgaks. Sellisel juhul märgitakse funktsiooni ka  $f : X \rightarrow Y$ .



(Allikas: [15])

**Näide 3.3** Funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

määramispiirkonnaks (reaalarvude hulgas) on lõik  $[-1, 1]$ , kuna kõikide teiste reaalarvude puhul muutuks ruutjuure märgi all olev avaldis negatiivseks ja viimane viiks meid kompleksarvude maailma. Funktsiooni  $f$  muutumispiirkonnaks on lõik  $[0, 1]$ . Viimast märgitakse ka :

$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1].$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 3.1**

Funktsiooni  $f$  saab defineerida (loomulikust) määramispiirkonnast  $X$  väiksemal hulgal  $X_0 \subset X$ . Sellisel juhul on väga oluline seda mainida.

**Märkus 3.2**

Kui funktsiooni  $y = f(x)$  korral on antud vaid teda määrav eeskiri, määramispiirkond  $X$  pole aga fikseeritud, siis loetakse määramispiirkonnaks nende argumendi väärtuste  $x$  hulk, mille korral funktsiooni määrav eeskiri omab mõtet (nn. loomulik määramispiirkond).

**Näide 3.4** Näiteks on funktsiooni  $y = \sqrt{x^2 - 4}$  määramispiirkond

$$X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2).$$

◇ ◇ ◇

Määramispiirkonna piiramine võib oluliselt muuta funktsiooni omadusi, kusjuures tulemuseks võib olla mingi teine funktsioon. Näiteks, sirge  $y = x - 1$  väärtused on rangelt positiivsed hulgal  $X = (1, \infty)$ , kuid ei ole seda hulgal  $X = (-\infty, 1]$ .

Funktsiooni kirjeldamiseks kasutatakse tihti kuju

$$f : X \rightarrow Y.$$

**Definitsioon 3.4**

Funktsiooni  $f$  **graafikuks** nimetatakse  $xy$ -tasandi punktide hulka

$$G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}.$$

**Märkus 3.3**

Funktsiooni põhilised esitusviisid on järgmised:

1. Analüütiline esitus valemi(te) abil;
2. Numbriline esitus tabeli abil;
3. Geomeetriline esitus graafiku abil.

Mainimata määramis- või muutumispirkonda võib kaasa tuua intsidendi Berkeley matemaatikainstituudi seinale kritseldatud grafiti näol:

$$\sqrt{3} > 2$$

piisavalt "suure" 3 korral. Siin on number kolmele antud vägivaldselt sõltuva muutuja roll ( $\sqrt{x}$ ).

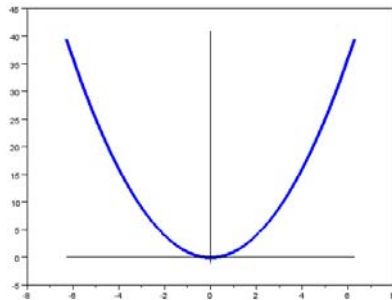
**Näide 3.5** Võtame näiteks funktsiooni  $y = f(x)$  (esitus valemiga)

$$y = x^2.$$

Esitus tabelina (kasutatakse väga palju ligikaudses arvutamises, statistikas, andmetöötluses)

$x$	-10	-5	-1	0	0.1	6	20
$y$	100	25	1	0	0.01	36	400

Esitus graafikuna



◇ ◇ ◇

**Märkus 3.4**

Funktsioon võib olla antud ka "ilmutamata" kujul nagu näiteks ringjoon (keskpunktiga  $(0,0)$ )

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ilmutamata kuju on tegelikult võrrand ühe või mitme muutuja suhtes. Sageli ei ole võimalik sellist võrrandit täpselt lahendada ja seega ei ole võimalik funktsiooni valemiga avaldada. Ilmutatud kujul saaksime siin neli eraldiseisvat funktsiooni:  $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ ,  $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$  ja ka vastupidi  $x_1 = \sqrt{1-y^2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{1-y^2}$ .

Võrrand  $F(x, y) = 0$  ei pruugi ühemuutujafunktsiooni üheselt määrata.

**Definitsioon 3.5**

Funktsiooni  $y = f(x)$  nimetatakse **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas  $X$ , kui

$$f(-x) = f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Funktsiooni  $y = f(x)$  nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui

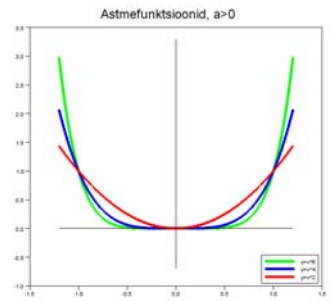
$$f(-x) = -f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Siinus on paaritu ja koosinus paaris,  $y = x^2$  on paaris,  $y = x$  on paaritu.

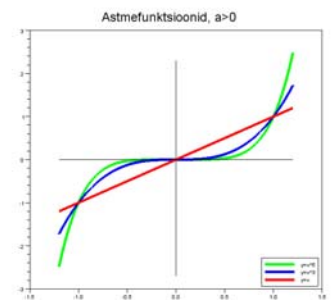
**Märkus 3.5**

Paarisfunktsioon on sümmeetriline  $y$ -telje suhtes. Paaritu funktsioon on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

Paaris



Paaritud

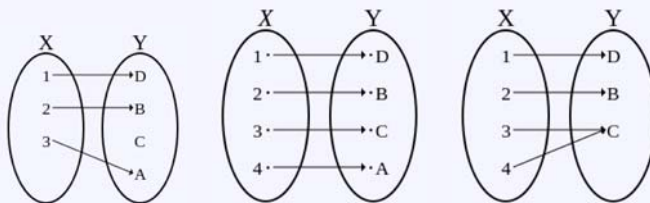


### 3.2 Üksühesus ja pealekujutus

**Definitsioon 3.6**

Funktsiooni  $f : X \rightarrow Y$  nimetatakse **üksüheseks funktsiooniks**, kui iga  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$  korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas  $Y$ , s.t

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$



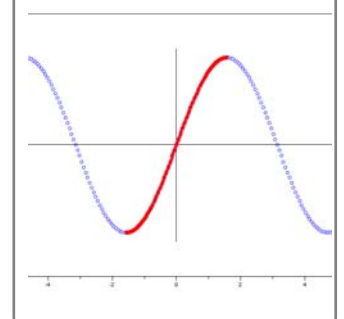
1) üksühene 2) üksühene 3) ei ole üksühene funktsioon (Allikas: Wikipedia)

Funktsiooni üksühesuse omadus on matemaatikas väga oluline.

**Märkus 3.6**

Funktsiooni üksühesus tähendab veel seda, et kui  $f(x_1) = f(x_2)$  siis peab kehtima elementide võrdus  $x_1 = x_2$ . Üksühese funktsiooni kohta öeldakse ka injektiivne funktsioon.

Siinusfunktsioon  $y = \sin x$  on näiteks üksühene osalõigul  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , kuid ei ole üksühene tervel reaalteljel  $x \in \mathbb{R}$ . Samuti ei ole teised perioodilised funktsioonid üksühesed üle reaalarvude hulga  $\mathbb{R}$ .

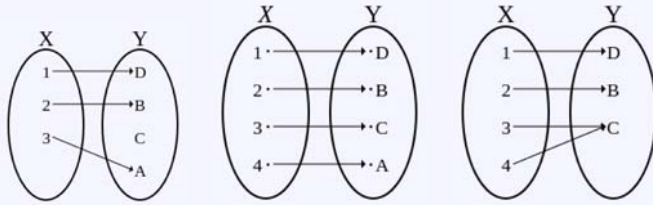


**Näide 3.6** Konstante funktsioon  $y(x) = 1$  on üksühene ühepunktisel hulgal  $x \in \{a\}$  ja ei ole üksühene mingil suuremal hulgal. Lineaarne funktsioon  $y = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) on alati üksühene.

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 3.7**

Funktsiooni  $f : X \rightarrow Y$  nimetatakse **pealekujutuseks**, kui  $f(X) = Y$ , s.t iga elemendi  $y \in Y$  korral leidub originaal  $x \in X$  nii, et  $y = f(x)$ .



1) ei ole pealekujutus 2) pealekujutus 3) pealekujutus (Allikas: Wikipedia)

Matemaatikas öeldakse pealekujutuse asemel ka *sürjektiivne funktsioon* ning üksühese pealekujutuse asemel *bijektiivne funktsioon*. Mõisteid sürjektsioon ja bijektsioon antud kursusel eraldi ei käsitleta.

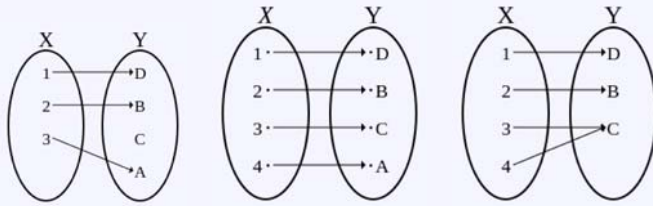
**Näide 3.7** Konstante funktsioon  $y(x) = 1$  on pealekujutus,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{1\}$ , kuid ei ole pealekujutus hulkadel  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Lineaarne funktsioon  $y = ax + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ) on pealekujutus,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

◇ ◇ ◇

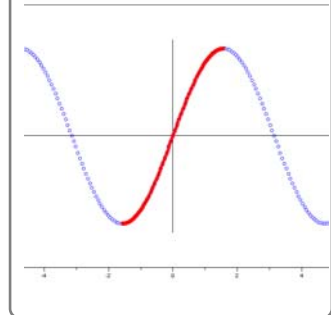
**Definitsioon 3.8**

Funktsiooni  $f : X \rightarrow Y$  nimetatakse **üksüheseks pealekujutuseks**, kui  $f$  on üksühene ja lisaks veel pealekujutus, s.t igal elemendil hulgast  $Y$  leidub üks ja ainult üks originaal.



1) ei ole 2) on üksühene pealekujutus 3) ei ole (Allikas: Wikipedia)

Siinusfunktsioon  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  on üksühene pealekujutus, kuid  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  ei ole.



Viimseid kahte mõistet antud kursusel ei käsitleta (informatiivne osa).

### 3.3 Liitfunktsioon

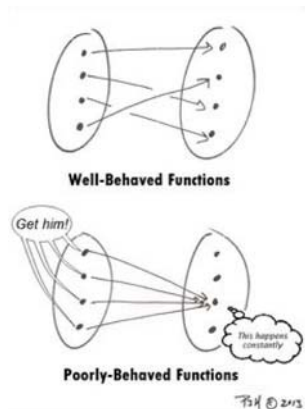
Olgu antud funktsioon  $y = f(u)$ , mille määramispiirkond on  $Z$ , muutumispiirkond on  $Y$  ning funktsioon  $u = g(x)$ , mille määramispiirkond on  $X$  ja muutumispiirkond  $U \subset Z$ .

**Definitsioon 3.9**

Funktsiooni  $F$ , kus

$$F(x) = f(g(x)),$$

nimetatakse funktsioonide  $f$  ja  $g$  **liitfunktsiooniks**. Funktsioone  $f$  ja  $g$  nimetatakse liitfunktsiooni  $F$  komponentideks. Funktsioonide  $f$  ja  $g$  liitfunktsiooni tähistatakse ka sümboliga  $f \circ g$ , s.t kirjutame  $(f \circ g)(x)$ .



https:

//www.pinterest.com/pin/

61150507414902386/



**Näide 3.8** Vaatleme funktsioone

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad g(x) = x^2.$$

Siis saame näiteks moodustada liitfunktsioonid

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1, \quad F : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty),$$

$$G(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad G : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty).$$

◇ ◇ ◇

### 3.4 Pöördfunktsioon

Olgu antud funktsioon  $y = f(x)$ , mille määramispiirkond on  $X$  ja muutumispiirkond on  $Y$  ehk ka  $f : X \rightarrow Y$ .

#### Definitsioon 3.10

Olgu funktsioon  $f$  määramispiirkonnaga  $X$  ja muutumispiirkonnaga  $Y$ . Kui leidub selline  $g$ , mille määramispiirkond on  $Y$ , nii et iga  $x \in X$  korral kehtib  $g(f(x)) = x$ , siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on pööratav. Funktsiooni  $g$  nimetatakse funktsiooni  $f$  pöördfunktsiooniks ja tähistatakse  $g = f^{-1}$ ,

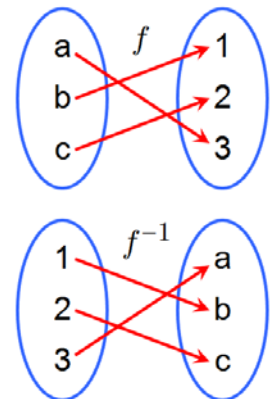
$$f^{-1} : Y \rightarrow X.$$

Funktsioon  $f$  on pööratav siis ja ainult siis, kui tegemist on üksühese vastavusega  $X$  ja  $Y$  elementide vahel.

#### Märkus 3.7

Funktsiooni  $y = f(x)$  pöördfunktsiooni  $x = f^{-1}(y)$  leidmiseks tuleb ([23])

1. avaldada võrrandist  $y = f(x)$  muutuja  $x$  muutuja  $y$  kaudu;
2. vahetada tähised  $x$  ja  $y$ , saame  $y = f^{-1}(x)$ .



Allikas: Wikipedia

Funktsiooni pööratavus on eriti oluline võrrandite lahendamise uurimisel.

**Näide 3.9** Seame Celsius' e kraadidele vastavusse Fahrenheit'i kraadid

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Matemaatiliselt saab selle funktsiooni defineerida tervel reaalarvude hulgal  $\mathbb{R}$ . Selle järgi näiteks  $30^\circ C = f(30) = \frac{9}{5} \cdot 30 + 32 = 86^\circ F$ .

Leiame funktsiooni  $f$  pöördfunktsiooni

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{5}{9}(y - 32)$$

ning peale muutujate vahetust saame

$$y = f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32).$$

◇ ◇ ◇

Näiteks,  $86^\circ F = f^{-1}(86) = \frac{5}{9}(86 - 32) = \frac{5}{9}54^\circ C = 30^\circ C$ .

Märkus: kuna

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = \frac{5}{9} \cdot (f(x) - 32) = \frac{5}{9} \cdot \left( \frac{9}{5} \cdot x + 32 - 32 \right) = x$$

iga  $y \in \mathbb{R}$  korral ning

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = \frac{9}{5} \cdot f^{-1}(y) + 32 = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot (y - 32) + 32 = y, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

siis tõepoolest saame igale Celsius'ie kraadile üheselt vastavusse seada Fahrenheit'i kraadi ja vastupidi ka.

◇ ◇ ◇

**Näide 3.10** Leiame funktsiooni

$$y = \frac{x + 1}{x}$$

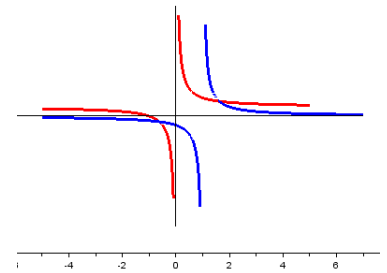
pöördfunktsiooni. Esiteks märgime, et  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Nõudes, et  $x \neq 0$ , avaldame

$$xy - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y - 1}.$$

Seega pöördfunktsioon on  $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , kus

$$y = \frac{1}{x - 1}.$$

◇ ◇ ◇



**Näide 3.11** Funktsioon  $f(x) = x^2$  võib tegutseda ruumides  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ . Tema pöördfunktsiooniks sobib

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, \infty),$$

siinjuures  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Paneme tähele, et reaalarvuline funktsioon  $f$  on pööratav hulgal  $x \in [0, \infty)$  ja mitte laiemal hulgal, kuna iga  $y > 0$  korral leidub mitu reaalarvu,  $x, -x \in \mathbb{R}$ , nii, et kehtib  $y = f(\pm x) = (\pm x)^2$ .

Näiteks, Galilei seadus ütleb, et kõrguselt  $h$  vabalt langeva keha kiiruse määrab valem  $v^2 = 2gh$ . Siit saame  $h \geq 0$  korral

$$\text{kas } v = \sqrt{2gh} \text{ või } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Esimene valem annab lõppkiiruse  $v$ , mille keha omandab kõrguselt  $h$  langedes; teine annab kõrguse  $h$ , millelt keha peab langema, et omandada lõppkiirust  $v$ . Funktsioonid  $v$  ja  $h$  on teineteise pöördfunktsioonid.

◇ ◇ ◇



## 3.5 Põhilised elementaarfunktsioonid

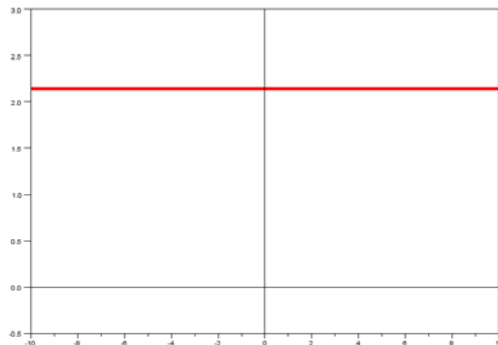
### Definitsioon 3.11

Põhiliste elementaarfunktsioonide all mõistetakse järgmisi funktsioone:

1. konstantne funktsioon  $y = c$ ;
2. astmefunktsioon  $y = x^a$ ;
3. eksponentfunktsioon  $y = a^x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ );
4. logaritmifunktsioon  $y = \log_a x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ );
5. trigonomeetrilised funktsioonid  
 $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ;
6. arkusfunktsioonid  
 $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$ .

Matemaatilises analüüsis enim uuritud ja kõige sagedamini esinevad funktsioonid on elementaarfunktsioonid.

- **Konstantne funktsioon**  $y = c$  tegutseb hulkadel  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$ .



On paarisfunktsioon, pealekujutus, ei ole üksühene määramispiirkonnas  $\mathbb{R}$ .

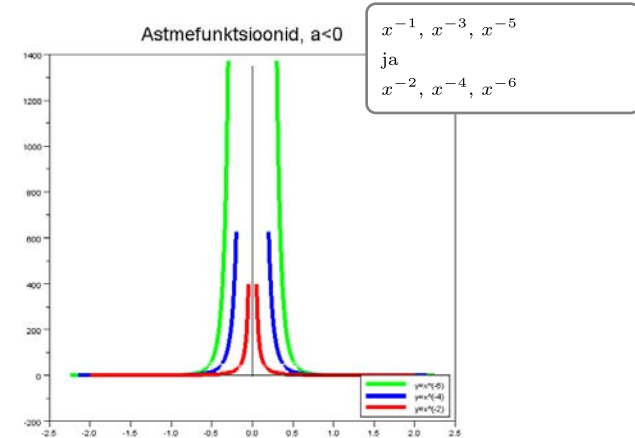
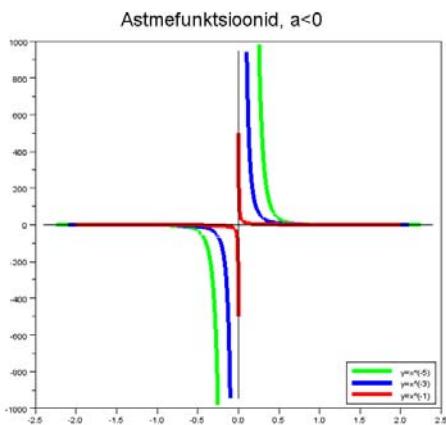
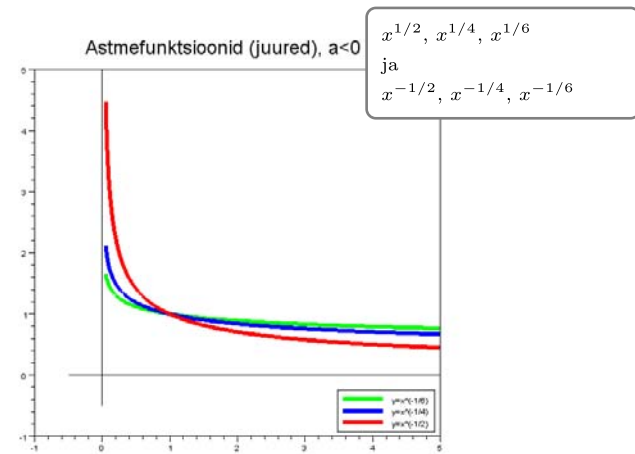
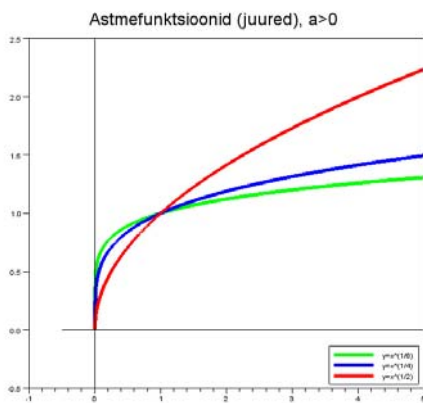
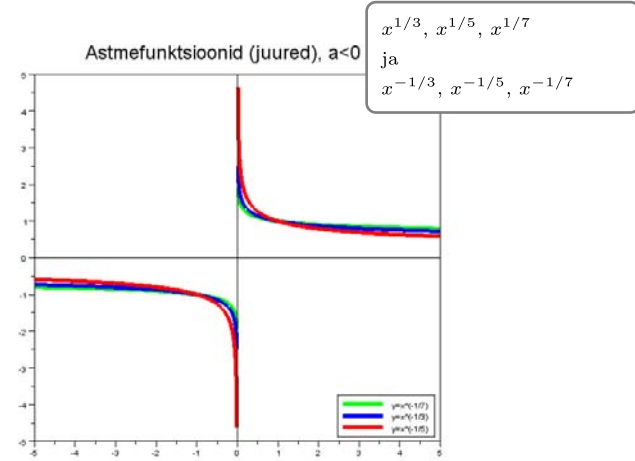
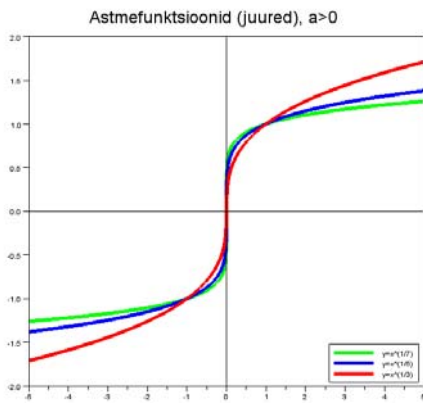
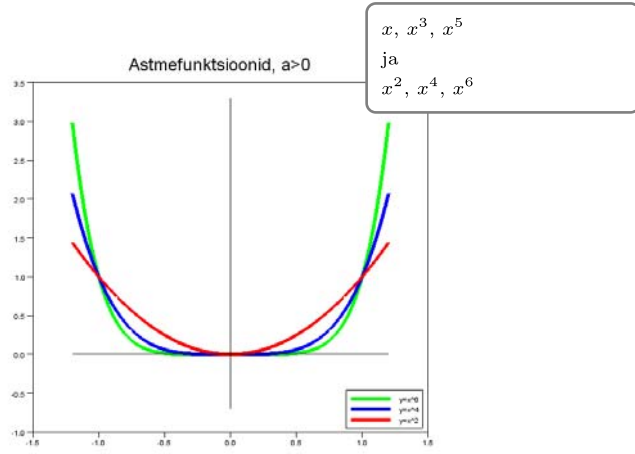
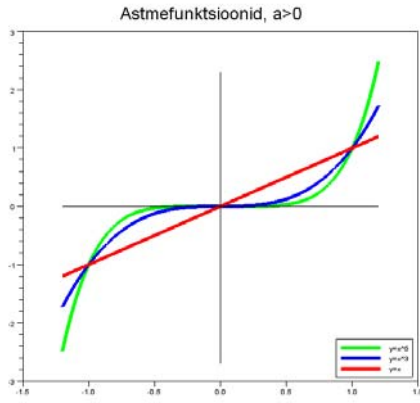
- **Astmefunktsioon**  $y = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Näiteks,  $y = x$  ja  $y = x^3$  on üksühesed pealekujutused ja paaritud funktsioonid,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

See-eest  $y = x^2$  ja  $y = x^4$  on paarisfunktsioonid,  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , ei ole üksühesed.

Kui  $a \in (0, 1)$ , siis saame nn juurfunktsioonid,  $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ ,  $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$  jne. Kui  $a < 0$ , siis  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ,  $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$  ja määramispiirkonnast jääb kindlasti välja punkt  $x = 0$ .

Astmefunktsioonid on väga olulised funktsioonid teiste funktsioonide lähendamisel, ligikaudses arvutamises, arvutitega modelleerimisel jne.

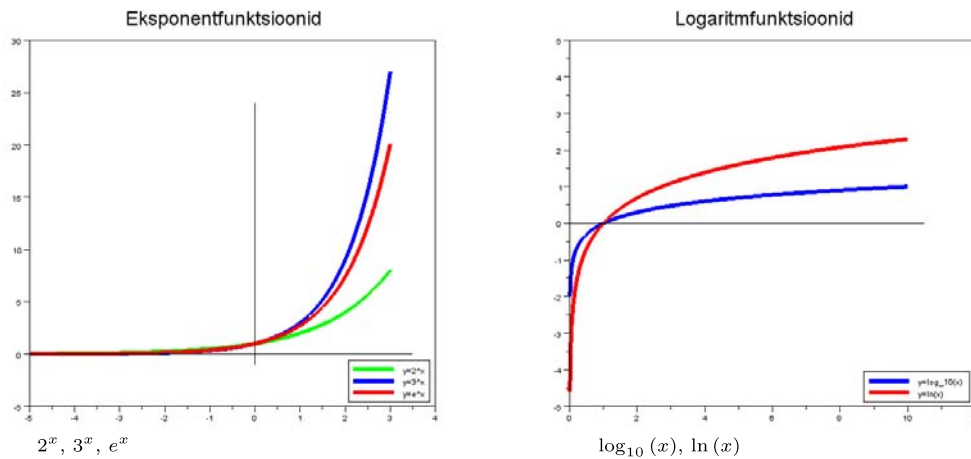


- **Ekspontfunktsioon**  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Kõige populaarsem nendest on  $y = e^x$ , mida kirjutatakse mõnikord ka kujul  $y = \exp(x)$ .

Tihti on tavaks  $y = e^x$  "käsitleda" kui kaht erinevat funktsiooni:  $y = e^x$  ja  $y = e^{-x}$  ( $x > 0$ ) kuna  $y = e^x$  väärtused  $x$  suurenedes kasvavad väga kiiresti (eksponentsiaalne kasv) ja  $y = e^{-x}$  väärtused  $x$  suurenedes kahanevad väga kiiresti (eksponentsiaalne kahanemine). Mingis mõttes  $y = e^x$  ja  $y = e^{-x}$  kirjeldavad väga oluliselt erinevaid protsesse.

Ekspontfunktsioon  $a^x$  ( $a > 1$ ) kasvab oluliselt kiiremini kui mistahes astmefunktsioon  $x^b$ .

Ekspontfunktsioonid  $y = e^x$  ja  $y = e^{-x}$  ( $x > 0$ ) on väga olulisel kohal loodusprotsesside kirjeldamisel (näiteks rahvastiku (populatsiooni) eksponentsiaalne kasv või kahanemine), intresside arvutamisel finantsmatemaatikas jne.



- **Logaritmifunktsioon**  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Kõige populaarsem nendest on naturaallogaritm  $y = \ln x$  (logaritmi alus on Euler'i arv  $e$ ,  $y = \log_e x$ ), laialt levinud on ka kümnendlogaritm  $y = \log_{10} x$ .

Vastupidiselt kiirele eksponentsiaalsele kasvule ja kahanemisele, on logaritmiline kasv ja kahanemine väga aeglased. Logaritmifunktsioonid on samuti väga olulised reaalelu protsesside kirjeldamisel.

Siinjuures  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  on üksühene pealekujutus ja  $y = \log_a x$  pöördfunktsiooniks  $f^{-1}$  on vastav eksponentfunktsioon  $y = a^x$ .

Logaritmifunktsioonil on järgmised tähtsamad omadused:

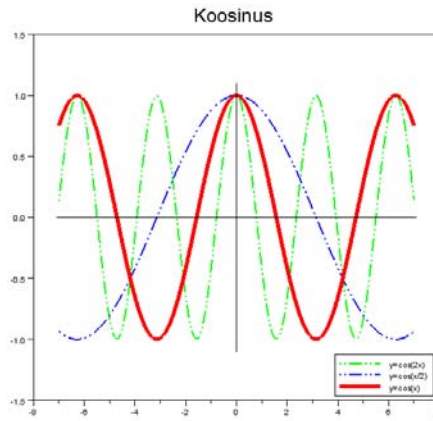
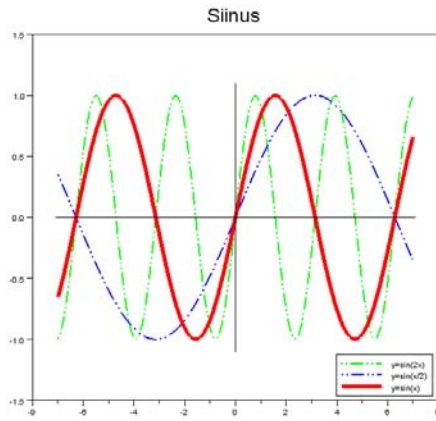
$$\log xy = \log |x| + \log |y|, \quad \log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|,$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log x^a = a \log |x|, \quad x = a^{\log_a x},$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln e^{-1} = -1.$$

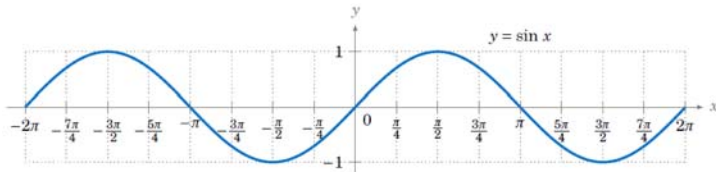
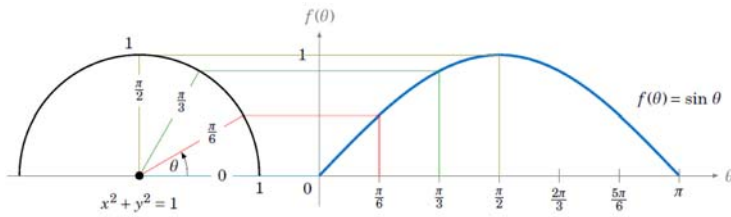
Kui tekstis ei ole midagi muud täpsustatud, siis sageli võidakse kirjutise  $\log x$  all mõelda ka naturaallogaritmi  $\ln x$ . See on eriti levinud teaduskirjanduses. Paneme tähele, et erineva alusega logaritmid erinevad üksteisest vaid konstandi kordsuse poolest.

• Trigonomeetrilised funktsioonid ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ ).



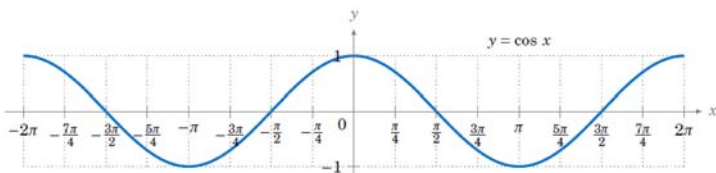
$\sin 2x$ ,  $\sin x/2$ ,  $\sin x$

$\cos 2x$ ,  $\cos x/2$ ,  $\cos x$



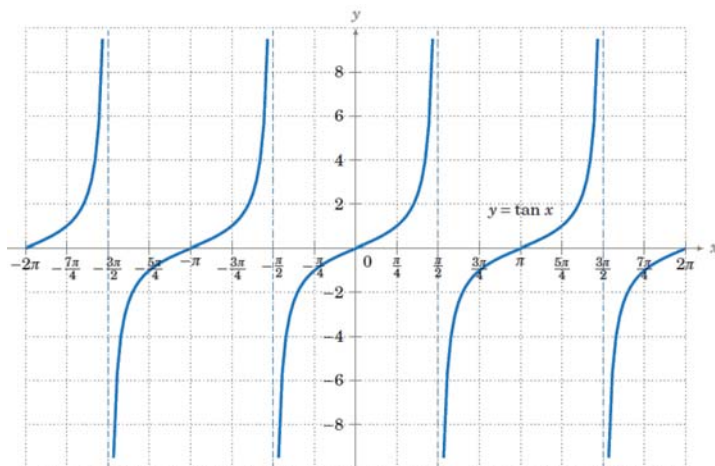
(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

**Siinusfunktsioon**  
 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.  
 Funktsioon  $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  on üksühene.



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

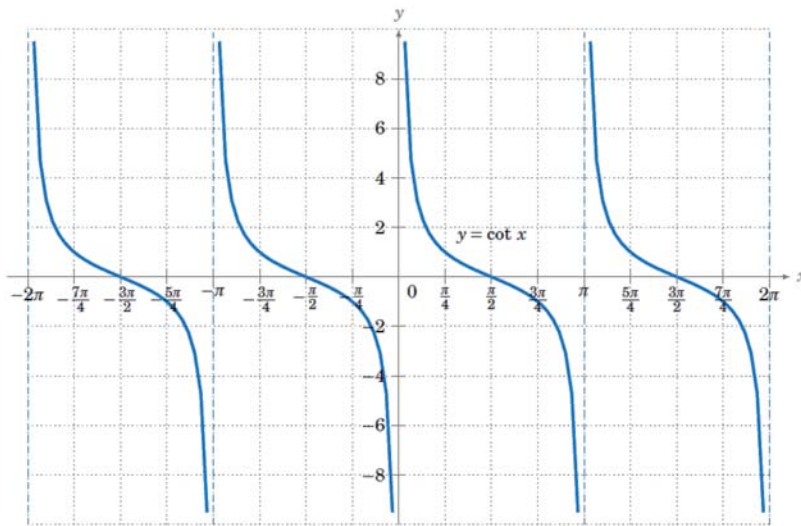
**Kosinusfunktsioon**  
 $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.  
 Funktsioon  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  on üksühene.



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

**Tangensfunktsioon**  
 $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$  on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.  
 Funktsioon  $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  on üksühene.  
 Tangensi saab alati tuletada siinuse ja koosinuse kaudu:  

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Kootangensfunktsioon  $\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

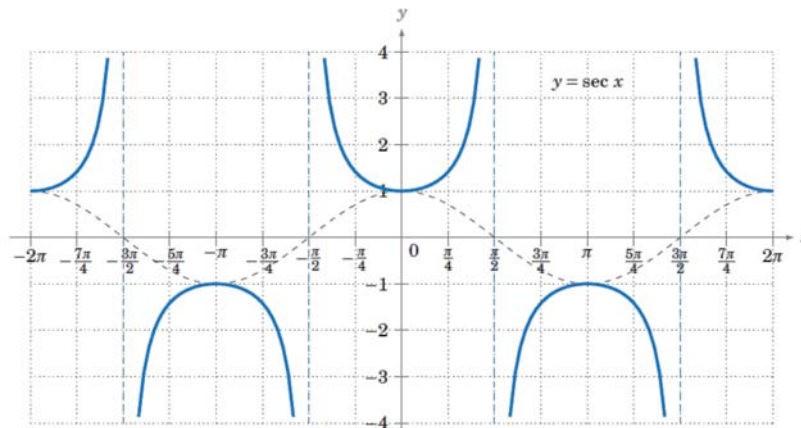
Funktsioon  $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  on üksühene.

Kootangensi saab alati tuletada tangensist või siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



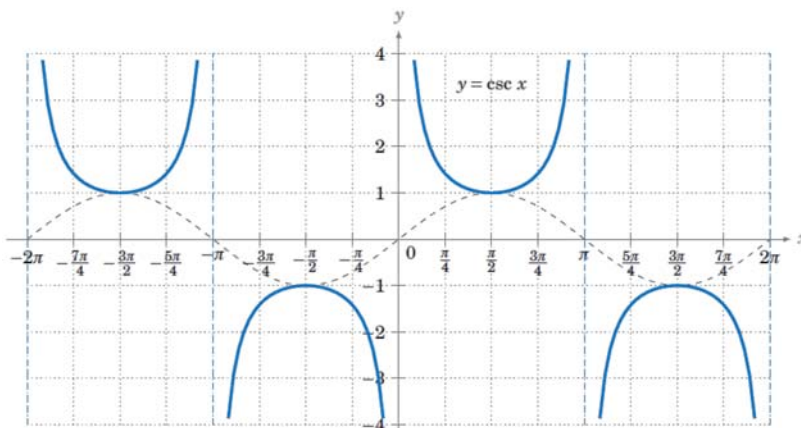
(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Seekansfunktsioon  $\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$  on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Seekans on koosinuse jagatis,

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



(Allikas: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>)

Kooseekansfunktsioon  $\csc : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$  on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Kooseekans on siinuse jagatis,

$$\csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### Märkus 3.8

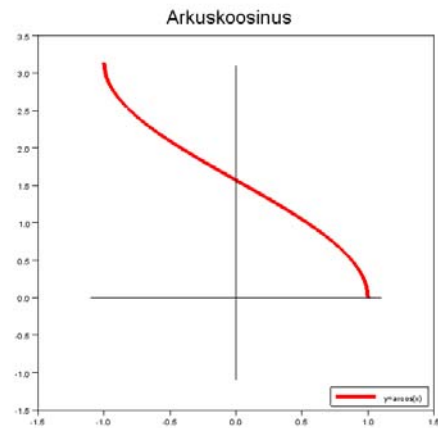
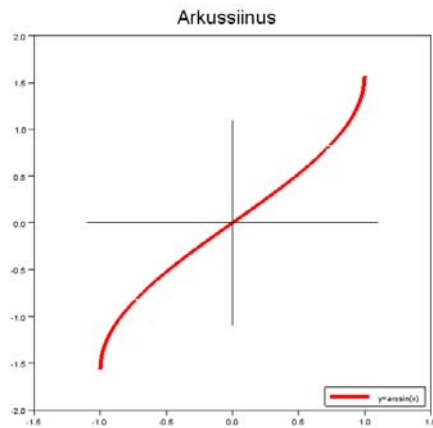
Funktsioonid  $\cot x$ ,  $\sec x$ ,  $\csc x$  on tuletatavad  $\sin x$ ,  $\cos x$  kaudu. Seega saab ka nendeta hästi hakkama, aga mõnikord on neist siiski kasu.



- **Arkusfunktsioonid**  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$  on vastavate trigonomeetriliste funktsioonide  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  pöördfunktsioonid (sobivas osalõigis).

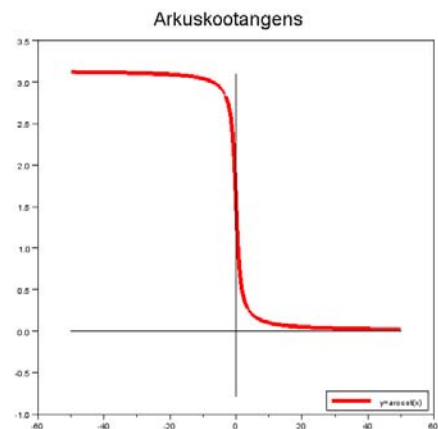
Arkussiinus  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  on paaritu, üksühene pealekujutus.

Arkuskoosinus  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  on üksühene pealekujutus.



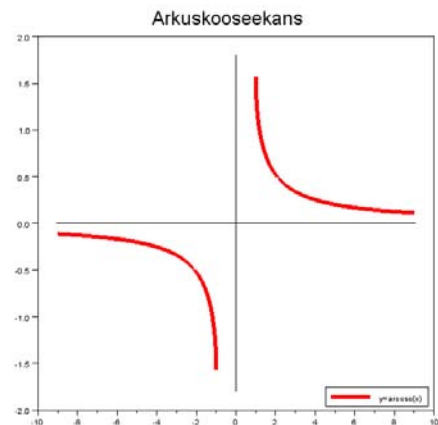
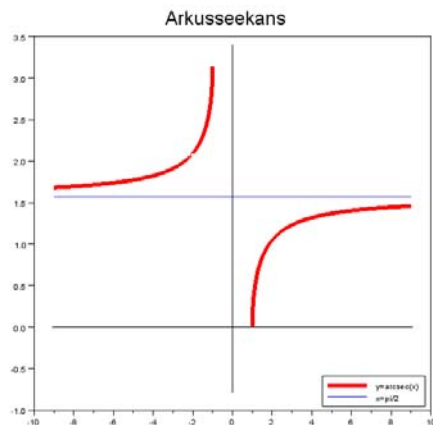
Arkustangens  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  on paaritu, üksühene pealekujutus.

Arkuskootangens  $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  on üksühene pealekujutus.



Arkusseekans  $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$  on üksühene pealekujutus.

Arkuskoosseekans  $\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$  on paaritu üksühene pealekujutus.





**Märkus 3.9**

Kirjanduses kasutatakse arkusfunktsioonide tähistamiseks ka kirjutusviisi  $\sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$ ,  $\tan^{-1} x$  ja  $\cot^{-1} x$ . Viimane on tulnud  $f(x)$  pöördfunktsiooni  $f^{-1}(x)$  tähistamisest. Seda ei tohi segamini ajada argumenti  $x$  pöördväärtusega  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

Funktsioonide korral kirjutusviis  $f^{-1}(x)$  ei tähenda avaldist  $\frac{1}{f(x)}$ , vaid ikkagi pöördfunktsiooni. Segaduse vältimiseks on kasulikum kasutada nimetusi  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$  või siis  $y = \operatorname{asin} x$ ,  $y = \operatorname{acos} x$ ,  $y = \operatorname{atan} x$ ,  $y = \operatorname{acot} x$ .

**Märkus 3.10**

Mõnikord läheb vaja veel järgmisi seoseid:

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}.$$

## 3.6 Elementaarfunktsioonid

**Definitsioon 3.12**

**Elementaarfunktsioonideks** nimetatakse funktsioone, mis on saadavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel.

Näiteks on

$$f(x) = e^{e^{\sin(1+\sqrt{\log(4+x^2)})}}$$

elementaarfunktsioon. Mitteelementaarfunktsioon on aga näiteks integraalne siinus  $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Märkus 3.11**

Elementaarfunktsioonid on sealhulgas funktsioonid, millel on matemaatikas rida lihtsaid omadusi. Sõnastame need hiljem vastavate teemade all, nagu piirväärtus, pidevus, tuletise ja integraali leidmine.

Mitteelementaarfunktsioonide näiteid leiab hulganisti lõpmata ridade seas.

### 3.7 Jadad \*

Jada on oma sisult lõpmatu järjestatud arvude loend

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \quad (3.1)$$

millel on esimene element ja igale vahetult järgnev element. Näiteks:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots$$

#### Definitsioon 3.13

**Jadaks** nimetatakse naturaalarvulise argumentiga funktsiooni

$$x = x(n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tähistame  $(x_n)$ . Arvu  $x_n$  nimetatakse jada  $(x_n)$  üldliikmeks (ka elementiks). Kirjutame ka

$$(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

**Näide 3.12** Funktsiooni  $x = n^2$  korral saame jada

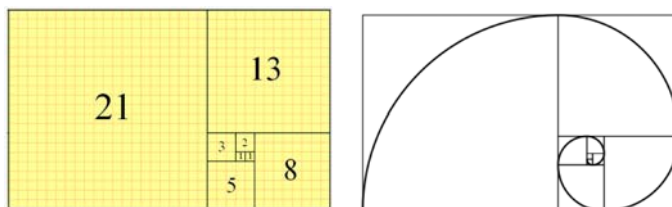
$$(x_n) = 1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, \dots$$

◇ ◇ ◇

**Näide 3.13** Võib-olla et kõige tuntum või vähemalt mingis mõttes erilisem jada on **Fibonacci jada**, mille kaks esimest liiget on ühed ning iga järgnev liige on kahe eelneva liikme summa:

$$(F_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \dots$$

Järgnevalt on toodud graafiliselt Fibonacci spiraal, mis on väga lähedane „kuldsele“ spiraalile:



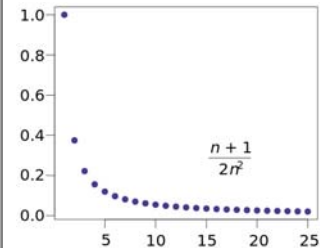
Joonised: Wikipedia.

Fibonacci arvud on seotud kuldloikega, kus terve lõik jaotatakse kaheks osaks nii, et kogu lõigu pikkuse ja pikima osalõigu suhe on sama, mis pikima ja lühema osalõigu suhe ehk

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$$

◇ ◇ ◇

Jadad on matemaatikas väga tähtsal kohal. Nende abil on tõestatud väga palju olulisi tulemusi ja kindlasti tõestatakse veel uusi.



Joonis: Wikipedia. Jada graafiline esitus.

Leonardo Bonacci (1170-1250) oli itaalia matemaatik, keda tuntakse ka nime all Fibonacci. Fibonacci jadaga seotud arvud esinevad üsna tihti ka looduses. Üheks põhjuseks võib olla see, et kahe järjestikuse Fibonacci arvu jagatise väärtus läheneb kuldloike suhtele  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$  ja kuldloige on looduses erilisel kohal. On täheldatud, et kahe kohakuti asuva (taime) lehe vahel on tihti Fibonacci arv lehti.



Foto: Wikipedia. Fotol on kollase kummeli õis, mille sees on struktuur, kus on 21 tumesinist ja 13 helesinist spiraali.

# Peatükk 4

## Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

---

4.1	Jada piirväärtus *	64
4.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	69
4.3	Ühepoolsed piirväärtused	71
4.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	73
4.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	75
4.6	Tähtsad piirväärtused	78
4.7	Pidevad funktsioonid	81
4.8	Funktsiooni katkevusiise	82
4.9	Pidevate funktsioonide omadused	84

---

### Kontrolltöö teemad

1. Jada tõkestamatu kasvamine ja tõkestamatu kahanemine. Jada piirväärtus lihtsamal juhul.
2. Piirväärtuse teheteiga seotud omadused. Piirväärtuse arvutamine.
3. Tähtsad piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  kasutamine.
4. Funktsiooni pidevuse uurimine.

### Eksamiteemad

1. Jada tõkestamatu kasvamine ja tõkestamatu kahanemine.
2. Piirväärtuse intuiitvne mõiste. Lõpmatud piirväärtused, ühepoolsed piirväärtused.
3. Piirväärtuse omadused (teoreemide 4.2-4.6 sõnastused).
4. Tähtsad piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
5. Pideva funktsiooni mõiste. Pideva funktsiooni muudu omadus (märkus 4.2).
6. Pidevate funktsioonide omadused. Teoreem vahepealsetest väärtustest.

## 4.1 Jada piirväärtus \*

“Kõigist suuruste muutumisviisidest on kõrgemas matemaatikas eriti tähtsad kaks: suuruste **tõkestamatu kasvamine** ja suuruste **tõkestamatu kahanemine**. Need kaks suuruste muutumisviisi on vahenditeks, mille abil luuakse kõrgema matemaatika põhilised mõisted, nagu piirväärtus, pidevus, tuletis, diferentsiaal ja integraal.”

**Näide 4.1** Vaatleme naturaalarvude jada (vt. [27])

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

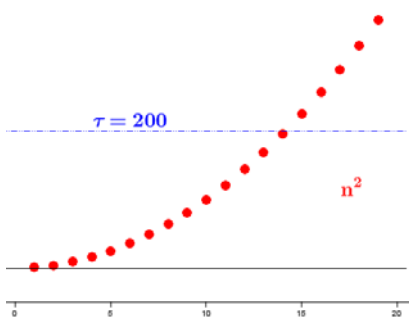
Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Missuguse naturaalarvu me ka võtaksime, ikka leidub veel temale järgnev element. Seepärast naturaalarvude jadal pole viimast elementi, sel jadal pole lõppu, see jada on lõpmatu.

Jadas leidub kõige väiksem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest suurem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järel-dub, et antud jadas ei ole kõige suuremat elementi. Näeme, et suurus  $n$  ületab kasvades iga etteantud tõkke  $\tau$ . Teisiti, pole tõket, mida arv  $n$  kasvades ei ületaks ehk, lühemalt, arv  $n$  kasvab tõkestamatult.

◇ ◇ ◇

**Näide 4.2** On kerge näha, et samuti kasvab tõkestamatult jada

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$



◇ ◇ ◇

### Definitsioon 4.1

Kui suurus muutub nõnda, et ta oma väärtuselt saab, ja siis ka jääb, suuremaks igast ette antud positiivsest arvust, siis ütleme, et suurus kasvab tõkestamatult (positiivses suunas). Kirjutame

$$s \rightarrow \infty.$$

“ Igapäevases kõnes kasutame sageli sõnu ja ütlushi, nagu lõpmatu, igavene, hetkeline, mõõtmatu suurus, kaduvväike jt. Nii neid kui paljusid teisi sõnu kasutatakse tavaliselt endale aru andmata, mida nad õieti tähendavad, missugused kujutlusi nendega tuleb siduda. Teadust saab aga rajada ainult täpselt defineeritud mõistetele. ”

Toodud sissejuhatav tekst ja paljud näited pärinevad õpikust [27], G. Rāgo. Kõrgem matemaatika I.



Foto: Vikipeedia.

**Gerhard Johannes Rāgo** (5. detsember 1892 - 27. juuni 1968) oli eesti matemaatik.

Piirväärtust vaatleme me lähemalt alles järgmises peatükis. Küll aga on jadade jaoks võimalik sellest rääkida veidi varem. Järgnev jada piirväärtuse mõiste ülesehitus pärineb samuti G. Rāgo õpikust ja on veidi „leebem“, kui seda õpetatakse matemaatikutele.

**Definitsioon 4.2**

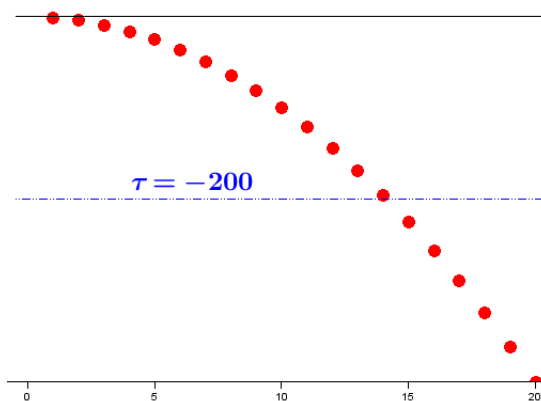
Kui suurus muutub nõnda, et ta oma väärtuselt saab, ja siis ka jääb, väiksemaks igast ette antud negatiivsest arvust, siis ütleme, et suurus kasvab tõkestamatult negatiivses suunas. Kirjutame

$$s \rightarrow -\infty.$$

**Näide 4.3** Jada

$$-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$$

kasvab tõkestamatult negatiivses suunas.



◇ ◇ ◇

**Definitsioon 4.3**

Kui jada  $(x_n)$  elemendid tõkestamatult kasvavad, s.t  $x_n \rightarrow \infty$  või  $x_n \rightarrow -\infty$ , siis me ütleme, et jada  $(x_n)$  piirväärtus on lõpmatu. Viimast märgime vastavalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{või} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

**Märkus 4.1**

Viimast öeldakse rangemalt ka nii: jada  $(x_n)$  piirväärtus on lõpmatu, kui iga ette antud positiivse arvu  $\tau > 0$  korral leidub selline jada indeks  $N$ , et iga suurema indeksi  $n > N$  korral kehtib

$$x_n > \tau \quad (\text{või } x_n < -\tau).$$

**Näide 4.4** Seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$$

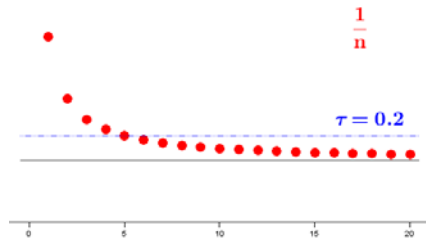
◇ ◇ ◇

**Näide 4.5** Vaatleme naturaalarvude jada asemel nende pöördväärtuste jada (vt. [27])

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Ka see jada on lõpmatu, kuid seekord järjestatud kahanevalt.

Jadas leidub kõige suurem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest väiksem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järeldub, et antud jadas ei ole kõige väiksemat elementi. Näeme, et suurus  $\frac{1}{n}$  jääb  $n$  kasvades väiksemaks igast etteantud tõkkest  $\tau > 0$  ehk, teisiti, pole positiivset tõket, millest arv  $\frac{1}{n}$  suuruse  $n$  kasvades ei jääks väiksemaks ehk, lühemalt, murd  $\frac{1}{n}$  kahaneb tõkestamatult.



Viimast on ka lihtne näidata. Olgu  $\tau$  suvaline ette antud positiivne arv (üldiselt kuitahes väike arv). Kõigi  $n$  väärtuste korral, kus

$$n > \frac{1}{\tau},$$

kehtib pöördvõrdeline seos

$$\frac{1}{n} < \tau.$$

Seega ükskõik, millise positiivse tõkke  $\tau > 0$  me ka ette ei annaks, siis mingist  $n$  väärtusest alates on väärtused  $\frac{1}{n}$  sellest tõkkest  $\tau$  väiksemad.

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 4.4**

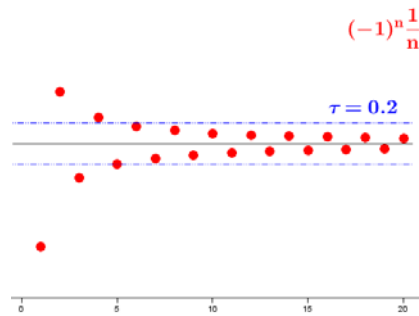
Kui suurus muutub nõnda, et ta oma **absoluutväärtuselt saab, ja siis ka jääb**, väiksemaks igast ette antud positiivsest arvust, siis ütleme, et suurus **kahaneb tõkestamatult**. Viimast märgime ka

$$s \rightarrow 0.$$

**Näide 4.6** Jada võib tõkestamatult kahaneda ka negatiivsest suunast või ka siis, kui tema väärtused on kord positiivsed ja kord negatiivsed. Näiteks jada

$$(x_n) = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 4.5**

Kui jada  $(x_n)$  elemendid kahanevad absoluutväärtuse poolest tõkestamatult, s.t  $|x_n| \rightarrow 0$ , siis me ütleme, et jada  $(x_n)$  piirväärtus on 0. Viimast märgime ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**Märkus 4.2**

Viimast öeldakse rangemalt ka nii: jada  $(x_n)$  piirväärtus on null, kui iga ette antud positiivse arvu  $\tau > 0$  korral leidub selline jada indeks  $N$ , et iga suurema indeksi  $n > N$  korral kehtib  $|x_n| < \tau$ .

**Definitsioon 4.6**

Kui mingi reaalarvu  $L \in \mathbb{R}$  korral  $|x_n - L| \rightarrow 0$ , siis ütleme, et jada  $(x_n)$  piirväärtus on  $L$ . Viimast märgime ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

**Märkus 4.3**

Viimast öeldakse rangemalt ka nii: jada  $(x_n)$  piirväärtus on arv  $L$ , kui iga ette antud positiivse arvu  $\tau > 0$  korral leidub selline jada indeks  $N$ , et iga suurema indeksi  $n > N$  korral kehtib

$$|x_n - L| < \tau.$$

**Näide 4.7** Jada

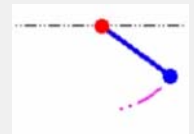
$$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$$

piirväärtus on  $\frac{1}{3}$ , kuna

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| \rightarrow 0, \quad x_n = 0.\underbrace{33\dots3}_n.$$

◇ ◇ ◇

Vaadeldes tasakaalust välja viidud rippuva laelambi edasi-tagasi võnkumist, näeme, et võngete amplituudid (suurim kõrvalekalle tasakaaluasendist) on vaheldumisi positiivsed ja negatiivsed, kusjuures teatavast võnkenumbri alates amplituudi suurus jääb püsivalt allapoole kuitahes väikesest etteantud tõkkest. Teoreetiliselt võiksid võnked järjest vähenedes kesta igavesti. Tegelikult kustub liikumine juba mõnekümne võnke järel, kuna võnkuva laelambi energia kulub hõõrdumistakistuse ületamisele.



Intuiitiivselt võib mõelda ka nii. Jada  $(x_n)$  piirväärtus on arv  $L$ , kui jada liikmed aina lähenevad ja lähenevad arvule  $L$ , sealjuures ei lähene aga ühelegi teisele arvule.

Märgime, et konstantse jada korral on piirväärtus ilmne, näiteks

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Siin pole enam kuskile läheneda, „enam lähemale ei saa“.

**Definitsioon 4.7**

Jada  $(x_n)$  nimetatakse **koonduvaks**, kui tal eksisteerib lõplik piirväärtus

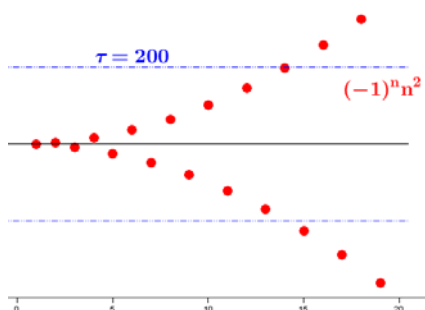
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

Jada, mis ei koonu, nimetatakse **hajuvaks** ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$  või piirväärtust  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  ei leidu).

**Näide 4.8** Igale jadal ei pruugi olla piirväärtust. Näiteks jada

$$-1, 4, -9, 16, \dots, (-1)^n n^2, \dots$$

hajub, kuna jada elemendid on vahelduvate märkidega ning need ei jää suuremaks ette antud positiivsest arvust ega jää väiksemaks ette antud negatiivsest arvust.



◇ ◇ ◇

**Näide 4.9** Vaatleme jada  $(x_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ . Antud jada hajub, kuna ei leidu piirväärtust  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Kõige lihtsam on mõelda sellest nii, et antud jada korral tema liikmed ei lähene ühelegi kindlale arvule, vaid hoopis võnguvad arvude 0 ja 1 vahel.

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 4.8**

Jada  $(x_n)$  nimetatakse **tõkestatuks**, kui leidub selline positiivne reaalarv  $M > 0$ , et jada kõik elemendid on absoluutväärtuse poolest väiksemad kui arv  $M$ , s.t

$$|x_n| < M, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vastasel korral nimetatakse jada **tõkestamatuks**.

**Näide 4.10** On selge, et jasad  $(n)$  ja  $(-n^2)$  ei saa olla tõkestatud, kuna nad tõkestamatult kasvavad. Jada  $(1/n)$  on tõkestatud iga arvuga  $M > 1$ . Samuti on tõkestatud jada  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ , kuigi see jada ei ole koonduv.

◇ ◇ ◇

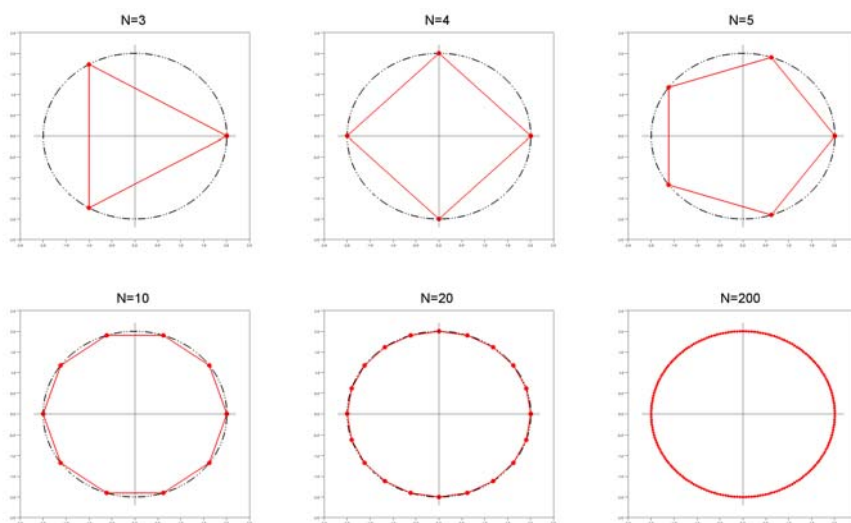


## 4.2 Funktsiooni piirväärtuse mõiste

Paljud loodusteaduse ja tehnika küsimused seavad meid vajaduse ette uurida funktsiooni käitumist argumendi lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Näiteks võib meid huvitada küsimus, kuidas käitub vedeliku ruumala temperatuuri lähenemisel keemispunktile; kuidas käitub terasvarda venivus koormuse lähenemisel elastsuspiirile jne.

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks alustalasid ja see eristab matemaatilist analüüsi näiteks algebrast ja trigonomeetriast. Sellele mõistele baseeruvad enamus meie järgmistes loengutes vaadeldavaid mõisteid, nagu näiteks funktsiooni pidevus, tuletis, keha hetkkiirus, integraal. Samal ajal, kui tegemist on väga olulise mõistega, on tegemist ka väga keerulise mõistega. Sellest tingituna anname oma põhikursuses piirväärtuse mõiste pigem intuiivselt, kui matemaatiliselt range eeskirja abil. Viimase kohta võib lugeda lisa leiduvast materjalist.

Vaatleme näiteks ringjoone pikkuse arvutamist. Viimast saaksime ligikaudu arvutada sirge joonlaua abil, mõõtes ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurkade külgede pikkused.



Mida suuremaks läheb hulknurga külgede arv  $N$ , seda täpsem peaks olema meie poolt mõõdetud ja arvatud ringjoone ümbermõõt. Seega on piirväärtuse leidmisel oluline „protsess“, milleks antud olukorras on hulknurga külgede arvu suurendamine, mis tingib samal ajal ka mõõtmiste arvu suurenemise. Praktikas tuleb mingil hetkel paratamatult tunnistada, et mõõtetäpsusel on omad piirangud. Küll aga saame praktiliste mõõtmiste asemel jätkata teoreetiliste arvutustega. Saab näidata, et sellisel viisil koostatud hulknurkade külgede summa tõepoolest läheneb väärtusele  $d = 2\pi r$ , mis kujutab endast ringjoone ümbermõõtu.

Newton'i aegadel ei olnud piirväärtuse mõiste veel päris selge, korrektselt range definitsioon puudus (see viimane ei seganud Newton'il ja Leibniz'il andmast väga olulisi praktilisi tulemusi).

Kasutati umbes sellist lähemisviisi, et kui  $\Delta x$  voolab nulli, siis  $2 + \Delta x$  voolab arvuks 2. Või siis, kui  $\Delta x$  on piisavalt väike (samal ajal ei tohi  $\Delta x$  võrduda nulliga), siis  $2 + \Delta x$  on piisavalt lähedane arvuga 2. Paneme tähele, et need mõisted „piisavalt“ ja „voolab“ on üsna „udused“ mõisted. Matemaatikas on olukordi, kus sellisest kirjeldusest ei piisa. Kui me ei saa  $\Delta x$  võtta võrdseks nulliga, siis me ei saa ka niisama lihtalt tõestada, et protsessi  $2 + \Delta x$  tulemus on tõesti arv 2.

Näiteks, 1797. aastal üritas Joseph-Louis Lagrange tulelise mõistet edasi anda ilma piirväärtuse mõisteta, üritades läbi ajada ainult algebraliste vahenditega (astmeridadega). Lagrange mõistis, et tema väited ei olnud matemaatiliselt alati korrektsed, kuid ei pidanud neid erijuhte eriti tähtsaks.

Aastal 1817 Bernard Bolzano ja aastal 1821 Augustin-Louis Cauchy andsid  $(\epsilon, \delta)$ -tüüpi definitsioonid, mis hülgasid geomeetrilise lähenemise ja võtsid kasutusele analüütilise. Karl Weierstrass (1815 - 1897) andis definitsioonile kaasajal laialt kasutatud „lihvitud“ sõnastuse.



*Weierstrass*

Karl Weierstrass  
Allikas: Wikipedia

**Näide 4.11** Vaatleme funktsiooni  $f(x) = x - 1$ . Lihtne on näha, et kui me läheneme argumentiga  $x$  tõkestamatult arvule 1, siis funktsiooni väärtused  $x - 1$  lähenevad tõkestamatult nullile:

$x$	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01

Antud juhul saab arvutada ka  $f$  väärtuse kohal  $x = 1$  ja selleks on  $f(1) = 0$ . Viimane kujutab endast ühtlasi funktsiooni  $f$  piirväärtust argumenti  $x$  lähenemisel arvule 1.

◇ ◇ ◇

**Näide 4.12** Vaatleme aga järgmist funktsiooni:

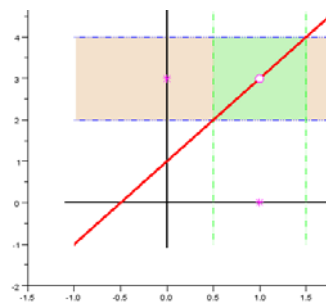
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

mis ei ole määratud  $x = 1$  korral. Viimane tähendab, et me ei saa leida funktsiooni väärtust  $f(1)$ . Proovides argumentiga  $x$  minna ühele kuitahes lähedale, saame siiski arvutada

$x$	0.9	0.99	0.999	...	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	...	2.001	2.01	2.1

Võib täheldada, et argumenti  $x$  lähenedes arvule 1 funktsiooni väärtused  $f(x)$  lähenevad arvule 2. Oma arvutusi võiksime niimoodi jätkata, võttes  $x$  väärtusi arvule 1 järjest lähemal ja lähemal. Osutub, et sel korral on argumenti  $x$  lähenemisel arvule 1 funktsiooni  $f$  piirväärtuseks arv 2, hoolimata sellest, et funktsiooni punktis  $x = 1$  määratud ei ole.

◇ ◇ ◇



#### Definitsioon 4.9

Olgu mingi punkt  $a \in \mathbb{R}$  ja  $\delta > 0$ . Punkti  $a$  ümbruseks nimetatakse vahemikku  $(a - \delta, a + \delta)$  ehk  $\delta$ -ümbruseks.

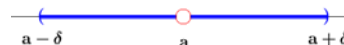
#### Definitsioon 4.10

Hulga  $X \subset \mathbb{R}$  kuhjumispunktiks nimetatakse hulga  $\mathbb{R}$  punkti, mille igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev hulka  $X$  kuuluv punkt.

#### Märkus 4.4

Edaspidi vaatleme alati piirprotsesse, kus  $a$  on kuhjumispunkt, kusjuures ta ei pruugi olla funktsiooni määramispiirkonna punkt.

Esitame järgnevalt piirväärtuse väga üldise sõnastuse, mis seletab küll ära mõiste sisu, kuid ei anna konkreetset eeskirja piirväärtuse leidmiseks. Teisalt, viimane ei sega meid edaspidi piirväärtust arvutamast, kuna praktikas vajame me enamasti piirväärtuste omadusi, mitte definitsiooni ennast (vt Lisa D.1).



Piirväärtuse tähistusena kasutatakse sümbolit  $\lim$ , mis on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, ja mis tähendab piiri.

**Definitsioon 4.11**

Olgu funktsioon  $f$  määratud punkti  $a$  mingis ümbruses. Kui argumenti  $x$  **tõkestamatu lähenemine** arvule  $a$  toob kaasa funktsiooni  $f$  väärtuste  $f(x)$  **tõkestamatu lähenemise** arvule  $L$ , siis ütleme, et funktsiooni  $f$  piirväärtus protsessis  $x \rightarrow a$  on arv  $L$  ja märgime seda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Täpsema sõnastuse leiate praktikumi ülesannete kogust.

**Näide 4.13** Funktsioonil

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

puudub piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 0$ , kuna kuitahes lähedalt nullile me  $x$  väärtusi ka ei võtaks, siis ikka leidub neid  $x$  väärtusi, mille korral  $f$  väärtus on 1 või  $-1$ , s.t funktsiooni  $f$  väärtused ei lähene mingile konkreetsele arvule, vaid „pendeldavad“ väärtuste 1 ja  $(-1)$  vahel.

◇ ◇ ◇

**Näide 4.14** Tükiti lineaarsel funktsioonil

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

puudub piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 1$ , kuna  $x$  väärtuste ühele vasakult poolt lähenedes funktsiooni väärtused  $f(x) \rightarrow 3$ ,  $x$  väärtuste ühele paremalt poolt lähenedes funktsiooni väärtused  $f(x) \rightarrow 5$ . Seega lähenevad funktsiooni väärtused rohkem kui ühele kindlale arvule ja sellel funktsioonil puudub piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 1$ .

◇ ◇ ◇

## 4.3 Ühepoolsed piirväärtused

**Definitsioon 4.12**

Õeldakse, et funktsioonil  $f$  on lõpmatu piirväärtus protsessis  $x \rightarrow a$ , kui argumenti  $x$  (tõkestamatu) lähenemine arvule  $a$  toob kaasa funktsiooni  $f$  väärtuste  $f(x)$  tõkestamatu kasvamise. Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty).$$

**Näide 4.15** Näiteks

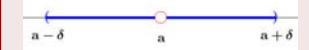
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

◇ ◇ ◇

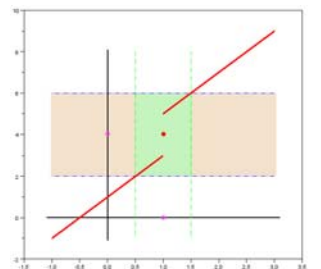
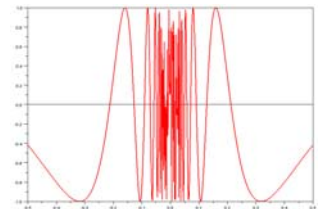
NB! Funktsiooni väärtused  $f(x)$  peavad olema määratud piirkonnas

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

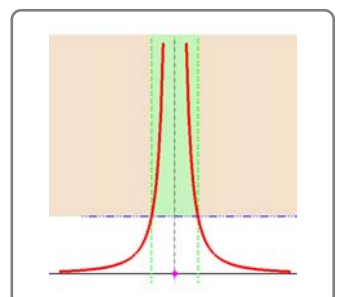
mingi  $\delta > 0$  korral.



Punktis  $x = a$  võib olla funktsioon määratud, kuid võib ka mitte olla. Piirväärtuse jaoks ei ole funktsiooni käitumine punktis  $x = a$  üldsegi oluline.



Albert Einstein: “Ainult kaks asja on lõpmatud: universum ja inimese lollus, ning ma pole kindel esimeses.”



Vaatleme piirprotsesse:

1.  $x \rightarrow a, x > a$ , lähenemine paremalt, s.o parempoolne piirväärtus.

Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (\text{või } f(a+)).$$

2.  $x \rightarrow a, x < a$ , lähenemine vasakult, s.o vasakpoolne piirväärtus.

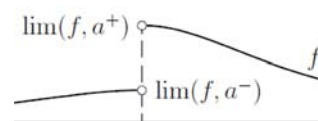
Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (\text{või } f(a-)).$$

**Teoreem 4.1**

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , siis nn. kahepoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  eksisteerib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$



Allikas: [15]

**Näide 4.16** Funktsioonil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

leiduvad ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

kuid on selge, et ei leidu kahepoolset piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

◇ ◇ ◇

Ühepoolsed piirväärtused on ka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ ja } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

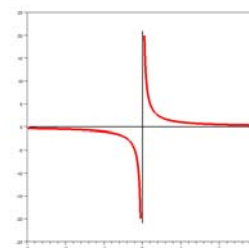
**Näide 4.17** Funktsioonil

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

ei leidu piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , kuna sel juhul  $x-1 < 0$  ja ruutjuur ei ole defineeritud. Samas leidub  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ .

◇ ◇ ◇

NB! Toodud piirväärtus on kontrolltöodes väga sageli valesti leitud.



**Näide 4.18** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1}.$$

Kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x(2 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2},$$

kuna  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ , kui  $x \rightarrow \infty$ .

◇ ◇ ◇

## 4.4 Funktsiooni piirväärtuse omadused

**Teoreem 4.2**

**Piirväärtuse ühesus.** Vaadeldavas protsessis saab funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

*Tõestus.* Tõestuse võib leida näiteks õpikust [22].  $\square$

**Definitsioon 4.13**

Funktsiooni  $f$  nimetatakse tõkestatuks hulgal  $X$ , kui leidub positiivne arv  $M > 0$ , nii et  $|f(x)| \leq M$  iga  $x \in X$  korral.

Funktsioon  $f(x) = x$  on tõkestatud lõigus  $[-3, 2]$ , kuna näiteks  $M = 100$  jaoks (tegelikult iga  $M \geq 3$  jaoks) kehtib  $|f(x)| = |x| \leq 100$  iga  $x \in [-3, 2]$  korral. Samas ei ole  $f$  tõkestatud hulgal  $\mathbb{R}$ .

**Teoreem 4.3**

Kui funktsioon  $y = f(x)$  on tõkestatud punkti  $a$  mingis ümbruses ja

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

siis

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0. \quad (4.1)$$

On loogiline, et lõpliku arvu või suuruse korrutamine lõpmata väikese arvuga annab tulemuseks lõpmata väikese arvu.

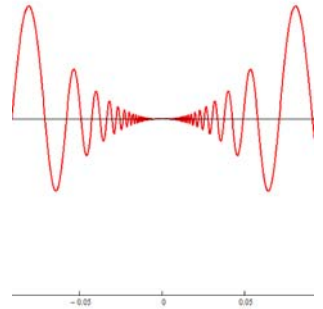
**Näide 4.19** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cos \frac{1}{x} \right).$$

Siin  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Samas piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  ei leidu (kiirelt võnkuv funktsioon). Kuna aga  $|\cos u| \leq 1$  iga  $u \in \mathbb{R}$  korral (s.t koosinus on tõkestatud), siis viimase teoreemi järgi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Teoreem 4.4**

Kui leiduvad **lõplikud** piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \quad (4.2)$$

siis kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$ .

Teoreemi eeldus lõplike piirväärtuste leidumise kohta on väga oluline.  $A$  ja  $B$  peavad olema üheselt määratud reaalarvud.

**Näide 4.20** Arvestades tehetega seotud omadusi, saame

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - 2) x^2 = 2 \cdot 16 = 32.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 4.5**

Teoreemi 4.4 nõue, et peavad leiduma lõplikud piirväärtused  $\lim f(x)$  ja  $\lim g(x)$ , on olulised. Vastasel juhul näiteks  $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$  ja  $g(x) = \frac{1}{|x|}$  korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

aga kasutades valesti teoreemi 4.4 esimest omadust, saaksime

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \xrightarrow{\text{EI KEHTI}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{|x|} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = -\infty + \infty.$$

Suurus  $\infty - \infty$  on **täiesti määramata suurus** (üks määramatus miinus mingi teine määramatus), kusjuures  $\infty - \infty$  **ei võrdu nulliga!!!**

Antud näitest võime ka näha, et lõpmatute piirväärtuste  $\lim f(x)$  või  $\lim g(x)$  korral (või ka siis, kui neid piirväärtusi hoopis ei eksisteerigi) võib funktsioonide summal  $f + g$  antud protsessis lõplik piirväärtus ikkagi leiduda. Analoogiline on olukord vahe, korrutise ja jagatise korral.

**Teoreem 4.5**

**Keskmise muutuja omadus.** Kui punkti  $a$  mingis ümbruses kehivad võrratused

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

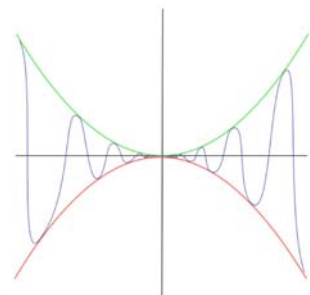
ja leiduvad lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

siis leidub ka piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ning

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Keskmise muutuja omadust nimetatakse ka "Squeeze Theorem" või ka "võileiva omaduseks" ("Sandwich Rule").



Allikas: Wikipedia

Nullümbroses, keskmine sinine joon  $g(x)$  saab sama piirväärtuse, mis ülemine roheline  $h(x)$  ja alumine punane  $f(x)$

**Näide 4.21** Kasutades omadust  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , leiame piirväärtuse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6}.$$

Paneme tähele, et  $n \rightarrow \infty$  korral kehtib

$$1 < 6 < n.$$

Samuti jäävad võrratused kehtima, kui neist võtta mingit järku juur,

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kuna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$  ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , siis võileiva omaduse tõttu järeldub, et ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1.$$

◇ ◇ ◇

## 4.5 Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

**Otsene arvutamine.** Üks võimalus on argumendi  $x$  asemele panna arvule  $a$  lähedasi arve ja vaadata, mis edasi saab. Sellist võtet kasutasime peatüki alguses. Võte nõuab aga liialt palju arvutamisi ja on mitterange meetod.

### Teoreem 4.6

**Piirväärtus elementaarfunktsioonidest.** Kui  $f$  on elementaarfunktsioon ja punkt  $a$  kuulub tema määramispiirkonda,  $a \in X$ , siis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

### Märkus 4.6

Antud teoreem lubab väga paljudel juhtudel piirväärtuse leidmist lihtsustada. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \cos \frac{2x-3}{x+1} + e^{4x+3} \right) = \cos \frac{3}{4} + e^{15}.$$

Samas ei saaks piirväärtust niimoodi leida, kui protsessi  $x \rightarrow 3$  asemel oleks protsess  $x \rightarrow -1$ , kuna  $\frac{1}{x+1}$  ei oleks määratud punktis  $x = -1$ .

### Näide 4.22 Piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}$$

leidmisel on arvutamine üsna ebakindel meetod. Arvuti abiga võib leida, et

$x$	$\pm 1$	$\pm 0.5$	$\pm 0.1$	$\pm 0.01$
$f(x)$	0.049876	0.049969	0.049999	0.050000

Kõik viitaks nagu sellele, et piirväärtus on 0.05, kuid minnes veel edasi, saame

$x$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.0001$	$\pm 0.00001$	$\pm 0.000001$
$f(x)$	0.080000	0.000000	0.000000	0.000000

Sel korral oleks piirväärtus pigem 0? Probleem on siin arvutitäpsusega, mis on teatavasti piiratud. Leiame selle piirväärtuse hiljem, kasutades teisendusi.

◇ ◇ ◇

**Argumendi asendamine.** Asendame argumendi  $x$  suurusega  $a \pm \Delta a$ , kus  $\Delta a \rightarrow 0$ , ja üritame avaldist teisendada. Selline võte võib praktikas anda väga häid tulemusi (kuigi, ettevaatlik tuleb siiski olla).

**Näide 4.23** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Tegemist on elementaarfunktsiooni piirväärtusega, kuid kahjuks  $x = 3$  ei kuulu tema määramispiirkonda. Asendame  $x = 3 + \Delta a$  ja leiame

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{(3 + \Delta a)^2 - 9}{3 + \Delta a - 3} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{9 + 6\Delta a + (\Delta a)^2 - 9}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} (6 + \Delta a) = 6.$$

◇ ◇ ◇

**Määramatuse kõrvaldamine.** Enamus kordadel on otstarbekas avaldist teisendada nii, et algselt eksisteeriv määramatus saab kõrvaldatud.

**Märkus 4.7**

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb piirväärtuse märgi all olevat avaldist teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

**Näide 4.24** Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1}$$

arvutamisel ei saa kohe asendada  $x = 1$ , kuna tekib määramatus  $\frac{0}{0}$ . Jagamise korral võib võrdseid suurusi omavahel taandada. Tegelikult ei taandata omavahel mitte nulle, vaid  $\frac{x-1}{x-1}$ , kus  $x \neq 1$ , s.t  $x - 1 \neq 0$  (piirväärtus ei sõltu sellest, milline on funktsiooni väärtus punktis  $x = a$  ehk siin  $x = 1$ , vaid väärtusest punkti  $a$  lähedal). Seega

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide korral on kasulik meelde tuletada järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), & a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

**Näide 4.25** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide jagamisel protsessis  $x \rightarrow a$  tuleks määramatuse  $\frac{0}{0}$  korral võimalusel kasutada algebraisi teisendusvalemeid.



**Näide 4.26** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Siin  $x = 0$  ei kuulu elementaarfunktsiooni määramispiirkonda. Järgnevalt kasutame “klassikalist” ühega korrutamise võtet (idee on kasutada ruutude vahe valemit  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ ),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 4.27** Leiame varem vaadeldud piirväärtuse

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Viimast saame teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \frac{1}{20} = 0.05. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 4.28** Kahe polünoomi jagamisel protsessis  $x \rightarrow \pm\infty$  tekib  $\frac{\infty}{\infty}$ , siis võetakse lugejas ja nimetajas sulgude ette muutuja  $x$  kõrgeima astmega liige. Näiteks

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 4.29** Vaatleme veel tudengite poolt palju vigu põhjustanud piirväärtust

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

Klassikaline viga on siin kirjutada, et  $\infty - \infty$  võrdub nulliga. Viimane on aga täiesti vale vastus, kuna tegemist on määramatusega. Märk  $\infty$  ei tähistata ühtegi konkreetset arvu. Piirväärtuse leiame järgmiselt:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui lugejas või nimetajas on ruutjuur, siis määramatuse korral tuleks võimalusel sellest irratsionaalsusest vabaneeda. Tüüpiline võte selleks on kasutada ära ruutude vahe valemit

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Polünoomide jagamisel protsessis  $x \rightarrow \pm\infty$  tuleks lugejas ja nimetajas sulgude ette tuua  $x$  kõrgeima astmega liige  $x^n$ . Sellisel juhul jääb sulgudesse alati lõplik suurus (kuna liikmed  $\frac{1}{x^m} \rightarrow 0$ , kui  $x \rightarrow \pm\infty$ ).

## 4.6 Tähtsad piirväärtused

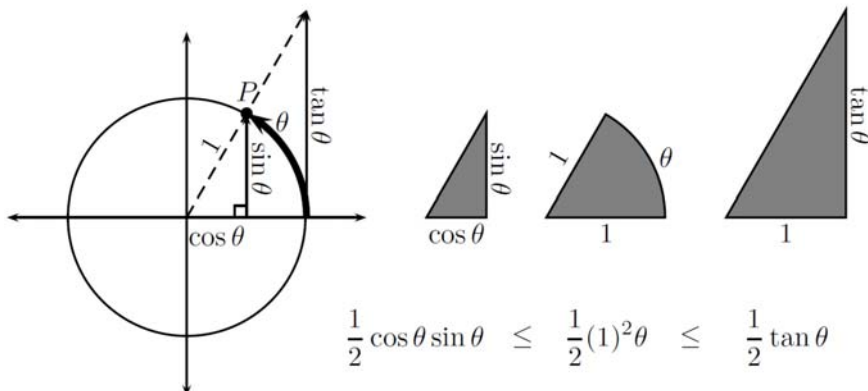
### Teoreem 4.7

Olgu  $\theta$  nurk radiaanides. Siis kehtib valem

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. \quad (4.4)$$

*Tõestus.* Tõestuse leiab näiteks õpikutest [3, 22]. Vaatleme funktsiooni  $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ . Punkt  $\theta = 0$  ei kuulu funktsiooni  $f$  määramispiirkonda, kuid mujal on  $f$  määratud.

Funktsioon  $f$  on paarisfunktsioon ja piisab näidata, et  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ . Vaatleme ringjoont raadiusega 1. Asetame I veerandisse ringjoonele punkti  $P$ . Me moodustame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusi pikkus on 1, ringi sektori kuni punktini  $P$  (kaare pikkusega  $\theta$  radiaani) ja täisnurkse kolmnurga külje pikkustega 1 ja  $\tan \theta$  (vt. joonist).



Allikas: [3]

Ühikringi pindala on  $\pi$  ja übermõõt  $2\pi$ , millest pindala avaldub poole übermõöduga. Sama suhe jääb kehtima, kui võtame ringist mingi väiksema osa. Siit saame, et loodud sektori pindala on  $\frac{\theta}{2}$ . Jooniselt on selge, et moodustatud kujundite pindalade kohta kehtivad võrratused

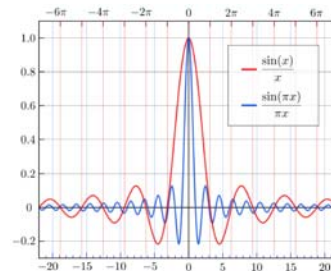
$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{2} \leq \frac{1}{2} \theta \leq \frac{\tan \theta}{2} \quad \text{ehk} \quad \cos \theta \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

Kuna  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , siis võime jagada võrratust suurusega  $\sin \theta > 0$ ,

$$\cos \theta \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta}.$$

Kuna  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$  ja  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos \theta} = 1$ , siis võileiva omadusest saame

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\theta}{\sin \theta}} = 1.$$



Allikas: Wikipedia

Tuletame meelde, et radiaan on kesknurk, mis toetub raadiuse pikkusele kaarele

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ 17'.$$

□

**Järeldus 4.1**

Olgu  $\theta$  nurk radiaanides. Siis kehtib valem

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1. \quad (4.5)$$

Järeldub seosest  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

**Näide 4.30** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Kui  $x \rightarrow 0$ , siis ka  $2x \rightarrow 0$  ja me saame muutujavahetuse  $u = 2x$  abil kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 4.31** Oluline on jälgida ka protsessi, milles piirväärtust leitakse.

Näiteks piirväärtuse

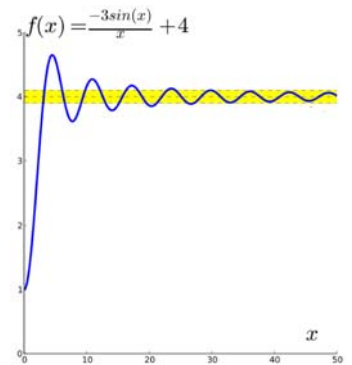
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \sin x}{x} + 4$$

korral on väga ahvatlev kasutada just vaadeldud piirväärtuse omadust (4.4), kuid kuna siin  $x \rightarrow \infty$  ja mitte  $x \rightarrow 0$ , siis me ei saa valemit (4.4) kasutada. Küll aga märkame, et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x} \rightarrow 0$  protsessis  $x \rightarrow \infty$  ja kuna siinus on tõkestatud, siis tegelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 \sin x}{x} + 4 = 0 + 4 = 4.$$

Samas võib märgata, et kui oleks protsess  $x \rightarrow 0$ , siis saaksime valemit (4.4) kasutada ja piirväärtus oleks  $-3 + 4 = 1$ .

◇ ◇ ◇



Joonis: Wikipedia.

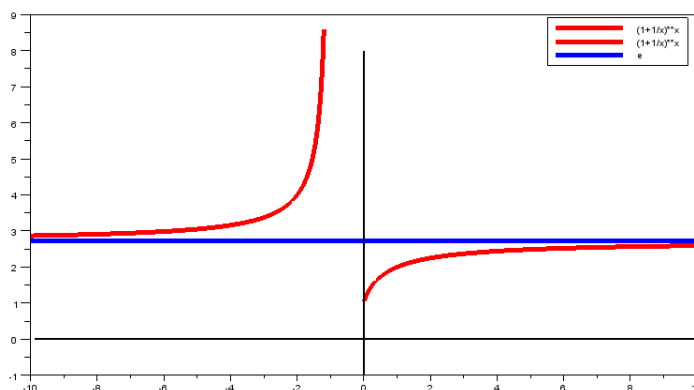
**Lause 4.1**

Kehtib valem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4.6)$$

Valem kehtib ka protsessis  $x \rightarrow -\infty$ .

*Tõestus.* Tõestus on toodud osaliselt õpikus [31]. □



**Näide 4.32** Vaatleme pideva intressi mudelit. Pideva intressi korral „kasseeritakse“ intress sisse igal ajamomendil, ka siis kui te magate või jooksete parasjagu naabri koerte eest tuhatnelja suvalises suunas.

Te olete võtnud 500 eurot laenu intressiga 5% kuus ( $r = 0.05$ ). Sel juhul geomeetrilise rea teema juures sai tuletatud, et  $n$  kuu möödudes on summa kasvanud

$$S_n = 500 \cdot (1 + r)^n$$

euroni. Ehk ühe aastaga on võlg kasvanud

$$S_{12} = 500 \cdot 1.05^{12} \approx 898 \quad \text{euroni.}$$

Pideva intressi korral jaotatakse see 5% igale ajaühikule laiali, ehk  $r = \frac{0.05}{N}$ , kus  $N \rightarrow \infty$  on ühes kuus toimunud intressi arvestamiste arv. Sel juhul  $n$  kuu vältel arvestatakse intressi  $nN$  korda ehk

$$S_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{nN} = 500 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{r}}\right)^{\frac{N}{r}}\right)^{nr}.$$

Kui  $N \rightarrow \infty$ , siis ka  $\frac{N}{r} \rightarrow \infty$  ja me näeme, et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n = e^{nr}.$$

Seega pideva intressi mudeli järgi on laen ühe aastaga kasvanud

$$e^{0.05 \cdot 12} \approx 911 \quad \text{euroni.}$$

◇ ◇ ◇

NB! Hoolimata sellest, et ühel korral võetakse intressiks lõpmata väike summa  $\frac{r}{N} \rightarrow 0$ , siis kõik kokku liites ( $N \rightarrow \infty$ ) saame ikkagi märkimisväärse summa.

Seda on u. 13 eurot rohkem kui lõpliku, diskreetse mudeliga. Pidev intressi mudel on alati kahjulikum laenu võtjale ja kasulik laenu andjale.

**Näide 4.33** Leiame piirväärtuse

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}, \end{aligned}$$

kuna  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = 1$ . Kui  $x \rightarrow \infty$ , siis ka  $u = x - 1 \rightarrow \infty$ .

Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

◇ ◇ ◇

**Lause 4.2**

Kehtib valem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad (4.7)$$

Tõestus. Tõestus on toodud õpikus [22].

□

## 4.7 Pidevad funktsioonid

Igapäevaelus on tuntud ütlused, nagu „kütusehinna hüppeline tõus“, „katkematu sündmuste ahelik“, „pidevalt töötav seadeldis“ jne. Me arvame enam-vähem selge olevat, mida need sõnad tähendavad. Ütlused, nagu „funktsioon katkeb“ ja „funktsioon on pidev“ haaravad matemaatilisi mõisteid ja vajavad seetõttu täpset piiritlemist.

Vaatleme reaalarvulisi funktsioone  $y = f(x)$ ,  $x \in X \subset \mathbb{R}$ . Olgu  $a \in X$ .

### Definitsioon 4.14

Funktsiooni  $f$  nimetatakse **pidevaks** punktis  $a$ , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (4.8)$$

### Märkus 4.8

Selleks, et funktsioon oleks pidev punktis  $a$ , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

1. funktsioonil on olemas kindel väärtus  $f(a)$ ;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  protsessis  $x \rightarrow a$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Kui funktsioon  $f$  ei ole pidev punktis  $a$ , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on *katkev* punktis  $a$  (punkti  $a$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *katkevuspunktiks*). Katkevuspunkt võib funktsiooni määramispiirkonda kuuluda, või ka mitte.

Praktikas on pidevad funktsioonid väga olulisel kohal. Mittematemaatiliselt võime pidevast funktsioonist mõelda kui funktsioonist, mille graafiku joonestamisel ei pea pliatsit paberilt tõstma.

**Näide 4.34** Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{juhul } x \neq 2 \\ 4 & \text{juhul } x = 2 \end{cases}.$$

Võib leida, et protsessis  $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

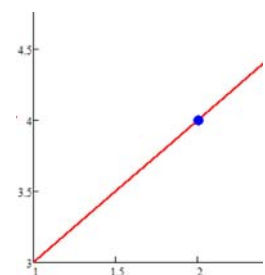
Seega eksisteerib piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 2$ . Samuti eksisteerib funktsiooni väärtus  $f(2) = 4$ . Kuna  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ , siis see funktsioon on pidev punktis 2.

Kui funktsioon  $f$  oleks defineeritud nii, et tal oleks punktis 2 mingi teine väärtus, siis tingimus  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  ei kehtiks ja funktsioon oleks katkev punktis 2.

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 4.15

Me ütleme, et funktsioon  $f$  on pidev hulgal  $X$ , kui  $f$  on pidev selle hulga igas punktis. Kui  $X = \mathbb{R}$ , siis ütleme, et funktsioon  $f$  on pidev kõikjal.



Analoogiliselt ühepoolsetele piirväärtustele on olemas ühepoolse pidevuse mõisted: vasakult pidev ja paremalt pidev. Sel juhul tuleb protsess  $\Delta x \rightarrow 0$  välja vahetada vastava ühepoolse piirväärtusega  $\Delta x \rightarrow 0^-$  või  $\Delta x \rightarrow 0^+$ .

Anname pidevuse definitsioonile teise kuju. On selge, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

kehtib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Tähistame argumendi muudu  $\Delta x = x - a$  ning funktsiooni muudu  $\Delta y = f(x) - f(a)$ . Siis saame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (4.9)$$

**Märkus 4.9**

Funktsioon on pidev, kui argumendi  $x$  väikesel muutmisel ka funktsiooni muut  $\Delta y$  muutub vähe, ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (4.10)$$

**Näide 4.35** Näitame, et  $y = \frac{1}{x}$  on pidev iga  $x \neq 0$  korral. Olgu punktis  $x \neq 0$  argumendi juurdekasv  $\Delta x$ . Siis  $\Delta x$  lähenemisel nullile saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} = 0.$$

Järelikult on funktsioon pidev iga  $x \neq 0$  korral.

◇ ◇ ◇

## 4.8 Funktsiooni katkevusviise

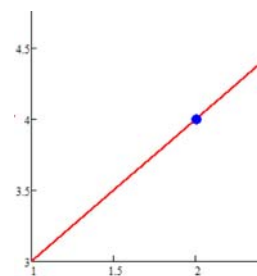
**Kõrvaldatav katkevus.** Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Punktis  $x = 2$  ei ole funktsioon määratud, kuid piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 2$  siiski eksisteerib,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Funktsioon on katkev punktis  $x = 2$ , kuigi tal on olemas piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 2$ . Katkevus on kõrvaldatav, kuna saaksime vajadusel defineerida  $f(2) = 4$  ja siis oleks kõik pidevuse nõuded täidetud.

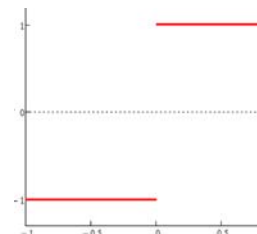


**Hüppeline katkevus.** Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x}{|x|},$$

mis ei ole punktis  $x = 0$  määratud. Leiame ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$



Kuna parem- ja vasakpoolsed piirväärtused erinevad, siis puudub ka mõlemapoolne piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 0$ . Selline funktsioon omab *hüppelist katkevust* ja see ei ole kahjuks kõrvaldatav.

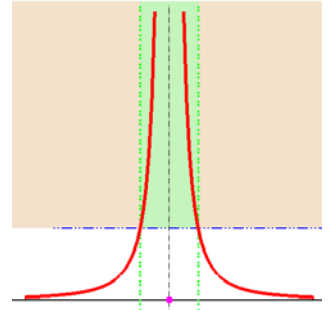
**Lõpmatu katkevus.** Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

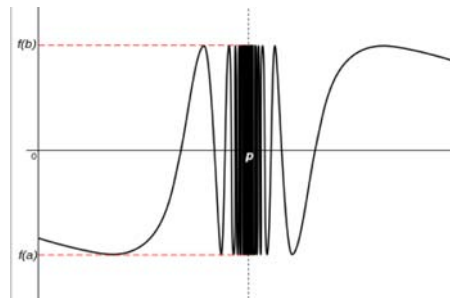
Funktsioon on määramata punktis  $x = 0$  ja piirväärtus võrdub

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Kõik oleks korras, kui funktsioon punktis 0 vahepeal tõkestamatult ei kasvaks. Märgive, et see funktsioon on katkev ainult punktis  $x = 0$ , mujal on ta pidev.



**Ostsilleeriv katkevus.** Vaatleme funktsiooni



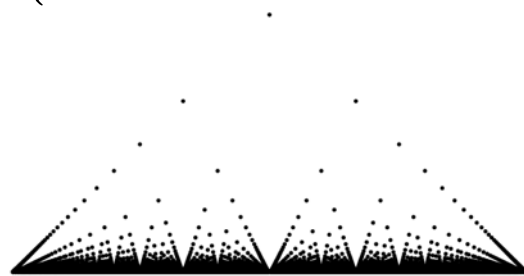
Allikas: Wikipedia.

Ilma et me teaksime selle funktsiooni täpset avaldist, võib öelda, et ilmselt see funktsioon ei ole pidev (joonise keskpunktis), kuna võnkumine toimub liialt kiiresti. Sedatüüpi funktsiooniks on näiteks  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , millel ei leidu piirväärtust protsessis  $x \rightarrow 0$ .

#### Märkus 4.10

Toome ühe näite funktsioonist, mille pidevus on väga keeruline,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & , x \in \mathbb{Q}, \quad q > 0, \quad \left(x = \frac{p}{q} \text{ taandatud kujul}\right), \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Allikas: Wikipedia, või ka [3]

Joonisel toodud funktsiooni konstrueeris saksa matemaatik Carl Johannes Thomae (1840 - 1921) ja see on pidev irratsionaalsetes punktides  $x$ , kuid katkev kõikides ratsionaalsetes punktides  $x$ . Antud funktsiooni nimetatakse ka popkorni või siis vihmapiiskade funktsiooniks.

Igapäevaelus me selliste funktsioonidega kokku ei puutu. Tegemist on rohkem sellise matemaatilise teoreetilise näitega. On olemas ka funktsioone, mis on kõikjal defineeritud (s.t omavad väärtust), kuid ei ole pidevad mitte üheski punktis.

## 4.9 Pidevate funktsioonide omadused

**Lause 4.3**

Olgu  $f$  ja  $g$  pidevad funktsioonid punktis  $x = a$ . Siis ka

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

ja

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(a) \neq 0,$$

on pidevad funktsioonid punktis  $x = a$ .

Tehetega seotud omadused järelduvad piirväärtuste omadustest.

**Teoreem 4.8**

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

**Näide 4.36** Viimase teoreemi järgi teame, et elementaarfunktsioon  $f(x) = x^2$  on pidev kogu reaalteljel. Seega  $f(3.14)$  on päris hea lähisväärtus täpsele väärtusele  $f(\pi)$ . Argumendi muut  $\Delta x = \pi - 3.14$  ei ole suur, seega ka funktsiooni muut  $\Delta y = f(\pi) - f(3.14)$  ei saa olla suur. Kui me tahame täpsemat tulemust, siis piisab võtta argumendis 3.14 rohkem komakohti.

Kui funktsioon ei ole pidev mingis punktis, siis sellist omadust enam ei ole. Näiteks,  $p(x)$  on kirja saatmise hinnafunktsioon

$$p(x) = \begin{cases} 34 \text{ senti} & , 0 < x < 100 \text{ grammi,} \\ 57 \text{ senti} & , 100 \leq x \leq 200 \text{ grammi.} \end{cases}$$

Sellisel juhul  $p(99) = 34$ , aga  $p(101) = 57$ , s.t väike raskuse muutmine toob kaasa suure hinna kõikumise (punkti  $x = 100$  ümber võime võtta kuitahes väikese raskuse muudu, aga hinna muutus jääb ikka nullist oluliselt suuremaks). Funktsioon  $p$  ei ole pidev punktis  $x = 100$ .

◇ ◇ ◇

**Lause 4.4**

Lõigus pideva funktsiooni väärtused on tõkestatud.

**Lause 4.5**

Lõigus pidev funktsioon omandab vähemalt ühes lõigu punktis oma väikseima ja ühes lõigu punktis oma suurima väärtuse.



**Näide 4.37** Näitame, et punktis  $x = 2$  katkeva funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

saab “jätkata” pidevaks funktsiooniks punktis  $x = 2$ .

Esiteks märgime, et  $f$  kui elementaarfunktsioon on pidev punkti 2 lähieümbruses. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

Jätkatud funktsioon  $g$  on pidev punktis  $x = 2$ , s.t.  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ , kui defineerida

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 2 \\ \frac{5}{4} & , x = 2 \end{cases}.$$

◇ ◇ ◇

Lõigus pidevad funktsioonid asuvad nii teorias kui praktikas väga tähtsal kohal. On palju tulemusi stiilis “kui funktsioon  $f$  on pidev mingis piirkonnas, siis kehtib ...”. Toome lihtsa näite, mis omab ka praktikas olulist rolli.

#### **Teoreem 4.9**

**Teoreem vahepealsetest väärtustest** (*Intermediate Value Theorem*, vt. [3, 13]). Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis  $f(x)$  väärtus võib omada iga väärtust arvude  $f(a)$  ja  $f(b)$  vahel. Täpsemalt, kui

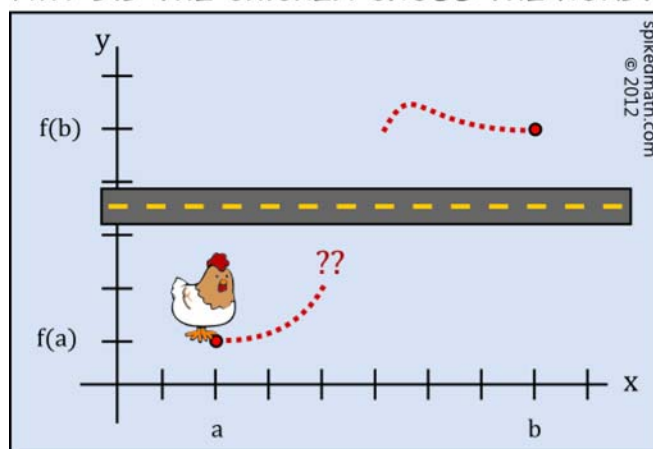
$$f(a) \leq y_0 \leq f(b),$$

siis leidub argument  $x_0 \in [a, b]$ , et kehtib võrdus  $f(x_0) = y_0$ .

Viimane teoreem ei ütle meile, kus asub see punkt  $x_0$ , et  $f(x_0) = y_0$  ja ta ei ütle meile, kui palju selliseid erinevaid väärtusi  $x_*$  (et  $f(x_*) = y_0$ ) üldse on. Küll aga on omaette väärtus ka antud infol, me teame, et selline (vähemalt üks) punkt  $x_0$  on tõepoolest olemas.

Teoreemi kasutamise kohta võite lugeda lisas, lõigu poolitamise meetodi peatükis.

#### WHY DID THE CHICKEN CROSS THE ROAD?



#### THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM.

Allikas: spikedmath.com



## Peatükk 5

# Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal

---

5.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus . . . . .	88
5.2	Tuletise definitsioon . . . . .	90
5.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised . . . . .	92
5.4	Diferentseerimise reeglid . . . . .	93
5.5	Liitfunktsiooni tuletis . . . . .	95
5.6	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus . . . . .	96
5.7	Kõrgemat järku tuletis . . . . .	97
5.8	Joone puutuja ja normaali võrrandid . . . . .	99
5.9	Funktsiooni diferentsiaal . . . . .	101

---

### Kontrolltöö teemad

1. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
2. Diferentseerimise reeglid ja nende rakendamine.
3. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
4. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste tabel kuni arkusfunktsioonideni.  
Välja jäävad hüperboolsed funktsioonid.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
6. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

### Eksamiteemad

1. Tuletise mõiste ja definitsioon. Tuletise kui kiirus. Kõrgemat järku tuletise mõiste.
2. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
3. Diferentseeruv funktsioon. Teoreem 5.1 diferentseeruva funktsiooni pidevuse kohta.
4. Diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletis.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandid.
6. Diferentsiaali mõiste. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

## 5.1 Keskmise kiirus ja hetkkiirus

Kui auto liigub ühtlase kiirusega, siis on auto liikumise keskmist kiirust väga lihtne arvutada:

$$\text{keskmise kiirus} = \frac{\text{läbitud teepikkus}}{\text{kulutatud aeg}}.$$

### Definitsioon 5.1

Suhet

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **keskmiseks kiiruseks**.

Seega, kui auto liigub ühe tunniga  $50 \text{ km}$ , siis tema liikumise keskmine kiirus on  $v_k = \frac{50}{1} = 50 \text{ km/h}$ .

Tegelikult ei liigu auto tavaliselt kunagi pikemat ajavahemikku ühtlase kiirusega. Keskmise kiirus ei ütle meile mitte midagi selle kohta, kuidas auto võis liikuda näiteks 33. minutil. Teisalt, kui me tahame teada saada auto liikumise kiirust just nimelt hetkel 33 minutit 0 sekundit, siis kuidas seda teada võiks saada?

Üks võimalus on mõõta läbitud teepikkust ja kulunud aega järjest lühemal ajalõigul. Näiteks, 30 sekundit enne ja peale 33. minutit. Kuid sellisel juhul saame me teada ikkagi ainult auto liikumise keskmise kiiruse ühe minuti jooksul. See on ilmselt täpsem ja iseloomustab liikumist 33. minuti ümber paremini, kui keskmine kiirus ühe tunni jooksul, kuid jääb ikkagi ebatäpseks. Edasi võiksime mõõta läbitud teepikkust igal sekundil ... või koguni iga sajandik, tuhandik sekundil.

Ajavahemik $\Delta t$	1 h	1 min	1 sek	0.1 sek
Läbitud teepikkus $\Delta s$	50 km	1 km	15 m	1.3 m
Keskmine kiirus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$	50 km/h	60 km/h	54 km/h	46.8 km/h

Selline idee auto puhul aitab ja praktikas see suuresti nii töötabki. Meil ei ole aga mõtet mõõta auto läbitud teepikkust näiteks miljard korda sekundis, tulemus oleks küll täpsem, kuid mõõtmiseks kulutame rohkem energiat ja saadud üleliigsete komakohtadega ei ole meil vähemalt spidomeetril midagi tarka peale hakata.

Kuidas on lood aga üldisemalt? Ajasammu tihendamine annab meile täpsema tulemuse, aga ega me hetkkiirust ennast ikkagi kätte ei saanud. Võtame näiteks kitarri A noodi (1a), mis võngub 440 korda sekundis. Kui mõõdetav ajavahemik oleks sekund, siis näeksime kitarrikeelt pigem paigalseisvana. Nähtav valgus aga võngub  $10^{15}$  korda sekundis, mis tähendab, et valguse jaoks peaks mõõdetav ajavahemik  $\Delta t$  olema vähemalt  $10^{-15}$  sekundit...

Oma olemuselt jaguneb matemaatiline analüüs kahte suurde - sisuliselt väga erinevasse - valdkonda: diferentsiaalarvutus (muutumiskiiruse uurimine, lokaalne omadus) ja integraalarvutus (kogumuutuse uurimine, globaalne omadus). Alustame oma teekonda esimesest suurest valdkonnast.

Matemaatilise analüüsi (*Calculus*) loojateks peetakse inglise füüsikut ja matemaatikut Isaac Newton'i (1642 - 1727)



Allikas: Wikipedia

ja saksa matemaatikut ning filosoofi Gottfried Wilhelm Leibniz'i (1646 - 1716).

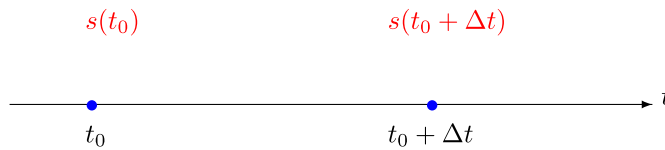


Allikas: Wikipedia

Nad töötasid teineteisest sõltumatult välja tuletisega seotud seadusi, tehteid, lisaks integraaliga seotud mõisteid. Tõsi, see kõik ei vastanud veel matemaatilisel range teooria nõuetele, kuid andis siiski palju väga praktilisi tulemusi.

Niipalju siis reaalsest maailmast. Matemaatiliselt jääksid kõik need ajavahemikud ikkagi igavikeks (liiga pikaks). Küll aga oleme me varem tutvunud piirväärtuse mõistega, miks mitte lasta mõõdetaval ajavahemikul minna lõpmata väikseks? Tõsi, mõningad paradoksid viitavad, et võib juhtuda, et ajamoment ei saa realselt olla lõpmata väike, kuid mis siis sellest ... arvu 5 ennast ka looduses ju vastu ei jaluta, kuid abi on temast ikkagi päris palju.

Vaatleme näiteks keha liikumist kindla seaduse alusel. Olgu  $s = s(t)$  selle keha poolt läbitud teepikkust väljendav seos (aja  $t$  funktsioon). Liikugu keha mingist hetkest  $t_0$  edasi aja  $\Delta t$  võrra.



Siis saab funktsiooni  $s = s(t)$  muudu (kui  $s$  on positiivne funktsioon, siis tema muut annab meile läbitud teepikkuse) arvutada järgmiselt:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

#### Definitsioon 5.2

Piirväärtust

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **hetkkiiruseks** antud ajamomendil  $t$ .

#### Näide 5.1

Liikugu auto seaduse  $s(t) = t^2$  alusel. Siis auto liikumise kiirus hetkel  $t = 5$  on

$$\begin{aligned} v(5) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25 + 10\Delta t + (\Delta t)^2 - 25}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{10\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + \Delta t) = 10 \frac{\text{pikkusühikut}}{\text{ajaühikus}}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

#### Märkus 5.1

Kiiruse mõistet saab kasutada ka teiste suuruste muutumise korral (keha soojenemise kiirus, aine lagunemise kiirus, keemilise reaktsiooni kiirus, aktsiahinna langemise kiirus, meeleolu muutumise kiirus jne).

Kui tähistada protsessi kirjeldava funktsioon  $y = f(x)$ , siis selle funktsiooni muudu  $\Delta y$  ja argumenti muudu  $\Delta x$  jagatise piirväärtus väljendab funktsiooni muutumise hetkkiirust argumenti  $x$  antud väärtusel:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Newton'i ja Leibniz'i nimega on ajaloos seotud üks pikk vaidlus matemaatilise analüüsi "esmaavastaja" tiitli üle. Mõned Newton'i sõbrad süüdistasid Leibniz'i plagiaadis: Newton'i ideede varastamises ja oma nime all esitamises.

See oli suhteliselt segane vaidlus, millele ei ole tänaseni täit selgust toodud. Newton kasutas oma loodud mõisteid (näiteks *fluxion*) ja meetodeid (nn. voolavusteooria) raamatus "The Method of Fluxions and Infinite Series", mille ta sai valmis 1671. aastal, kuid mis avaldati alles pärast tema surma 1736. aastal.

Leibniz'i esimesed märkmed "infinitesimals" kohta on dateeritud aastast 1675, kuid ta ei avaldanud midagi enne 1684. aastat. Tuleb siinjuures mainida, et Newton ja Leibniz olid omavahel tihedas kirjavahetuses ja loomulikult arutasid ka üksteise ideid.

Sellest suurest ja mõttetust vaidlusest kaotasid ilmselt rohkem inglise matemaatikud, samal aja kui Euroopa mandril jätkati rahulikult teooria arendamist.

Omaette teema oli veel teiste matemaatikute (näiteks George Berkeley) terav kriitika Newton'i ja Leibniz'i esitatud mõistete kohta. Igal juhul mõjutas toimunu Newtoni't niipalju, et oma kuulsamas teoses "Printsiibid" ta eriti matemaatilise analüüsi vahendeid ei kasutanud (kuigi ta oli tulemused ise varem nende abil tuletanud) ja valis "pehmema" variandina "geomeetria vahendid".

## 5.2 Tuletise definitsioon

Olgu antud funktsioon  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ . Anname argumendile  $x$  muudu  $\Delta x$ , nii et  $(a + \Delta x) \in X$  ja vastav funktsiooni muut olgu

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

### Definitsioon 5.3

Kui eksisteerib piirväärtus (lõplik või lõpmatu)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (5.1)$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni  $f$  tuletiseks punktis  $a$ .

Tähistatakse kujul  $f'(a)$ ,  $y'(a)$ ,  $\frac{dy}{dx}|_{x=a}$ .

### Järeldus 5.1

Funktsiooni  $y = f(x)$  tuletis kohal  $x \in X$  avaldub kujul

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5.2)$$

Newton lähtus ajas muutuvatest suurustest, nimetades neid voolavateks suurusteks ehk fluentideks (*fluens*). Nende muutumise hetkkiirusi nimetas ta fluksioonideks (*fluxus* - vool). Fluendi  $x$  fluksiooni tähistas ta  $\dot{x}$  (vt. [25, 32]).

Kui võtta funktsiooni  $y = x^2$  väike muut  $o$ , mis "voolab" nulli, siis

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{o} = 2x + o.$$

Seega suurus  $2x + o$  "voolab" suuruseks  $2x$ .

Leibniz tähistas sellist väikest nulli minevat suurust tähisega  $dx$  (*differentia*, erinevus, vahel). Kui Newton mõtles tuletise all elkõige seost füüsikaliste mõistetega (liikumiskiirus, läbitud vahemaa), siis Leibniz lähtus rohkem algebralistest sümboolitest ja tehetest.

---

**Näide 5.2** Kui  $f(x) = c = \text{const}$ , siis  $\Delta y = 0$  ja järelikult

$$f'(x) = c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 5.3** Olgu  $f(x) = 2x^2 - x$ , siis

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (2x^2 - x) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x,$$

ja

$$(2x^2 - x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = 4x - 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 4x - 1.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 5.4** Olgu  $f(x) = \sin x$ , siis

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

ja piirväärtusest  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$  järeldub, et

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

◇ ◇ ◇

**Teoreem 5.1**

Iga punktis  $a$  lõplikku tuletist omav funktsioon on pidev selles punktis.

*Tõestus.* Eeldades, et  $f'(a)$  on lõplik, näitame, et  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$ .  
Kui  $h \neq 0$ , siis kehtib

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h.$$

Läheme piirile  $h \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

□

Funktsioon  $f$  on pidev punktis  $a$ , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

mis on samaväärne tingimusega

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a).$$

Piirväärtust võib niimoodi eraldi võtta vaid siis, kui leiduvad vastavad lõplikud piirväärtused. Siin on see tingimus täidetud.

**Definitsioon 5.4**

Funktsiooni  $f$  tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni  $f$  diferentseerimiseks. Matemaatilise analüüsi osa, mis käsitleb tuletise leidmise reegleid, omadusi ja rakendusi, nimetatakse diferentsiaalvutuseks.

**Definitsioon 5.5**

Me nimetame funktsiooni  $f$  **diferentseeruvaks** punktis  $x$ , kui leidub **lõplik** tuletis  $f'(x)$ .

**Näide 5.5** Punktis  $x$  katkev funktsioon ei saa olla diferentseeruv.



Allikas: Wikipedia

Samuti ei ole funktsioon diferentseeruv nn. teravate nurkade korral. Näiteks  $y = |x|$  on pidev, kuid ei ole diferentseeruv punktis  $x = 0$ . Siin vasakpoolne tuletis on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1,$$

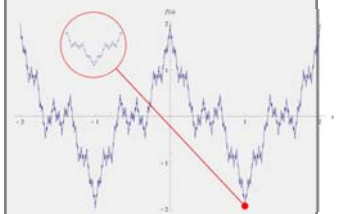
aga parempoolne tuletis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1.$$

Seega ei leidu piirväärtust  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ja järelikult ka tuletist punktis 0.

◇ ◇ ◇

On olemas pidevaid funktsioone, millel ei leidu lõplikku tuletist mitte üheski punktis.



Allikas: Wikipedia

Üheks selliseks on Karl Weierstrass'i funktsioon (avaldati 1872. aastal), mille formaalne kuju on antud seosega

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$$0 < a < 1, \quad b = 2k + 1 > 0,$$

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Seda tüüpi graafikuid võib näha ka aktsiaturgudel ja mujal, kus on tegemist juhuslike suurustega.

### 5.3 Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

#### Märkus 5.2

Olgu funktsioonil  $f$  lõplikud tuletised hulga  $X$  igas punktis  $x$ . Siis vastavus  $x \rightarrow f'(x)$  määrab funktsiooni  $f'$ , mida nimetatakse funktsiooni  $f$  tuletisfunktsiooniks. Näiteks, funktsiooni  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  tuletisfunktsiooniks on sirge  $y = 2x$ .

Konstandi tuletis on alati null,  $(Const)' = 0$ .

Astmefunktsiooni tuletis.

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0.$$

Toome eraldi välja järgmised:

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Eksponentfunktsioonid ja logaritmfunktsioonid.

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Trigonomeetrilised funktsioonid.

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid.

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide (nt  $\sin x$  ja  $\cos x$ ) korral on oluline, et toodud tuletisfunktsioonid on antud juhul, kui argumenti  $x$  mõõdetakse radiaanides.

Kui argumenti  $x$  mõõdetakse kraadides, siis

$$x^\circ = \frac{\pi x}{180} \text{ rad.}$$

Sel juhul liitfunktsiooni tuletise reeglist saame, et

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x^\circ}{dx} &= \left( \sin \frac{\pi x}{180} \right)' = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos x^\circ. \end{aligned}$$

Siit ka põhjus, miks trigonomeetriliste funktsioonide korral opereeritakse kõikides tehetes enamasti radiaanide abil. Sedasi on lihtsam.



**Märkus 5.3**

Kõikidel põhilistel elementaarfunktsioonidel eksisteerivad tuletised kogu määramispiirkonnas, välja arvatud funktsioonid  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$  (määramispiirkonna otspunktides  $x = -1$  ja  $x = 1$  on lõpmatud tuletised) ja funktsioon  $y = x^\alpha$ , kus  $0 < \alpha < 1$  (punktis  $x = 0$  on lõpmatu tuletis või lõpmatud erimärgilised ühepoolsed tuletised).

*Two polynomials walk into a bar. The bartender, a derivative, asks them "Can I take your order?" The polynomials run out screaming "Help! The bartender threatened to kill me!" ("order" on siinjuures ka polünoomi järk, ruutpolünoom on teist järku, kuuppolünoom kolmandat jne. Seda nalja ei saa eesti keeles hästi edasi anda.)*

\* Hüperboolsed funktsioonid.

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh}x)' &= \operatorname{ch}x, & (\operatorname{ch}x)' &= \operatorname{sh}x, \\ (\operatorname{th}x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}, & (\operatorname{cth}x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}, \\ (\operatorname{arsh}x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & (\operatorname{arch}x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\ (\operatorname{arth}x)' &= \frac{1}{1-x^2}, & (\operatorname{arcth}x)' &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

**Märkus 5.4**

Teades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste leidmise valemeid, saab leida mistahes elementaarfunktsiooni tuletise.

Tuletame meelde, et suvaline elementaarfunktsioon saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nende operatsioonidega seotud diferentseerimisreeglid on meil aga teada ([31]).

## 5.4 Diferentseerimise reeglid

**Teoreem 5.2**

Kui funktsioonidel  $u = u(x)$  ja  $v = v(x)$  eksisteerivad lõplikud tuletised punktis  $x$ , siis ka funktsioonidel  $u + v$ ,  $u - v$ ,  $u \cdot v$  ja  $\frac{u}{v}$  eksisteerivad lõplikud tuletised punktis  $x$ , kusjuures

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ,
2.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ,
3.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ ,  $c = \text{const}$ ,
4.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ,  $v(x) \neq 0$ .

*Tõestus.* Toodud omadused tulenevad piirväärtuse tehetega seotud omadustest. Teeme tõestuse korrutamise reegli kohta, teised on analoogilised (vt. nt. [22, 31]). Eelduse järgi leiduvad lõplikud piirväärtused  $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$  ja  $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$ . Kirjutame

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( v(x + \Delta x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \cdot v + v' \cdot u. \end{aligned}$$

Siinjuures arvestasime, et  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ . Viimane tuleneb sellest, et funktsioon  $v$  on diferentseeruv, järelikult ka pidev punktis  $x$  ja sel juhul

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x + \Delta x) - v(x)) = 0.$$

□

### Näide 5.6

Leiame funktsioonide  $u = x^2 + 2$  ja  $v = 3 - 2x$  korrutise  $u \cdot v$  tuletise muutuja  $x$ -järgi. Esiteks  $u' = 2x$  ja  $v' = -2$ . Kirjutame

$$(u \cdot v)' = 2x \cdot (3 - 2x) + (x^2 + 2) \cdot (-2) = -6x^2 + 6x - 4.$$

Kontrolliks kirjutame lahti korrutise

$$u \cdot v = (x^2 + 2) \cdot (3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 6.$$

Leides siit  $x$ -järgi tuletise on lihtne veenduda, et saame sama tulemuse.

◇ ◇ ◇

**Näide 5.7** Õõnessilindris olev rõhk  $S$  avaldub pinge  $T$ , välise diameetrid  $D$  ja sisemise diameetri  $d$  kaudu valemiga

$$S = \frac{16DT}{\pi(D^4 - d^4)}.$$

Leime rõhu  $S$  muutumise kiirus  $S'(D)$  välise diameetrid  $D$  järgi.

Kirjutame jagatise tuletise leidmise reegli abil

$$\frac{dS}{dD} = \frac{16T\pi(D^4 - d^4) - 16DT\pi 4D^3}{\pi^2(D^4 - d^4)^2} = -\frac{16T}{\pi} \frac{3D^4 + d^4}{(D^4 - d^4)^2}.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Ilma sulge lahti korrutamata, leidke funktsiooni

$$f(x) = (3 - 2x^2)(x^4 - 1)$$

tuletis.

**Ülesanne.** Leidke funktsiooni

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^4 - 1}$$

tuletis.

## 5.5 Liitfunktsiooni tuletis

### Teoreem 5.3

Kui funktsioonidel  $y = f(u)$  ja  $u = \varphi(x)$  eksisteerivad lõplikud tuletised vastavalt punktides  $u$  ja  $x$ , siis ka liitfunktsioonil  $y = f(\varphi(x))$  eksisteerib lõplik tuletis punktis  $x$ , kusjuures

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) \cdot \varphi'(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

või siis Leibniz'i tähistuses

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (5.4)$$

*Tõestus.* Tõestused leiab õpikutest [22, 31]. Siinjuures toome ära põhiidee Leibniz'i tähistuses (sedasi on valemit lihtne tuletada, kuigi see ei ole matemaatiliselt päris korrektne). Esiteks, kui  $\Delta u \neq 0$ , siis

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Kuna  $u' = \varphi'(x)$  leidub ja on lõplik, siis  $\varphi$  on pidev punktis  $x$  ja järelikult  $\Delta x \rightarrow 0$  korral ka  $\Delta u \rightarrow 0$ . Eelduse järgi leidub lõplik tuletis  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ , seega

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Keerulisem on see juhtum, kus  $\Delta u = 0$ . Selle tõestus võtaks palju ruumi ja aega, ning ei ole siinkohal meile oluline.  $\square$

### Märkus 5.5

Liitfunktsiooni tuletis avaldub kui välise funktsiooni tuletis sisemise funktsiooni järgi korda sisemise funktsiooni tuletis.

#### Näide 5.8

Leiame  $f'(x)$ , kui  $f(x) = (2x + 3)^2$ . Võime võtta  $f(u) = u^2$ , kus  $u(x) = 2x + 3$ . Seega

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 2u \cdot 2 = 4(2x + 3).$$

◇ ◇ ◇

#### Näide 5.9

Leiame  $f'(x)$ , kui  $f(x) = \sin(5x + 1)$ . Võime võtta  $f(u) = \sin u$ , kus  $u(x) = 5x + 1$ . Seega

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \cos u \cdot 5 = 5 \cos(5x + 1).$$

◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = (5x + 2)^4$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = 5x(2x + 7)^3$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \sqrt[3]{4 - 9x}$$

tuletis.

Ülesanne. Leidke funktsiooni

$$f(x) = \frac{3}{(6x + 5)^4}$$

tuletis.

## 5.6 Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus

Oma sissejuhatavas tekstis vaatlesime keha keskmist liikumise kiirust ja hetkkiirust. Toome veel ühe näite tuletise tõlgendamise kohta füüsikas ([31]).

**Näide 5.10** Olgu  $Q = f(t)$  elektriühik, mis läbib juhtme ristlõiget ajavahemiku  $[0, t]$  jooksul. Siis keskmise voolutugevuse all mõistame suhet

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Voolutugevuse  $I(t)$  ajahetkel  $t$  defineerime kui piirväärtuse

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

Seega on voolutugevus elektriühiku muutumise kiirus.

◇ ◇ ◇

### Märkus 5.6

Funktsiooni tuletise analoogsete rakenduste kohta võib tuua palju näiteid füüsikast, keemiast, bioloogiast jne. Üldiselt, mõistes liikumist kui mistahes nähtuse muutumist looduses, tehnikas, ühiskonnas jt, võime öelda, et funktsiooni  $f$  tuletis tähendab seaduse  $y = f(x)$  alusel toimuva nähtuse kulgemise kiirust (intensiivsust).

**Näide 5.11** Olgu meil näiteks maakera. Küsime, mida mõista aine tiheduse all mingis maakera sees võetud kohas (vt. [27])? Selle mõiste juurde jõudmiseks ümbritseme näidatud koha mingi kuitahes väikesse ja mistahes kujulise kinnise pinnaga. Olgu selle pinnaga piiratud ruumala  $\Delta V$  ja sisaldugu ruumalas  $\Delta V$  mass  $\Delta M$ . Siis tuleb selles ruumalas ruumalaühiku kohta mass  $\Delta M : \Delta V$ . See suhe on keha aine keskmine tihedus ruumalas  $\Delta V$ . Laseme nüüd mõttes ruumalal  $\Delta V$  tõkestamatult väheneda ja määrame piirväärtuse, millele sujuures läheneb keskmine tihedus

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

See arv on massi tuletis ruumala järgi, ta annabki aine tiheduse vaadeldavas kohas.

◇ ◇ ◇

### Märkus 5.7

Analoogiliselt saab rääkida näiteks õhu tiheduse  $\delta(h)$  muutumise kiirusest  $\delta'(h)$  kõrguse  $h$  järgi, õlle viskoossuse  $\eta(T)$  muutumise kiirusest  $\eta'(T)$  temperatuuri  $T$  järgi, soojushulga  $q(r)$  muutumise kiirusest  $q'(r)$  takistuse  $r$  järgi jne.

**Ülesanne.** Leidke õhupalli ruumala muutumise kiirus  $V'(r)$  raadiuse suhtes hetkel, kui  $r = 20$  sentimeetrit. Vihje: õhupalli ruumala avaldub valemiga  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

**Ülesanne.** Leidke voolutugevuse  $I$  poolt tekitatud võimsuse  $P$  muutumise kiirus  $P'(I)$  (ühik W/A) voolutugevuse suhtes, kui  $P = 4.8 I^2$  ja  $I = 2.5$  amprit.

## 5.7 Kõrgemat järku tuletis

Olgu funktsioonil  $y = f(x)$  lõplikud tuletised hulga  $X$  igas punktis  $x \in X$ . Siis vastavus  $x \mapsto f'(x)$  määrab hulgal  $X$  funktsiooni  $f$  tuletisfunktsiooni  $y = f'(x)$ .

### Definitsioon 5.6

Kui eksisteerib  $(f'(x))'$  siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni  $f$  teist järku (teiseks) tuletiseks punktis  $x$ ,

$$f''(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f'(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}}. \quad (5.5)$$

Funktsiooni  $f$  teist järku tuletist tähistatakse ka sümbolitega  $y''$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

Lühidalt,

$$y'' = (y')'$$

ja analoogiliselt jätkates  $n$ -järku tuletis

$$\mathbf{y}^{(n)} = (\mathbf{y}^{(n-1)})', \quad (5.6)$$

mille tähistame ka  $f^{(n)}(x)$ ,  $D^2 y$  või  $\frac{d^n y}{dx^n}$ .

**Näide 5.12** Leiame  $y^4$ , kui  $y = x^5 + 3x^2 + a^x$ ,  $a > 0$ . Kirjutame

$$y' = 5x^4 + 6x + a^x \cdot \ln a,$$

$$y'' = (5x^4 + 6x + a^x \cdot \ln a)' = 20x^3 + 6 + a^x \cdot \ln^2 a,$$

$$y''' = 60x^2 + a^x \cdot \ln^3 a$$

ja viimaks

$$y^{(4)} = 120x + a^x \cdot \ln^4 a.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leidke funktsiooni

$$y = \frac{3}{x^2 + 4}$$

teine tuletis  $y''(x)$ .

### Märkus 5.8

**NB!** Leibniz'i tähistust  $\frac{d^n y}{dx^n}$  tuleb käsitleda kui diferentseerimisoperaatori  $\frac{d}{dx}$  järjest rakendamist,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \right) \right).$$

Seega

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

**Märkus 5.9**

Kõrgemat järku tuletise leidmisel üldjuhul ei kehti Leibniz'i tähistuse liitfunktsiooni tuletamise võtte

$$\frac{d^2 \sin u}{dx^2} \neq \frac{d^2 \sin u}{d^2 u} \cdot \frac{d^2 u}{dx^2},$$

mis töötas väga edukalt esimest järku tuletise korral. Selle asemel tuleks kasutada diferentseerimise reegleid

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sin u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d \sin u}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \cos u \cdot \frac{du}{dx} \right) \\ &= \cos u \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + \left( -\sin u \cdot \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} - \sin u \cdot \left( \frac{du}{dx} \right)^2. \end{aligned}$$

Kui liikuva objekti kiirus muutub, siis öeldakse, et objekt kiirendab. Kiirendus on kiiruse muutumise kiirus. Kiiruse muutus võib olla positiivne (igapäevaselt mõistame kiirenduse all seda juhtu) või negatiivne, kuid ka kiiruse suuna muutus on kiirendus.

Liikugu objekt ajas  $t$  seaduse  $s = s(t)$  alusel ( $s$  on läbitud teepikkus). Siis objekti hetkkiirus on  $v(t) = s'(t)$ . Analoogiliselt kiirusega, saab rääkida keskmisest kiirendusest ja hetkkiirendusest.

**Definitsioon 5.7**

Liikuva objekti keskmine kiirendus on võrdne kiiruse muudu ja aja-muudu jagatisega ehk

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

**Definitsioon 5.8**

Liikuva objekti hetkkiirenduseks hetkel  $t$  nimetatakse piirväärtust

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

**Märkus 5.10**

Kokkuvõtteks saame seosed

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \tag{5.7}$$

ehk

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{5.8}$$

Kaupmehelt küsitakse, kuidas on võimalik, et ta oma jänese-lihast tehtud võileibade eest saab nii väikest hinda küsida? “See on lihtne,” vastanud kaupmees, “Ma kasutan lisaks hobuseliha.”  
  
???  
  
“Einoh, ma panen jänese ja hobuse liha vahekorras 50:50 protsenti ... üks jänës ühe hobuse kohta.”

Eraldi mõistena on olemas veel “tõuge” (inglise keeles “jerk”), mis on kiirenduse muutumise kiirus ehk  
  
 $a'(t) = s'''(t)$ .

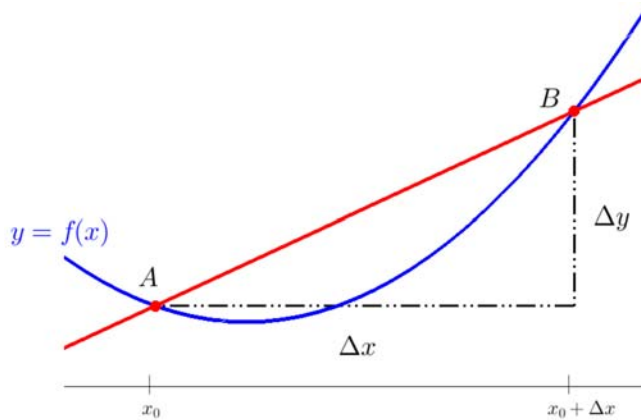
Ühtlast liikumist ei ole võimalik isoleeritud ruumis kindlaks teha, kiirendust aga küll. Kiirenduse korral mõjuvad kehale survejõud. Tõuge  $a'(t)$  saab füüsiliselt tunda selle surve muutumisena.  
  
Inseneriteadustes on tõuke uurimine (enamasti minimeerimine) eriti oluline inimestega seotud seadmetes nagu näiteks liftid, Ameerika mägede atraktsioon, kuna liiga suur tõuge võib inimesi füüsiliselt kahjustada.



Kiirenduse mõju lemmikloomale. Allikas: funny.com

## 5.8 Joone puutuja ja normaali võrrandid

Vaatleme funktsiooni  $y = f(x)$  graafikut. Võtame punktide  $A(x_0, f(x_0))$  lisaks punkti  $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ .



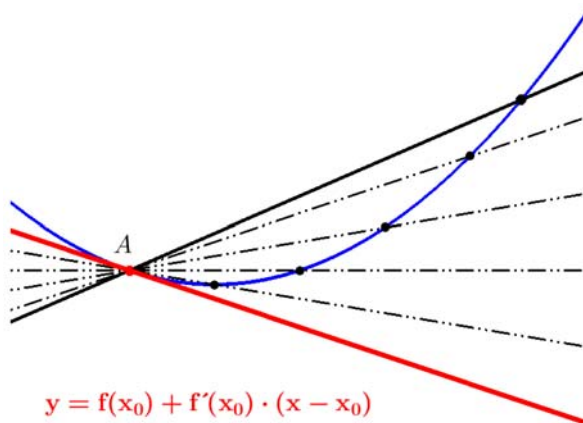
Siis lõikaja  $AB$  tõusunurga tangens (ka lõikaja tõus) avaldub täisnurkse kolmnurga seostest valemiga

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

### Definitsioon 5.9

Joone puutujaks punktis  $A$  nimetatakse sirget, mis on lõikaja  $AB$  piir-seisuks, kui punkt  $B$  läheneb punktile  $A$  mööda joont  $y = f(x)$ . Joone  $y = f(x)$  tuletis  $f'(x_0)$  on selle joone puutuja tõus punktis  $(x_0, f(x_0))$  ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (5.9)$$



Siinjuures selgituseks, kuna tangens on pidev oma määramispiirkonnas, siis protsessist  $\alpha \rightarrow \theta$  jäeldub protsess  $\tan \alpha \rightarrow \tan \theta$ .

Seega, kui  $\theta$  on joone puutuja tõusunurk, saame

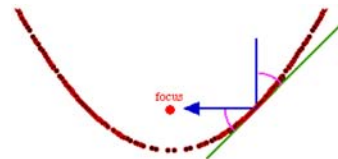
$$\tan \theta = \lim_{B \rightarrow A} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

**Näide 5.13** Päikese reflektor on parapool kujuga  $y = \frac{x^2}{4}$ , mille fookus asub punktis  $F(0, 1)$ . Selgitage, kas vertikaalsed valguskiired läbivad punktis  $x = 2$  parabooli siseseinalt peegeldumisel reflektori fookuse.

Kuna parabooli puutuja tõus suvalises punktis on  $x/2$  ( $y' = x/2$ ), siis märkame, et selle tõus punktis  $x = 2$  võrdub ühega (ehk puutuja tõuseb  $45^\circ$  nurga all). Sel juhul tasub tähele panna, et vertikaalne valguskiir peegeldub vertikaalse telje suhtes täisnurga all (kuna kiire ja puutuja vaheline nurk omakorda on samuti  $45^\circ$ ). Viimane tähendab aga seda, et peegeldunud kiir on paralleelne  $x$ -teljega ja see läbib fookust  $F(0, 1)$ , kuna kõrgus punktis  $x = 2$  on  $f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$ . Leiame parabooli puutuja võrrandi punktis  $x = 2$ ,

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = 1 + 1 \cdot (x - 2) = x - 1.$$

◇ ◇ ◇



**Ülesanne.** Leidke joone

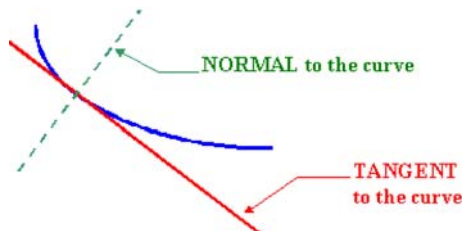
$$y = 3x^2 - 4x$$

puutujavõrrand suvalises punktis  $x$ .

**Definitsioon 5.10**

Joone  $y = f(x)$  **normaaliks** (ehk ristsirgeks) punktis  $(x_0, f(x_0))$  nimetatakse sirget, mis ristub seda sama punkti läbiva puutujaga. Joone  $y = f(x)$  normaali võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (5.10)$$



Joonis: <http://www.intmath.com/applications-differentiation/1-tangent-normal.php>

Kuna puutuja tõus on  $f'(x_0)$  ning on teada, et ristuvate sirgete tõusude korrutis võrdub  $(-1)$ -ga, siis normaali tõus on  $\alpha = -\frac{1}{f'(x_0)}$ ,  $f'(x_0) \neq 0$ .

**Näide 5.14** Leiame parabooli  $y = x^2$  puutuja ja normaali võrrandid igas punktis  $x_0 \neq 0$ . Esiteks  $(x^2)' = 2x$ . Kui  $x_0 = 0$ , siis puutujaks on  $x$ -telg ehk võrrand  $y = 0$  ja normaaliks  $y$ -telg ehk võrrand  $x = 0$ . Ülejäänud juhtudel on punktis  $x_0$  puutuja võrrandiks

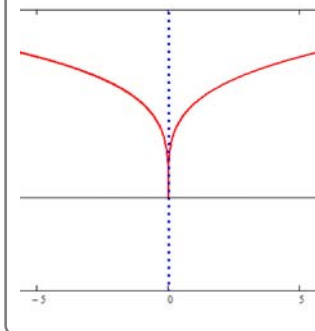
$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0 x - x_0^2$$

ja normaali võrrandiks

$$y = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

Juhul, kui  $|f'(x_0)| = \infty$ , on puutuja tõusunurk  $\alpha = 90^\circ$ , s.t puutuja punktis  $A = (x_0, f(x_0))$  on risti  $x$ -teljega (puutujaks on sirge võrrand  $x = x_0$ ). Kui funktsioonil  $f$  on punktis  $x_0$  märgilt erinevad lõpmatud ühepoolised tuletised, siis on funktsiooni  $f$  graafikul kohal  $x_0$  ikkagi üksainus puutuja.





## 5.9 Funktsiooni diferentsiaal

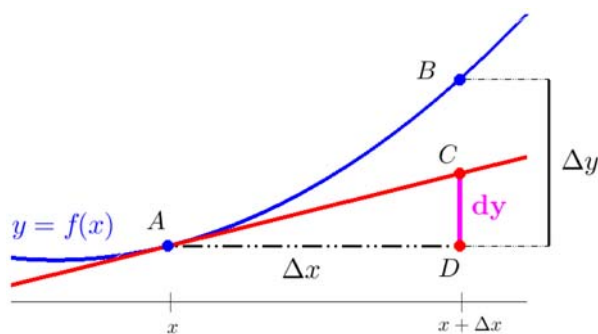
**Definitsioon 5.11**

Olgu antud punktis  $x$  diferentseeruv funktsioon  $y = f(x)$ . Anname argumentidele  $x$  muudu  $\Delta x$ . Korrutist

$$f'(x) \cdot \Delta x \quad (5.11)$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  **diferentsiaaliks** punktis  $x$ . Tähistame  $dy$  või  $df(x)$ , seega

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (5.12)$$



Punktis  $A$  on tõmmatud funktsiooni  $y = f(x)$  puutuja.

Funktsiooni muut on lõigu  $BD$  pikkus ja diferentsiaal on lõigu  $CD$  pikkus.

Diferentsiaali  $dy$  arvutamise valemi võib tuletada kolmnurga  $ACD$  tõusunurga tangensi valemist  $\tan \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$ , arvestades veel, et  $\tan \alpha = f'(x)$ .

**Märkus 5.11**

Olgu  $y = f(x) = x$ , siis saame

$$dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Argumenti diferentsiaal võrdub argumenti muuduga. Seega võime kirjutada  $dx = \Delta x$  ja üldise funktsiooni  $y = f(x)$  korral

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (5.13)$$

Jooniselt võib tähele panna, et mida väiksem on argumenti muut  $\Delta x = dx$ , seda lähedasemad on funktsiooni muudu  $\Delta y$  ja diferentsiaali  $dy$  väärtused. Praktikas kasutatakse ligikaudset võrdust  $\Delta y \approx dy$ , kui  $dx$  on küllalt väike.

**Märkus 5.12**

Võrduse  $dy = f'(x) \cdot dx$  jagamisel suurusega  $dx$  saame

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (5.14)$$

s.t **diferentseeruva** funktsiooni tuletist saab praktikas vaadelda kui selle funktsiooni diferentsiaali ja argumenti diferentsiaali suhet.

**Näide 5.15** Leiame funktsiooni  $f(x) = 3x^2 + 4x$  diferentsiaali  $df(x)$  väärtuse punktis  $x = 2$  argumenti muudu  $\Delta x = dx = 0.1$  korral,

$$df(x) = f'(x) \cdot dx = (6x + 4) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad df(2) = (12 + 4) \cdot 0.1 = 1.6.$$

Funktsiooni muut  $\Delta f = f(2.1) - f(2) = 21.63 - 20 = 1.63$ .

◇ ◇ ◇

Kui asendaksime muudu  $\Delta f$  diferentsiaaliga  $df(2)$ , siis teeksimme arvutustes vea 0.03. Antud juhul oli diferentsiaali arvutusliikult lihtsam leida kui funktsiooni muutu.

**Teoreem 5.4**

Kui funktsioonid  $u$  ja  $v$  on diferentseeruvad punktis  $x$ , siis kehtivad valemid

1.  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ;
2.  $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$ ;
3.  $d(c \cdot u) = c \cdot du$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ;
4.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$ ,  $v(x) \neq 0$ .

*Tõestus.* Tõestame näiteks jagatise, kasutades korrutamise omadust (viimase tõestus tuleb diferentseerimise reeglitest). Kirjutame

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} \cdot du + u \cdot d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{v \cdot du}{v^2} - u \cdot \frac{dv}{v^2} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

□

**Näide 5.16** Leiaime

$$\begin{aligned} d(x^3 \cdot \ln x) &= (dx^3) \cdot \ln x + x^3 \cdot d(\ln x) \\ &= 3x^2 \cdot dx \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = (3x^2 \cdot \ln x + x^2) \cdot dx. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui  $\Delta x$  on küllalt väike, võime funktsiooni  $y = f(x)$  muudu  $\Delta y$  asemel leida funktsiooni  $f$  diferentsiaali  $dy$ ,

$$\Delta y \approx dy. \quad (5.15)$$

**Näide 5.17** Te istute autos, kus spidomeeter näitab kiiruseks 72 km/h. Umbes, kui pika teekonna läbib see auto järgmise sekundi jooksul?

Kiireks arvutamiseks saame kasutada ligikaudset võrdust  $\Delta y \approx dy$ . Arvestades, et auto keskmine kiirus on teepikkus jagatud läbitud ajavahemik ja hetkkiirus on teepikkuse tuletis aja järgi, siis

$$\Delta s \approx ds = s'(t) \cdot dt.$$

Meie andmete põhjal läbib auto järgmise sekundi jooksul umbes

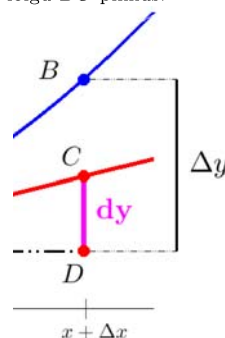
$$\Delta s \approx 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ sek}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72}{3.6} \text{ m} = 20 \text{ m}.$$

Viimane arvutus on kaunis täpne, kui auto liikus enam-vähem ühtlase kiirusega. Paneme tähele, et antud juhul me ei pea teadma auto liikumise seadust  $s = s(t)$  (funktsionaalset sõltuvust) ennast.

◇ ◇ ◇

Need diferentsiaali leidmise reeglid on otseselt tuletatavad funktsiooni tuletise tehete seotud omadustest ja on visuaalselt samad.

Muudu asendamisel diferentsiaaliga teeme vea, mille suurus on lõigu  $BC$  pikkus.



Meie joonistel on argumenti muut võetud küllalt suur, seda sellepärast, et joonis oleks jälgitav. Samas võime näha, et muudu  $\Delta y$  asendamisel diferentsiaaliga  $dy$  peab  $\Delta x$  olema päris väike.

Miks sellist asendust üldse teha? Osutub, et mõningatel juhtudel on diferentsiaali lihtsam arvutada ja ka programmeerida (kuna piisab puutujasirge võrandist). Näiteks polünoomide korral tuletis vähendab polünoomi astet ja arvutusi on ka ilma arvutita lihtsam teha (arvutiga arvutades ei oleks seda nii-väga vaja).

**Näide 5.18** Kui eelmine näide oli pisut triviaalne, siis arendame seda näidet edasi. Firma toodab ninasarvikutele maiust, kusjuures  $x$  maiuse tootmise kasum on leitav funktsiooni

$$P(x) = -0.004x^3 + 10x^2 - 1000$$

kaudu. Kui suur oleks lisakasum, kui plaanitud 100 maiuse asemel toodekse üks maius rohkem, (s.t 101 maiust)?

Võib leida, et  $P(101) - P(100) = 1888.796$ , kuid viimane sisaldab endas opereerimist suurte arvudega. Arvestades, et

$$\Delta P(100) = P(101) - P(100) \approx dP(100) = P'(100) \cdot 1,$$

siis võime leida

$$\Delta P \approx (-0.012x^2 + 20x) \Big|_{x=100} = -120 + 2000 = 1880.$$

Erinevus täpse ja ligikaudse vastuse vahel on umbes 89 ühikut, mis võrreldes arvuga 1889 endaga on küllalt väike.

◇ ◇ ◇

**Näide 5.19** Toome nüüd ühe klassikalise diferentsiaali kasutamise näite. Ringi raadiust  $r$  suurendatakse 10 ühikult 10.15 ühikule. Umbes kui palju suureneb ringi pindala  $S = S(r)$ ?

Loomulikult saab siin arvutada täpselt,

$$\Delta S = \pi \cdot 10.15^2 - \pi \cdot 10^2 = 103.023 \cdot \pi - 100 \cdot \pi = 3.023 \cdot \pi.$$

Teisalt, kasutades diferentsiaali

$$\Delta S \approx dS = (\pi \cdot r^2)' \cdot dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.15 = 3 \cdot \pi.$$

Viga on ainult 0.023 ruutühikut, kusjuures diferentsiaali leidmine oli oluliselt lihtsam.

◇ ◇ ◇

Olgu  $f$  punktis  $x_0$  diferentseeruv funktsioon. Siis võime kirjutada, et

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

ehk

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (5.16)$$

Kui toodetakse  $x$  toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakasum ligikaudu võrdne kasumifunktsiooni  $P(x)$  tuletisega kohal  $x$  (*Marginal Profit*). Analoogiliselt, kui toodetakse  $x$  toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakulu ligikaudu võrdne kulufunktsiooni  $C(x)$  tuletisega kohal  $x$  (*Marginal Cost*). See omadus laieneb ka teistele mõistetele, kus argumenti muut  $\Delta x$  on võrdne ühe ühikuga.

Näiteks, kui maja ruutmeetri maksumus on arvatav funktsiooni  $f(A)$  abil ( $A$  on ruutmeetrite arv), siis kavandatud  $A$  ruutmeetri asemel 1 lisamine läheb umbes maksma  $f'(A)$  rahaühikut.

**Ülesanne.** Leidke funktsiooni  $y = x^3 - 2x$  muut ja diferentsiaal, kui  $x = 3$  ja  $\Delta x = -0.1$ .

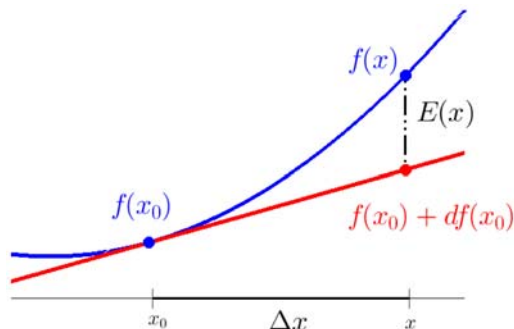
Ligikaudse arvutamise kasulikkus tuleb veel paremini välja ruumala muutumise ülesannetes.

**Definitsioon 5.12**

Valemi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (5.17)$$

kasutamist nimetatakse ka funktsiooni  $f$  **linearseks lähendamiseks** punktis  $x_0$  (kuna  $f(x_0 + \Delta x)$  väärtus arvutatakse lineaarse sirge – funktsiooni  $f$  puutuja – peal).



Paneme tähele, et võrduse paremal pool asub tegelikult funktsiooni  $f$  puutuja võrrand punktis  $x = x_0$ . Valem (5.17) võimaldab ligikaudu arvutada

$$f(x_0 + \Delta x)$$

väärtuse, kui  $x_0$  on selline, et väärtused  $f(x_0)$  ja  $f'(x_0)$  on teada ja  $\Delta x$  on küllalt väike (kusjuures funktsiooni  $f$  täpset avaldist ei olegi vaja teada). Seejuures on valem (5.17) seda täpsem, mida väiksem on  $\Delta x$ .

Seejuures tehakse arvutamisel vigas  $E(x)$  (vt. joonis).

**Näide 5.20** Arvutame ligikaudu  $\sqrt[3]{8.5}$ . Antud juhul võime võtta

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 0.5.$$

Siis  $f(x_0) = 2$  ja

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} x_0^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

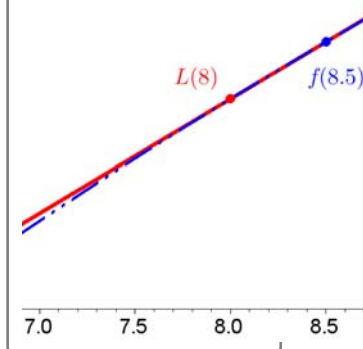
ja valemi (5.17) põhjal

$$\sqrt[3]{8.5} \approx f(8) + f'(8) \cdot 0.5 = 2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{24} = 2.04166 \dots$$

Arvutiga leitud väärtus on  $\sqrt[3]{8.5} \approx 2.04082755$ .

◇ ◇ ◇

Silma järgi on graafikult isegi raske eristada puutuja ja funktsiooni väärtusi.



**Näide 5.21** Arvutame ligikaudu  $f(0.005)$ , kui

$$f(x) = x^{21} + 5x^9 - 8x + e^x + 7.$$

Antud juhul võime võtta

$$x_0 = 0, \quad \Delta x = 0.005.$$

Siis  $f(x_0) = 8$  ja  $f'(x_0) = 21x_0^{20} + 45x_0^8 - 8 + e^{x_0} = -7$  ja valemi (5.17) põhjal

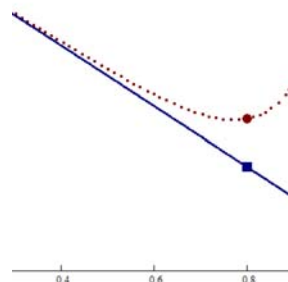
$$f(x) = 8 + (-7) \cdot 0.005 = 7.965.$$

Arvutiga leitud täpsem väärtus on  $f(0.005) \approx 7.96501252$ . Kui siinjuures  $\Delta x$  oleks palju suurem, näiteks  $\Delta x = 0.8$ , siis arvutus

$$f(0.8) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.8 = 8 + (-7) \cdot 0.8 = 8 - 5.6 = 2.4,$$

oleks palju ebatäpsem. Arvutiga leitud väärtus on  $f(0.8) \approx 3.50585294$ .

◇ ◇ ◇



**Näide 5.22** Snaiper sihhib maapinnal kuulipildujast 100 m kaugusel olevat vaenlase punkrit. Kui snaiper keerab  $5^\circ$  kraadi kuulipilduja toru horisontaalsendist ülespoole, siis kui kõrgele punkri seinal võib ta tabada?

Kui snaiper on punktis  $A$ , siis  $\tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$ . Siit  $|BC| = |AC| \tan \alpha$ . Tähistame kõrguse  $h$  ja kirjutame viimase funktsiooni kujul

$$h(\alpha) = 100 \tan \alpha.$$

Märgime, et  $5^\circ = \frac{\pi}{36}$  radiaani. Arvutiga saaksime kiiresti leida vastuse  $h\left(\frac{\pi}{36}\right) = 100 \tan\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx 8.75$  meetrit, aga kui arvutit käepärast ei ole, siis võime võtta

$$\alpha_0 = 0, \quad h'(\alpha) = 100 \cdot \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} = \frac{100}{\cos^2 \alpha}.$$

Kuna  $\cos 0 = 1$ , siis  $h'(0) = 100$  ja

$$h\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx h(0) + h'(0) \cdot d\alpha = 0 + 100 \cdot \frac{\pi}{36} \approx \frac{314}{36} = \frac{157}{18} = 8 + \frac{13}{18}.$$

Seega on vastus umbes  $h \approx 8.7$  meetrit.

◇ ◇ ◇

**Näide 5.23** Tihti läheb vaja  $\sqrt{3}$  ligikaudset väärtust. Näiteks laudade diagonaalsel saagimisel (katuse kalde 1:2 korral on täisnurkse kolmurga nurgad 30 ja 60 kraadi ning vastavad tangensi, siinuse ja koosinuse avaldised sisaldavad suurust  $\sqrt{3}$ ), kus millimeetri täpsusest piisab. Järgmised arvutused on lihtsasti ka peast tehtavad. Võtame

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

Sel juhul

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ehk meie juhul

$$\sqrt{3} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (3 - 4) = 2 - \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1.75.$$

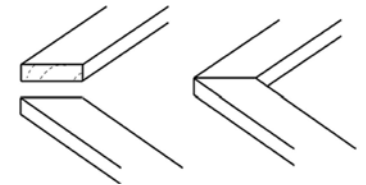
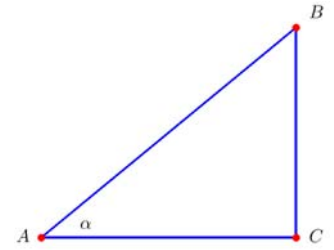
Täpsem väärtus on  $\sqrt{3} \approx 1.732$ , nii et meie tehtud viga on umbes 0.018.

Analoogiliselt võiksime leida  $\sqrt{5}$  ligikaudse väärtuse

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (5 - 4) = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$

Täpsem väärtus on  $\sqrt{5} \approx 2.236$ , nii et meie tehtud viga on umbes 0.014.

◇ ◇ ◇





# Peatükk 6

## Funktsiooni uurimine

---

6.1	Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid . . . . .	108
6.2	L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks . . . . .	113
6.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine . . . . .	116
6.4	Funktsiooni ekstreemumid . . . . .	117
6.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus . . . . .	121
6.6	Funktsiooni graafiku joonestamine * . . . . .	123

---

### Kontrolltöö teemad

1. L'Hospital'i reegli kasutamine piirväärtuste arvutamisel.
2. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkondade leidmine.
3. Funktsiooni ekstreemumide leidmine. Optimeerimise ülesanded.
4. Joone käänupunkti, kumerus- ja nõguskiirkondade leidmine.

### Eksamiteemad

1. Lagrange'i keskväärtusteoreem. Selle geomeetiline ja füüsikaline sisu. Cauchy teoreemi ei pea teadma.
2. L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks (tõestuseta).
3. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.
4. Funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid. Kriitiline punkt. Teoreem 6.7.
5. Kumer ja nõgus joon. Teoreem 6.8.
6. Joone käänupunkt.

## 6.1 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid

### Definitsioon 6.1

Olgu funktsioon  $f$  määratud hulgal  $D$ . Me ütleme, et funktsioonil  $f$  leidub **maksimaalne väärtus** hulgal  $D$ , punktis  $c \in D$ , kui

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{iga } x \in D.$$

Analoogiliselt ütleme, et funktsioonil  $f$  leidub **minimaalne väärtus** hulgal  $D$ , punktis  $c \in D$ , kui

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{iga } x \in D.$$

### Märkus 6.1

**Lõigus**  $[a, b]$  pidev funktsioon  $f$  saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse. Paneme tähele, et näiteks vahemikus  $(a, b)$  pidev funktsioon  $f$  ei pruugi saavutada maksimaalset ja minimaalset väärtust. Näiteks  $f(x) = x$  ei saavuta maksimaalset väärtust vahemikus  $(0, 1)$ . Kui leiduks selline suurim  $\alpha \in (0, 1)$ , siis alati  $\frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$  oleks ikkagi veel suurem.

### Teoreem 6.1

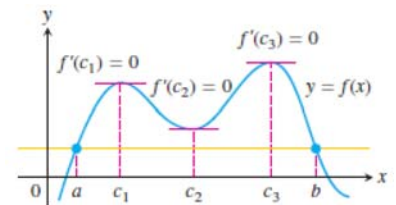
**Fermat' teoreem**, vt. [22]. Kui vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruv funktsioonil  $f$  on olemas maksimaalne või minimaalne väärtus punktis  $c \in (a, b)$ , siis

$$f'(c) = 0.$$

See tähendab, et selles punktis  $c$  funktsiooni muutumise kiirus on null.

### Teoreem 6.2

**Rolle'i teoreem**, vt. [22]. Kui lõigus  $[a, b]$  pideva ja vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruva funktsiooni  $f$  korral  $f(a) = f(b)$ , siis leidub selline punkt  $c \in (a, b)$ , nii et  $f'(c) = 0$ .



Allikas: [34]

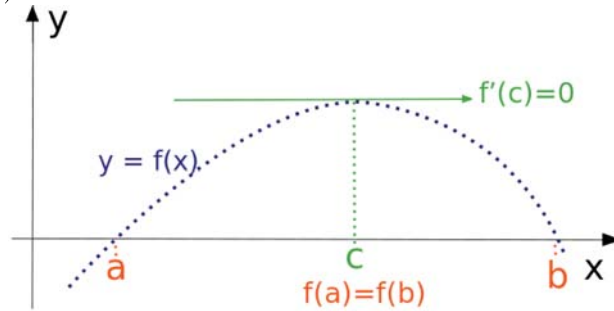
*Tõestus.* Kuna konstantse funktsiooni korral on tulemus ilmne, siis võime edaspidi eeldada, et leidub punkt  $x_0 \in (a, b)$  nii, et  $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$ . Konkreetsuse mõttes olgu  $f(x_0) > f(a) = f(b)$ . Kuna lõigus pidev funktsioon saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse, siis ka maksimaalse väärtuse  $f(\alpha)$ , kus  $\alpha \in (a, b)$  (juhul  $\alpha = a$  või  $\alpha = b$  saaksime vastuolu tingimusega  $f(\alpha) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$ ).

Kuna maksimaalne väärtus saavutatakse punktis  $\alpha \in (a, b)$ , siis peab kehtima  $f'(\alpha) = 0$ . □



**Märkus 6.2**

Olgu funktsioon  $y = f(x)$ , mis kirjeldab objekti liikumist, tema asukohta ajas. Siis Rolle'i teoreem ütleb seda, et kui objekti keskmine kiirus ajaperioodil  $[a, b]$  on null, siis leidub ajahetk  $c$ , mil objekti hetkkiirus  $f'(c)$  on null.



Allikas: Wikipedia

Rolle'i teoreemi idee omistatakse india matemaatikule ja astronoomile Bhaskara II (1114-1185), formaalne tõestus prantsuse matemaatikule Michel Rolle'ile (1652-1719) 1691. aastal.

**Näide 6.1**

Toome ühe lihtsa olukorra, kus Rolle'i teoreem võiks kasulik olla. Näitame, et võrrandil

$$x^3 + 3x - 6 = 0$$

on ainult üks reaalarvuline lahend. Funktsioon  $f(x) = x^3 + 3x - 6$  on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Leiame tuletise

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Kui meie võrrandil peaks olema kaks reaalarvulist lahendit (punktides  $a$  ja  $b$ ), siis peab kehtima  $f(a) = f(b) = 0$ . Rolle'i teoreemi põhjal peab funktsioonil  $f$  leiduma vahemikus  $(a, b)$  vähemalt üks punkt  $c$ , et kehtib  $f'(c) = 0$ . Kuna  $f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$  iga  $x \in \mathbb{R}$  jaoks, siis ei ole võimalik võrdus  $f'(c) = 0$ . Järelikult võrrandil ei saa leiduda rohkem kui ainult üks reaalarvuline lahend.

◇ ◇ ◇

**Teoreem 6.3**

**Lagrange'i keskväärtusteoreem.** Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$  ja diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ , siis leidub selline punkt  $c \in (a, b)$ , nii et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (6.1)$$

Infotehnoloogia tudengitelt küsitakse lihtne küsimus: "Palju on 2 korda 2?"

1. aasta tudeng vastab automaatselt "4".

2. aasta tudeng vastab "4, täpselt", pärast mõningast mõtlemist.

3. aasta tudeng võtab taskust kalkuraatori ja pärast paari nupule vajutamist vastab rõõmsalt "4".

4. aasta tudeng kirjutab vastamise jaoks 100-realise arvutiprogrammi, kompilrib selle ja saab vastuseks "4.0 E + 00."

5. aasta tudeng disainib uue programmeerimiskeele, mis sobib ideaalselt just selliste probleemide lahendamiseks. Tudeng kirjutab selles keeles valmis koodijupi ja saab vastuseks "4", kuid lisab, et pole päris kindel, kuna ei tea kas eelmisel õhtul sai ikka viga koodis täielikult parandatud.

Viimase aasta tudeng kurdab meeletult enne lõpueksamit "Jumal, oh Jumal, miks ma pean peast teadma kõiki neid kuradima konstante?!"

Tõestus. Vaatleme funktsiooni

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Lihtne on leida, et  $g(a) = f(a)$  ja  $g(b) = f(b)$ , s.t.  $g(a) = g(b)$ . Rolle'i teoreemi põhjal leidub punkt  $c \in (a, b)$  nii, et funktsiooni  $g$  muutumise kiirus on null, s.t.  $g'(c) = 0$ .

Kuna funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$  ja diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ , siis ka funktsioon  $g$  kui lineaarne kombinatsioon funktsioonist  $f$  on seda.

Leiame tuletise

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Omadusest  $g'(c) = 0$  järeldeb, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

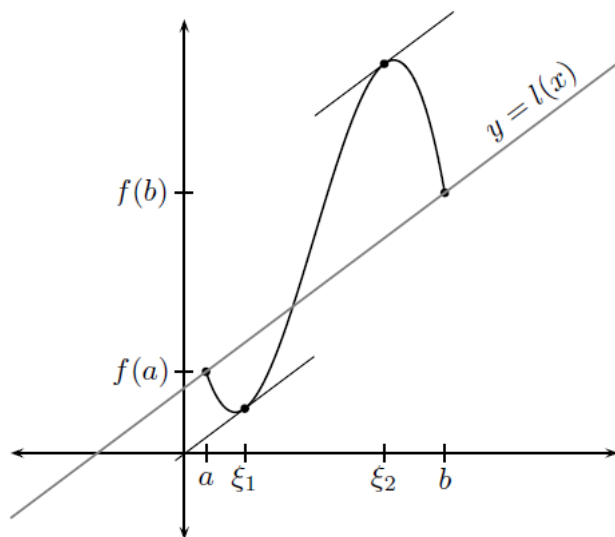
□

### Märkus 6.3

Näidaku funktsioon  $y = f(x)$  objekti liikumist, tema asukohta ajas. Lagrange'i teoreem ütleb, et teatud tingimustel leidub selline moment ( $x = c$ ), mil objekti hetkkiirus  $f'(c)$  on võrdne objekti keskmise kiirusega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

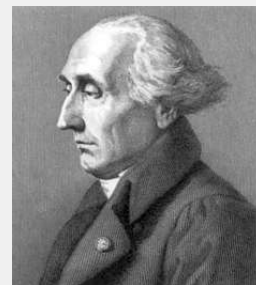
üle lõigu  $[a, b]$ .



Allikas: [3]

Lagrange'i teoreem on midagi sellist, millega võiks politsei ennast vabalt kohtus kaitsta trahvikiitungite välja kirjutamisel. Kui mõõta keskmist kiirust mingil teelõigul, siis keskmine kiirus üle 90 km/h tähendab, et mingil hetkel pidi ka hetkkiirus realselt olema üle 90 km/h (s.t. et ei ole tingimata vaja mõõta hetkkiirust). Kiirust saab mõõta ka kaudselt, lugedes näiteks sisenemise ja väljumise aega kiirteede piletitelt.

Lagrange'i teoreemi erijuhtu kirjeldas esmakordselt india matemaatik ja astronoom Parameshvara (1370-1460). Teoreemi üldistuse andis hiljem prantsuse matemaatik Augustin Louis Cauchy (1789-1857) ning see on üks tähtsamaid teoreetilisi tulemusi matemaatilises analüüsis (selle abiga tõestatakse paljud teised tähtsad tulemused).



Joseph Louis Lagrange.  
Allikas: Wikipedia

Itaalia matemaatiku ja astronoomi Joseph-Louis Lagrange'i (1736-1813) nimi seostatakse tulemusega tavaliselt Taylor'i valemi jääkliikme Lagrange'i kuju kaudu. Üldiselt on keskväertusteoreemiga seotud veel teisi nimesid nagu näiteks Andre-Marie Ampere, Ossian Bonnet.

Lagrange'ist sai juba 19-aastaselt Torino kuningliku suurtükiväe kooli matemaatikaprofessor. Aastal 1788 ilmus temalt mehaanikaõpik "Mecanique analytique" (Analüütiline mehaanika), milles ta esitas kehade ja punktmasside liikumisülesandeid diferentsiaalvõrrandite abil.

Viimati nimetatud raamatu eesõnas kirjutas Lagrange "Te ei leia sellest tööst jooniseid. Meetodid, mida ma siin esitan, ei vaja konstruksioone ega geomeetrist või mehaanikalist põhendamist, vaid ainult algebralisi operatsioone, mille tingivad materjali järjepidev ja ühetaoline esitus.", vt [6].

**Näide 6.2**

Kui funktsiooni kuju on teada, näiteks

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,$$

siis mõnikord on võimalik täpelt leida ka see punkt  $c \in (a, b)$ , kus funktsiooni muutumise kiirus on võrdne keskmise muutumise kiirusega.

Leiame  $c \in (0, 2)$ , nii et

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Kuna  $f(2) = 12$ ,  $f(0) = -2$  ja

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1,$$

siis

$$\frac{12 + 2}{2} = 12c^2 - 10c + 1 \quad \Rightarrow \quad 12c^2 - 10c - 6 = 0.$$

Viimase ruutvõrrandi lahenditeks on

$$c = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{97}{144}} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}.$$

Vahemikus  $(0, 2)$  on ainult üks väärtus,  $c = \frac{5 + \sqrt{97}}{12} \approx 1.237$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 6.3**

Lagrange'i teoreemi üks levinumaid kasutusi on funktsiooni väärtuste absoluutse vea hindamine. Näitame, et iga  $x, y \in \mathbb{R}$  korral kehtib võrratus

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Kui  $x = y$ , siis võrratus kehtib. Olgu  $x \neq y$ . Siinus on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = (\sin \xi)' = \cos \xi.$$

Siit

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos \xi| \leq 1.$$

Viimane tähendabki, et

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Paneme tähele, et kui  $y = 0$  ja  $x \geq 0$ , siis kehtib võrratus

$$\sin x \leq x.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 6.4** Lagrange'i keskväertusteoreemi abil saab hõlpsasti tõestada praktikas vaja mineva Bernoulli võrratuse:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

Märgime, et võrratus kehtib  $x=0$  korral. Funktsioon  $f(x) = (1+x)^n$  on pidev ja diferentseeruv  $x > 0$  korral. Siis Lagrange'i keskväertusteoreemi abil leidub  $\xi \in (0, x)$ , et

$$f(x) - f(0) = f'(\xi) \cdot (x-0) \Rightarrow (1+x)^n - 1 = nx(1+\xi)^{n-1} \geq nx.$$

◇ ◇ ◇

#### Teoreem 6.4

**Cauchy keskväertusteoreem.** Kui funktsioonid  $f$  ja  $g$  on pidevad lõigus  $[a, b]$  ja diferentseeruvad vahemikus  $(a, b)$  ning  $g'(x) \neq 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral, siis leidub selline punkt  $c \in (a, b)$ , nii et kehtib võrdus

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (6.2)$$

*Tõestus.* Täpse tõestuse võib leida näiteks õpikust [22]. Lagrange'i keskväertusteoreem on tegelikult järeldus Cauchy teoreemist, võttes  $g(x) = x$ . Cauchy teoreemi tõestuse idee on sarnane sellele, mille esitasime Lagrange'i keskväertusteoreemile. □

#### Märkus 6.4

2012. aastal võitis Usain Bolt meeste 100 m jooksus kuldmedali ajaga 9.63. Tema keskmine kiirus võrdus läbitud teepikkus jagatud ajaga:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{100 \text{ m}}{9.63 \text{ sek}} \approx 10.38 \frac{\text{m}}{\text{sek}} = 37.38 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Lagrange'i keskväertusteoreem ütleb meile, et leidus ajahetk  $t_*$ , mil Bolt jooksis just nimelt sellise hetkkiirusega  $f'(t_*) = 37.38 \text{ km/h}$ . Asafa Powell sai samas jooksus aja 11.99, mis on 1.245 korda aeglasem kui Bolt'il,

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{100 \text{ m}}{11.99 \text{ sek}} \approx 8.34 \frac{\text{m}}{\text{sek}} = 30.03 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Bolt'i keskmine kiirus oli sama palju, 1.245 korda, kiirem kui Powell'il,

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{37.38}{30.03} = 1.245.$$

Cauchy keskväertusteoreem ütleb seda, et leidus selline ajahetk  $c$ , mil Bolt jooksis just ninelt 1.245 korda kiiremini kui Powell,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}.$$



Augustin Louis Cauchy.  
Allikas: Wikipedia

Cauchy õppis ehitusinseneriks ja töötas sadama ja kaitserajatiste ehitusel. Üsna varsti valiti ta Pariisi teaduste akadeemia liikmeks ja Cauchy hakkas andma loenguid Pariisi polütehnilises koolis.

Cauchy muutis 1820. aastatel matemaatilise analüüsi valdkonda olulisel määral, formaliseerides piirväärtuse, pidevuse, tuletise ja integraali mõisted. Lisaks lõi ta peaaegu üksinda kompleksmuutuva funktsioonide teooria. Aastal 1821 ilmus teedrajav raamat "Cours d'analyse" (Analüüsi kursus), vt [6].

## 6.2 L'Hospital'i reegel piirväärtuse arvutamiseks

L'Hospital'i reegel võimaldab tihti väga kergelt leida piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

juhtudel, kus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (määramatus tüüpi  $\frac{0}{0}$ ) või  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$  (määramatus tüüpi  $\frac{\infty}{\infty}$ ).

### Teoreem 6.5

Kui mingis protsessis

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad (6.3)$$

siis selles protsessis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (6.4)$$

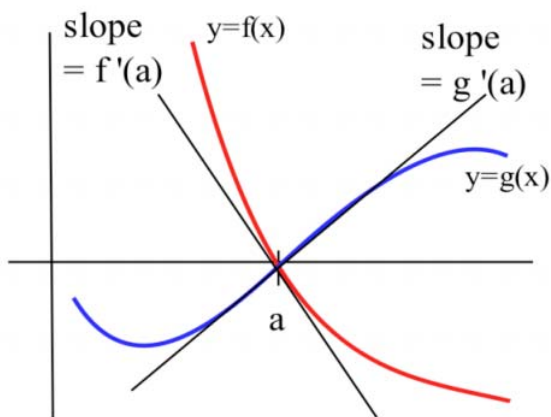
*Tõestus.* Detailsema tõestuse sarnase tulemise kohta leiab õpikust [22]. Teoreem järeldeb Cauchy keskväärtusteoreemist. Skemaatiliselt vaatleme juhtu, kus  $f(a) = g(a) = 0$  ja  $g'(x) \neq 0$ , funktsioonid  $f$  ja  $g$  on pidevad ja diferentseeruvad kohal  $a$ . Siis Cauchy keskväärtusteoreemi põhjal leidub punkti  $a$  ümbruses  $(a, a + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , selline arv  $\xi \in (a, a + \delta)$ , et

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{g(a + \delta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Kui  $f(a) = g(a) = 0$ , siis jääb järgi võrdus

$$\frac{f(a + \delta)}{g(a + \delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ja siit edasi järgneb analüüs minnes piirile  $\delta \rightarrow 0+$ . □



L'Hospital'i reegel  $f(a) = g(a) = 0$  korral. Allikas: [13]

L'Hospital'i reegli nimi tuleb prantsuse matemaatiku Guillaume Francois Antoine Marquis de l'Hospital'i (1661-1704) järgi.



Marquis de l'Hospital. Allikas: Wikipedia

Arvatavasti tõestas l'Hospital'i reegli üldsegi šveitsi matemaatik Johann Bernoulli (1667-1748). Markii l'Hospital ise oli Bernoulli'i õpilane ja ühtlasi tööandja. Lepingu järgi võis l'Hospital kasutada Bernoulli tulemusi oma nime all. L'Hospital avaldas 1696. aastal maailma esimese trükitud raamatu diferentsiaalarvutuse valdkonnas: "Lõpmata väikeste suuruste analüüs kõverjoonte mõistmiseks", milles oli kasutatud päris mitut Bernoulli ja Leibniz'i tulemust (tõsi, seda mainis eessõnas ka l'Hospital ise).

Naljatlledes öeldakse, et l'Hospital'i reegel on parim (kõige kasulikum) teoreem, mida raha eest saab osta.



Johann Bernoulli. Allikas: Wikipedia

Johann Bernoulli oli seejuures ka suurmehe Euler'i õpetaja.

**Näide 6.5**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{4}{5}.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leidke piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{4x}}{2x}.$$

**Näide 6.6**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leidke piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$$

**Näide 6.7**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{1 + 7x} = 7.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 6.8**

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 6.9**L'Hospital'i reegli korral on väga oluline see, et meil oleks jagatist  $\frac{f(x)}{g(x)}$ .

Kui jagatist ei ole, võib selle ise tekitada. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{-\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 6.5**

Siinjuures on oluline kontrollida, et meil oleks määramatus tüüpi  $\frac{0}{0}$  või  $|\frac{\infty}{\infty}|$ , vastasel korral võime saada absurdse tulemuse. Näiteks, kasutades valesti l'Hospital'i reeglit saame

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \stackrel{ups!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x} \stackrel{ups!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2} = 0.$$

Tegelik vastus peab olema aga pluss lõpmatus.

**Näide 6.10**

L'Hospital'i reegel ei ole alati kasutatav. Näiteks, lihtne on näha, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0,$$

kuna  $\frac{2}{3} \in (0, 1)$ . L'Hospital'i reegluga saaksime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{3^x \ln 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^2 2}{3^x \ln^2 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \dots$$

Viimane aga ei ole sugugi lihtsam kui esialgne avaldis.

◇ ◇ ◇

**Näide 6.11**

Märgime, et kuigi piirväärtuse  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  leidumine on väga oluline, siis

viimase mitteleidumisel võib algne piirväärtus  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  siiski eksisteerida. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \stackrel{\frac{1-M/\infty}{1+M/\infty}}{=} 1.$$

Samas, tuletiste jagatisest

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

piirväärtust aga ei leidu, kuna protsessis  $x \rightarrow \infty$  on lõpmata palju neid  $x$  väärtusi, millal  $\cos(x) = 0$  või  $\cos(x) = 1$ . Trigonomeetristest valemitest saab ka täpsemalt kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^2 \frac{x}{2}.$$

Tangensi väärtustest protsessis  $x \rightarrow \infty$  piirväärtust ei leidu.

◇ ◇ ◇

### 6.3 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

„Teadus loob meid ümbritsevast objektiivsest reaalsusest tõetruu pildi, vaadeldes seal toimuvaid nähtusi üksteisega seostatuna, jälgides ühe nähtuse kulgemist teise nähtuse taustal. Matemaatiliselt avaldub niisuguse vaatlemise tulemus alati kahe suuruse teatava funktsionaalse seosena kujul  $y = f(x)$ . Ainsaks nähtuse staatikasse puutuvaks küsimuseks on seejuures küsimus: missugune on funktsiooni väärtus argumenti etteantud väärtusel? Nähtuse dünaamikat puutuvate küsimuste hulk on märksa suurem. Siia kuuluvad meile juba tuttavad küsimused: kui suur on  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ? Kui suur on funktsiooni muutumise kiirus  $f'(a)$ ? Siia kuuluvad aga ka küsimused, mis iseloomustavad funktsiooni muutmise kvalitatiivset külge, nagu näiteks küsimused: kas argumenti läbiminekul väärtusest  $x_0$  funktsioon kasvab või kahaneb? Kas kasvamine või kahanemine toimub kiirenevalt või aeglustuvalt.“ (vt [27]).

#### Teoreem 6.6

Olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Kui  $f'(x) > 0$  iga argumenti  $x \in (a, b)$  korral, siis funktsioon  $f$  on kasvav selles vahemikus ja kui  $f'(x) < 0$  iga argumenti  $x \in (a, b)$  korral, siis funktsioon  $f$  on kahanev selles vahemikus.

*Tõestus.* Tõestame tulemuse kasvava funktsiooni kohta. Olgu  $f'(x) > 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral. Valime suvalised punktid  $x_1, x_2 \in (a, b)$  nii, et  $x_1 < x_2$ . Kuna funktsioon on diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ , siis ka pidev igas osalõiguses  $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ . Saame kasutada Lagrange'i keskvaartusteteoreemi, s.t. leidub punkt  $\xi \in (x_1, x_2)$  nii, et kehtib võrdus

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Et  $f'(x) > 0$ , siis

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

mis ütlebki, et  $f(x_2) > f(x_1)$ , s.t funktsioon  $f$  on kasvav antud piirkonnas.  $\square$

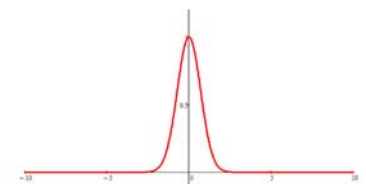
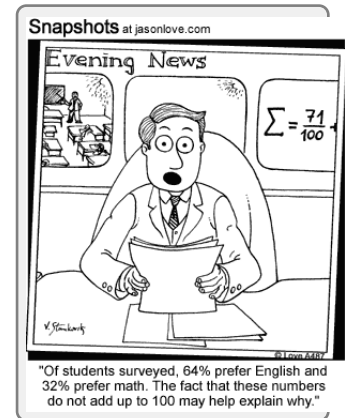
**Näide 6.12** Uurime funktsiooni  $f(x) = e^{-x^2}$ . Leiame tuletise

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}.$$

Eksponentfunktsioon  $e^z$  on iga arvu  $z$  korral positiivne. Järelikult piirkonnas  $x \in (-\infty, 0)$  kehtib  $f'(x) > 0$  ja funktsioon on kasvav ning piirkonnas  $x \in (0, \infty)$  kehtib  $f'(x) < 0$  ja funktsioon on kahanev selles vahemikus.

◇ ◇ ◇

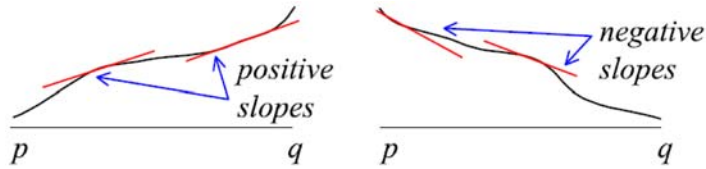
"Students nowadays are so clueless", the math professor complains to a colleague. "Yesterday, a student came to my office hours and wanted to know if General Calculus was a Roman war hero..."





**Märkus 6.6**

Geomeetriliselt tähendab tingimus  $f'(x) > 0$  (funktsioon kasvab) seda, et joone  $y = f(x)$  puutuja moodustab  $x$ -telje positiivse suunaga iga  $x \in (a, b)$  korral teravnurga ja tingimus  $f'(x) < 0$  (funktsioon kahaneb) seda, et joone  $y = f(x)$  puutuja moodustab  $x$ -telje positiivse suunaga iga  $x \in (a, b)$  korral nürinurga.



Allika: [19]

## 6.4 Funktsiooni ekstreemumid

**Definitsioon 6.2**

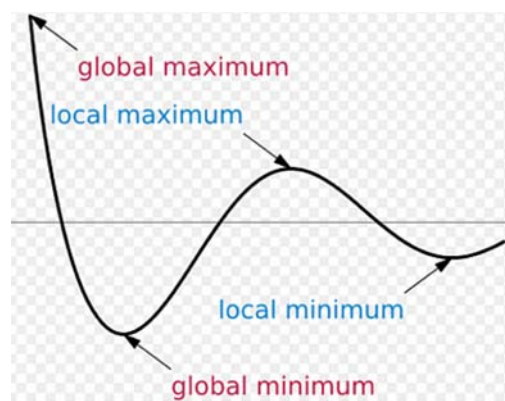
Õeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis (kohal)  $a$  **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus  $(a - \delta, a + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Õeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis (kohal)  $a$  **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus  $(a - \delta, a + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Lokaalset maksimumi kohal  $a$  võib tähistada näiteks  $\text{locmax}f(a)$  või  $f_{\text{locmax}}(a)$ . Lokaalse miinimumi ja lokaalse maksimumi kohta öeldakse kokkuvõtvalt ka **lokaalne ekstreemum**.



Joonis: Wikipedia.

Funktsiooni  $f$  niisugust argumendi väärtust  $a$ , mille korral funktsioon saavutab oma ekstreemumi  $f_{\text{locmax}}(a)$  (või  $f_{\text{locmin}}(a)$ ), nimetatakse selle funktsiooni ekstreemumkohaks ning sellele kohale vastavat punkti  $E_{\text{locmax}}(a, f(a))$  (või  $E_{\text{locmin}}(a, f(a))$ ) selle funktsiooni graafikul funktsiooni ekstreemumpunktiks.

**Märkus 6.7**

Diferentseeruva funktsiooni lokaalse ekstreemumi (maksimum või miinimum) leidumiseks punktis  $a$  on Fermat' teoreemi põhjal tarvilik, et  $f'(a) = 0$ . Kui funktsioon ei ole diferentseeruv (kuid on siiski määratud), siis sellises punktis võib samuti lokaalne ekstreemum leiduda (näiteks  $y = |x|$  korral on  $x = 0$  miinimumpunkt).

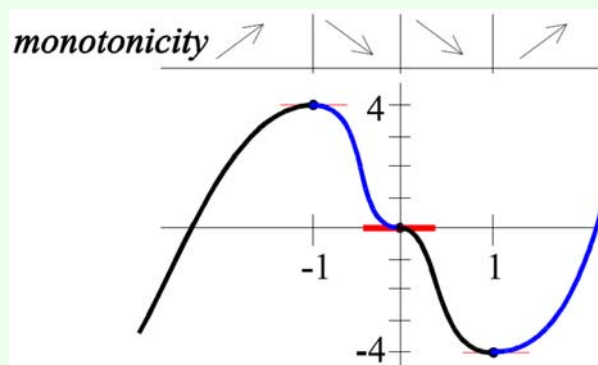
**Definitsioon 6.3**

Määramispiirkonna punkte, kus  $f'(x) = 0$  ja punkte, kus funktsioon  $f$  ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni  $f$  **kriitilisteks punkti-**  
**deks.**

**Teoreem 6.7**

Olgu funktsioon  $f$  **pidev** kriitilises punktis  $a$ . Siis kehtivad väited:

1. Kui punkti  $a$  läbimisel (positiivses suunas)  $f'(x)$  märk muutub  $' + ' \rightarrow ' - '$  siis on funktsioonil  $f$  punktis  $a$  lokaalne maksimum (funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks);
2. Kui punkti  $a$  läbimisel  $f'(x)$  märk muutub  $' - ' \rightarrow ' + '$ , siis on funktsioonil  $f$  punktis  $a$  lokaalne miinimum (funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks);
3. Kui punkti  $a$  läbimisel  $f'(x)$  märk ei muutu, siis punktis  $a$  ekstreemumit ei ole.



Allika: [19]

**Näide 6.13** Funktsioon  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$  on pidev kogu reaalteljel, kuid ei ole diferentseeruv punktis  $x = 0$ , s.t 0 on funktsiooni kriitiline punkt.

Leiame tuletise

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Samas,  $f'(x) < 0$ , kui  $x < 0$  ja  $f'(x) > 0$ , kui  $x > 0$ . Funktsioon kahaneb ja kasvab, seega  $x = 0$  on funktsiooni  $f$  lokaalne miinimum.

◇ ◇ ◇

**Märkus 6.8**

Peale lokaalsete ekstreemumite eristame veel **globaalseid ekstreemume** (funktsiooni suurim või väikseim väärtus mingis piirkonnas). Viimaste leidmiseks tuleb leida kõik lokaalsed ekstreemumid, kusjuures eraldi tuleb arvutada funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga) ning katkevuspunktides. Saadud suurim või väikseim väärtus ongi funktsiooni globaalseks ekstreemumiks. Kui ei ole eraldi rõhutatud, siis mõistame **ekstreemumite** all kõiki lokaalseid ja globaalseid ekstreemume.

**Näide 6.14** Lennukompanii “Müüme Põhku Tõustes Õhku” arvestab pileti hinnaks iga istekoha eest 300 eurot, lisades baashinnale juurde 2 eurot iga välja müümata istekoha eest. Kui mitu kohta tuleks 200-istmelises lennukis välja müüa, et lennufirma kasum oleks suurim?

Esmapilgul tundub, et triviaalne 200 piletit ja kasum  $200 \cdot 300 = 60000$  eurot võiks olla vastus, aga päris nii lihtne see ei ole. Olgu  $x$  müüdud piletite arv,  $200 - x$  müümata piletite arv. Siis ühe pileti hind on

$$p(x) = 300 + 2(200 - x) = 700 - 2x.$$

Kõikide müüdud piletite pealt saab tulu

$$T(x) = x \cdot p(x) = 700x - 2x^2.$$

Kasumifunktsiooni  $T(x)$  maksimumi leidmiseks leiame tuletise ja paneme ta võrduma nulliga (kuna maksimum võib leiduda vaid kriitilises punktis või siis piirkonna otspunktides):

$$700 - 4x = 0.$$

Saame, et  $x = 175$  istekohta. Sel juhul teenib lennukompanii  $p(175) = 175(300 + 2 \cdot 25) = 175 \cdot 350 = 61250$  eurot. Kuigi erinevus ei ole väga suur, saame siiski mingi ettekujutuse optimeerimise võimalustest.

Päris elus kogu mudel muidugi nii lihtne ei ole. Lisada tuleks tegurid, mis arvestavad turu olukorda, konkurentsi, tarbijate ostujõudu jne.

◇ ◇ ◇

### Näide 6.15

Teatud optimaalseid väärtusi võib välja lugeda ka graafikult, ilma et peaks teadma konkreetseid funktsioone. Olgu  $v$  auto liikumise kiirus ja  $g$  kütuse kulu ajaühikus. Vaatleme graafikut, kus ühel teljel on auto liikumise kiirus  $v$  ja teisel teljel on kütuse kulu ajas. Oleme huvitatud kütusekulust pikkusühiku kohta  $G = \frac{g}{v}$  (siin gallonit miili kohta, näide pärineb õpikust [14]).

Me soovime leida  $G$  minimaalset väärtust. Võttes graafikul joone peal punkti  $P$ , tekib täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on  $g$  ja teine  $v$ , üks nurkadest asub nullpunktis. Seega hüpotenuus asub sirgel, mille tõus on  $\frac{g}{v}$ . Edasi on lihtne aru saada, et  $G = \frac{g}{v}$  on minimaalne punktis, kus vastava sirge tõus on minimaalne (kõige väiksem teravnurk).

◇ ◇ ◇

Funktsiooni tuletise leidmise kohta on olemas üks suur klass praktilisi rakendusid: optimeerimine. Tavaliselt huvitab meid kulude minimeerimine ja tulude maksimeerimine. Viimane taandub aga funktsiooni ekstreemumite leidmisele.

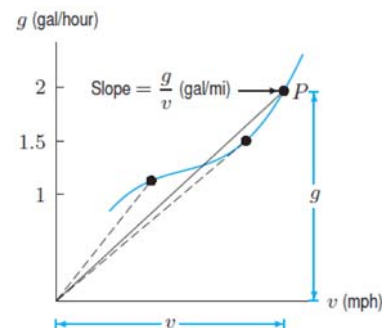
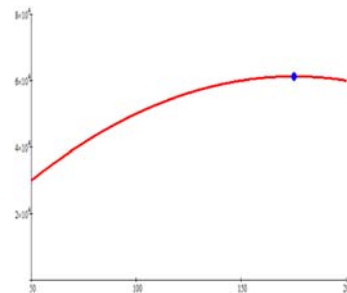


Figure 4.35: Graphical representation of gas consumption per mile,  $G = g/v$

Allikas: [14]

Antud juhul saame, et kiiruse  $v = 50$  korral on kütuse kulu miili kohta kõige väiksem. Sedasi saab andmeid lugeda suvalise suhte  $\frac{f(x)}{x}$  kohta. Meie tehtud analüüs on sisuliselt sama, mis leida funktsiooni  $\frac{f(x)}{x}$  tuletis ja lahendada võrrand  $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$ ,

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

◇ ◇ ◇

### Lause 6.1

Olgu funktsioon kaks korda diferentseeruv punktis  $x_0$ . Siis funktsioonil  $f$  on argumenti väärtusel  $x_0$  lokaalne maksimum, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x_0) < 0$$

ja funktsioonil  $f$  on argumenti väärtusel  $x_0$  lokaalne miinimum, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(x_0) > 0.$$

**Näide 6.16** Leiame 700 m<sup>3</sup> mahuga silindrikujulise kütuseanuma mõõdud nii, et selle anuma valmistamiseks kuluv materjali hulk oleks minimaalne. Esiteks peame koostama võrrandi. Olgu silindri aluse raadius  $r$  ja silindri kõrgus  $h$ . Siis kahekordne põhjapindala on  $2\pi r^2$  (ringi pindalast) ja külje pindala on  $2\pi r h$  (ringi ümbermõõt korda anuma kõrgus). Anuma kogupindala võrdub

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Kuna silindri ruumala avaldub valemiga

$$V = \pi r^2 h = 700,$$

siis saame avaldada  $h = \frac{700}{\pi r^2}$  ja

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{1400}{r}.$$

Leiame tuletise,

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{1400}{r^2}.$$

Saame, et  $S'(r) = 0$  parajasti siis, kui

$$r = \sqrt[3]{\frac{1400}{4\pi}} \approx 4.81, \quad h = \frac{700}{\pi r^2} \approx 9.62.$$

Kontrollides teist tuletist

$$S''(r) = 4\pi + \frac{2800}{r^3}, \quad S''(4.81) \approx 37.73 > 0,$$

siis veendume, et punktis  $r = 4.81$  on pindala  $S(r)$  minimaalne.

◇ ◇ ◇

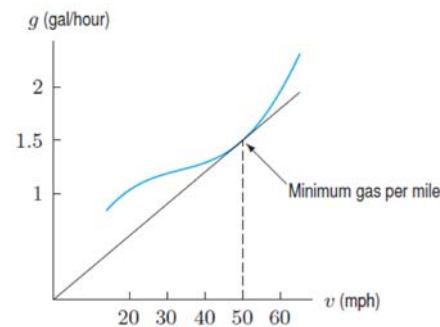
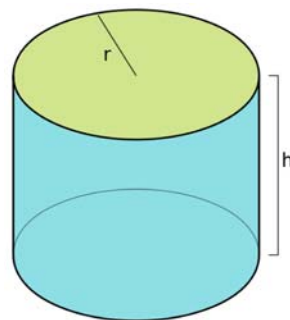


Figure 4.36: Velocity for maximum fuel efficiency

Allikas: [14]



Joonis: Wikipedia.

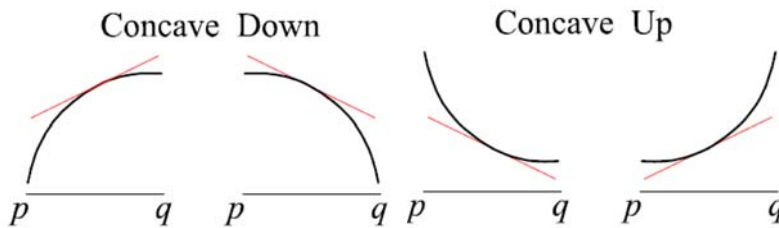
## 6.5 Funktsiooni kumerus ja nõgusus

Olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Siis selle vahemiku igas punktis  $(x, f(x))$  on joonel  $y = f(x)$  olemas puutuja.

### Definitsioon 6.4

Joont  $y = f(x)$  nimetatakse **kumeraks** vahemikus  $(a, b)$ , kui selle joone puutuja astseb igas punktis  $(x, f(x))$ ,  $x \in (a, b)$ , ülalpool joont.

Joont  $y = f(x)$  nimetatakse **nõgusaks** vahemikus  $(a, b)$ , kui selle joone puutuja on igas punktis  $(x, f(x))$ ,  $x \in (a, b)$ , allpool joont.



Joonised: [19]

### Teoreem 6.8

Olgu funktsioon  $f$  kaks korda diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$ . Kui

$$f''(x) < 0 \quad \text{iga } x \in (a, b) \text{ korral,}$$

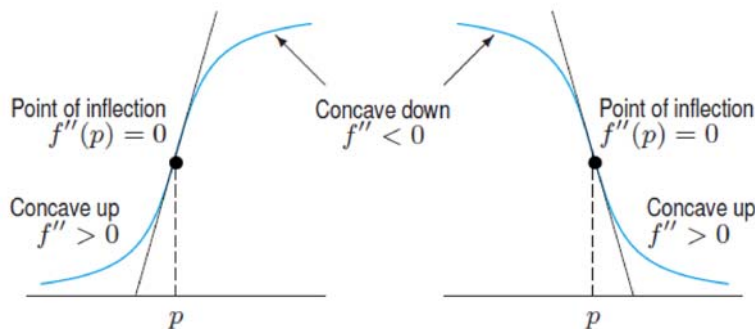
siis joon  $y = f(x)$  on kumer selles vahemikus. Kui

$$f''(x) > 0 \quad \text{iga } x \in (a, b) \text{ korral,}$$

siis joon  $y = f(x)$  on nõgus selles vahemikus.

### Definitsioon 6.5

Olgu funktsioon  $f$  punktis  $c$  pidev. Siis joone  $y = f(x)$  punkti  $(c, f(c))$ , milles joone kumerus läheb üle nõgususeks (või vastupidi), nimetatakse selle joone **käänupunktiks**.



Allikas: [14]

Geomeetriline tõlgendus. Kui puutuja leidub, siis käänupunktis puutuja lõikab joont. Puutuja võib ka puududa, kui joone tuletise graafikul on teravad nurgad.

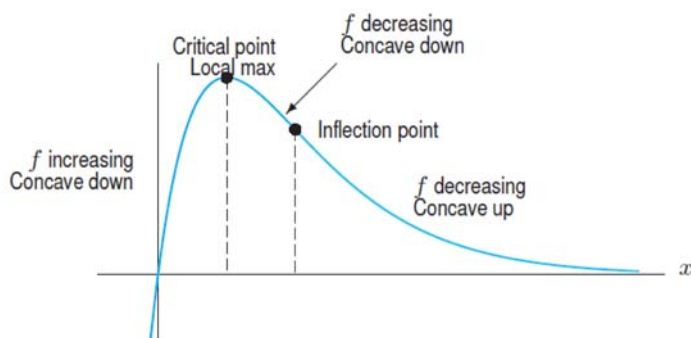
**Näide 6.17** Vaatleme funktsiooni  $f(x) = x e^{-x}$ . Leiame kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid (kui need leiduvad). Esimest järku tuletis,

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}.$$

Punktis  $x = 1$  asub lokaalne maksimum. Leiame teise tuletise,

$$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = (x - 2) e^{-x}.$$

Piirkonnas  $x < 2$  on  $f''(x) < 0$  ja funktsioon on kumer. Piirkonnas  $x > 2$  on  $f''(x) > 0$  ja funktsioon on nõgus. Kuna punkt  $x = 2$  eraldab kumerat ja nõgusat piirkonda, siis on graafiku punkt  $(2, f(2))$  ka käänupunktiks.



Allikas: [14]

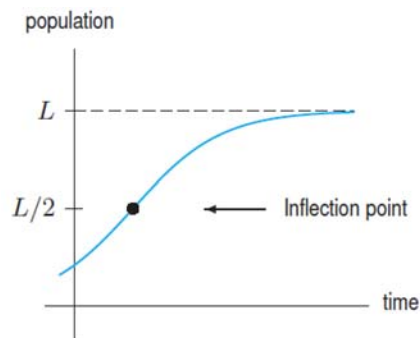
◇ ◇ ◇

**Näide 6.18** Vaatleme logistilist kõverat, mis iseloomustab populatsiooni kasvu ajas, kusjuures populatsiooni piiriks on  $L$  ja käänupunkt asub kõrgusel  $\frac{L}{2}$ .

Enne punkti  $\frac{L}{2}$  on joon nõgus, s.t kasvamise kiiruse muutumise kiirus (ehk kiirendus) on positiivne.

Seega nõgus, kasvav funktsioon tähendab, et kasvamise kiirus on igas järgmises punktis suurem kui eelmises ja kõige suurem on see käänupunktis  $\frac{L}{2}$ . Edasi hakkab kasv aeglustuma, s.t kumer kasvav funktsioon tähendab, et kasvamise kiirus igas järgmises punktis on väiksem kui eelmises (kiirendus ehk funktsiooni Teist järku tuletis on negatiivne).

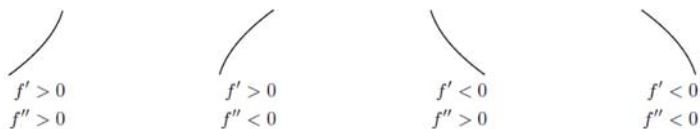
◇ ◇ ◇



Allikas: [14]

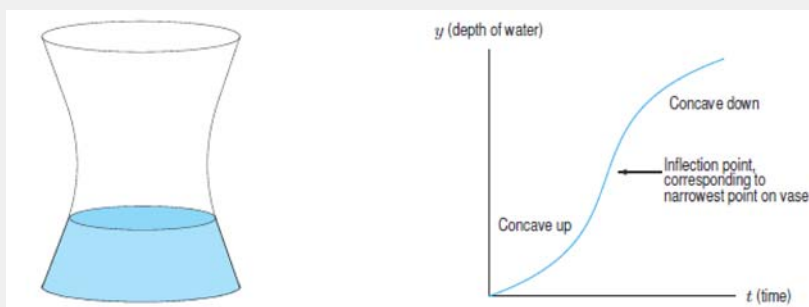
**Märkus 6.9**

Analoogiliselt võib analüüsida kõiki nelja põhitüüpi: kasvav-kiirendav, kasvav-aeglustav, kahanev-aeglustav ja kahanev-kiirendav.



Allikas: [3]

**Ülesanne 6.1** Vaasi valatakse vett konstantse kiirusega. Graafikul on näha vee taseme tõus ajas. Selgitage tekkiva graafiku käänupunkti, nõgususe ja kumeruse piirkondade tähendust seoses vaasi kuju ja vee taseme tõusuga.



Allikas: [14]

## 6.6 Funktsiooni graafiku joonestamine \*

Üldjuhul on kasulik jälgida järgmist skeemi:

1. Leiame funktsiooni määramispiirkonna (kui lihtsalt on võimalik, siis ka muutumispiirkonna) ja katkevuspunktid. Teeme kindlaks, kas funktsioonil on iseloomulikke jooni, näiteks paaris või paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon.
2. Leiame asümptoodid (sirged, millele funktsioon võiks lõpmatus protsessis läheneda, vt. all pool).
3. Leiame kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid (miinimum- ja maksimumkohad). Üldiselt, leiame info, mille annab meile funktsiooni esimest järku tuletis.
4. Leiame antud funktsiooni graafiku kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid. Seega info, mida saab funktsiooni teist järku tuletise kaudu.
5. Joonestame saadud tulemuste põhjal graafiku.

### Definitsioon 6.6

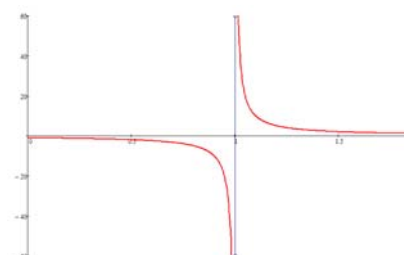
Sirget  $x = a$  nimetatakse joone  $y = f(x)$  **püstasümptoodiks**, kui  $|f(a+)| = \infty$  või  $|f(a-)| = \infty$ .

**Näide 6.19** Joone  $y = \frac{1}{x-1}$  vasak- ja parempoolseks püstasümptoodiks on sirge  $x = 1$ , sest et

$$f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

◇ ◇ ◇

On selge, et graafikul saab püstasümptood olla vaid katkevuspunktides.



**Definitsioon 6.7**

Sirget

$$y = kx + b \quad (6.5)$$

nimetatakse joone  $y = f(x)$  parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, s.t

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \right). \quad (6.6)$$

Lihtne on tuletada (tõusunurga tangensist), et kaldasümptoodi tõus  $k$  peab võrduma piirväärtusega

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left( k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right). \quad (6.7)$$

Siinjuures, parempoolse kaldasümptoodi korral kehtib protsess  $x \rightarrow \infty$  ja vasakpoolse kaldasümptoodi korral protsess  $x \rightarrow -\infty$ . Kauguse avaldisest  $f(x) - (kx + b)$  saab avaldada

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) \quad \left( b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) \right). \quad (6.8)$$

Kui  $k$  või  $b$  tuleb lõpmatus, siis vastav kaldasümptood puudub.

**Näide 6.20** Leiame joone  $y = x \arctan x$  kaldasümptoodid (kui need üldse leiduvad). Esiteks leiame sirge tõusu (mõlemad lõpmatud protsessid korraga)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Parempoolse kaldasümptoodi korral  $k = \frac{\pi}{2}$  ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \arctan x - \frac{\pi}{2}x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

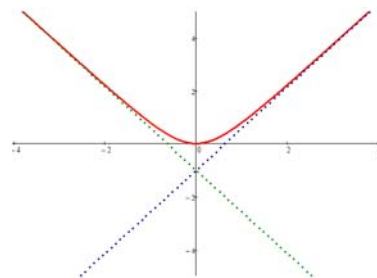
Vasakpoolse kaldasümptoodi korral  $k = -\frac{\pi}{2}$  ja analoogiliselt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x \arctan x + \frac{\pi}{2}x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1. \end{aligned}$$

Seega parem- ja vasakpoolne kaldasümptood leidub ja on vastavalt

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1, \quad y = -\frac{\pi}{2}x - 1.$$

◇ ◇ ◇





**Näide 6.21** Joonestame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

graafiku (vt. [22]).

1. Funktsiooni määramispiirkonnaks on  $X = \mathbb{R} \setminus (0, 2]$ . Lihtne on kontrollida, et funktsioon ei ole paaritu ( $f(-x) \neq -f(x)$ ) ega paaris ( $f(-x) \neq f(x)$ ) ja  $f$  ei ole perioodiline. Kuna  $f(x) \geq 0$  iga  $x \in X$  korral, siis funktsiooni graafik asub ülalpool  $x$ -telge.

2. Sirge  $x = 2$  on funktsiooni  $f$  parempoolseks püstasümptoodiks ( $f(2+) = \infty$ ). Leiame kaldasümptoodid  $y = kx + b$ . Selleks arvutame

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \pm 1.$$

Leiame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = 1. \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x-2} - \sqrt{x})}{\sqrt{x-2}} = -1.$$

Saime, et parem- ja vasakpoolne kaldasümptood on vastavalt

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1.$$

3. Leiame funktsiooni tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left( \frac{3}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x-2| \right)' = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \left( \frac{3}{2x} - \frac{1}{2(x-2)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}}. \end{aligned}$$

Tuletis ei ole määratud punktis  $x = 0$ , kuid võrrandist  $f'(x) = 0$  saame kriitiliseks punktiks  $x = 3$ . Lokaalseks miinimumiks saame  $f(3) = \sqrt{27}$ , kuna  $f'(x) < 0$  piirkonnas  $x \in (2, 3)$  (kahaneb) ja  $f'(x) > 0$  piirkonnas  $x \in (3, \infty)$  (kasvab). Kui  $x < 0$ , siis  $f'(x) < 0$  ja funktsioon on kahanev. Kuna  $f(0) = 0$ , siis  $x \leq 0$  jaoks asub punktis  $x = 0$  globaalne miinimum.

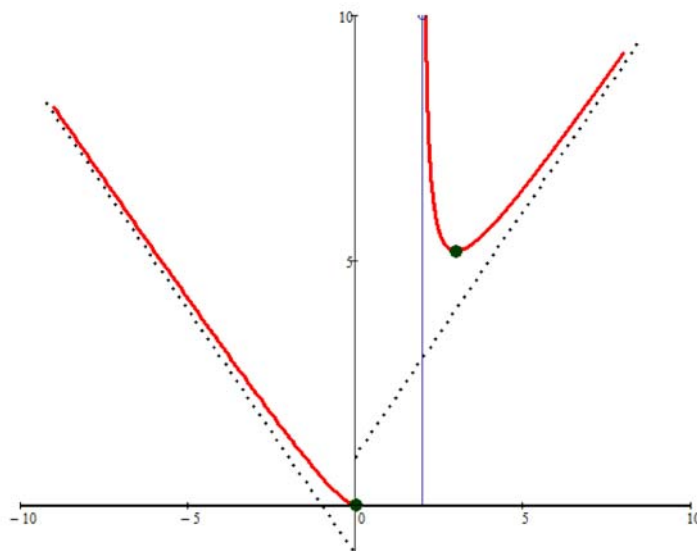
4. Leiame funktsiooni teise tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \cdot \left( \frac{1}{2} \ln|x| + \ln|x-3| - \frac{3}{2} \ln|x-2| \right)' = \frac{\sqrt{x}(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}} \\ &\cdot \left( \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{2(x-2)} \right) = \frac{\sqrt{x}(x-3)}{\sqrt{(x-2)^3}} \frac{6}{2x(x-3)(x-2)} = \frac{3}{\sqrt{x}(x-2)^5}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Piirkonnas  $x < 0$  kehtib  $f''(x) > 0$  ning piirkonnas  $x > 2$  korral  $f''(x) > 0$  ja funktsioon on oma määramispiirkonnas kõikjal nõgus.

5. Joonestame graafiku ... siinkohal konspekti jaoks kahjuks küll arvuti abiga :-D



◇ ◇ ◇

## Peatükk 7

# Algfunktsioon ja määramata integraal

---

7.1	Sissejuhatus . . . . .	128
7.2	Algfunktsioon . . . . .	128
7.3	Määramata integraal . . . . .	129
7.4	Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest . . . . .	130
7.5	Tehetega seotud integreerimisreeglid . . . . .	132
7.6	Muutujavahetus . . . . .	133
7.7	Ositi integreerimine . . . . .	135
7.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine . . . . .	138

---

### Kontrolltöö teemad

1. Määramata integraali seos kiirenduse, kiiruse ja teepikkusega.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid
3. Muutuja vahetuse võtte määramata integraali leidmisel.
4. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.
5. Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine lihtsamal juhul.

### Eksamiteemad

1. Algfunktsiooni mõiste.
2. Määramata integraali mõiste.
3. Määramata integraali seos kiirenduse, kiiruse ja teepikkusega.
4. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid (kuni trigonomeetriliste funktsioonideni).
5. Muutuja vahetuse võtte määramata integraali leidmisel.
6. Ositi integreerimise reegel ja selle kasutamine.
7. Ratsionaalsete funktsioonide integreerimine.

## 7.1 Sissejuhatus

Vaatleme objekti liikumist seaduse  $s = s(t)$  alusel, kus  $s$  näitab läbitud teepikkust ajahetkel  $t$ . Funktsiooni  $s$  tuletis andis meile hetkkiiruse  $v(t) = s'(t)$  hetkel  $t$  ja teine tuletis kiirenduse  $a(t) = s''(t)$ ,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Vaatleme nüüd olukorda, kus me näiteks teame objekti kiirust  $v(t)$  igal ajamomendil. Meid huvitab, kas kiiruse  $v(t)$  alusel saab teada objekti asukoha  $s(t)$  igal ajahetkel  $t$ . Osutub, et teatud tingimustel on see võimalik. Sellist vastupidise suunaga info leidmist me nimetamegi määramata integraali leidmiseks (sõnastame täpsemalt all pool). Kohe me näeme, et kiirenduse või kiiruse teadmisel kehtivad **skemaatiliselt** järgmised omadused:

$$v(t) = \int v'(t) dt = \int a(t) dt, \quad s(t) = \int s'(t) dt = \int v(t) dt.$$

Seos kiiruse, kiirenduse ja läbitud teepikkusega kehtib rangelt võttes konstandi täpsusega. Täpselt korrektne oleks need seosed anda järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int v(t) dt &= s(t) + s_0, \\ \int a(t) dt &= v(t) + v_0. \end{aligned}$$

## 7.2 Algfunktsioon

### Definitsioon 7.1

Funktsiooni  $F$  nimetatakse funktsiooni  $f$  **algfunktsiooniks** vahemikus  $(a, b)$ , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga  $x \in (a, b)$  korral.

**Näide 7.1** Funktsiooni  $y = x^3$  üheks algfunktsiooniks on funktsioon  $y = \frac{x^4}{4}$ , üldiselt iga funktsioon kujul

$$y = \frac{x^4}{4} + C,$$

kus  $C$  on suvaline konstant. Tõepoolest,

$$F'(x) = \left( \frac{x^4}{4} + C \right)' = x^3.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.2** Arvestades sissejuhatuses toodud kommentaare, on lihtne näha, et kiirenduse  $a(t)$  algfunktsiooniks on kiirus  $v(t)$  ja kiiruse algfunktsiooniks on teepikkus  $s(t)$ . Matemaatiliselt kehtib väide vähemalt siis, kui  $a$  ja  $v$  on pidevad funktsioonid aja  $t$  järgi.

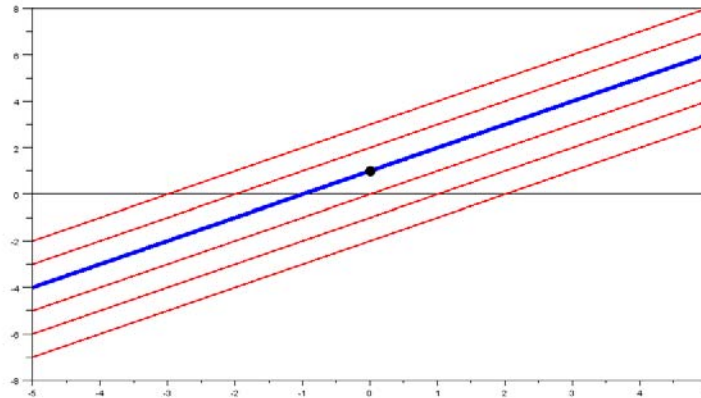
Olgu näiteks punkti liikumise kiirus konstantne  $v(t) = 1$ . Sel juhul  $v$  algfunktsiooniks on  $s(t) = t + C$  (kuna  $(t + C)' = 1$ ). Kui me liikumise kohta rohkem infot ei tea, siis  $v$  algfunktsiooniks võib olla iga sirge  $t + C$ , mille tõus on üks, kuid lõikepunkt  $y$ -teljega suvaline (s.t kõik sirged, mille tõus on üks).

◇ ◇ ◇

Funktsiooni  $f$  algfunktsiooni leidmine on sama, mis leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x)$$

lahend  $y = y(x)$ . Diferentsiaalvõrrandid on looduse modelleerimisel üks väga levinud vahend.



Kui me näiteks teame, et alghetkel  $t = 0$  objekti asukoht oli punktis 1, siis võrdustest

$$s(0) = 1 \Rightarrow 0 + C = 1$$

saame, et  $C = 1$  ja punkti liikumisseaduseks on üks konkreetne sirge  $s(t) = t + 1$ . Kui  $s(0)$  oli midagi muud, siis saame mingi teise paralleelse sirge.

◇ ◇ ◇

#### Märkus 7.1

Kehtib väide. Funktsiooni  $f$  kõik algfunktsioonid  $F$  avalduvad kujul  $F(x) + C$ , kus  $F$  on funktsiooni  $f$  mingi algfunktsioon ja  $C \in \mathbb{R}$  on suvaline konstant.

## 7.3 Määramata integraal

#### Definitsioon 7.2

Funktsiooni  $f$  kõikide algfunktsioonide üldavaldist  $F(x) + C$  nimetatakse funktsiooni  $f$  **määramata integraaliks**. Siin  $F$  on funktsiooni  $f$  mingi algfunktsioon ja  $C \in \mathbb{R}$  on suvaline konstant. Tähistame

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (7.1)$$

#### Definitsioon 7.3

Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse selle funktsiooni **integreerimiseks**.

Näide 7.3 Leiame

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

◇ ◇ ◇

Te sõidate autoga maanteel kiirusega 60 km/h. Kui suur peab olema auto konstante aeglustus (negatiivne kiirendus,  $a$ ), et auto peatuks 73 meetri pärast?

Tähistame auto liikumise seaduse  $s = s(t)$ . Siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$s''(t) = a,$$

tingimustega  $s(0) = 0$ ,

$v(0) = s'(0) = 60$ .

Saadud diferentsiaalvõrrandi lahendamise taandub algfunktsiooni leidmisele.

Seega  $v(t) = s'(t) =$

$at + C$ . Kuna  $v(0) = 60$ ,

siis  $C = 60$  ja kiiruse avaldiseks tuleb  $v(t) = at + 60$ .

Edasi,

$$s(t) = a \frac{t^2}{2} + 60t + C,$$

millest algtingimuse  $s(0)$

korral saame  $C = 0$  ja

$$s(t) = a \frac{t^2}{2} + 60t.$$

Kiirus  $v = 0$ , kui  $t = -\frac{60}{a}$ .

Jääb veel asendada see aeg võrrandisse

$$\frac{73}{1000} = a \frac{t^2}{2} + 60t.$$

Pärast ühikutega opereerimist saame vastuseks  $a \approx -1.9 \text{ m/s}^2$ .

**Märkus 7.2**

Määramata integraali definitsioonist järelduvad järgmised seosed:

1.  $(\int f(x) dx)' = f(x)$ ,
2.  $d(\int f(x) dx) = f(x) \cdot dx$ ,
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$ .

Seega diferentseerimine ja integreerimine on teineteise pöördoperatsioonid (konstantse liidetava täpsusega). Inglise keeles kasutatakse mõnes kirjandusallikas tuletise jaoks väljendit “derivative” ja määramata integraali jaoks “antiderivative”, mis on loomulikum, kui eestikeelne “integraal”. Samas, sõna “antiderivative” kasutatakse siiski tavaliselt algfunktsiooni tähenduses ning sõna “integral” integraali jaoks.

**Märkus 7.3**

Funktsioonil  $f$  on olemas määramata integraal parajasti siis, kui sellel funktsioonil on olemas algfunktsioon.

**Teoreem 7.1**

Igal vahemikus  $(a, b)$  pideval funktsioonil on olemas algfunktsioon selles vahemikus.

## 7.4 Integraal põhilistest elementaarfunktsioonidest

**Konstantne funktsioon**

$$\int c dx = cx + C, \quad c \in \mathbb{R}$$

**Astmefunktsioonid**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

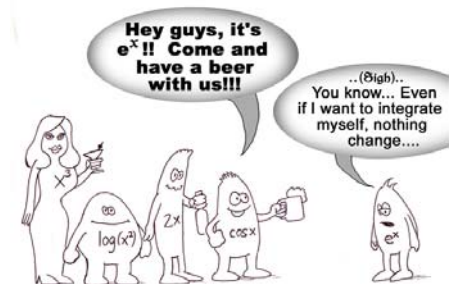
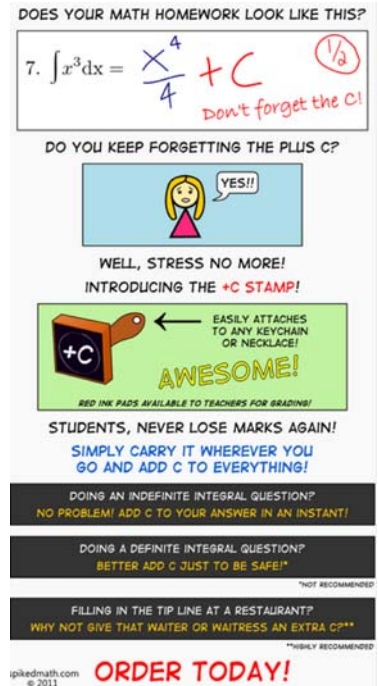
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

**EkspONENTfunktsioonid**

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$



**Trigonomeetrilised funktsioonid**

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

**Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccot} x + C$$

Järgnevalt toome ära integraalid hüperboolsetest funktsioonidest ja nende pöördfunktsioonidest juhuks, kui kellelgi peaks neid vaja minema.

**\*Hüperboolsed funktsioonid**

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + C \quad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x + C$$

**\*Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsh} x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arch} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arth} x + C \quad \int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arcth} x + C$$

**Märkus 7.4**

Kõikidel funktsioonidel ei pruugi leiduda algfunktsiooni elementaarfunktsioonide kujul (selliste algfunktsioonide väärtusi saab arvutada ainult ligikaudsete meetoditega). Näiteks järgmisi integraale ei saa esitada elementaarfunktsioonide abil:

$$\int e^{-x^2} \, dx, \quad \int \cos x^2 \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

## 7.5 Tehetega seotud integreerimisreeglid

**Teoreem 7.2**

Kui on olemas integraalid  $\int f(x) dx$  ja  $\int g(x) dx$ , siis kõikide reaalarvude  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  korral on olemas integraal  $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ , kusjuures

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx. \quad (7.2)$$

*Tõestus.* Eelduse järgi leiduvad algfunktsioonid  $F$  ja  $G$ , nii et  $F'(x) = f(x)$  ja  $G'(x) = g(x)$  ja

$$\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x).$$

Tuletise leidmiste omadustest kehtib

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Viimane ütlebki, et  $(\alpha f(x) + \beta g(x))$  algfunktsiooniks on

$$(\alpha F(x) + \beta G(x)).$$

□

---

**Näide 7.4** Leiame määramata integraali

$$\begin{aligned} \int \left( x^5 + 10 \sin x - \frac{2}{x} \right) dx &= \int x^5 dx + 10 \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^6}{6} - 10 \cos x - 2 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 7.5** Auto sõidab konstantse kiirusega  $a$ . Leiame läbitud teepikkuse seaduse, kui auto algkiirus oli  $v(0) = v_0$  ja esialgne asukoht  $s(0) = s_0$ .

Avaldame kiiruse

$$v(t) = \int a dt = at + C,$$

kus tingimusest  $v(0) = v_0$  saame, et  $C = v_0$ . Leiame teepikkuse

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (at + v_0) dt = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + C,$$

kus tingimusest  $s(0) = s_0$  saame, et  $C = s_0$ . Seega auto liigub seaduse

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

alusel. Kui liikumine ei ole konstantse kiirusega, siis saaksime mingi muu liikumise seaduse.

◇ ◇ ◇

*If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then 9 times out of ten it will. (Paul Harvey News, 1979)*

*I gather, young man, that you wish to be a Member of Parliament. The first lesson that you must learn is, when I call for statistics about the rate of infant mortality, what I want is proof that fewer babies died when I was Prime Minister than when anyone else was Prime Minister. That is a political statistic. (Winston Churchill)*

*If you torture data enough it will confess, öeldud ühe statistikaprofessori poolt.*



## 7.6 Muutujavahetus

### Märkus 7.5

Integreerimine on üldjuhul “raske tehe”. Tuletise leidmisel kasutasime korrutamise ja jagamise reegleid, liitfunktsiooni leidmise reeglit jne. Integraali leidmisel selliseid universaalseid reegleid eriti palju ei ole. Enamasti taandub integreerimine algfunktsiooni ära arvamisele, mille järel saab teatud abitulemustega näidata, et vastus tuleb see, mis ta peab tulema.

Seoses sellega on integreerimise jaoks välja töötatud palju erivõtteid (mõnikord ainult kindlat tüüpi funktsioonide jaoks), millest tutvustame siinkohal ainult kahte kõige olulisemat: muutujate vahetamine ja ositi integreerimine.

### Lause 7.1

[22, 34]. Kui  $u = \varphi(x)$  on diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga  $U$  ja  $f$  on pidev määramispiirkonnas  $U$ , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (7.3)$$

*Tõestus.* Funktsioon  $f$  on pidev, seega tal leidub algfunktsioon  $F$  ja järelilikult

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Meie eeldustel eksisteerib funktsioonide  $F$  ja  $\varphi$  liitfunktsioon  $F \circ \varphi$ , mis on diferentseeruv (kui kahe diferentseeruva funktsiooni liitfunktsioon) ja kehtib

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

või siis Leibniz'i tähistuses

$$F'(\varphi(x)) = \frac{dF(u)}{dx} = \frac{F(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot \frac{du}{dx}.$$

Saime, et funktsiooni  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  algfunktsiooniks on  $F \circ \varphi$ , mistõttu

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = (F \circ \varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Seega

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(u) + C.$$

Kasutades eelnevaid seoseid, saamegi võrduse (7.3).  $\square$

**Näide 7.6** Leiame integraali

$$\int e^{2x-3} dx.$$

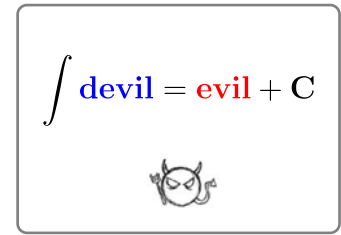
Teeme muutujavahetuse  $u = 2x - 3$ . Sel juhul  $du = d(2x - 3) = 2dx$  ja  $dx = \frac{du}{2}$ . Järelikult

$$\int e^{2x-3} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{e^u}{2} + C.$$

Asendades  $u = 2x - 3$  tagasi, saame

$$\int e^{2x-3} dx = \frac{e^{2x-3}}{2} + C.$$

◇ ◇ ◇



**Märkus 7.6**

Muutujavahetuse võtte erijuhuks on diferentsiaali märgi alla viimise võtte. Sel juhul on enamasti lihtne leida diferentsiaali  $du(x) = u'(x) dx$ .

**Näide 7.7** Leiame integraali

$$\int \cos 4x dx.$$

Me teame, et koosinuse algfunktsiooniks on siinus. On lihtne näha, et  $d(4x) = 4 dx$ . Seega võime kirjutada

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4} \sin 4x + C,$$

mille võib leida ka muutuja vahetamise  $u = 4x$  abil

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.8** Leiame integraali

$$\int (x - 3)^2 dx.$$

Me teame, et ruutfunktsiooni algfunktsiooniks on teatav kuupfunktsioon. On lihtne näha, et  $d(x - 3) = dx$ . Seega võime kirjutada

$$\int (x - 3)^2 dx = \int (x - 3)^2 d(x - 3) = \frac{(x - 3)^3}{3} + C,$$

mille võib leida ka muutuja vahetamise  $u = x - 3$  abil

$$\int (x - 3)^2 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x - 3)^3}{3} + C.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.9** Leiame integraali

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx.$$

Märkame, et  $d \sin x = \cos x \, dx$ . Seega võime kirjutada

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Kontrolliks võib leida, et

$$\left( \frac{\sin^3 x}{3} + C \right)' = \frac{3 \sin^2 x}{3} \cos x = \sin^2 x \cos x.$$

◇ ◇ ◇

---

A GUIDE TO  
**INTEGRATION BY PARTS:**

---

GIVEN A PROBLEM OF THE FORM:  
 $\int f(x)g(x)dx=?$

CHOOSE VARIABLES  $u$  AND  $v$  SUCH THAT  
 $u = f(x)$   
 $dv = g(x)dx$

NOW THE ORIGINAL EXPRESSION BECOMES:  
 $\int u \, dv=?$

WHICH DEFINITELY LOOKS EASIER.  
ANYWAY, I GOTTA RUN.  
BUT GOOD LUCK!

## 7.7 Ositi integreerimine

### Lause 7.2

[22]. Olgu funktsioonid  $u$  ja  $v$  mingis intervallis  $X$  diferentseeruvad funktsioonid ja eksisteerigu integraal

$$\int v(x) u'(x) \, dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x) v'(x) \, dx$$

ja kehtib seos

$$\int \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{v}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \int \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (7.4)$$

*Tõestus.* Tehtud eelduste korral on korrutis  $u \cdot v$  diferentseeruv,

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Kuna on olemas integraal  $\int v(x) u'(x) \, dx$ , siis leidub funktsiooni  $v \cdot u'$  algfunktsioon  $F$ . Järelikult

$$(u(x) \cdot v(x))' = F'(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

millest saame

$$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - F'(x) = [u(x) \cdot v(x) - F(x)]'.$$

Saime, et  $(u \cdot v - F)$  on funktsiooni  $u \cdot v'$  algfunktsioon. Tulemus ütlebki, et

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - F(x) + C = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) \, dx.$$

□

**Märkus 7.7**

Valemit (7.4) nimetatakse määramata integraali ositi integreerimise valemiks. Kuna  $u'(x) dx = du$  ja  $v'(x) dx = dv$ , siis esitatakse seos sageli kujul

$$\int \mathbf{u} \, d\mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v} - \int \mathbf{v} \, d\mathbf{u}. \quad (7.5)$$

---

**Näide 7.10** Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \cdot \underbrace{e^x dx}_{d\mathbf{v}} = \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \cdot \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} \cdot \underbrace{dx}_{d\mathbf{u}} = x e^x - e^x + C.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 7.11** Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{d\mathbf{v}}.$$

Kui meil on integraali märgi all polünoom korda teine funktsioon, siis on tihti lootust leida vastus ositi integreerimise teel.

Üldiselt võetakse funktsiooniks  $v$  selline funktsioon, millest on lihtne leida integraali ja funktsiooniks  $u$  selline, et  $u$  tuletis lihtsustab avaldist. Kuna tuletis alandab polünoomi järku ja integreerimine tõstab, siis kasulik on valida

$$u = x, \quad dv = \cos x dx.$$

Siit

$$u'(x) = x' = 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

ja võrduse  $dv(x) = \cos x dx$  integreerimisel saame

$$\int dv(x) = \int \cos x dx \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sin x.$$

Seega ositi integreerimise valemi abil leiame

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 7.12** Vaatleme ühte sageli esinevat integraali

$$\int \sin^2 x dx.$$

Leiame selle integraali mitmel erineval moel. Esiteks ositi integreerimisega, võttes  $u = \sin x$  ja  $dv = \sin x dx$ . Siis

$$du = \cos x dx, \quad v(x) = -\cos x.$$

◇ ◇ ◇

Saame

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx.\end{aligned}$$

Siit saab leida, et

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Viies  $\int \sin^2 x \, dx$  paremalt poolt vasakule, tekib võrrand  $\int \sin^2 x \, dx$  suhtes

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C.$$

Järelikult

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 7.13** Teine võimalus  $\int \sin^2 x \, dx$  leidmiseks on kasutada trigonomeetrilist valemit

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide 7.14** Kolmas võimalus on kasutada siinuse kompleksarvulist esitust (imaginaarühik  $i$  käitub siin kui konstant),

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx = \int \left( \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{-4} \right) dx.$$

Arvestades, et

$$\int e^{i2x} \, dx = \int \frac{1}{2i} e^{i2x} d(2ix) = \frac{e^{i2x}}{2i} + C,$$

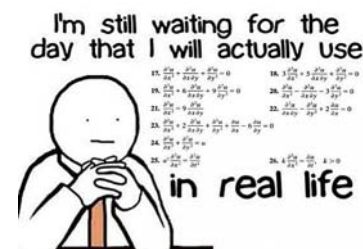
siis

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right) + \frac{x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Analoogiliselt leitakse eraldi  $\int \cos^2 x \, dx$ , kuid praegu saame ka trigonomeetrilise valemi abil leida

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \left( 1 - \frac{1}{2} + \cos 2x \right) dx \\ &= x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Allikas:

<http://joyreactor.com/post/951597>

## 7.8 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Vaatleme järgnevalt lihtsamaid juhte polünoomide  $P(x)$  ja  $Q(x)$  jagatise

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

integreerimisel. **Siinjuures eeldame, et murd on antud taandatud kujul (lugejas olev  $x$  kõrgeim aste on väiksem kui nimetajas olev  $x$  kõrgeim aste).** Põhiidee on murd  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  esitada osamurdude summana. Viimane on võimalik, kuna igat polünoomi saab esitada korrutisena liikmetest tüüpi  $(x - a)$  ja  $(x^2 + bx + c)$ . Anname idee näidete varal.

### Definitsioon 7.4

Kui polünoomi  $f(x)$  aste on väiksem polünoomi  $g(x)$  astmest, siis ratsionaalset funktsiooni  $\frac{f(x)}{g(x)}$  nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

### Lihtmuru osamurdudeks lahutamise valem.

Olgu  $\frac{f(x)}{g(x)}$  lihtmurd. Kui

$$g(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + p_1x + q_1)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole nullkohti), siis kehtib valem

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \\ & \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} \\ & + \dots + \\ & \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + p_1x + q_1)^m} + \dots, \end{aligned} \tag{7.6}$$

kus konstandid  $A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_l; \dots; C_1, \dots, C_m; D_1, \dots, D_m; \dots$  on mingid reaalarvud.

### Näide 7.15 Ratsionaalmurdu

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

saab esitada kahe osamuru summana:

$$\frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 3}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.16** Leiame integraali

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx.$$

Antud jagatist  $\frac{5x-1}{x^2-x-2}$  saab lahutada teguriteks

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}.$$

Seega

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.17** Integreerime

$$I = \int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx.$$

Antud murru saab jagada osamurdudeks

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

Tundmatud konstandid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  leiame järgmiselt. Viime parema poole ühisele nimetajale

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}.$$

Järgnevalt arvestame, et lugejad omavahel võrduvad,

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1).$$

Paneme tähele, et kui me asendame muutuja  $x$  nimetaja nullkohtadega  $1$ ,  $-1$ ,  $-3$ , siis saame tundmatud kordajad järjest välja arvutada. Kui  $x = 1$ , siis

$$6 = 8A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{4}.$$

Kui  $x = -1$ , siis

$$-2 = -4B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}.$$

Kui  $x = -3$ , siis

$$-2 = 8C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}.$$

Siit

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{4}$$

ja esialgne integraal avaldub kujul

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C'. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 7.18** Leiame integraali

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx.$$

Murru  $\frac{1}{x(x^2+4)}$  saab lahutada teguriteks

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Võttes tegurid uuesti ühisele nimetajale

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{x(x^2+4)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)},$$

saame konstantide  $A, B$  ja  $C$  jaoks võrrandid

$$A+B=0, \quad C=0, \quad 4A=1.$$

Seega  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$  ja  $C = 0$ . Kokkuvõtteks

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x^2+4| + C'.$$

◇ ◇ ◇

Kui nimetajas on ilma reaalse te nullkohtadeta ruutpolünoom, siis lugejas peab konstandi asemel olema lineaarne funktsioon  $Bx + C$ .

**Näide 7.19** Leiame integraali

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x-1)} dx.$$

Antud jagatise  $\frac{2x^2+1}{x^2(x-1)}$  saab lahutada teguriteks

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Võttes tegurid uuesti ühisele nimetajale

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} &= \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B-A)x - B}{x^2(x-1)} \end{aligned}$$

saame konstantide  $A, B$  ja  $C$  jaoks võrrandid

$$A+C=2, \quad B-A=0, \quad -B=1.$$

Seega  $A = -1$ ,  $B = -1$  ja  $C = 3$ . Kokkuvõtteks

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+1}{x^2(x-1)} dx &= \int \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui nimetajas on polünoom, millel on kordsed nullkohad, siis tuleb välja kirjutada ka kõik madalama astmega polünoomid. Polünoomil  $x^2$  on kordne nullkoht  $x = 0$  ja seega peame kirjutama osamurrud  $\frac{1}{x}$  ja  $\frac{1}{x^2}$ .

Üldise valemi jälgimine on pisut pikk ja kohmakas. Sagedamini läheb vaja järgmist tüüpi polünoomide integreerimist.



**Ühekordsed nullkohad.**

$$\frac{7-x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

$$\frac{6x^2-14x-11}{(x+1)(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2x+1}.$$

**Kordsed nullkohad.**

$$\frac{7-x}{x(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3}.$$

**Kui ei ole reaalseid nullkohti.**

$$\frac{x^3+3x^2+2x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

**Näide 7.20** Leiame integraali

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx.$$

Kuna polünoomil  $x^2+1$  reaalseid nullkohti ei ole, siis peame kirjutama integraalimärgi all oleva murru järgmisel kujul:

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

ehk

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x}{x(x^2+1)^2}.$$

Kui  $x = 0$ , siis nimetajate võrdumisest saame, et  $A = 1$ . Ülejäänud kordajate leidmiseks grupeerime liikmeid:

$$1 = x^4 + 2x^2 + 1 + Bx^2 + Cx + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex$$

ehk

$$1 = (B+1)x^4 + Cx^3 + (B+2+D)x^2 + Ex.$$

Kuna vasakul pool  $x$ -astmed puuduvad, siis kõik  $x$ -kordajad peavad võrduma nulliga. Saame, et  $E = 0$ ,  $C = 0$ ,  $B = -1$  ja  $D = -1$ . Seega

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx.$$

Kirjutame integraali osadeks

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} d(x^2+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} d(x^2+1) \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C'. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



## Peatükk 8

# Diferentsiaalvõrrandid

---

8.1	Sissejuhatus . . . . .	144
8.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt . . . . .	146
8.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid . . . . .	147
8.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid . . . . .	148
8.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid . . . . .	150

---

### Kontrolltöö teemad

1. Esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine.
2. Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine.

### Eksamiteemad

1. Diferentsiaalvõrrandi ja tema lahendi mõiste.
2. Esimest järku diferentsiaalvõrrand.
3. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne.
4. Esimest järku eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand.
5. Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamise skeem.
6. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand.
7. Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamise skeem.

## 8.1 Sissejuhatus

Diferentsiaalvõrrandid on teaduses andnud väga suure hüppe. Kui Newton avaldas oma tuntud seaduse

$$F = m a,$$

tekkis võimalus hakata protsesside käitumist ette ennustama. Füüsikas tekkis rida seadusi ja võrrandeid, mis sisaldasid mingi suuruse ajas muutumise kiirust või kiirendust. Seega antud Newton'i seaduses, teades kiirendust ja jõudu, saame leida keha poolt läbitud teepikkuse,

$$a(t) = v'(t) = s''(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) = m \cdot s''(t).$$

Paljusid seadusi on olulisemalt lihtsam kirjeldada läbi kiiruste/kiirenduste kui kirjeldada neid läbi otsitavate suuruste (nn ilma tuletisteta). Sellised võrrandid on oma sisult diferentsiaalvõrrandid, kus otsitavaks on suurus ise.

---

**Näide 8.1** Vaatame ühte lihtsat päriselu protsessi, mis oma olemuselt on tegelikult samuti diferentsiaalvõrrand – üks lihtsamatest.

Analüütik teenib oma tööga 10 eurot tunnis. Mitu eurot teenib ta kahe tööpäevaga ehk 16 tunniga, kui alghetkeks oli tal teenitud 500 eurot?

See on küll lihtne arvutus, kuid vaatame, kuidas seda diferentsiaalvõrrandi abil kirja panna. Olgu  $y = y(t)$  analüütiku poolt teenitud summa eurodes hetkel  $t$  tundi. Antud 10 eurot tunnis saab vaadelda kui, kui teenitud raha hulga muutumise kiirus ajas (eurot/tunnis, analoogiline km/h). Seega analüütiku teenistus muutub (konstantse) kiirusega

$$y'(t) = 10.$$

Selle võrrandi lahendamiseks võime võrrandi mõlemat poolt integreerida ( $y$  on funktsiooni  $y'$  algfunktsioon):

$$\int y'(t) dt = \int 10 dt \quad \Rightarrow \quad y(t) = 10t + C.$$

Saime võrrandi lahendiks ühe sirge, mis sisaldab tundmatut konstanti  $C$ . See lahend kirjeldab kõikvõimalikke teenitud summasid erinevate algsummade  $y(0)$  kohta. Kuna meil on antud tingimus, et  $y(0) = 500$ , siis

$$y(0) = 10 \cdot 0 + C \quad \text{ehk} \quad 500 = 10 \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 500,$$

mille asendamisel saamegi leida küsitud summa

$$y(16) = 10 \cdot 16 + 500 = 660.$$

◇ ◇ ◇

See tähendab, et keha massiga  $m$  liigub kiirendusega  $a$ , kui talle mõjub jõud suurusega  $F$ . Viimast võib lugeda ka nii: selleks, et keha massiga  $m$  liiguks kiirendusega  $a$ , peab talle mõjuma jõud suurusega  $F$ . Newton'i seadus on antud lihtsamal kujul ühe ajamomendi kohta, kuid seda saab hõlpsasti laiendada ajast  $t$  sõltuvaks seaduseks.

Selle näite korral ei olnud tähtis niivõrd see, et me ilmingimata peame antud protsessi kirja panema diferentsiaalvõrrandi abil, kuivõrd pigem see, et näidata diferentsiaalvõrrandi olemust ja kui lihtsalt tekivad diferentsiaalvõrrandid kiiruste kaudu või siis kuidas saab protsessi kirja panna kiiruste abil isegi selliste protsesside kohta, mille peale me igapäevaselt ei tule.

**Näide 8.2** Kui eelmise näite korral tekkis kellelgi küsimus, miks panna lihtne ülesanne sellisel “keeruliselt” kirja, siis vaatame järgmist näidet. Oletame, et võtame laenu 1000 eurot (liit)intressiga 5% aastas. Soovime teada, milliseks kujuneb antud intressi korral laenatud summa suvalisel ajahetkel  $t$  aastat (ehk kui suureks meie laen kasvab). Selle suuruse arvutamine ei ole raske, aga enam mitte nii lihtne, kui eelmises näites. Antud ülesande saame kirja panna järgmiselt.

Olgu laenu suurus hetkel  $t$  tähistatud  $y = y(t)$ . Laenu summa kasvab kiirusega 5% iseendast ehk

$$y' = 0.05y, \quad y(0) = 1000.$$

Sellisena on laenu summa suuruse arvutamise seadust väga lihtne meelde jätta. Seda võrrandit on üsna lihtne lahendada, nagu hiljem selgub.  
◇ ◇ ◇

**Näide 8.3** Bioloogilise liigi arvukus. Olgu  $y = y(t)$  mõne liigi isendite (näiteks teatud bakterite) arv ajamomendil  $t$ .

Malthuse seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus  $y'(t)$  on võrdeline isendite arvuga:

$$y'(t) = k y(t) \quad \text{või teisiti} \quad \frac{dy}{dt} = k y,$$

kus  $k$  on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on  $k$  positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis  $k$  on negatiivne.

Antud võrrandiga  $y'(t) = k y(t)$  kirjeldatakse liigi arvukuse muutumise kiirust igal ajamomendil  $t$ , otsitavaks on liigi arvukus  $y(t)$  ise.

Diferentsiaalvõrranditel on tavaliselt lõpmata arv lahendeid. Selleks, et ülesanne oleks korrektselt püstitatud ja saaks välja valida meie mudelile sobiva(d) lahendi(d), peab olema toodud lisaks veel mingi algtingimus, s.t antud olukorras bakterite arv mingil algmomendil  $t = t_0$ . Tihti võib algmomendi võtta  $t_0 = 0$ . Näiteks võib siis algtingimuseks olla  $y(0) = 10^6$  bakterit mingis keskkonnas.

Märgime, et algtingimuse  $y(0) = y_0$  korral on meie esialgse võrrandi täpseks lahendiks

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Näeme, et  $k > 0$  korral toimub liigi eksponentsiaalne kasv ja  $k < 0$  korral liigi eksponentsiaalne kahanemine.

◇ ◇ ◇

Protsendid kirjutame tihti skaalas  $[0, 1]$  ehk siin  $5\% = 0.05$ . Seega esimese aasta lõpuks muutub summa  $y$  eurolt  $y + 0.05y$  eurole.

Thomas Robert Malthus  
(1766 - 1834)



Allikas: Wikipedia  
Malthus oli inglise demograaf ja majandusteadlane.

## 8.2 Diferentsiaalvõrranditest üldiselt

Kui eelnevalt vaatlesime vaid lihtsamaid diferentsiaalvõrrandite näiteid, siis tegelikult on diferentsiaalvõrrandite liike väga palju ja neil kõigil on oma olemuselt ja lahendamismeetoditelt väga olulisel erinevused.

### Märkus 8.1

Diferentsiaalvõrrandite korral peame paratamatult mainima mitme muutuja funktsioone, mida me ametlikult ei ole veel õppinud. Esituses teeme seda nii vähe kui võimalik. Olgu öeldud, et sarnaselt ühe muutuja funktsioonile, nimetatakse antud eeskirja  $z = f(x, y)$  kahe muutuja funktsiooniks  $f$ , kui igale kahele argumentile  $x$  ja  $y$  seatakse vastavusse üks ja ainult üks arv  $z$ .

### Definitsioon 8.1

**Diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

### Definitsioon 8.2

**Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

### Definitsioon 8.3

Diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** mittetühjas vahemikus  $(a, b)$  nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, kui ta on selles vahemikus pidevalt diferentseeruv ning tema asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles vahemikus.

### Märkus 8.2

Antud kursusel tegeleme ainult esimest järku harilike diferentsiaalvõrranditega. Seega kõik siin paragrahvis vaadeldavad mõisted käivad **esimest järku harilike diferentsiaalvõrrandite** kohta ning edaspidi kirjutame lihtsalt “diferentsiaalvõrrandid”. Täpsustame ainult juhul, kus see on eriti oluline. Diferentsiaalvõrrandi järgu määrab ära võrrandis esinevate tuletiste kõrgeim järk.

### Näide 8.4 Võrrandid

$$y'(x) = x^2 + y(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y^2$$

on vastavalt 1. järku ja 2. järku diferentsiaalvõrrandid otsitava funktsiooni  $y = y(x)$  suhtes.

◇ ◇ ◇

## 8.3 Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

### Definitsioon 8.4

**Esimest järku diferentsiaalvõrrandiks** nimetakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$y' = f(x, y), \quad (8.1)$$

kus otsitavaks on funktsioon  $y = y(x)$ .

Kuju  $y' = f(x, y)$  nimetakse normaalkujuks.

Võib anda ka üldisema kuju, so üldkuju

$$F(x, y, y') = 0.$$

### Näide 8.5 Võrrandid

$$y' = \frac{y^2}{x} - 1, \quad y'' = \frac{y^2}{x} - 1$$

on vastavalt 1. järku ja 2. järku diferentsiaalvõrrandid.

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 8.5

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi  $y' = f(x, y)$  **üldlahendiks** nimetakse funktsiooni  $y = y(x, C)$ , mis sõltub ühest suvalisest konstandist  $C$  ja rahuldab diferentsiaalvõrrandit mistahes konstandi  $C$  konkreetsel väärtusel.

### Definitsioon 8.6

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi  $y' = f(x, y)$  **erilahendiks** nimetakse mistahes funktsiooni  $y = y(x, C_0)$ , mis saadakse üldlahendist  $y = y(x, C)$ , kui anda selles suvalisele konstandile  $C$  konkreetne väärtus  $C = C_0$  või mis saadakse algtingimuse  $y(a) = y_a$  rakendamisel.

### Näide 8.6 Võrrandi

$$y' = 8$$

üldlahendiks on funktsioon  $y(x) = 8x + C$ , kus  $C$  on suvaline reaalarv.

Tõepoolest,

$$y'(x) = (8x + C)' = 8 \quad \forall x \in X.$$

Kui võtame  $C = 1$  ja  $C = -12$ , siis saame erilahendid  $y(x) = 8x + 1$ ,  $y(x) = 8x - 12$ , mis graafiliselt tähendab sirgeid tõusuga 8.

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 8.7

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi

$$y' = f(x, y) \quad (8.2)$$

sellist lahendit  $y = y(x)$ , mis rahuldab **algtingimust**

$$y(a) = y_a, \quad (8.3)$$

nimetakse **Cauchy ülesandeks** (või ka **algtingimusega ülesandeks**).

**Näide 8.7** Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1.$$

Võrrandi  $y' = -y^2$  üldlahendiks on funktsioon  $y(x) = \frac{1}{x+C}$ , kuna

$$y'(x) = \left( \frac{1}{x+C} \right)' = -\frac{1}{(x+C)^2} = -y^2(x) \quad \forall x \in X.$$

Konstandi  $C$  saame leida algtingimusest

$$y(0) = \frac{1}{0+C} \quad \text{ehk} \quad 1 = \frac{1}{C} \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

Seega Cauchy ülesande lahendiks on funktsioon  $y(x) = \frac{1}{x+1}$ .

◇ ◇ ◇

## 8.4 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

### Definitsioon 8.8

Esimest järku diferentsiaalvõrrandit (8.1) nimetatakse **eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks**, kui selle saab tundmatu  $y = y(x)$  suhtes kirjutada kujul

$$g(y) dy = f(x) dx. \quad (8.4)$$

Ilma diferentsiaalideta on võrrand kujul

$$g(y) y'(x) = f(x).$$

Eraldatud muutujatega võrrandis on ainult muutujat  $y$  sisaldavad liikmed ühel ja ainult argumenti  $x$  sisaldavad liikmed teisel pool võrdusmärki.

**Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi** saab lahendada väga lihtsal moel: integreerides võrrandi mõlemaid pooli.

1. Kirjutame  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , saades võrrandi kujul

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

2. Korrutame võrrandit argumenti muuduga  $dx$

$$g(y) dy = f(x) dx.$$

3. Integreerime võrrandi mõlemaid pooli (vasakut poolt  $y$  järgi ja paremat poolt  $x$  järgi)

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

4. Lahend  $y = y(x)$  võib esitada nn ilmutamata kujul, kui vasakpoolne integraal peaks osutuma keeruliseks tehteks.



**Näide 8.8** Lahendame võrrandi

$$\frac{1}{y(x)}y'(x) = x + 1.$$

See on eraldatud muutujatega võrrand. Kirjutame selle kujule

$$\frac{1}{y}dy = (x + 1)dx.$$

Integreerides võrduse mõlemad pooli saame

$$\ln |y| = \frac{(x + 1)^2}{2} + C.$$

millest saame

$$|y| = e^C \cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

Kuna  $C$  on suvaline konstant, siis võime tähistada  $C_0 = e^C$  ja kuna  $y$  võib olla nii positiivne kui negatiivne, siis tähistame võimaliku konstandi  $\pm C_0 = C_1$  ja esitame lõppvastuse kujul

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad C_1 \neq 0.$$

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 8.9

Esimest järku diferentsiaalvõrrandit (8.1) nimetatakse **eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks**, kui selle saab viia eraldatud muutujatega võrrandiks. Üldiselt on see kujul

$$f_1(x)g_1(y)y'(x) = f_2(x)g_2(y). \quad (8.5)$$

**Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi** saab lahendada järgmiselt:

1. Grupeerime kõik ainult  $y$ -st sõltuvad liikmed vasakule poolde ja ainult  $x$ -st sõltuvad liikmed paremale

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx, \quad f_1(x), g_2(y) \neq 0.$$

2. Saime eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi, mille lahendamiseks integreerime võrduse mõlemad pooli.
3. NB! Seoses funktsioonidega  $g_2$  ja  $f_1$  jagamisega peab läbi vaatama võimalikud kaduma läinud lahendid, mis tekivad nulliga jagamisel.

Võrrandi vasakul pool on liige  $\frac{y'}{y}$ , mille sisuks on näidata suuruse  $y$  suhtelist kasvukiirust (efektiivsus ennast taas toota, kui  $y = y(t)$  rollis on mingi bioloogiline protsess ajas). Ehk siin suhteline kasvukiirus on lineaarne, täpsemalt  $x + 1$ . Lineaarse kasvukiirusega suurus osutub seda sorti lahend, nagu me all pool saame.

Me ei saa lubada väärtust  $C_1 = 0$ , kuna siis  $y \equiv 0$ , aga algvõrrandist on näha, et seda viimast ei tohi juhtuda, kuna võrrandisse tekib nulliga jagamine. Miks me tohime  $|y|$  kirjutada ilma absoluutväärtuseta? Tegelikult ega me niisama ei kirjutagi, vaid  $y$  märk peidetakse konstandi  $C_1$  sisse ära.

**Näide 8.9** Lahendame võrrandi

$$xyy'(x) = \frac{x^2 + 2}{y - 1}.$$

Grupeerime samanimelised liikmed ühele poole

$$y(y - 1)dy = \frac{x^2 + 2}{x}dx \quad \text{ehk} \quad (y^2 - y)dy = \left(x + \frac{2}{x}\right)dx.$$

Integreerime võrduse mõlemat poolt,

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + C.$$

Sellest võrrandist pole lahendit  $y = y(x)$  just eriti lihtne ilmutatud kujul avaldada.

◇ ◇ ◇

**Näide 8.10** Vaatleme sissejuhatuses toodud populatsiooni mudelit

$$y' = ky.$$

Kirjutame selle kujule

$$\frac{1}{y}dy = k dx, \quad y \neq 0.$$

Integreerides saame

$$\ln|y| = kx + C,$$

millest

$$|y| = e^C \cdot e^{kx}.$$

Üldlahendi võime esitada kujul

$$y(x) = C_0 e^{kx}.$$

◇ ◇ ◇

## 8.5 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

### Definitsioon 8.10

Esimest järku **lineaarse diferentsiaalvõrrandi** üldkujuks on

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x), \quad (8.6)$$

kus  $p_0, p_1$  ja  $f$  on antud funktsioonid ning  $y = y(x)$  on otsitav. Funktsiooni  $f$  nimetatakse selle võrrandi **vabaliikmeks**.

Siin  $C$  on suvaline konstant, siis  $C_1 = e^C > 0$  on suvaline positiivne arv. Kuna  $|y|$  võib olla nii  $+y$  kui  $-y$ , siis viime selle märgi suvalise konstandi  $C_2 = \pm C_1$  alla. Vahetu kontroll näitab, et  $y = 0$  on esialgse võrrandi lahend. Seega võib tundmatu konstant  $C$  olla ka null ning kokkuvõttes suvaline reaalarv.

Diferentsiaalvõrrandit nimetatakse lineaarseks, kui ta on lineaarne otsitava funktsiooni ja selle tuletiste suhtes.

**Teoreem 8.1**

Olgu võrrandi (8.6) kordajad  $p_0$  ja  $p_1$  ning vabaliige  $f$  pidevad funktsioonid vahemikus  $(a, b)$ , kusjuures  $p_0(x) \neq 0$  iga  $x \in (a, b)$  korral. Olgu  $x_0 \in (a, b)$  ja  $y_0 \in \mathbb{R}$  mingid ette antud arvud. Siis on võrrandil (8.6) olemas üks ja ainult üks lahend  $y = y(x)$ , mis rahuldab algtingimust  $y(x_0) = y_0$  (A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid, 2011).

**Märkus 8.3**

Kui kordaja  $p_0(x)$  erineb nullist, siis võib selle kordajaga esialgselt võrrandit läbi jagada ning sel juhul on lineaarne esimest järku võrrand kujul

$$y'(x) + p(x)y(x) = g(x), \quad (8.7)$$

kus  $p$  ja  $g$  on antud funktsioonid ning  $y = y(x)$  on otsitav. Edaspidi kasutame just seda kuju.

**Lineaarse võrrandi**

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

lahendamise **integreerimisteguri abil**.

1. Korrutame võrrandit läbi suvalise nullist erineva funktsiooniga

$$\mu = \mu(x),$$

$$\mu y' + (\mu p) y = \mu f.$$

2. Paneme tähele, et vasak pool oleks korrutise  $\mu y$  tuletis

$$(\mu y)' = \mu y' + \mu' y,$$

kui kehtiks  $\mu p = \mu'$ . Kuna  $\mu$  on suvaline funktsioon, siis võimegi nõuda, et ta oleks selline, et ta rahuldaks diferentsiaalvõrrandit

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x).$$

3. Eelmisest võrrandist leiame  $\mu$  ja sel juhul võrrandist

$$(\mu y)' = \mu f$$

saame mõlemat poolt integreerides lahendi

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) f(x) dx.$$

**Üldlahendi leidmise valem**

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left( C + \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx \right),$$

kus  $C$  on suvaline konstant.

**Näide 8.11** Lahendame lineaarse võrrandi

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Kasutades integreerimisteguri leidmist, korrutame võrrandi läbi funktsiooniga  $\mu = \mu(x)$

$$\mu y' + \left(-\frac{2\mu}{x+1}\right) y = \mu (x+1)^3.$$

Vasak pool muutub korrutise  $\mu y$  tuletiseks, kui  $\mu$  rahuldab võrrandit

$$\mu' = -\frac{2\mu}{x+1}.$$

Viimane võrrand on eralduvate muutujatega, eraldades muutujad

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{x+1}$$

saame mõlemalt poolt integreerides

$$\ln |\mu| = -2 \ln |x+1| + C.$$

Arvestades logaritmifunktsiooni omadusi, saame  $\mu$  jaoks üldlahendi  $\mu = C(x+1)^{-2}$ . Kuna piisab ainult ühest konkreetsest funktsioonist  $\mu$ , mis rahuldaks vastavat diferentsiaalvõrrandit, siis võime võtta näiteks

$$\mu(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Olles leidnud sellise funktsiooni  $\mu$ , mis teeb vasakust poolest korrutise  $\mu y$  tuletise, saame võrrandi

$$(\mu y)' = \mu (x+1)^3.$$

Tegemist on eraldatud muutujatega võrrandiga. Peale  $\mu$  asendamist integreerime mõlemat poolt ning avaldame otsitava

$$\frac{1}{(x+1)^2} y = \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} dx \Rightarrow y = (x+1)^2 \cdot \int (x+1) dx.$$

Kirjutame välja esialgse võrrandi üldlahendi

$$y(x) = (x+1)^2 \left( \frac{1}{2}x^2 + x + C \right) = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 8.12** Newton'i jahtumisseaduse "keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnahüki kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega" võib kirja panna järgmisel kujul

$$T' = \beta(T - T_*),$$

kus  $T = T(t)$  on keha (pinnahüki) temperatuur ajahetkel  $t$ ,  $T_*$  on konstantne välistemperatuur ja  $k$  on võrdetegur (konstant, mille saab konkreetse keskkonna jaoks määrata näiteks vaatluste või katsete teel).

◇ ◇ ◇

Lahendame selle võrrandi. Esiteks kirjutame ta kujule

$$T' - \beta T = -\beta T_*.$$

Korrutades võrrandi läbi suvalise nullist erineva funktsiooniga  $\mu = \mu(t)$ , saame

$$\mu T' + (-\beta\mu) T = -\beta T_* \mu.$$

Esiteks leiame (ühe) funktsiooni  $\mu$  diferentsiaalvõrrandist

$$\mu' = -\beta\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu} d\mu = -\beta,$$

millest saame (võttes määramata konstandi  $C = 1$ )

$$\ln |\mu| = -\beta t \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{-\beta t}.$$

Edasi võime võrrandist  $(\mu \cdot T)' = -\beta T_* \mu$  avaldada lahendi

$$T = \frac{1}{\mu} \int (-\beta T_* \mu) dt = -\beta T_* e^{\beta t} \int e^{-\beta t} dt.$$

Saame

$$T = -\beta T_* e^{\beta t} \left( \frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + C \right) = T_* + C_0 e^{-\beta t}.$$

Siin  $C_0 = -\beta T_* C$ . Kui meil on antud algtemperatuur  $T_0 = T(0)$ , siis

$$T_0 = T_* + C_0 e^0$$

millest saamegi avaldada

$$C_0 = T_0 - T_*.$$

Vastava Cauchy ülesande lahend oleks kirjutatav kujul

$$T(t) = T_* + (T_0 - T_*) e^{-\beta t}.$$

◇ ◇ ◇



## Peatükk 9

# Pindala ja Riemann'i integraal

---

9.1	Pindala leidmine lõplike summade abil . . . . .	156
9.2	Riemann'i summad . . . . .	159
9.3	Määratud (Riemann'i) integraal . . . . .	161
9.4	Määratud integraali omadused . . . . .	163
9.5	Kõvertrapetsi pindala . . . . .	164
9.6	Numbriline integreerimine * . . . . .	166

---

### Kontrolltöö teemad

1. Riemann'i integraali omadused.
2. Kõvertrapetsi pindala ja selle leidmine.

### Eksamiteemad

1. Riemann'i summa mõiste.
2. Riemann'i integraali mõiste.
3. Teoreemid 9.1 ja 9.2.
4. Määratud integraali omadused.
5. Kõvertrapets ja selle pindala.
6. Trapetsmeetod.

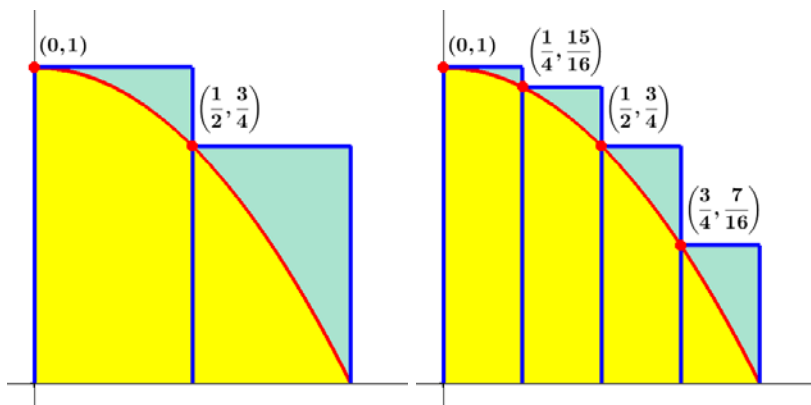
## 9.1 Pindala leidmine lõplike summade abil

Määratud integraalil on matemaatikas väga oluline roll ning siin on palju rakendusi, mida kasutatakse laialt praktikas (näiteks kujundi pindala, keha ruumala ja pinna pindala, keha massikese, töö arvutamine, vedelike poolt avaldatav rõhk jne). Enne määratud integraali juurde minekut tutvume tasandilise kujundi pindala leidmise probleemiga. Viimane on tihedalt seotud määratud integraali olemusega.

Vaatleme näiteks funktsiooni

$$y = 1 - x^2$$

graafikut. Kuidas leida graafiku joonega ning  $x$ - ja  $y$ -teljega piiratud tasandilise kujundi (paremal oleval joonisel märgitud kollase värviga) pindala  $S$ ? Geomeetrias ei leidu (üldisemate) sedatüüpi kujundite pindalade arvutamiseks lihtsat valemit. Täpse pindala leidmise asemel võime selle arvutada ligikaudselt. Jagades lõigu  $[0, 1]$  näiteks kaheks, saame kaks osalõiku  $[0, 0.5]$  ja  $[0.5, 1]$ . Moodustame mõlemas osalõiguis ristküliku, mille alusteks on vastavad osalõigud ja mille kõrgusteks on funktsiooni  $y = 1 - x^2$  väärtused osalõikude vasakpoolsetes otspunktides.



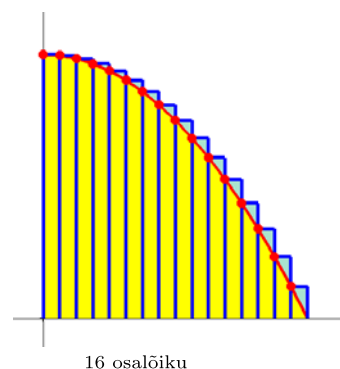
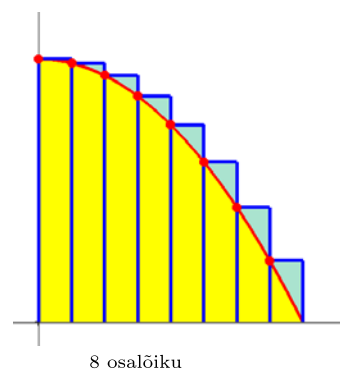
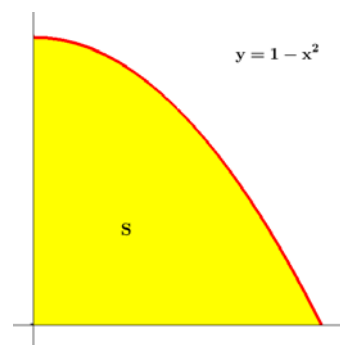
Sel juhul ristkülikute pindalade (alus korda kõrgus) summa on

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{8} = 0.875.$$

Saadud pindala on kindlasti suurem, kui tegelik pindala  $S$ , kuna ristkülikud sisaldavad endas tervet meie vaadeldavat kujundit. Sellist summat nimetakse **ülemiseks summaks**. Leitud lähisväärtus täpsustub, kui võtame kahe asemel neli osalõiku. Siis on iga ristküliku alus pikkusega  $\frac{1}{4}$  ja

$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} = \frac{25}{32} \approx 0.78125.$$

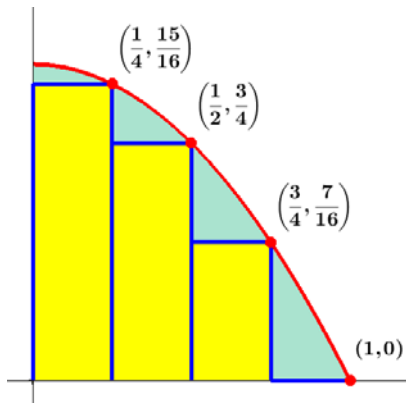
Ka see tulemus on kindlasti suurem kui tegelik pindala  $S$  (on samuti ülemine summa). Näeme, et kui me võtame veel rohkem osalõike (või ka ristkülikuid), siis taoliselt arvutatud tulemus peaks täpsest väärtusest  $S$  erinema järjest vähem ja vähem.





Pindala  $S$  võiksime ligikaudu arvutada ka teistmoodi. Võttes neli osalõiku, moodustame igas osalõigis samuti ristkülikud, kuid seekord on nende kõrgusteks funktsiooni väärtused osalõikude parempoolsetes otspunktides. Sel juhu ristkülikute pindalade summa on

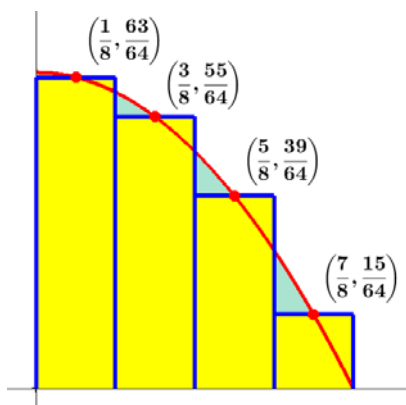
$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{17}{32} = 0.53125.$$



Saadud pindala  $S_4$  on kindlasti väiksem, kui tegelik pindala  $S$ , kuna ristkülikud asuvad täielikult meie vaadeldava kujundi sees. Sellist summat nimetatakse **alumiseks summaks**. Jällegi võib märgata (parempoolsetelt joonistelt), et osalõikude arvu suurendamine peaks ligikaudse väärtuse viima järjest lähemale ja lähemale täpsele pindalale  $S$ . Tegelik pindala  $S$  asub alumise ja ülemise summa vahel,

$$0.53125 \leq S \leq 0.78125.$$

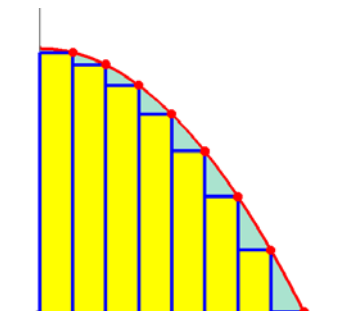
Pindala  $S$  saab ligikaudu arvutada ka kolmandat moodi. Võtame neli osalõiku ja moodustame igas osalõigis ristkülikud, mille alusteks on osalõigud, kuid mille kõrgusteks on funktsiooni  $y = 1 - x^2$  väärtused osalõikude keskpunktides. Sellist ristkülikute moodustamist ja nende pindalade kokku liitmist nimetatakse ka **keskpunkti meetodiks**.



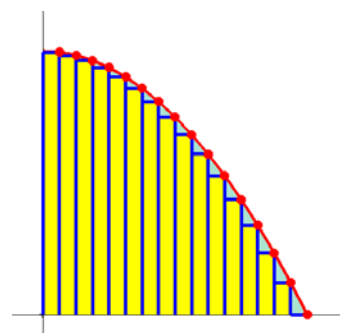
Siis

$$S_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{63}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{55}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{39}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{64} = \frac{1}{4} \cdot \frac{172}{64} = 0.671875,$$

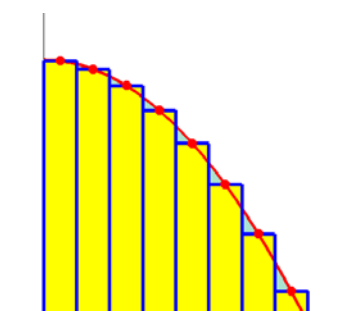
mis jääb samuti ülemise ja alumise summa vahele. Kas see on suurem või väiksem tegelikust väärtusest, seda me enam nii lihtsalt öelda ei saa.



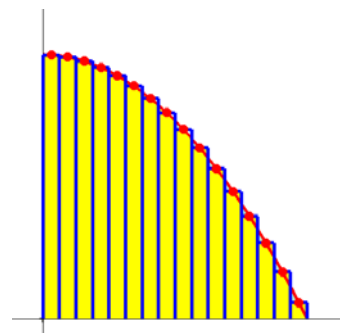
8 osalõiku



16 osalõiku



8 osalõiku



16 osalõiku

Üldisemalt võime pindala  $S$  ligikaudu arvutada järgmiselt. Etteantud lõigul  $[a, b]$  võtame  $n$  osalõiku pikkusega

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Kui me fikseerime esimeses osalõigus punkti  $c_1$ , teises osalõigus punkti  $c_2$  jne, siis saame ristkülikute pindalasid kokku liites tulemuseks

$$S_n = f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x.$$

Võttes rohkem ja rohkem osalõike, saame järjest täpsema tulemuse, s.t. erinevus täpse pindala  $S$  ja ligikaudse pindala  $S_n$  vahel järjest väheneb.

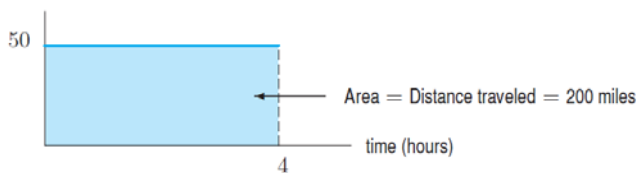
$n$	alumine summa	keskpunkti meetod	ülemine summa
2	0.375	0.6875	0.875
4	0.53125	0.671875	0.78125
50	0.6566	0.6667	0.6766
100	0.66165	0.666675	0.67165
1000	0.6661665	0.66666675	0.6671665

### Läbitud teepikkus

Vaatleme maanteel liikuvat autot, mille kiirus on igal ajahetkel  $t$  kirjeldatav funktsiooniga  $v = v(t)$ . Kui liikumine on ühtlase kiirusega ja ühes suunas, siis läbitud teepikkus võrdub kulutatud aeg korda (keskmise) kiiruse

$$s = v \Delta t.$$

Paneme tähele, et tegemist on samal ajal ristküliku pindalaga, kus aluseks on  $\Delta t$  ja kõrguseks  $v$ .



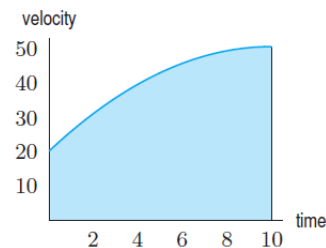
Allikas: [14]. 50 miili tunnis korda 4 tundi võrdub 200 miiliga.

Olgu järgnevalt kiirus ebahütlane. Jaotame ajavahemiku  $[0, T]$  võrdseteks ajavahemikeks sammuga (intervalliga)

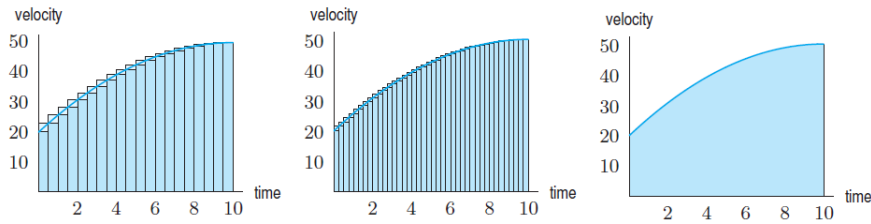
$$\Delta t = \frac{T}{n}.$$

Fikseerime esimeses osalõigus  $[0, \Delta t]$  ajahetke  $t_1$ , teises osalõigus  $[\Delta t, 2\Delta t]$  ajahetke  $t_2$  jne. Kui ajaintervall  $\Delta t$  on piisavalt väike, siis võib kiirust lugeda konstantseks ja läbitud teepikkus avaldub ligikaudselt summana

$$s_n \approx v(t_1) \Delta t + v(t_2) \Delta t + \dots + v(t_n) \Delta t.$$



Viimane ei ole mitte midagi muud, kui ristkülikute (laiusega  $\Delta t$  ja kõrgusega  $v(t_i)$ ) pindalade summa. See summa lähendab ajaintervalli  $\Delta t$  vähenemisel järjest paremini tegelikku läbitud teepikkust  $s$ .



Allikas: [14]

Siit saame idee, et läbitud teepikkust (ilma suunamuutusteta liikumisel) saab arvutada kiiruse  $v = v(t)$  graafiku ja  $x$ -telje vahele jääva kujundi pindala kaudu. Osutub, et sedasi saab arvutada paljusid suurusi. Matemaatikas on selliste summade jaoks eraldi mõiste ja tähis, mida kohe vaatamegi.

## 9.2 Riemann'i summad

Olgu lõigus  $[a, b]$  antud funktsioon  $y = f(x)$ . Teeme lõigus  $[a, b]$  **alajaotuse**  $\Delta_n$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9.1)$$

Alajaotus  $\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  jagab kogu lõigu  $[a, b]$  väikesteks osalõikudeks

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Tähistame iga osalõigu pikkuse

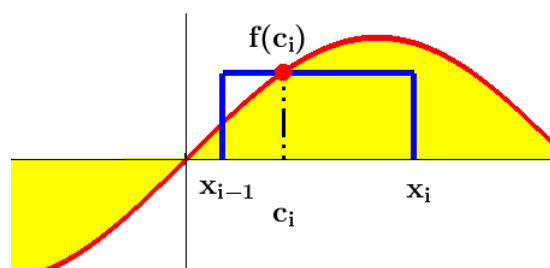
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Rõhutame, et jaotus ei pea olema ühtlane, s.t. osalõikude pikkused võivad üksteisest erineda.

Järgnevalt valime igas osalõigus  $[x_{i-1}, x_i]$  **suvaliselt** ühe punkti

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n. \quad (9.2)$$

Nüüd saame igas osalõigus moodustada ristküliku, mille aluseks on osalõik  $[x_{i-1}, x_i]$  ja kõrguseks on  $f(c_i)$ .



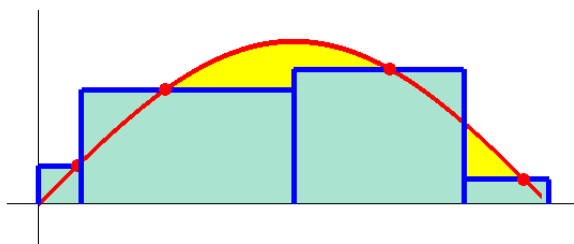
Iga sellise ristküliku pindala on  $S_i = f(c_i) \Delta x_i$ . See pindala võib olla positiivne, negatiivne või null, sõltuvalt funktsiooni  $f$  väärtusest  $f(c_i)$ . Liites kõikide ristkülikute pindalad, saame tulemuseks funktsiooni  $f$  graafiku ja  $x$ -telje vahele jääva kujundi pindala ligikaudse väärtuse.

### Definitsioon 9.1

Summat

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad (9.3)$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  **Riemann'i summaks** lõigus  $[a, b]$ .

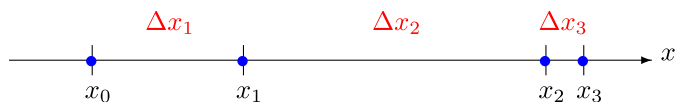


### Märkus 9.1

Selliseid Riemann'i summasid  $S_n$  on lõpmata palju, sõltudes sellest, kuidas me jagame lõigu  $[a, b]$  osalõikudeks ja kuidas me valime punktid  $c_1, \dots, c_n$ . Eelmises peatükis vaadeldud kolme liiki summad (vasakpoolsed ristkülikud, parempoolsed ristkülikud, keskpunkti meetod) olid samuti Riemann'i summad.

### Märkus 9.2

Kui alajaotus on ühtlane, siis osalõikude pikkused  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  on kõik võrdsed ning ristkülikute kitsamaks tegemiseks piisab osalõikude arvu  $n$  suurendamisest. Kui alajaotus ei ole ühtlane, siis ainult ristkülikute arvu suurendamisest ei piisa.



### Definitsioon 9.2

Defineerime lõigu  $[a, b]$  alajaotuse

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

**normi** tähisega  $\|\Delta_n\|$ , mis kujutab endast valitud alajaotuse suurimat osalõigu pikkust  $\Delta x_i$ :

$$\|\Delta_n\| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta x_i. \quad (9.4)$$

Riemann'i nimega on tuntuks saanud Riemann'i hüpotees (seotud nn. zeetafunktsiooni nullkohtade leidumise probleemiga), mida pole tänini suudetud tõestada. Selle kohta on olemas rida anekdoote.

*Matemaatik on aastaid üritanud tõestada Riemann'i hüpoteesi kuid edutult. Ühel päeval sõlmib ta lepingu Saatanaga, kes lubab talle nädala lõpuks tuua tõestuse, kui saab vastu matemaatiku hinge. Matemaatik on väga elevil, saadab laiali pressiteateid, suhtleb telefoni teel, lepib kokku konverentside esinemistes ja on igati meedia tähelepanu orbiidi all.*

*Nädala lõpp saabub, aga Saatanat pole kusagil. Meedia on väga pettunud ja matemaatik vabandab end väitega, et vajab veel pisut aega. Kuu möödudes ei ole Saatanat endiselt kusagil ja matemaatik satub naerualuseks.*

*Vüimaks, kuus kuud hiljem ilmub välja Saatan. "Kus sa oled olnud?" pärib matemaatik pettunult, "Sa hävitasid terve mu karjääri!". "Väga vabandan, ka mina ei suutnud Riemann'i hüpoteesi tõestada" pomiseb Saatan moka otsast, kuid jätkab vaimustunult: "Aga ma leidsin paar väga huvitavat lemmat!"*

**Näide 9.1** Kui meil on lõigus  $[0, 2]$  valitud sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.6, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.5, \quad x_5 = 2,$$

siis vastavate osalõikude pikkused on

$$\Delta x_1 = 0.2, \quad \Delta x_2 = 0.4, \quad \Delta x_3 = 0.4, \quad \Delta x_4 = 0.5, \quad \Delta x_5 = 0.5,$$

ja  $\|\Delta_5\| = 0.5$ . Sama pikkusega osalõike on rohkem kui üks, kuid see „ei riku midagi ära“.

◇ ◇ ◇

### 9.3 Määratud (Riemann'i) integraal

Moodustades Riemann'i summad  $S_n$  tekib küsimus, kas üldse ja mis arvuks koondub jada  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , kui  $n$  tõkestamatult kasvab. Me oleme huvitatud sellistest summadest, mis koonduksid kõik **täpselt** üheks ja samaks arvuks.

#### Definitsioon 9.3

Olgu funktsioon  $f$  määratud lõigus  $[a, b]$ . Kui sõltumata lõigu  $[a, b]$  kõikvõimalikest alajaotustest  $\Delta_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ , mille korral

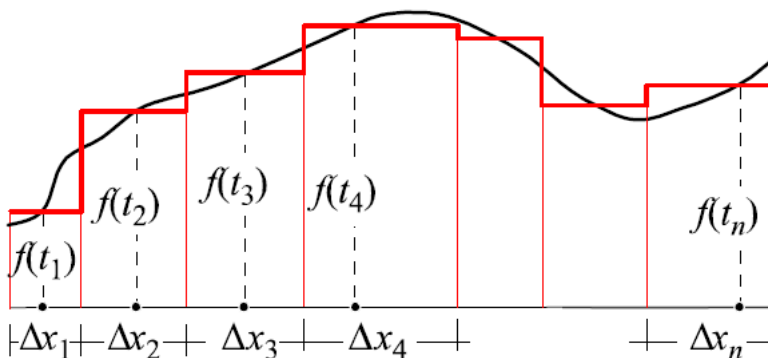
$$\|\Delta_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ja sõltumata punktide  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) valikust eksisteerib piirväärtus funktsiooni  $f$  Riemann'i summadest

$$I = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} (f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n), \quad (9.5)$$

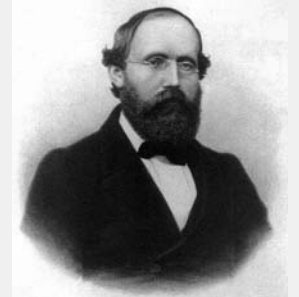
siis seda piirväärtust  $I$  nimetatakse funktsiooni  $f$  **määratud (Riemann'i) integraaliks** lõigus  $[a, b]$ . Tähistatakse sümboliga

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (9.6)$$



Allikas: [19]

Riemann'i integraali nimi tuleb saksa matemaatiku Georg Friedrich Bernhard Riemann'i (1826-1866) järgi.



Allikas: Wikipedia

Riemann'i integraal on lihtsustatult (lõpmata) väikeste ristkülikute pindalade summa piirväärtus.

NB! Lõik  $[a, b]$  on jaotatud suvaliselt, kuid täidetud peab olema tingimus, et maksimaalse osalõigu pikkus tõkestamatult kahaneb (s.t. **iga** loodava ristküliku laius peab minema nulli). Punktid  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$  on valitud samuti suvaliselt. Siinjuures peab kõikide nende suvaliste valikute korra Riemann'i summade piirväärtus andma **ühe ja sama arvulise tulemuse**. Ainult sellisel juhul on defineeritud Riemann'i integraal.

**Märkus 9.3**

Erijuhul, kui me võtame lõigus  $[a, b]$  ühtlase alajaotuse, siis

$$\Delta x_n = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \text{ protsessis } n \rightarrow \infty$$

ja Riemann'i integraali väärtus avaldub piirväärtusena

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_n.$$

Paljude valemite tuletamiseks (kuid mitte tõestamiseks) on kasulik rakendada sellist lihtsamat lähenemist.

**Näide 9.2** Näitame definitsiooni põhjal, et konstantne funktsioon  $f(x) = 10$ , on suvalises osalõigus  $[a, b]$  integreeruv Riemann'i mõttes (vt. [22]).

Olgu  $f(x) = 10$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Vaatleme lõigu  $[a, b]$  **suvalist** jaotusviisi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sõltumata lõigu jaotusviisist ja punktide  $c_i$  valikust osalõikudes  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , saame

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 10 \Delta x_i = 10 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}).$$

Siit saame, et

$$S_n = 10(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = 10(x_n - x_0).$$

Seega

$$\int_a^b 10 dx = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} S_n = 10(b-a).$$

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 9.4**

Kui funktsioonil  $f$  leidub Riemann'i integraal, siis öeldakse, et funktsioon on **integreeruv** (Riemann'i mõttes).

**Teoreem 9.1**

Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis ta on integreeruv (Riemann'i mõttes).

**Teoreem 9.2**

Kui funktsioon  $f$  on määratud lõigus  $[a, b]$  ja tal on ülimalt **lõplik arv** katkevuskohti, siis ta on integreeruv (Riemann'i mõttes).

Integraali rakendustes näeme, et integraal tähistab funktsiooni joone ja x-telje vahele jääva kujundi pindala. Pindala leidmisega sidusid integraali mõiste ka Newton ja Leibniz.

Leibniz kasutas algul integraali tähistamiseks sümbolit "omn." sõnast *omnia* (summa, ladina keeles). Hiljem muutis Leibniz tähise väljavenitatud s-ks:  $\int$  (sõnast summa).

Newton süstemaatilist mõistet integraalide tähistamiseks ei kasutanud.

On üsna lihtne näha, et vähegi keerulisema funktsiooni korral on Riemann'i integraali definitsiooni rakendamine ülimalt tülikas. Õnneks on olemas tulemused, mis lubavad määratud integraali väärtust arvutada oluliselt lihtsamalt. Täpsemalt tutvume sellega ülejärgmises loengus. Hetkel vastame aga küsimusele, millistel funktsioonidel leidub Riemann'i integraal.

Seega leidub Riemann'i integraal nn. igapäevaelus ette tulevatel funktsioonidel. Tegemist on päris hea „uudisega“.

## 9.4 Määratud integraali omadused

Kõigis järgnevatel omadustel eeldame vaadeldavate integraalide olemasolu vastavas lõigus.

### Omadus 9.1

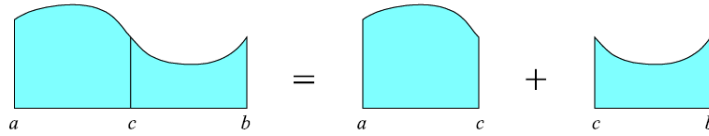
Kehtib seos

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (9.7)$$

### Omadus 9.2

Olgu  $c \in [a, b]$ . Siis kehtib (aditiivsuse) seos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.8)$$



Allikas: [19]

### Omadus 9.3

Kehtib (lineaarsuse) seos

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (9.9)$$

### Omadus 9.4

Kui  $f(x) \leq g(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral, siis kehtib (monotoonsuse) seos

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (9.10)$$

**Näide 9.3** Olgu  $b > a$ . Näitame, et iga sellise  $a$  ja  $b$  puhul kehtib hinnang

$$\int_a^b \sin x^2 dx \leq b - a.$$

Tõepoolest, kuna  $\sin y \leq |\sin y|$ , siis

$$\int_a^b \sin x^2 dx \leq \int_a^b |\sin x^2| dx \leq \int_a^b 1 dx = b - a.$$

◇ ◇ ◇

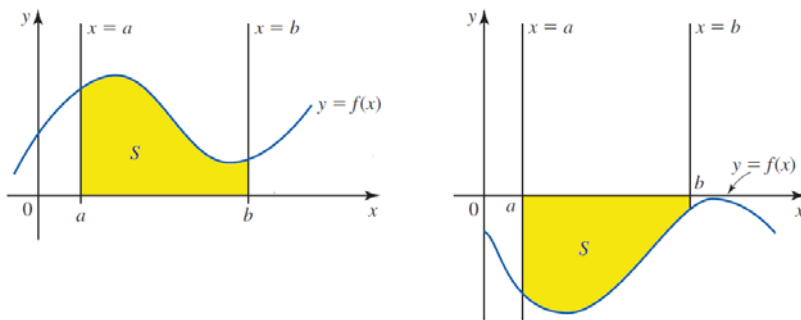
## 9.5 Kõvertrapetsi pindala

### Definitsioon 9.5

Olgu funktsioon  $f$  pidev lõigus  $[a, b]$ . Siis **kõvertrapetsiks** nimetatakse joonega  $y = f(x)$ ,  $x$ -teljega ning püstsirgetega  $x = a$  ja  $x = b$  piiratud kujundit. Sellisel juhul  $x$ -teljest ülespoole jääva kõvertrapetsi pindala avaldub määratud integraaliga

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.11)$$

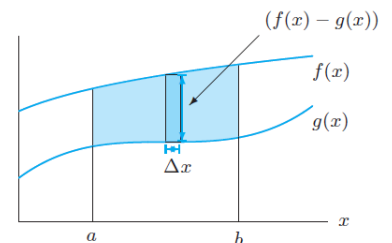
Kui kõvertrapets asub allpool  $x$ -telge, siis tuleb pindala miinusmärgiga.



Allikas: [33]

Üldiselt öeldes, kõvertrapetsiks nimetatakse iga kujundit, mis on piiratud vaadeldaval lõigul  $[a, b]$  pidevate funktsioonidega  $f$  ja  $g$ , kus  $g(x) \leq f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  ning vasakult ja paremalt vastavalt sirgetega  $x = a$  ja  $x = b$ . Sellisel juhul saab  $f$  ja  $g$  graafikutega piiratud kujundi pindala arvutada valemist

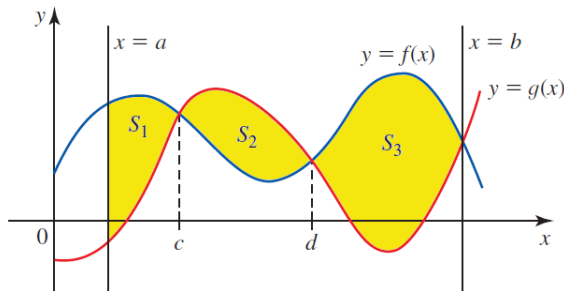
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (9.12)$$



Allikas: [14]

### Märkus 9.4

Kui  $f$  ja  $g$  omavahel ristuvad, siis tuleb leida lõikepunktid ja arvutada kogu pindala osade kaupa.



Allikas: [33].



**Märkus 9.5**

Kui  $f$  ja  $g$  on integreeruvad lõigus  $[a, b]$ , siis sõltumata  $f$  ja  $g$  märgist kehtib alati

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (9.13)$$

**Näide 9.4** Lihtsamal juhul saab Riemanni'i integraali väärtuse arvutada joonise abil. Leiame integraali

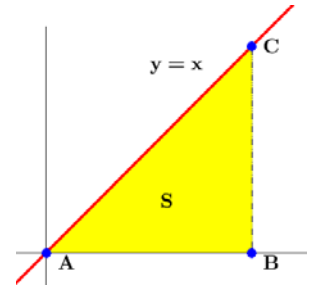
$$I = \int_0^b x dx$$

väärtuse. Tehes joonise, näeme, et selleks peame leidma täisnurkse kolmnurga  $ABC$  pindala. Olgu  $f(x) = x$ . Siis pindala avaldub valemiga

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot f(b)}{2} = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

Kui näiteks  $b = 8$ , siis oleks meil täisnurkne kolmnurk, mille alus on 8 ja kõrgus on samuti 8. Pindala võrdub  $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32$  ruutühikut.

◇ ◇ ◇



**Näide 9.5** Leiame integraali

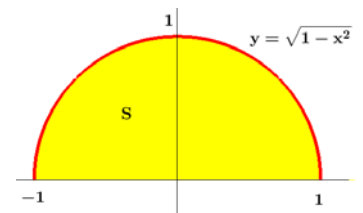
$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

väärtuse. Seda integraali on üpris raske leida, kui üritaksime seda teha analüütiliste vahenditega (mida me ei ole veel õppinud). Tehes joonise, näeme aga, et tegelikult peame leidma pool ühikringi pindalast:

$$S = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Täpsustuseks olgu siiski märgitud, et ainult joonisest ei piisa. Hetkel kasutasime teadmist, et ühikringjoone võrrand avaldub kujul  $x^2 + y^2 = 1$ .

◇ ◇ ◇



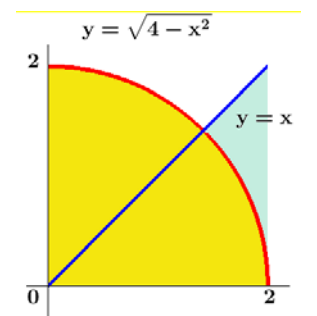
**Näide 9.6** Leiame integraali

$$I = \int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - x) dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^2 x dx$$

väärtuse. Tehes joonise, näeme aga, et tegelikult on  $I$  väärtus seotud ringi sektori pindalaga. Kui ringi raadius on 2, siis selle ringjoone võrrand on  $x^2 + y^2 = 4$ . Otsitav pindala avaldub kui 1/4 ringi pindala miinus täisnurkse kolmnurga (küljed 2 ja 2) pindala,

$$S_* = \frac{1}{4} \pi r^2 - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

◇ ◇ ◇



## 9.6 Numbriline integreerimine \*

Lihtsamal juhul saab integraali väärtusi leida täpselt. Kuidas seda teha, vaatleme oma järgmistes praktikumides. Praktikast tuleb aga tihti integraali väärtused leida ligikaudu. Paljudel juhtudel ei ole täpse väärtuse leidmine võimalik või osutub see liiga keeruliseks. Kui kasutada arvutit, siis enamasti ongi arvutiga lihtsam leida pigem ligikaudseid kui täpseid väärtusi. Ligikaudse integreerimise algoritmid baseeruvad otseselt ideel, mida me tegelikult juba vaatlesime.

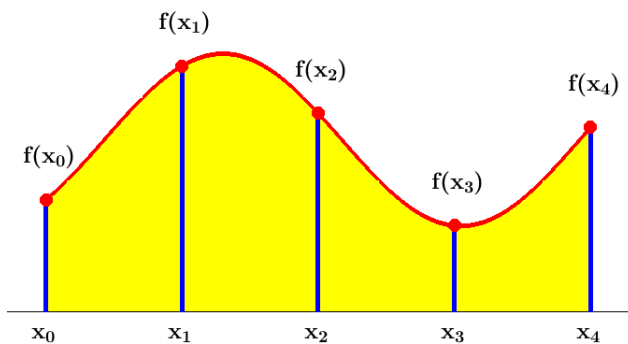
### Lõigu jaotamine

Olgu meil antud lõigus  $[a, b]$  integreeruv funktsioon  $y = f(x)$ . Moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b - a}{n}.$$



Järgnevalt moodustame igas osalõigus kõvertrapetsi, milles aluseks on vastav osalõik ja mille kõrgusteks sõlmedes  $x_0, x_1, \dots, x_n$  on funktsiooni väärtused  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ .

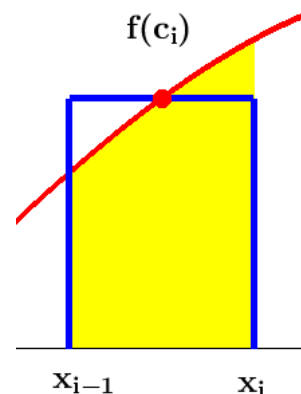


Määratud integraali täpseks väärtuseks on kõikide nende kõvertrapetsite pindalade summa. Järgnevalt vaatleme, kuidas leida nende kõvertrapetsite pindalaid ligikaudselt.

### Ristkülikvalemid

Ristkülikvalemite korral lähendatakse igal osalõigul kõvertrapetsi pindala vastava ristküliku pindalaga. Igal osalõigul moodustame ristküliku kõrgusega  $f(c_i)$ . Punkte  $c_i$  annab valida väga erineval moel. Osutub, et väikeste  $n$  väärtuste jaoks annab üldiselt kõige paremaid tulemusi keskpunkti meetod, s.t.  $c_i$  on valitud iga osalõigu keskel,

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$



Iga üksiku kõvertrapetsi pindala avaldub ligikaudu valemiga

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h f(c_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Liites kõik need pindalad kokku, saamegi järgmise valemi.

**Keskpunkti meetod** (või ka lihtsalt ristkülikvalem).

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n) \right).$$

**Märkus 9.6**

Kui  $f$  on kaks korda diferentseeruv lõigus  $[a, b]$  ja  $f''$  on pidev, siis integraali täpse väärtuse  $S$  ja keskpunkti meetodiga leitud ligikaudse väärtuse  $S_n$  erinevus on

$$S - S_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(c), \quad c \in (a, b).$$

Seda nn. jääkliikme valemit ei pea teadma, kuid see on abiks, kui on vaja hinnata, kui täpselt meie ligikaudne valem arvutab.

Jääkliikmes on tähtis  $h$  aste, siin on see kaks (öeldakse, et keskpunkti meetod on teist järku meetod). Kui  $h \rightarrow 0$ , siis jääkliikme läheb nulli. Oluline on ka see, kui kiiresti  $h$  läheb nulli. Teist järku meetodi korral läheb  $h$  nulli umbes sama kiiresti kui ruutfunktsioon  $y = x^2$ . Kui jääkliikme sisaldab tundmatut  $c$ , siis teist tuletist on võimalik valemist „välja hinnata“.

**Näide 9.7** Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse keskpunkti meetodiga. Valime lõigus  $[0, 2]$  näiteks  $n = 4$  osalõiku (oma näidetes ei saa me demonstreerimiseks suurt  $n$  väärtust võtta). Sel juhul on meil  $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$  ja sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Moodustame osalõikude keskpunktid:

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{3}{4}, \quad c_3 = \frac{5}{4}, \quad c_4 = \frac{7}{4}.$$

Sel juhul

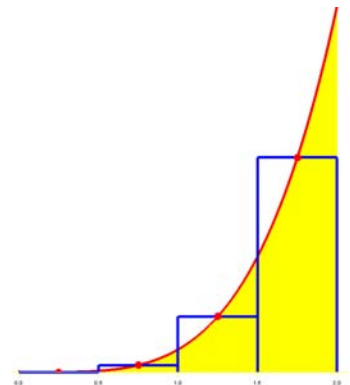
$$S_4 \approx \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right) \approx 30.35,$$

kus  $f(x) = 5x^4$ . Hetkel peate jääma uskuma, et integraali täpne väärtus on  $S = 32$ . Seega viga on

$$S - S_4 \approx 1.65.$$

Märgime, et kui ristkülikute arv  $n = 100$ , siis saame  $S_{100} \approx 31.9973$  ja viga on  $2.67 \cdot 10^{-3}$ .

◇ ◇ ◇



**Trapetsmeetod**

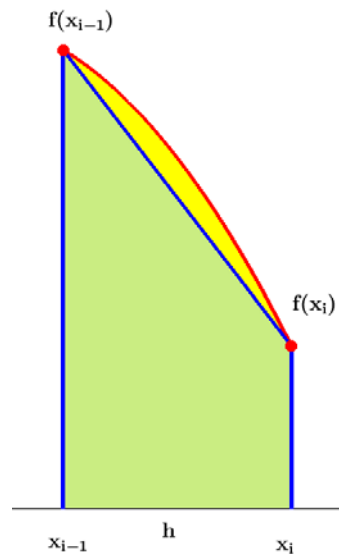
Trapetsmeetodi korral lähendatakse igal osalõigul kõvertrapetsi pindala vastava trapetsi pindalaga (ehk graafiku joont lähendatakse sirgega). Kuna trapetsi pindala avaldub valemiga

$$S_{\text{trapets}} = (\text{aluste summa}) \cdot \frac{\text{kõrgus}}{2} = \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)),$$

siis kõikide trapetsite pindalade liitmisel saame tulemuseks

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Näeme, et keskmised funktsiooni väärtused  $f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$  on summas topelt. Kokkuvõttes oleme saanud järgmise tulemuse.



**Trapetsmeetod.**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

**Märkus 9.7**

Kui  $f$  on kaks korda diferentseeruv lõigus  $[a, b]$  ja  $f''$  on pidev, siis täpse väärtuse  $S$  ja trapetsmeetodiga leitud ligikaudse väärtuse  $S_n$  erinevus on

$$S - S_n = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c), \quad c \in (a, b).$$

Teoreetiliselt on jääkliige (absoluutselt) kaks korda suurem, kui keskpunkti meetodil.

**Näide 9.8** Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse võrdluseks trapetsmeetodiga. Valime lõigus  $[0, 2]$  samuti  $n = 4$  osalõiku. Sel juhul on meil  $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$  ja sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Sel juhul

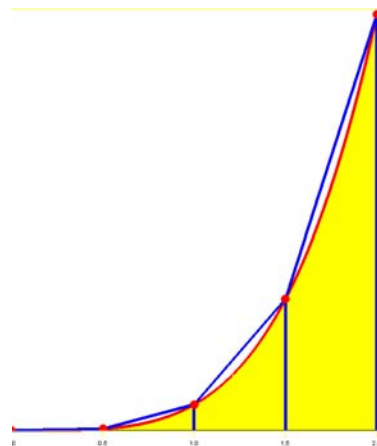
$$S_4 \approx \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \left( f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \approx 35.31.$$

Kuna täpne väärtus on  $S = 32$ , siis viga

$$S - S_4 \approx -3.31.$$

Märgime, et kui riskülükute arv  $n = 100$ , siis saame  $S_{100} \approx 32.0053$  ja viga on  $-5.33 \cdot 10^{-3}$ .

◇ ◇ ◇



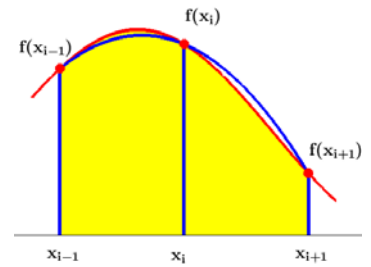
Teoreetiliselt pidigi viga tulema u. kaks korda suurem kui keskpunkti meetodiga. Mõne teise funktsiooni korral võiksime saada vastupidise tulemuse (näiteks sirge korral on trapetsmeetod täiesti täpne).

## Simpson'i meetod

Simpson'i meetodi korral lähendatakse igal paarikaupa võetud osalõigul graafiku kaart paraboliga  $y = Ax^2 + Bx + C$ . Esimesel kahel osalõigul avaldub Simpson'i meetodi lihtvalem kujul

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)).$$

Liites vastavad pindalad paarikaupa osalõikudel, saame järgmise tulemuse.



**Simpson'i meetod** (liitvalem).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

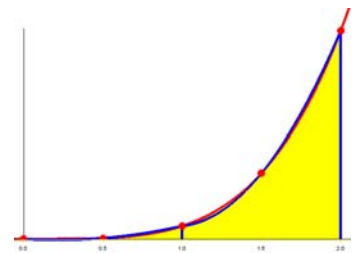
Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise  $n$  jaoks.

**Märkus 9.8**

Kui  $f$  on neli korda diferentseeruv lõigus  $[a, b]$  ja  $f^{(4)}$  on pidev, siis täpse väärtuse  $S$  ja Simpson'i meetodiga leitud ligikaudse väärtuse  $S_n$  erinevus on

$$S - S_n = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c), \quad c \in (a, b).$$

Õeldakse, et Simpson'i meetod on neljandat järku meetod.



**Näide 9.9** Arvutame integraali

$$S = \int_0^2 5x^4 dx$$

ligikaudse väärtuse võrdluseks Simpson'i meetodiga. Valime lõigus  $[0, 2]$  samuti  $n = 4$  osalõiku. Sel juhul analoogiliselt

$$S_4 \approx \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \left( f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) = \frac{385}{12} \approx 32.0833.$$

Kuna täpne väärtus on  $S = 32$ , siis viga on

$$S - S_4 \approx -0.083.$$

Saime oluliselt täpsema tulemuse, kui keskpunkti meetodiga või trapsmeetodiga. Märgime, et kui ristkülikute arv  $n = 100$ , siis saame  $S_{100} \approx 32.000000213$  ja viga on  $-2.13 \cdot 10^{-7}$ .

◇ ◇ ◇



# Peatükk 10

## Määratud integraal

---

10.1 Newton-Leibniz'i valem . . . . .	172
10.2 Integraalarvutuse keskvaartusteoreem . . . . .	175
10.3 Määratud integraali arvutamine . . . . .	176
10.4 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina . . . . .	182

---

### Kontrolltöö teemad

1. Newton-Leibniz'i valemi kasutamine.
2. Funktsiooni keskmise väärtuse leidmine.
3. Määratud integraali arvutamine (asendusvõte, ositi integreerimine, sümmeetrilised rajad, absoluutväärtus).

### Eksamiteemad

1. Newton-Leibniz'i valem (teoreem 10.1) (koos tõestusega).
2. Integraalarvutuse keskvaartusteoreem (teoreem 10.2).
3. Määratud integraali arvutamine (asendusvõte, ositi integreerimine, sümmeetrilised rajad, absoluutväärtus).
4. Matemaatilise analüüsi põhiteoreem (koos tõestusega).

## 10.1 Newton-Leibniz'i valem

Järgmine teoreem annab meile valemi Riemann'i integraali arvutamiseks ilma definitsiooni kasutamata.

### Teoreem 10.1

**Newton-Leibniz'i valem.** Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis kehtib Newton'i-Leibniz'i valem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (10.1)$$

kus  $F$  on funktsiooni  $f$  algfunktsioon.

*Tõestus.* Kuna  $F$  on funktsiooni  $f$  algfunktsioon, siis  $F'(x) = f(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Algfunktsioon  $F$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , kuna ta on diferentseeruv seal. Sellest järeldub, et me saame kasutada Lagrange'i keskvaartusteoreemi.

Enne selle kasutamist moodustame lõigus suvalise jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kuid ikkagi sellise, et  $\|\Delta_n\| = \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$ , kui  $n \rightarrow \infty$ .

Sel juhul Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal leidub igas osalõigus selline punkt  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , et kehtib võrdus

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \Delta x_i.$$

Kuna  $f$  on pidev, siis on ta integreeruv Riemann'i mõttes (teoreemi 9.1 järgi) ning definitsiooni järgi leidub piirväärtus

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \bar{x}_i = \int_a^b f(x) dx$$

sõltumata jaotuse  $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n\}$  ja  $\xi_1, \dots, \xi_n$  valikust. Seega leidub see sama piirväärtus meie konkreetse jaotuse  $\{x_0, \dots, x_n\}$  ja punktide  $c_1, \dots, c_n$  jaoks. Siit saame

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} (F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} (F(x_n) - F(x_0)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

Newton-Leibniz'i valemit kasutatakse ka Riemann'i integraalist erineva määratud integraali definitsiooniks. Kui selline integraal leidub, siis räägitakse Newton-Leibniz'i integraalist. Meile piisab Riemann'i integraalist ja loeme, et teatud tingimustel kehtib Newton'i-Leibniz'i valem. Viimane ütleb, kuidas saab arvutada Riemann'i integraali nii, et ei peaks lõputult summeerima mingeid lõpmata väikeste pindalaga olevaid ristkülikuid.

Järgmine lugu kuulsaks saamise teemal (seoses Riemann'i hüpoteesiga).

*Matemaatik kutsutakse konverentsile esinema ja tema teema pealkirjaks reklaamitakse "Riemann'i hüpoteesi tõestus." Ettekande lõpuks peavad aga kuulajad kõvasti pettuma, kuna välja kuulutatud tõestuse asemel räägib matemaatik hoopis mingil teisel teemal ja lubatud tõestusest ei sõnagi.*

*Pärast ettekannet küsitakse tema käest, et kas ta leidis oma tõestuses viimasel hetkel vea, et selle esitusest loobus. "Ei, mul pole seda tõestust kunagi olnudki." "Miks Te siis kuulutasite oma ettekande teemaks Riemann'i hüpoteesi?" päritakse talt armutult. "Vaadake ... Kindluse mõttes ... juhaks, kui ma peaksin teel konverentsile äkki surema."*

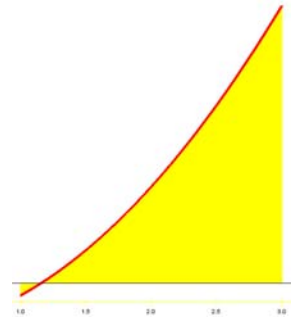


**Näide 10.1** Leiame

$$\int_1^3 (3x^2 - 4) dx = (x^3 - 4x) \Big|_{x=1}^{x=3} = 27 - 12 - (1 - 4) = 15 + 3 = 18.$$

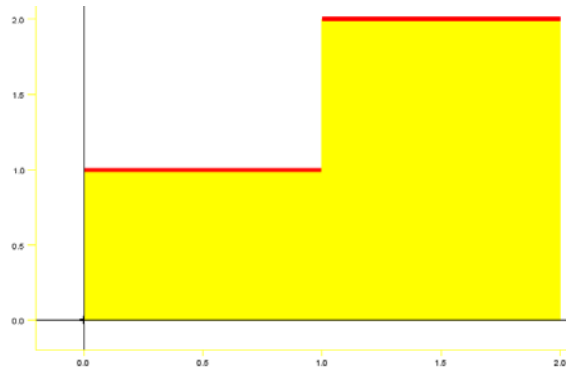
Märgime, et leitud väärtus ei ole joonisel märgitud kollase ala pindala, kuna joon lõikab vahepeal  $x$ -telge ja integraali väärtus kujuneb sisuliselt ühe positiivse ja ühe negatiivse arvu summast.

◇ ◇ ◇



**Näide 10.2** Oluline on, et Newton-Leibniz'i valemi kasutamisel oleks funktsioon pidev. Vaatame näiteks funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$



Lihtne on näha, et tekkivate kõvertrapetsite pindalad kokku (lõigul  $[0, 1]$  ja  $[1, 2]$ ) on  $S = 3$  või ka

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^2 2 dx = x \Big|_{x=0}^{x=1} + 2x \Big|_{x=1}^{x=2} = 1 + 2 = 3.$$

Samas kui Newton-Leibniz'i valemi vale kasutamisega saaksime

$$\int_0^2 f(x) dx \rightarrow \left. \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2x, & x \in (1, 2] \end{cases} \right|_{x=0}^{x=2} = 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

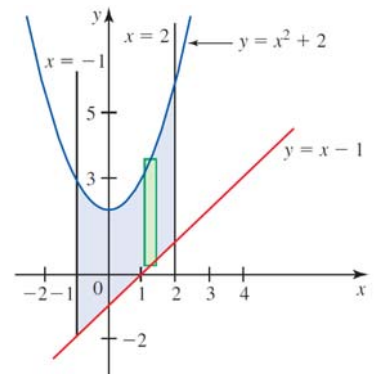
Tulemus erineks õigest vastusest. Põhjuseks on see, et meie funktsioon ei ole pidev lõigul  $[0, 2]$  ja Newton-Leibniz'i valem antud juhul ei kehti.

◇ ◇ ◇

**Näide 10.3** Arvutame funktsiooniga  $f(x) = x^2 + 2$  ja  $g(x) = x - 1$  vahela jääva kujundi pindala lõigul  $[-1, 2]$ . Kirjutame

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2 - x + 1) dx = \int_{-1}^2 (x^2 - x + 3) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{x=-1}^{x=2} \\ &= \frac{8}{3} - 2 + 6 - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 3 \right) = 10.5. \end{aligned}$$

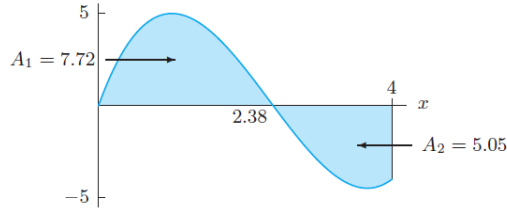
◇ ◇ ◇



Allikas: [33]

**Näide 10.4** Arvutame funktsiooniga  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x$  ja  $x$ -teljega eraldatud kujundi pindala lõigul  $[0, 4]$ .

Esiteks märgime, et antud funktsiooni nullkohtadeks on  $x = 0$  ja  $\frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$ , millest lõigu  $[0, 4]$  sisse jääb  $\frac{7 - \sqrt{5}}{2} \approx 2.38$ . Lõigul  $[0, 2.38]$  on funktsioon positiivne ja ülejäänud osas negatiivne.



Allikas: [14]

Seega

$$S = \int_0^4 |x^3 - 7x^2 + 11x| dx \approx \int_0^{2.38} (x^3 - 7x^2 + 11x) dx - \int_{2.38}^4 (x^3 - 7x^2 + 11x) dx = 7.72 - (-5.05) = 12.77.$$

◇ ◇ ◇

**Järeldus 10.1**

Kui funktsioon  $f$  on diferentseeruv lõigus  $[a, b]$  ja  $f'$  on pidev, siis funktsiooni  $f$  netokasv üle lõigu  $[a, b]$  avaldub valemiga

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx.$$

**Näide 10.5** Olgu  $c(x)$  funktsioon, mille väärtuseks on mingi kauba  $x$  ühiku tootmise kulu. Sel juhul tuletis  $c'(x)$  näitab kulu tooteühiku kohta. Siis

$$\int_a^b c'(x) dx = c(b) - c(a),$$

mis kujutab endast tootmise lisakulu  $a$  ühikult  $b$  ühikuni.

◇ ◇ ◇

Seda järeldust läheb tihti vaja majanduses ja muudes valdkondades, kus räägitakse suure netokasvust või -langusest. Suurus  $f(b) - f(a)$  on lihtsalt funktsiooni muut lõigus  $[a, b]$ .

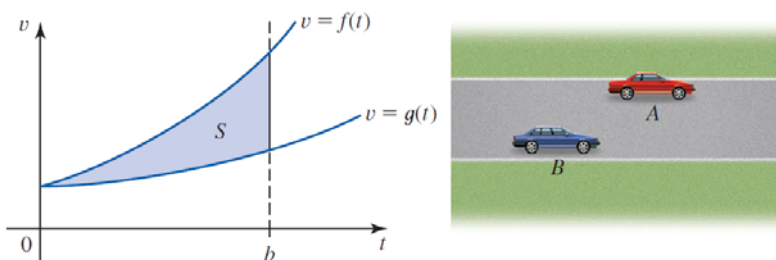
**Näide 10.6** Kui auto liigub seaduse  $s = s(t)$  alusel kiirusega  $v = v(t) = s'(t)$ , siis

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

näitab auto asukoha muutust aja  $t_2 - t_1$  vältel. Kui  $s$  on positiivne (või negatiivne) funktsioon lõigus  $[t_1, t_2]$ , siis saame läbitud teepikkuse, vastasel korral lihtsalt „nihke“.

◇ ◇ ◇

**Näide 10.7** Vaatleme nüüd maanteel liikumas kahte autot, millest esimese auto kiirus igal hetkel  $t$  on  $f(t)$  ja teise auto kiirus on  $g(t)$ . Olgu lihtsuse mõttes mõlemad kiirused positiivsed.



Allikas: [33]

Joonisel toodud märgitud pindala  $S$  näitab seda, kui pikalt on üks auto teisest ees (või taga). Selle pindala (antud juhul samas ka autode vaheline kaugus) saab arvutada integraalide abil:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^T (f(t) - g(t)) dt = s_1(T) - s_2(T) - (s_1(0) - s_2(0)) \\
 &= s_1(T) - s_1(0) - (s_2(T) - s_2(0)).
 \end{aligned}$$

Saime tulemuseks (esimese auto läbitud vahemaa) miinus (teise auto läbitud vahemaa), mis annabki tulemuseks kahe auto vahelise vahemaa muutumise ajahetkel  $[0, T]$ .

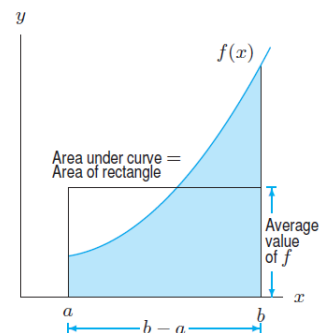
◇ ◇ ◇

## 10.2 Integraalarvutuse keskväärtusteoreem

### Teoreem 10.2

**Integraalarvutuse keskväärtusteoreem.** Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis on olemas punkt  $c \in [a, b]$ , nii et

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a). \tag{10.2}$$



Allikas: [14]

### Märkus 10.1

Lõigul  $[a, b]$  pideva funktsiooni  $f$  keskväärtus üle lõigu  $[a, b]$  on arvutatav integraaliga

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \tag{10.3}$$

**Näide 10.8** Olgu elanike arv kirjeldatud funktsiooniga  $y = x^2$ ,  $x$  on näiteks aastad. Leiame keskmise elanike arvu esimese viie aasta kestel,

$$\bar{y} = \frac{1}{5-0} \int_0^5 x^2 dx = \frac{1}{5} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=5} = \frac{125}{15} = \frac{25}{3} = 8.(3).$$

◇ ◇ ◇

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi praktiline rakendus on funktsiooni  $f$  keskmise väärtuse leidmine lõigul  $[a, b]$ .

**Näide 10.9** Me teame, kuidas leida aritmeetilist keskmist. Selleks tuleb kõik olemasolevad väärtused kokku liita ja jagada väärtuste arvuga. Olgu meil antud 24 tunni vältel täistundidel mõõdetud temperatuurid  $f(t_1), \dots, f(t_{24})$ . Sel juhul temperatuuride keskmine on

$$T_{24} = \frac{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{24})}{24} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} f(t_i).$$

Kui me teeme rohkem mõõtmisi, aga tahame leida 24 tunni keskmise, siis

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)}{n} = \frac{24}{n} \frac{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)}{24} \\ &= \frac{1}{24} [f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_n)] \frac{24}{n} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t, \end{aligned}$$

kus  $\Delta t = \frac{24}{n}$ . Saime sealhulgas ühe Riemann'i summa. Näeme, et  $n$  kasvades saame (valemi tuletamise mõttes) integraali üle lõigu  $[0, 24]$  ja

$$\bar{T} = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t) dt.$$

◇ ◇ ◇

### Ülesanne 10.1

Olgu  $C(t)$  funktsioon, mis näitab maja päevast küttekulu. Olgu  $t = 0$  (1. jaanuar). Mida näitab sel juhul suurus

$$\frac{1}{90} \int_0^{90} C(t) dt?$$

## 10.3 Määratud integraali arvutamine

Määratud integraali võib arvutada nii, et esiteks leitakse algfunktsioon määramata integraalist ja siis kasutatakse Newton'i-Leibniz'i valemit. Saab kasutada nii asendusvõtet kui ositi integreerimist. Viimaste korral on aga oluline, kuidas käituvad seejuures rajad  $a$  ja  $b$ .

### Muutuja vahetamine

#### Teoreem 10.3

Kui  $g'$  on pidev lõigus  $[a, b]$  ja  $f$  on pidev funktsiooni  $g$  muutumispiirkonnas ( $u = g(x)$ ), siis kehtib valem

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du. \quad (10.4)$$

**Näide 10.10** Leiame integraali

$$\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$$

väärtuse. Võtame  $g(x) = x^3 + 1$  ja asendame

$$u = x^3 + 1, \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 dx.$$

See asendus toimib, nagu määramata integraali leidmisel. Kuna meil on kavas integreerida  $u$  järgi ja mitte enam  $x$  järgi, siis peame leidma  $u = g(x)$  väärtused rajades  $x = -1$  ja  $x = 1$

$$g(-1) = (-1)^3 + 1 = 0, \quad g(1) = 1^3 + 1 = 2.$$

Siit saame, et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^2 \sqrt{u} du = \int_0^2 u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{u=0}^{u=2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{8} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.11** Leiame integraali

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 2x dx$$

väärtuse. Võtame  $g(x) = \cos 2x$  ja asendame

$$u = \cos 2x, \quad \Rightarrow \quad du = (-2) \cdot (\sin 2x).$$

Rajade väärtused:

$$g(0) = \cos(2 \cdot 0) = 1, \quad g(\pi/4) = \cos \pi/2 = 0.$$

Siit saame, et

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 u du = \frac{1}{2} \int_0^1 u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{4}.$$

◇ ◇ ◇

### Määratud integraal sümmeetriliste rajade korral

Kui rajad  $a$  ja  $b$  on sümmeetrilised, s.t. integreeritakse lõigus  $[-a, a]$ , siis paaris- ja paaritute funktsioonide integreerimine lihtsustub oluliselt. Tutustame meelde, et funktsioon on paaris, kui iga  $x$  korral  $f(x) = f(-x)$  (sümmeetriline  $y$ -telje suhtes) ja funktsioon on paaritu, kui iga  $x$  korral  $f(-x) = -f(x)$  (sümmeetriline nullpunkti suhtes).

**Teoreem 10.4**

Olgu funktsioon  $f$  pidev lõigus  $[-a, a]$ . Siis

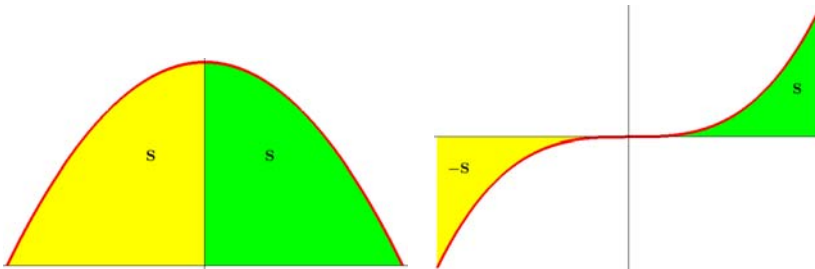
(a) kui  $f$  on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx; \quad (10.5)$$

(b) kui  $f$  on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (10.6)$$

Selle teoreemi tõestamine on lihtne, kuid veel lihtsam on vaadata paaris- ja paaritu funktsiooni graafikuid ning arvestada seost pindala leidmisega.



Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon

**Näide 10.12** Kuna  $\sin x$ ,  $x$  ja  $x^3$  on paaritud funktsioonid, siis lõigus  $[-a, a]$  kõigi integraalide väärtus nendest funktsioonidest võrdub nulliga. Kui paaritud funktsiooni korrutada paarisfunktsiooniga, nagu näiteks  $\cos x$ ,  $x^2$ , siis integraal on ikkagi null:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^{17} \cos 10x dx = 0.$$

Paarisfunktsioonide korral nii lihtsalt ei saa, kuid natukene lihtsam on ikka (tavaliselt on nullpunktis funktsiooni lihtsam arvutada, kui punktis  $-a$ ). Näiteks

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 3x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx = \frac{2}{3} \sin 3x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{2}{3} \sin(-90^\circ) = -\frac{2}{3}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.13** Leiame integraali

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 0$$

väärtuse. Märkame, et integraalimärgi all on ainult paarisfunktsioonid.

Seega

$$\int_{-1}^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 2 \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 6) dx = 2 \left( \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 6x \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{146}{15}.$$

◇ ◇ ◇

**Ositi integreerimine**

Kehtib ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x) u'(x) dx \quad (10.7)$$

ehk teisiti

$$\int_a^b u dv = u v \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v du. \quad (10.8)$$

**Näide 10.14** Arvutame

$$\begin{aligned} \int_0^4 x e^{-x} dx &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v \Big|_{x=0}^{x=4} - \int_0^4 (-e^{-x}) dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=4} = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Ositi integreerimine tabeli abil**

Seoses ositi integreerimisega, saab erijuhul tuletada järgmise meetodi, mida vaatleme näidete varal. Meetod töötab integraali

$$\int f(x) g(x) dx$$

jaoks, kui  $f$  on selline, et tema mingit järku tuletis on null ja  $g$  on selline funktsioon, mida on lihtne integreerida.

**Näide 10.15** Vaatleme eelmises näites toodud integraali:

$$\int_0^4 x e^{-x} dx = F(x) \Big|_{x=0}^{x=4}.$$

Algfunktsiooni  $F$  leiame järgmiselt:

märk	$f(x)$ ja tuletised	$g(x)$ ja integraalid
+	$x$	$e^{-x}$
-	$1$	$-e^{-x}$
	$0$	$e^{-x}$

Kokku saame

$$F(x) = +x \cdot (-e^{-x}) - 1 \cdot e^{-x} + C = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1) e^{-x} + C.$$

ja integraali väärtuseks on

$$F(x) \Big|_{x=0}^{x=4} = 1 - 5e^{-4}.$$

◇ ◇ ◇

Integraali

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

leidmine.

$D$	$I$
$x^2$	$e^{2x}$
$2x$	$\frac{1}{2} e^{2x}$
$2$	$\frac{1}{4} e^{2x}$
$0$	$\frac{1}{8} e^{2x}$

Ühte veergu kirjutatakse  $f$  ja tema tuletised, teise veergu  $g$  ja vastavad integraalid. Märkid kirjutatakse vaheldumisi, alustades plussmärgist. Tulemus loetakse kokku diagonaalsetest korrutistest.

**Näide 10.16** Paremini tuleb tabeli meetod välja siis, kui integraali all on kõrgem  $x$  aste. Näiteks,

$$\int_0^1 x^3 \sin x \, dx = F(x) \Big|_{x=0}^{x=1}.$$

See on just seda tüüpi integraal, mida leitakse mitmekordse ositi integreerimise teel. Viimast on aga üsna pikk ja tüütu läbi viia. Algfunktsiooni  $F$  leiame järgmiselt:

märk	$f(x)$ ja tuletised		$g(x)$ ja integraalid
+	$x^3$	↘	$\sin x$
-	$3x^2$	↘	$-\cos x$
+	$6x$	↘	$-\sin x$
-	$6$	↘	$\cos x$
	$0$		$\sin x$

Kokku saame

$$\begin{aligned} F(x) &= +(-x^3 \cos x) - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x + C \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C. \end{aligned}$$

ja integraali väärtuseks on

$$F(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 5 \cos 1 - 3 \sin 1.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.17** Analoogiliselt saab leida, et

$$\int e^x \cos x \, dx$$

korral

märk	$f(x)$ ja tuletised		$g(x)$ ja integraalid
+	$e^x$	↘	$\cos x$
-	$e^x$	↘	$\sin x$
+	$e^x$	↘	$-\cos x$

ehk tekib võrrand otsitava integraali suhtes

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Kui  $f$  tuletis ei ole null, siis tabeli viimase rea liikmete korrutist tuleb integreerida. Kokkuvõtteks saame, et

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$$

◇ ◇ ◇



## Määratud integraal absoluutväärtusest

Esimene asi, mida peab meeles pidama, on see, et absoluutväärtus funktsioonist on mittenegatiivne. Seega integraali väärtus

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

peab tulema mittenegatiivne. Kui vastus tuleb negatiivne, siis peab kuskil arvutustes olema viga.

## Näide 10.18 Arvutame

$$S = \int_{-4}^2 |x^2 + 2x - 3| dx.$$

Märgime, et kui integraalimärgi all on absoluutväärtus, siis integraali väärtus on sama, mis graafiku kaare,  $x$ -teljega ning püstsirgetega  $x = a$ ,  $x = b$  piiratud tasandilise kujundi pindala.

Kõige targem on siin teha joonis. Siis näeme, et absoluutväärtuse märgi all oleval funktsioonil  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  on kaks nullkohta:  $x = -3$  ja  $x = 1$  ning need mõlemad jäävad integreerimispiirkonda. Kui funktsiooni graafik jääb täielikult ülespoole  $x$ -telge, siis on pindala positiivne ja kui funktsiooni graafik jääb täielikult allapoole  $x$ -telge, siis on pindala miinusemärgiga. Seega peame oma integraali jagama kolmeks osks:

$$S = \int_{-4}^{-3} (x^2 + 2x - 3) dx - \int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx.$$

Kõigil kolmel integraalil on sarnane algfunktsioon, seega kirjutame summa kompaktsemalt:

$$S = \left( \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) \left( \left|_{x=-4}^{x=-3} - \left|_{x=-3}^{x=1} + \left|_{x=1}^{x=2} \right. \right. \right).$$

Saame, et

$$S_1 = (-9 + 9 + 9) - \left( -\frac{64}{3} + 16 + 12 \right) = 9 - \frac{20}{3} = \frac{7}{3},$$

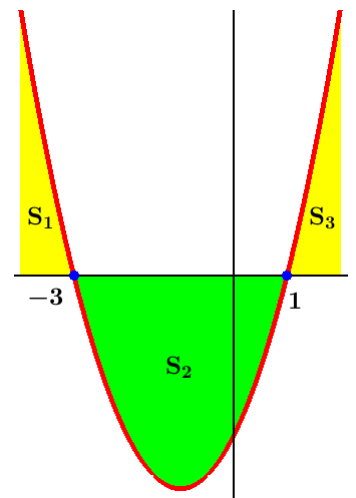
$$S_2 = \left( \frac{1}{3} + 1 - 3 \right) - (-9 + 9 + 9) = -\frac{5}{3} - 9 = -\frac{32}{3},$$

$$S_3 = \left( \frac{8}{3} + 4 - 6 \right) - \left( \frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$$

Integraali väärtus võrdub

$$S = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{7}{3} - \left( -\frac{32}{3} \right) + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}.$$

◇ ◇ ◇



## 10.4 Määratud integraal ülemise raja funktsioonina

Olgu funktsioon  $f$  pidev lõigus  $[a, b]$ . Siis leidub  $f$  algfunktsioon ja vastavus  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  määrab lõigus  $[a, b]$  funktsiooni  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

### Teoreem 10.5

**Matemaatilise analüüsi põhiteoreem.** Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis funktsioon

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on pidev lõigus  $[a, b]$  ja diferentseeruv vahemikus  $(a, b)$  ning kehtib valem

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (10.9)$$

*Tõestus.* Olgu meil lõigul  $[a, b]$  antud pidev (positiivne) funktsioon  $y = f(x)$ . Sel juhul võib iga argumendi  $x \in [a, b]$  jaoks funktsiooni

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

väärtust tõlgendada, kui joone  $y = f(x)$  ja  $x$ -telje vahele jäävat pindala lõigus  $[a, x]$ . Sel juhul väikese osalõigu  $[x, x+h]$ ,  $h > 0$ , peal on pindala

$$A(x+h) - A(x).$$

Viimast pindala võib ligikaudu arvutada ka kui ristküliku (joonisel paremal olev kitsas ristkülik) pindala  $h \cdot f(x)$  ehk

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x).$$

Tähistame ligikaudse valemi kasutamisel tehtud vea  $R(x)$ . Siis

$$A(x+h) - A(x) = h \cdot f(x) + R(x).$$

Avaldame siit funktsiooni  $f$  väärtuse

$$f(x) = \frac{A(x+h) - A(x)}{h} - \frac{R(x)}{h}.$$

Suurus  $|R(x)|$  kujutab pindala, mis asub väikeses ristkülikus külgedega  $h$  ja  $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ . Siis

$$\frac{|R(x)|}{h} \leq \frac{|\Delta y| \cdot h}{h} = |\Delta y|.$$

Kuna funktsioon  $f$  on pidev, siis  $\Delta y \rightarrow 0$ , kui  $h \rightarrow 0$  ja me saame, et

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x)}{h} = A'(x).$$

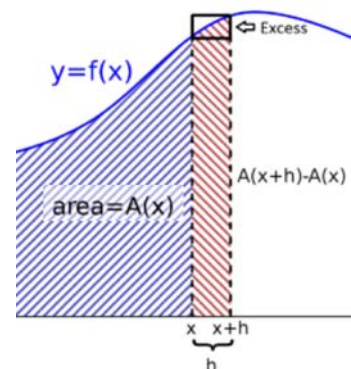
Põhiteoreem ütleb meile sisuliselt, et funktsiooni tuletise leidmine ja pindala leidmine on teineteise pöördoperatsioonid.

Kuigi pindala leidmise idee lõpmata väikeste ristkülikute summeerimise teel kandub Vana-Kreeka aegadesse, siis päris pikka aega ei olnud selge, et need kaks operatsiooni: kiiruse leidmine ja pindala leidmine tõepoolest nii tihedalt seotud on.

Paneme tähele, et teoreem ei ütle meile, kuidas midagi algoritmiliselt täpselt leida. Teoreemi sisu on pigem teoreetiline: diferentseerimine ja integreerimine on otseselt teineteisega seotud, seda siis vähemalt pidevate funktsioonide jaoks.

Teoreemi tõestusega ja täiendustega on tegelenud näiteks James Gregory, Isaac Barrow, Isaac Newton, Gottfried Leibniz.

Paljud meie poolt varasemalt sõnastatud teoreemid on tegelikult järeldused antud põhiteoreemist.



Allikas: Wikipedia

**Märkus 10.2**

Teoreemist 10.5 ja algfunktsiooni definitsioonist järeldub, et funktsioon  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  on funktsiooni  $f$  üks algfunktsioone, mistõttu pideva funktsiooni  $f$  suvaline algfunktsioon  $F$  avaldub kujul

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C \quad (10.10)$$

ning määramata integraali saab kirja panna järgmiselt:

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C. \quad (10.11)$$

**Näide 10.19** Märgime, et kui keha liigub kiirusega  $v = v(t)$ , siis pideva (positiivse kiirusega) liikumise korral avaldub teepikkus kui

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(x) dx,$$

analoogiliselt avaldub kiirus  $v = v(t)$  kiirenduse  $a = a(t)$  kaudu,

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(x) dx.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 10.20** Leiame  $S'(x)$ , kui

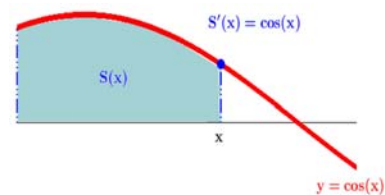
$$S(x) = \int_{-1}^x \cos t dt.$$

Teoreemi 10.5 järgi

$$S'(x) = \cos x.$$

Mida ütleb lisaks meile viimane tulemus? Kui me vaatame joone  $\cos x$  ja  $x$ -telje vahele jääva ala pindala  $S(x)$ , siis selle pindala muutumise kiirus igas punktis  $x$  on  $S'(x) = \cos x$ . Teisiti, pindala muutub kiirusega, mis võrdub kõvertrapetsi kõrgusega  $\cos x$ .

◇ ◇ ◇



**Näide 10.21** Leiame  $F'(x)$ , kui

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Teoreemi 10.5 järgi ja liitfunktsiooni reegli abil saame, et

$$F'(x) = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.$$

◇ ◇ ◇



# Peatükk 11

## Määratud integraali rakendusi

---

11.1 Pindala parameetriliste võrrandite korral *	186
11.2 Kõversektori pindala	187
11.3 Joone kaare pikkuse arvutamine	188
11.4 Keha ruumala	191
11.5 Integraali füüsilisi rakendusi	193

---

### Kontrolltöö teemad

1. Kõvertrapetsi ja kõversektori pindala leidmine.
2. Joone kaare pikkuse leidmine lihtsamal juhul.
3. Keha ruumala leidmine.
4. Teepikkuse ja nihke arvutamine.

### Eksamiteemad

1. Kõvertrapetsi ja kõversektori pindala.
2. Joone kaare pikkus.
3. Keha ruumala.
4. Teepikkuse ja nihke arvutamine.
5. Töö arvutamine sirgjoonelise liikumise korra.

## 11.1 Pindala parameetriliste võrrandite korral \*

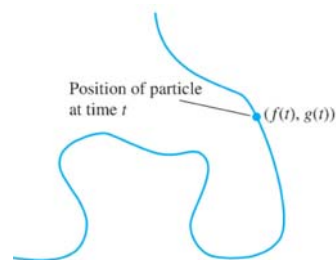
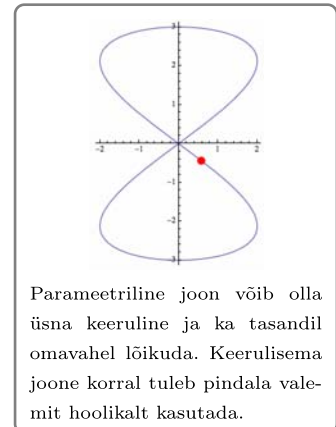
Eelmistes loengutes nägime, et lõigus  $[a, b]$  positiivse ja pideva funktsiooni  $y = f(x)$  poolt määratud kõvertrapetsi pindala arvutatakse valemiga

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (11.1)$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus funktsioon on antud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (11.2)$$

kus  $x$  on diferentseeruv funktsioon. Kui võrrandid on antud parameetrilisel kujul, siis võime pindala leida sama valemiga  $\int_a^b y dx$ , asendades  $y = y(t)$  ja leides  $dx = x'(t) dt$ .



Joonis: [34]

Parameetriliselt antud võrranditega tekkiva kõvertrapetsi pindala avaldub valemiga

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) dt. \quad (11.3)$$

### Näide 11.1 Leiame tsükloidi

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad r > 0,$$

pindala. Tsükloid on joon, mille tekitab raadiusega  $r$  ringjoone vee-remine (fikseerides ringjoonel ühe punkti ja jälgides selle trajektoori).



Allikas: Wikipedia

Esiteks  $dx = r(1 - \cos t) dt$ . Seega

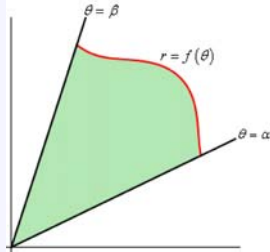
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) r(1 - \cos t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = r^2(t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= 2\pi r^2 + r^2 \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi r^2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

## 11.2 Kõversektori pindala

### Definitsioon 11.1

Läbige nullpunkti kaks sirget, mis moodustavad  $x$ -telje positiivse suunaga vastavalt nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ . Kõversektoriks nimetatakse tasandilist kujundit, mis on piiratud nimetatud sirgetega ning lisaks pideva mitte-negatiivse funktsiooni  $r = f(\theta)$  graafikuga, kus  $\theta$  on nurk radiaanides.



Joonis: <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/PolarArea.aspx>

### Lause 11.1

Pideva funktsiooniga  $r = f(\theta)$  määratud kõversektori pindala avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta, \quad (11.4)$$

kus  $\theta$  on nurk radiaanides.

*Tõestus.* Täpse tõestuse leiab näiteks õpikust [22]. Anname siinkohal skeemi. Esiteks märgime, et ringi sektori pindala leitakse valemiga  $\frac{1}{2} \theta r^2$ . Jagame lõigu  $[\alpha, \beta]$  osalõikudeks

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Moodustame nurkade muudud  $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Võtame igas osalõigus ühe kindla nurga  $\varphi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$  (radiaanides). Sel juhul tekib osasektor, mille pindala arvutatakse ligikaudu ringi sektori pindala kaudu

$$\Delta S_i \approx \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \Delta\theta_i.$$

Võtame  $\|\Delta\theta_n\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta\theta_i$  ja moodustame standardselt Riemann'i summa ja vastava piirväärtuse

$$S = \lim_{\|\Delta\theta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\varphi_i) \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

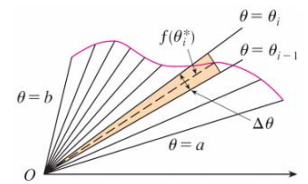
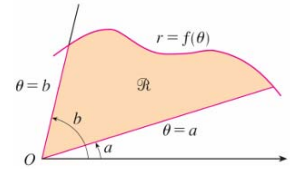
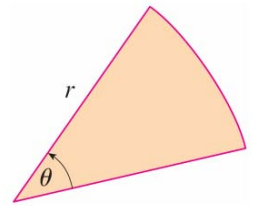
□

**Näide 11.2** Teeme seekord ühe keerulisema näite, s.t. vaatleme polaarkoordinaatides antud joont (okassiga)

$$r(\varphi) = \cos 4\varphi + 2 \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \quad (11.5)$$

◇ ◇ ◇

Harilik ringi sektor ja kõversektor.



Allikas: [35]

Kõversektor on kõvertrapetsi analoog polaarkoordinaatide jaoks.

Pindala leidmiseks kasutame kõversektori pindala valemit,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos 44\varphi + 2 \sin \varphi)^2 d\varphi. \quad (11.6)$$

Siit saame

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos^2 44\varphi + 4 \sin^2 \varphi + 4 \cos 44\varphi \sin \varphi) d\varphi. \quad (11.7)$$

Kasutame järgmisi trigonomeetrilisi abivalemeid:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos^2 44\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 88\varphi), \quad (11.8)$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow 4 \sin^2 \varphi = 2(1 - \cos 2\varphi), \quad (11.9)$$

lisaks,

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2} \Rightarrow \quad (11.10)$$

$$4 \cos 44\varphi \sin \varphi = 2(\sin 45\varphi - \sin 43\varphi). \quad (11.11)$$

Võttes kõik kokku, saame

$$S = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 88\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} \sin 45\varphi d\varphi - \int_0^{\pi} \sin 43\varphi d\varphi. \quad (11.12)$$

Integreerime,

$$S = \frac{5}{4}\pi + \left( \frac{\sin 88\varphi}{4 \cdot 88} - \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{\cos 45\varphi}{45} + \frac{\cos 43\varphi}{43} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{5}{4}\pi. \quad (11.13)$$

Saime vastuseks

$$S = \frac{5}{4}\pi \approx 3.927. \quad (11.14)$$

◇ ◇ ◇

### 11.3 Joone kaare pikkuse arvutamine

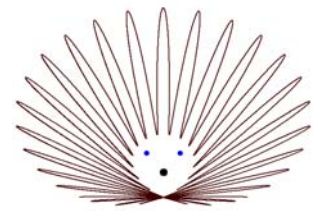
Tuletame valemi funktsiooni  $y = f(x)$  joone kaare pikkuse arvutamiseks.

Võtame lõiguse  $[a, b]$  alajaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Ühendame funktsiooni väärtused  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  sirglõikudega.

Joonisel kujutab see joon endast okkad turri ajanud okasiga (tõsi, eks me lisanud sinna veel paar täpikest ...).





Sel juhul täisnurksest kolmnurgast saame iga väikese sirglõigu pikkuseks

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

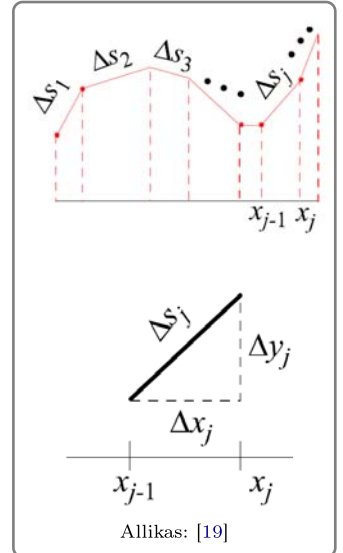
Summeerime kõik need lõigukesed,

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i.$$

Jagatis  $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$  on vastava sirglõigu tõusunurga tangens,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \tan \alpha_i \rightarrow f'(x_{i-1}).$$

Minnes piirile  $n \rightarrow \infty$ , saame järgmise tulemuse.



### Lause 11.2

Lõigus  $[a, b]$  pideva ja vahemikus  $(a, b)$  diferentseeruva funktsiooni  $f$  joone kaare pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (11.15)$$

### Lause 11.3

Kui joon on esitatud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (11.16)$$

kus  $x$  ja  $y$  on diferentseeruvad lõigus  $[\alpha, \beta]$ , siis joone kaare pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (11.17)$$

**Näide 11.3** Joone kaare pikkuse leidmisel tekitavad tavaliselt väga keerulist tüüpi integraalid ja sellepärast leitakse need tihti ligikaudsete vahenditega. Vaatleme lihtsa näitena poolringjoone

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r],$$

pikkuse leidmist. Leiame tuletise

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Seega poolringjoone pikkus avaldub

$$s = \int_{-r}^r \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} dx.$$

◇ ◇ ◇

Teeme muutujavahetuse

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt, \quad t = \arcsin \frac{x}{r}.$$

Siit

$$\begin{aligned} s &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{r^2 - (r \sin t)^2}} r \cos t dt = r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} \cos t dt \\ &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi r. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 11.4** Leiame kardioidi joone pikkuse ehk siis ka ligikaudse “Euroõuna” ümbermõõdu (mõõdetuna keskelt ja arvestades varre osas olevat õõnsust).

Selleks kasutame parameetriliselt antud funktsiooni joone kaare pikkuse valemit. Kardioidi valemitest

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi, \\ y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (11.18)$$

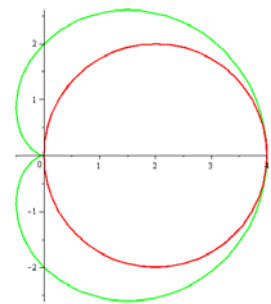
saame

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[-a(1 + 2 \cos \varphi) \sin \varphi]^2 + [a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + 2 \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi + [(1 + 2 \cos \varphi) \cos \varphi - 1]^2} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{[(1 + 2 \cos \varphi) - \cos \varphi]^2 + 1 - \cos^2 \varphi} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (11.19)$$

Teeme muutujavahetuse  $u = \frac{\varphi}{2}$  ning arvestades funktsioonide  $\cos x$  ja  $-\cos x$  sümmeetriat lõigul  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ja  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  saame

$$s = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 8a \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a(1 - 0) = 8a. \quad (11.20)$$

◇ ◇ ◇



Kardioidi ümbermõõt

$$s = 8a \quad (11.21)$$

on sama raadiusega ringi omast veidi suurem (ringi ümbermõõt on  $2\pi a \approx 6,28a$  ehk pisut rohkem kui 75% kardioidi ümbermõõdust).

## 11.4 Keha ruumala

Vaatleme keha, mille korral on igas punktis  $x$  teada tema ristlõikepindala  $S(x)$ . Analoogiliselt eelnevate punktidega moodustame Riemann'i summad ja leiame nende summade piirväärtuse,

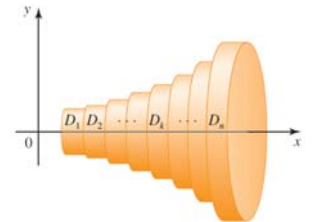
$$V \approx \sum_{i=1}^n S(c_i) \Delta x_i, \quad n \rightarrow \infty.$$

### Lause 11.4

Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti  $x$ -teljega punktides  $x = a$  ja  $x = b$ . Kui keha ristlõikepindala igas punktis  $x \in [a, b]$  on  $S(x)$  ja  $S$  on pidev funktsioon lõigus  $[a, b]$ , siis keha ruumala avaldub valemiga

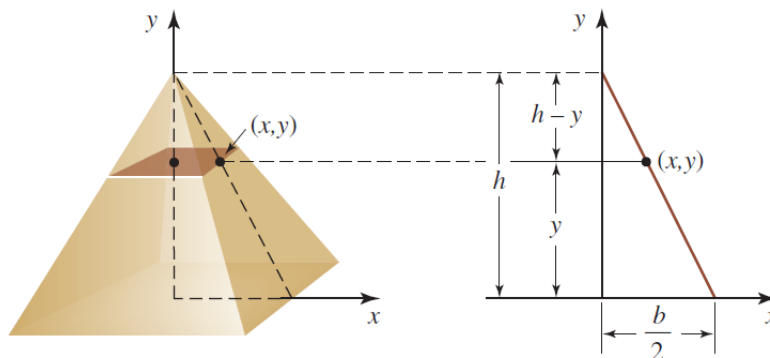
$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (11.22)$$

Ruumala leidmiseks liidame kiht-kihilt kokku kõik pindalad. Kihid on lõpmata väikese paksusega, kuid siiski nullist erinevad.



Allikas: [33]

**Näide 11.5** Leiame ruudukujulise alusega püramiidi ruumala, kui aluse külge on  $b$  ja püramiidi kõrgus on  $h$ .



Allikas: [33]

Asetame koordinaatide alguspunkti püramiidi keskele alusele. Siis punktis  $x$  tekib kõrgus  $y$  ja  $y$ -teljega risti oleva pinna (ruudu) pindala on  $S(x) = 2x \cdot 2x = 4x^2$ .

Kuna me peame need pindalad summeerima mööda  $y$ -telge, siis tuleb ka ristlõike pindala avaldada  $y$  kaudu. Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{x}{\frac{b}{2}} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{2h}(h-y).$$

Seega

$$S(y) = 4x^2 = \frac{b^2}{h^2}(h-y)^2.$$

Kogu ruumala leiame valemist

$$V = \int_0^h S(y) dy = \frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 dy = -\frac{b^2}{h^2} \left( \frac{(h-y)^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=h} = \frac{hb^2}{3}.$$

◇ ◇ ◇

**Järeldus 11.1**

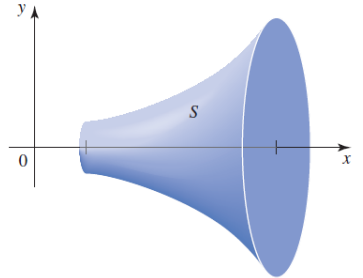
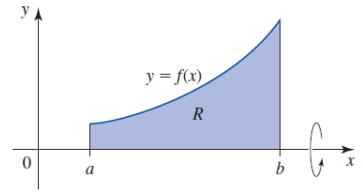
Olgu  $f$  pidev mittenegatiivne funktsioon lõigus  $[a, b]$  ja olgu  $S$  joone  $y = f(x)$  alla jääv pindala. Siis ümber  $x$ -telje pöörleva joonega moodustatud keha ruumala avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (11.23)$$

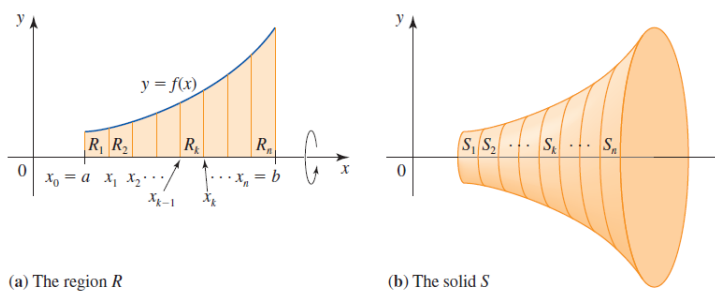
*Tõestus.* Idee tuleb sellest, et raadiusega  $r$  oleva ringi pindala on  $\pi r^2$ . Punktis  $x$  on raadiuse arvuline väärtus  $f(x)$  ja ringi pindala  $\pi [f(x)]^2$ . Me saame lõigus  $[a, b]$  moodutada jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Igas osalõigus tekib siis kõvertrapets  $R_i$  ja selle kõvertrapetsi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekivad kettad  $S_i$ .

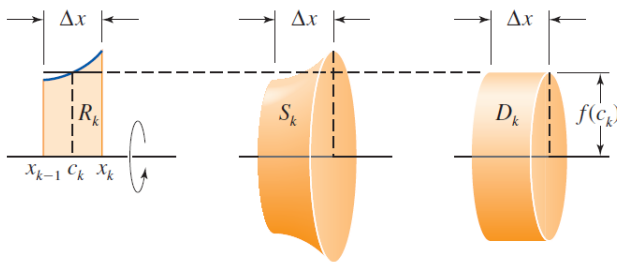


Allikas: [33]



Allikas: [33]

Nüüd saab tekitada kettad raadiusega  $r_i = f(c_i)$ , kus  $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .



Allikas: [33]

Kui me lähendame kõvertrapetsit ristkülikuga, siis kettakese ruumala avaldub ligikaudu

$$\Delta V_i \approx \pi r_i^2 \Delta x_i = \pi f^2(c_i) \Delta x_i.$$

Edasi tekitame Riemann'i summad

$$V \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \pi \sum_{i=1}^n f^2(c_i) \Delta x_i.$$

Jääb üle minna piirile  $n \rightarrow \infty$ . Saab näidata, et piirväärtus Riemann'i summast koondub Riemann'i integraaliks  $\pi \int_a^b f^2(x) dx$ .  $\square$

**Näide 11.6** Kujund, mis on piiratud joonega

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4,$$

ja  $x$ -teljega, pöörleb ümber  $x$ -telje. Leiame tekkiva pöördkeha ruumala.

Visandame kirjeldatud kujundi, tüüpilise raadiuse ja tekkiva pöördkeha. Ruumala on

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi(R(x))^2 dx = \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 11.7** Kujund, mis on piiratud  $y$ -teljega ja joonega  $x = 2/y$ ,  $1 \leq y \leq 4$ , pöörleb ümber  $y$ -telje. Leiame tekkiva pöördkeha ruumala.

Visandame kirjeldatud kujundi, tüüpilise raadiuse ja tekkiva pöördkeha. Arvestame, et kihtide summeerimine toimub seekord mööda  $y$ -telge:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi(R(y))^2 dy = \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \\ &= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right) \Big|_1^4 = 4\pi \cdot \frac{3}{4} = 3\pi. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

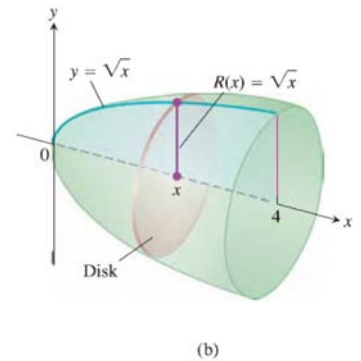
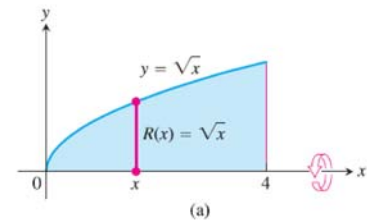
## 11.5 Integraali füüsikalisi rakendusi

### Teepikkuse ja nihke arvutamine

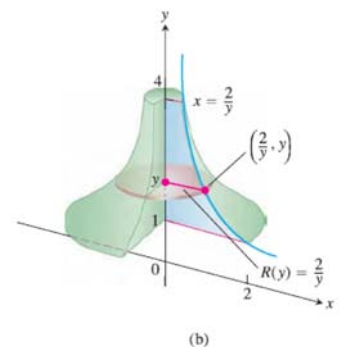
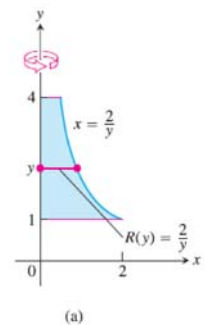
Läbitud tee pikkuse arvutamist oleme juba varem vaadelnud, kuid formuleerime selle siin eraldi tulemusena.

Olgu  $v = v(t)$  keha liikumise kiirus ja  $s = s(t)$  keha poolt läbitud tee pikkus hetkel  $t$ . Aja  $t_1$  ja  $t_2$  vahel keha poolt läbitud tee pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (11.24)$$



Joonis: [34]



Joonis: [34]

Kui keha liigub **mööda sirgjoont**, siis nihe ehk kaugus algpunktist avaldub valemiga

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt. \quad (11.25)$$

Kui  $v \geq 0$ , siis sirgjoonelise liikumise korral nihe  $\Delta s$  võrdub läbitud tee pikkusega  $s$ .

**Näide 11.8** Keha liikumise kiirus on antud võrrandiga

$$v(t) = (3t^2 - t + 2) \frac{m}{s}.$$

Leiame keha poolt läbitud teepikkus aja  $t = 3$  sekundi ja  $t = 6$  sekundi vahel. Arvestades eelnevat, siis

$$s = \int_3^6 |3t^2 - t + 2| dt = \left( t^3 - \frac{t^2}{2} + 2t \right) \Big|_{t=3}^{t=6} = 181.5 m.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 11.1**

Analoogiliselt saab leida teisi karakteristikuid, kui on antud mingi suuruse muutumise kiirus  $y = f'(x)$  teise suuruse  $x$  järgi. Sel juhul algfunktsiooniks on funktsioon  $f(x)$  ise ja  $f(b) - f(a)$  annab funktsiooni  $f$  muudu.

**Näide 11.9** Bakterite koloonia on alguses 14 miljoni bakteri suurune.

Mudel näitab, et  $t$  tunni jooksul suureneb koloonia kiirusega  $2^t$  miljonit bakterit tunnis. Leiame bakterite arvu miljonites hetkel  $t = 2$ . Bakterite arvuks saame sel juhul

$$n = 14 + \int_0^2 2^t dt = 14 + \left( \frac{2^t}{\ln 2} \right) \Big|_{t=0}^{t=2} = 14 + \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \approx 18.33.$$

◇ ◇ ◇

**Töö arvutamine**

Vaatleme keha, mis liigub mööda  $x$ -telge positiivses suunas välise jõu  $F(x)$  poolt punktist  $x = a$  punkti  $x = b$ . Olgu jõufunktsioon  $F$  pidev.

Moodustame juba varem korduvalt vaadeldud jaotuse

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

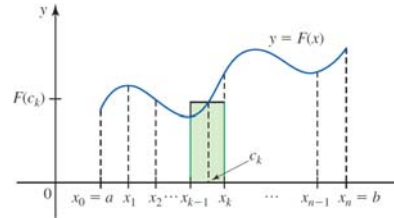
Igas osalõigus  $[x_{i-1}, x_i]$  võtame punkti  $c_i$ , milles arvutame jõu  $F(c_i)$ . Kui osalõigud  $[x_{i-1}, x_i]$  on küllalt väikesed, siis võime lugeda jõu  $F$  selles osalõigus konstantseks. Töö  $W_i$ , mida tehakse konstantse jõu  $F(c_i)$  poolt, liigitades keha edasi  $\Delta x_i$  võrra, leitakse korrutisena

$$W_i \approx F(c_i) \Delta x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kogu töö leitakse ligikaudselt Riemann'i summana

$$W \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i.$$

Minnes osalõikude arvuga piirile  $n \rightarrow \infty$  nii, et maksimaalne osalõigu pikkus läheb nulli, saame järgmise tulemuse.



Allikas: [33]

**Lause 11.5**

Mööda  $x$ -telge punktist  $x = a$  punkti  $x = b$  liikumissuunas muutuva jõu  $F(x)$  poolt tehtav töö avaldub valemiga

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(x) dx. \quad (11.26)$$

**Näide 11.10** Vedru, mille pikkus vabas olekus on 12 cm, venib 8 N jõu mõjul vertikaalselt 2 cm. Leiame töö, mida on vaja teha, et venitada vedru vertikaalselt 6 cm.

Selles ülesandes peame lisaks teadma, et vedrule mõjuv jõud arvutatakse Hooke'i seaduse  $F(x) = kx$  alusel, siin  $k$  on mingi konstant. Arvestades ülesandes antut, leiame kordaja  $k$ ,

$$8 = 2k \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \quad \text{N/cm}.$$

Siit tehtav töö võrdub

$$W = \int_0^6 kx dx = 4 \int_0^6 x dx = 2x^2 \Big|_0^6 = 72.$$

Saime, et tehtav töö on  $W = 72 \quad \text{N} \cdot \text{cm}$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 11.11** Laeva ankur kaalub  $363 \text{ kg}$  ja on kinnitatud keti külge, mis kaalub  $15 \text{ kg}$  meetri kohta. Leiame ankrü ülestõstmiseks vintsi poolt tehtava töö, kui ankur asub laeva dekist  $6$  meetrit (u.  $20$  jalga) allpool.

Tehtav töö koosneb kahest osast  $W = W_A + W_K$ , kus  $W_A$  on ankrü üles tõstmiseks tehtav töö ja  $W_K$  on keti üles tõstmiseks tehtav töö. Esimene nendest avaldub lihtsalt

$$W_A = 363 \cdot 6 = 2178 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Ketiga on asi keerulisem. Jagame keti võrdseteks osadeks, kus ühe osa pikkus on  $\Delta y$ . Sel juhul kaalub see tükk  $15 \Delta y \text{ kg}$  meetri kohta. Seda elementi tõstetakse  $(6 - y)$  meetrit, seega tõstmiseks tehtav töö avaldub

$$\Delta W_K \approx 15 \Delta y (6 - y).$$

Summeerides vastavate tükikeste tõstmiseks tehtava töö, saame

$$W_K = \int_0^6 15(6 - y) dy = 15 \left( 6y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=6} = 15(36 - 18) = 270 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

Kokku

$$W = 2178 + 270 = 2448 \text{ kg} \cdot \text{m}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 11.12** Ämbrit, mis kaalub  $22 \text{ N}$ , vinnatakse ühtlasel kiirusel maapinnalt üles  $6 \text{ m}$  pikkuse köie abil. Köis kaalub  $1.17 \text{ N/m}$ . Kui palju tööd kulus ämbri ja köie tõstmiseks?

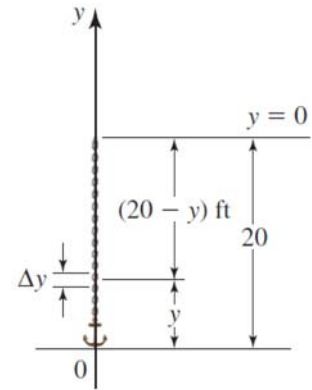
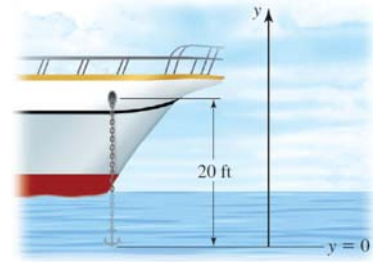
Ämbri kaal on konstantne, seega ainuüksi tema tõstmiseks kulunud töö võrdub kaal  $\cdot$  vahemaa  $= 22 \cdot 6 = 132 \text{ J}$ . Kuna ämbri tõstmise käigus ripub järjest vähem köit, siis selle kaal muutub. Kui ämber on maapinnast  $x \text{ m}$  kõrgusel, siis veel üles tõmbamata köie kaal on  $(1.17)(6 - x) \text{ N}$ . Seetõttu köie tõstmiseks kulunud töö võrdub

$$\begin{aligned} \text{Köiele kuluv töö} &= \int_0^6 (1.17)(6 - x) dx = \int_0^6 (7.02 - 1.17x) dx = \\ &= (7.02x - 0.585x^2) \Big|_0^6 = 21.06 \text{ J}. \end{aligned}$$

Ämbri ja köie koos tõstmiseks kulunud kogutöö on

$$132 + 21.06 = 153.06 \text{ J}.$$

◇ ◇ ◇



Allikas: [33]



**Vedeliku poolt avaldatav jõud**

Mahutis, mille põhi on horisontaalselt tasapinnaline, saab vedeliku poolt põhjale avaldatava kogujõu arvutada, korrutades omavahel põhjapindala ja põhjas avalduva rõhu (kogujõud võrdub jõud pinnaühiku kohta (rõhk) korda pindala).

**Vedeliku poolt konstantse sügavusega pinnale avaldatav jõud.**

$$F = w \cdot h \cdot S, \quad (11.27)$$

kus  $w$  on vedeliku erikaal ( $\text{N}/\text{m}^3$ ),  $h$  on plaadi (pinna sügavus) ja  $S$  on plaadi (pinna) pindala.

**Näide 11.13** Magevee erikaal on  $9809,3 \text{ N}/\text{m}^3$ . Kui bassein on  $1,5 \text{ m}$  sügav, siis vee poolt avaldatav jõud basseini põhjale mõõtmega  $3 \text{ m} \times 6 \text{ m}$  on

$$F = whA = (9809,3 \text{ N}/\text{m}^3)(1,5 \text{ m})(3 \cdot 6 \text{ m}^2) = 264851,1 \text{ N}.$$

◇ ◇ ◇

**Lause 11.6**

**Vertikaalsele lamedale plaadile vedeliku poolt avaldatava jõu integraalne valem.** Olgu vedeliku erikaal  $w$  ja olgu vertikaalne plaat asetatud vedelikku tasandite (sügavusega)  $h = a$  ja  $h = b$  vahele. Tähistagu  $L(h)$  sügavusel  $h$  asuva horisontaalse riba pikkust, mõõdetuna mööda plaadi pinda vasakult paremale. Siis vedeliku poolt vastu plaadi ühte külge avaldatav jõud võrdub

$$F = w \cdot \int_a^b h \cdot L(h) dh. \quad (11.28)$$

**Näide 11.14** Veetammi ristkülikujuline värav on  $5 \text{ m}$  lai ja  $4 \text{ m}$  kõrge. Leiame vedeliku poolt värava ühele küljele avaldatava jõu, kui värava ülemine serv asub  $3 \text{ m}$  sügavusel vee pinnast.

Vee eritiheduseks võtame  $9809,3 \text{ N}/\text{m}^3$ . Kuna värava laius on ühtlaselt  $5$ , siis  $L(h) = 5$ . Värav asub  $3$  kuni  $7$  meetri sügavusel. Seega

$$F = 9809,3 \int_3^7 5 h dh = 49046,5 \cdot \left. \frac{h^2}{2} \right|_{h=3}^{h=7} = 980930 \text{ N}.$$

◇ ◇ ◇

Kui plaat on vedelikku asetatud vertikaalselt, siis vastu plaadi seinale avaldatav rõhk on erinevatel kõrgustel erinev ning toodud valem sellisel kujul enam ei kehti (kuna  $h$  muutub). Sel juhul tuleb kasutada integraalset valemit.



Foto: Hoover'i tamm, Wikipedia.

**Näide 11.15** Võrdhaarse kolmnurga kujuline lame plaat alusega 4 m ja kõrgusega 2 m on asetatud vertikaalselt basseini nii, et ülespoole jääv alus on 1 m sügavusel veepinnast. Leiame vee poolt plaadi ühele küljele avaldatava jõu.

Kasutame koordinaatide süsteemi, kus koordinaatide alguspunkt paigutatakse plaadi alumisse tippu ning  $y$ -telg paigutatakse plaadi sümmeetriateljele. Basseini pind asub sirgel  $y = 3$  ja plaadi ülemine serv asub sirgel  $y = 2$ . Plaadi parem serv asub sirgel  $y = x$ , ülemine parem tipp on punktis  $(2, 2)$ . Peenikese riba pikkus sügavusel  $y$  võrdub

$$L(y) = 2x = 2y.$$

Riba sügavus allpool pinda on  $(3 - y)$ . Arvestades, et magevee erikaal on  $9809.3 \text{ N/m}^3$ , siis vee poolt vastu plaadi ühte külge avaldatav jõud on

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b w \cdot (\text{riba sügavus}) \cdot L(y) dy = \int_0^2 9809.3(3 - y)2y dy = \\ &= 19618.6 \int_0^2 (3y - y^2) dy = 19618.6 \left( \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \approx 65395.3 \text{ N}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

### Massikese

Vaatleme õhukest tasapinnalist plaati, mille tihedus on homogeenne (ühtlaselt jaotunud).

#### Definitsioon 11.2

Me ütleme, et õhukesel plaadil  $R$  on massikese punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$ , kui selle plaadi toetamisel nn. nōelale punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$  jääb plaat tasakaalu.

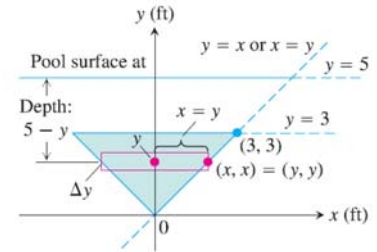
#### Lause 11.7

Olgu  $R$  tasandiline kujund, mis jääb kahe funktsiooni  $f$  ja  $g$  graafiku vahele, kus  $f(x) \geq g(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Sel juhul pinna  $R$  massikese asub punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$ , kus

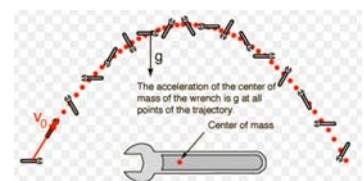
$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad (11.29)$$

kus  $S$  on pinna  $R$  pindala

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (11.30)$$



Joonis: [34]



Joonis:

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mechanics/n2ext.html>

**Näide 11.16** Leiame joontega  $y = \sqrt{x}$  ja  $y = \frac{x}{2}$  piiratud tasandilise kujundi massikeskme lõigul  $[0, 1]$ . Esiteks leiame pindala

$$S = \int_0^1 \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \left( \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{4} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{12}.$$

Leiame massikeskme  $x$ -telje koordinaadi:

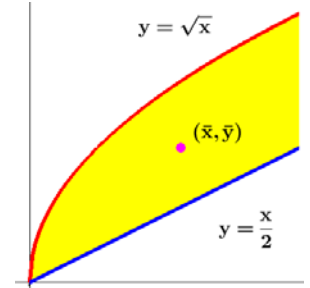
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{S} \int_0^1 x \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = \frac{12}{5} \int_0^1 \left( x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{12}{5} \left( \frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^3}{6} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{30} = \frac{14}{25}. \end{aligned}$$

Leiame massikeskme  $y$ -telje koordinaadi:

$$\bar{y} = \frac{1}{2S} \int_0^1 \left( x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{6}{5} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

Seega asub massikeske punktis  $(14/25, 1/2)$ . Kui sellesse punkti panna vertikaalne tikk, siis jääb plaat tasakaalu. Massikeske on punkt, mille korral keha käitub nii, nagu kogu tema mass oleks koondunud ühte punkti.

◇ ◇ ◇



**Näide 11.17** Leiame kolmnurga massikeskme. Olgu kolmnurk moodustatud sirge  $y = x$  ja  $x$ -telje poolt lõigul  $[0, a]$ . Esiteks leiame pindala

$$S = \int_0^a (x - 0) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{a^2}{2}.$$

Leiame massikeskme  $x$ -telje koordinaadi:

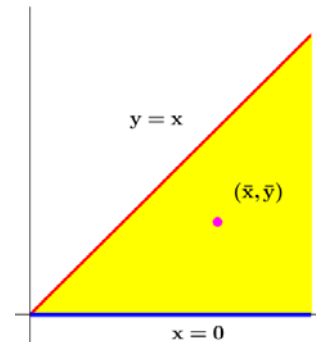
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{S} \int_0^a x (x - 0) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{2}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

Leiame massikeskme  $y$ -telje koordinaadi:

$$\bar{y} = \frac{2}{2a^2} \int_0^a (x^2 - 0) dx = \frac{1}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3} a.$$

Seega asub massikeske punktis  $(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a)$ . Geomeetriast teame, et ühtlasi on see ka mediaanide lõikepunkt.

◇ ◇ ◇





## Peatükk 12

# Päratud integraalid ja nende rakendused

---

12.1 Päratud integraalid . . . . .	202
12.2 Lõpmatute rajadega integraalid . . . . .	202
12.3 Integraal tõkestamata funktsioonist . . . . .	206
12.4 Integraalide rakendusi statistikas * . . . . .	208
12.5 Euler'i integraalid * . . . . .	211
12.6 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine . . . . .	214
12.7 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine * . . . . .	218

---

### Kontrolltöö teemad

1. Lõpmatute rajadega integraal.
2. Integraal katkevast funktsioonist.
3. Päratute integraalide koondumine ja hajumine.

### Eksamiteemad

1. Lõpmatute rajadega integraal.
2. Integraal katkevast funktsioonist.
3. Millal nimetatakse päratut integraali koonduvaks ja millal hajuvaks?

## 12.1 Päratud integraalid

Riemann'i integraali  $\int_a^b f(x) dx$  defineerimisel eeldasime, et integreerimisloik  $[a, b]$  on lõplik. Lisaks on Riemann'i integraali olemasoluks tarvilik tingimus funktsiooni  $f$  tõkestatus lõigus  $[a, b]$  (kui funktsioon ei ole tõkestatud mingis punktis, siis saab Riemann'i summas moodustada ristküliku, mille kõrgus on tõkestamata (kusjuures laius on nullist erinev) ja seega ka kogu summa on tõkestamata).

Osutub, et toodud eeldustest saab vabaneda, kui sobivalt üldistada määratud integraali mõistet. Vaatleme kahte erinevat liiki päratud integraali: lõpmatute rajadega integraalid ja lisaks integraalid tõkestamata funktsioonidest.

## 12.2 Lõpmatute rajadega integraalid

### Definitsioon 12.1

Eksisteerigu  $\int_a^M f(x) dx$ , iga  $M \in [a, \infty)$  korral, siis päratu integraal piirkonnas  $[a, \infty)$  defineeritakse seosega

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx. \quad (12.1)$$

Analoogiliselt, eksisteerigu  $\int_M^b f(x) dx$ , iga  $M \in (-\infty, b]$  korral, siis päratu integraal piirkonnas  $(-\infty, b]$  defineeritakse seosega

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x) dx. \quad (12.2)$$

### Definitsioon 12.2

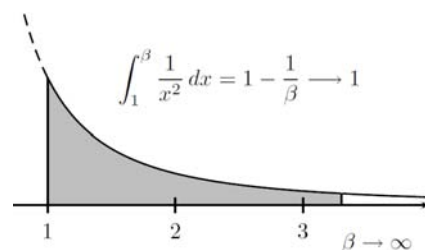
Kui eksisteerib lõplik piirväärtus seoses (12.1) (seoses (12.2)), siis nimetame vastavat päratud integraali **koonduvaks**, vastasel korral **hajuvaks**.

**Näide 12.1** Leiame päratu integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Märgime, et funktsioon  $y = \frac{1}{x^2}$  on pidev igas piirkonnas  $[1, M]$ , kus  $M \in (1, \infty)$ , sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit.

◇ ◇ ◇



Allikas: [3]

Kirjutame

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{M} + 1 \right) = 1.$$

Joone  $y = \frac{1}{x^2}$  alune pindala piirkonnas  $[1, \infty)$  on tõkestatud ja  $S = 1$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 12.2** Leiame päratu integraali

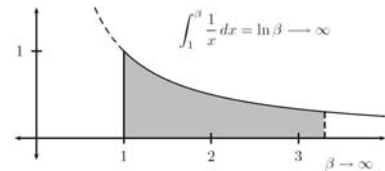
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$

Märgime, et funktsioon  $y = \frac{1}{x}$  on pidev igas piirkonnas  $[1, M]$ , kus  $M \in (1, \infty)$ , sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \ln |x| \Big|_{x=1}^{x=M} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} (\ln |M| - \ln |1|) = \infty. \end{aligned}$$

Joone  $y = \frac{1}{x}$  alune pindala on piirkonnas  $[1, \infty)$  tõkestamata ja  $S \rightarrow \infty$ .

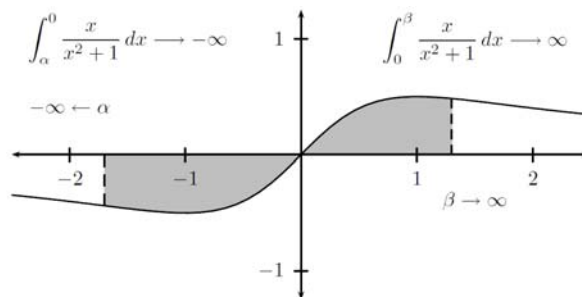
◇ ◇ ◇



Allikas: [3]

**Näide 12.3** Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis tuleb oma järeldustes olla ettevaatlik. Leiame päratu integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$



Allikas: [3]

Märgime, et funktsioon  $y = \frac{1}{x^2}$  on pidev igas piirkonnas  $[-M, M]$ , kus  $M \in (-\infty, \infty)$ , sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit.

Kirjutame

$$\int_{-M}^M \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-M}^M \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| \Big|_{x=-M}^{x=M} = 0.$$

Ometigi ei järeldu sellest, et esialgne integraal ise on võrdne nulliga. Osutub, et selline integraal on hajuv (selles mõttes, et tal ei ole ühest väärtust).

◇ ◇ ◇

Kui vaadata eraldi integraale  $\int_0^{\infty}$  ja  $\int_{-\infty}^0$ , siis

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_{x=0}^{x=M} \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |M^2+1| \right) = \infty$$

ja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_{x=M}^{x=0} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} \ln |M^2+1| \right) = -\infty. \end{aligned}$$

Saime, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \infty - \infty,$$

mis on määramata suurus ja seepärast ütleme, et antud integraal hajub. Tegelikult piisas leida ainult üks integraal  $\int_0^{\infty} \rightarrow \infty$ , et järeldada kogu esialgse integraali hajumist.

Siin võiks ju väita, et saaksime integraali  $\int_{-\infty}^{\infty}$  leida kui piirväärtuse

$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M$ , kuid päris nii lihtne see ei ole. Nimelt, vaatleme kahte erinevat lõpmatuse protsessi:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_{x=-M}^{x=M} \right) = 0,$$

kuid samas

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{2M} \frac{x}{x^2+1} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \Big|_{x=-M}^{x=2M} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2M)^2+1}{M^2+1} \right| \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \ln \sqrt{\frac{4 + \frac{1}{M^2}}{1 + \frac{1}{M^2}}} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et protsessis  $M \rightarrow \infty$  mõlemal juhul  $(-M, M)$  ja  $(-M, 2M)$  kaetakse ära kogu reaaltelg  $(-\infty, \infty)$ , kuid piirväärtused integraalidest annavad erinevad tulemused. Sellepärast me kasutame järgmist definitsiooni.

◇ ◇ ◇

### Definitsioon 12.3

Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis defineerime päratu integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kui vähemalt üks integraalidest  $\int_{-\infty}^c$  või  $\int_c^{\infty}$  on tõkestamata, siis integraal  $\int_{-\infty}^{\infty}$  hajub.

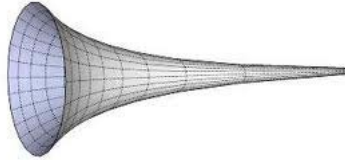


## Näide 12.4

Gabriel'i sarv (Torricelli trompet). Vaatleme joont

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty).$$

Kui me paneme selle joone ümber  $x$ -telje pöörlema, siis tekib ruumiline kujund, mida nimetatakse Gabriel'i sarveks või siis ka Torricelli trompetiks.



Selle trompetiga on seotud huvitav paradoks. Nimelt, trompetil on lõplik ruumala, kuid lõpmatu välispinna pindala. Trompetit saaks teoreetiliselt seest poolt värvida, kallates sinna sisse lõpliku koguse värvi, aga välispinda ei ole võimalik lõpliku koguse värviga katta.

Leiame pöördkeha ruumala

$$V = \pi \int_1^{\infty} y^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\pi \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{x=M} \right) = \pi.$$

Pinna pindala tuleb aga

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} y \cdot \sqrt{1 + [y']^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Viimast integraali on täpselt üsna raske leida, aga meile piisab hinnangust. Kuna

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq 1,$$

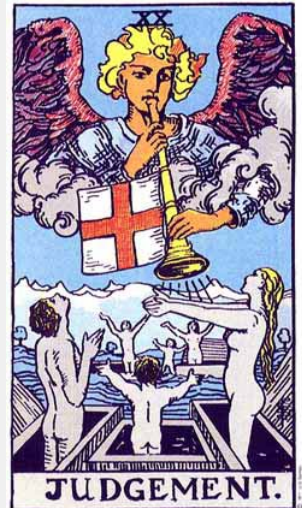
siis

$$S \geq 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi \cdot \lim_{M \rightarrow \infty} (\ln |M| - \ln |1|) = \infty.$$

Seega pinna pindala  $S$  on tõkestamata.

◇ ◇ ◇

Sarve nimi tuleb peangel Gabriel'i nimest, kes peaks siis Viimse Kohtupäeva kuulutamisel puhuma sarve sümboliseerimaks lõpmatut ja lõplikku üheskoos.



Allikas: internet

Gabriel'i sarve esmauurimise au kuulub itaalia füüsikule ja matemaatikule - baromeetri leiutajale - Evangelista Torricelli'le.



Allikas:

<http://www.h33.dk/>

### 12.3 Integraal tõkestamata funktsioonist

#### Definitsioon 12.4

Olgu funktsioon  $f$  tõkestamata punkti  $b$  ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_a^M f(x) dx,$$

iga  $M \in [a, b)$  korral, siis päratu integraal lõigus  $[a, b]$  defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow b^-} \int_a^M f(x) dx. \quad (12.3)$$

Analoogiliselt, olgu funktsioon  $f$  tõkestamata punkti  $a$  ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_M^b f(x) dx,$$

iga  $M \in (a, b]$  korral, siis päratu integraal lõigus  $[a, b]$  defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow a^+} \int_M^b f(x) dx. \quad (12.4)$$

#### Definitsioon 12.5

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus seoses (12.3) (seoses (12.4)), siis nimetame vastavat päratut integraali koonduvaks, vastasel korral hajuvaks.

**Näide 12.5** Leiame päratu integraali

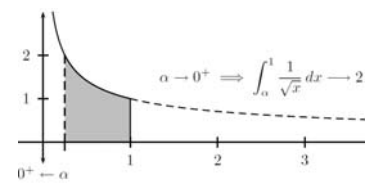
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Märgime, et funktsioon  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  on pidev igas piirkonnas  $[M, 1]$ , kus  $M \in (0, 1]$ , sel juhul saab kasutada Newton'i-Leibniz'i valemit. Kirjutame

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{M \rightarrow 0^+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{M \rightarrow 0^+} \left( 2\sqrt{x} \Big|_{x=M}^{x=1} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{M}) = 2. \end{aligned}$$

Joone  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  alune pindala on piirkonnas  $[0, 1]$  tõkestatud ja  $S = 2$ .

◇ ◇ ◇



Allikas: [3]

## Näide 12.6 Integraal

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ei eksisteeri Riemann'i mõttes, sest integreeritav funktsioon pole tõkestatud punkti  $x = 1$  ümbruses. Selle funktsiooni päratu integraal on aga

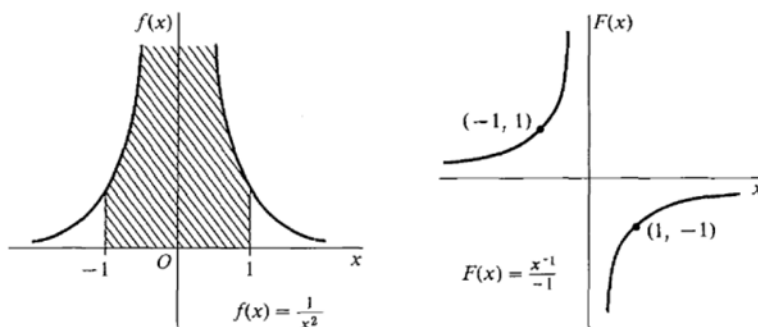
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{M \rightarrow 1^-} \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{M \rightarrow 1^-} \left( \arcsin x \Big|_{x=0}^{x=M} \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow 1^-} \arcsin M = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

## Näide 12.7 Integraal

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

ei eksisteeri Riemann'i mõttes, kuna funktsioon  $y = \frac{1}{x^2}$  on katkev punktis 0 olles samal ajal tõkestamata punkti 0 ümbruses.



Allikas: [http://www.vias.org/calculus/04\\_integration\\_03\\_ex09.html](http://www.vias.org/calculus/04_integration_03_ex09.html)

Võib leida, et pool pindalast on

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow 0^-} \int_M^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{M \rightarrow 0^-} \left( -\frac{1}{x} \Big|_{x=M}^{x=1} \right) = \lim_{M \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{M} - 1 \right) = \infty.$$

Kuna pool pindala on tõkestamata, siis ka terve pindala.

Märgime, et vale oleks kohe Newton'i-Leibniz'i valemit kasutada:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \mapsto -\frac{1}{x} \Big|_{x=-1}^{x=1} = -1 - 1 = -2.$$

Viimane on ilmselgelt vale, sest juba jooniselt näeme, et pindala peab tulema positiivne. Vale tulemuse saame, kuna funktsioon  $y = \frac{1}{x^2}$  ei ole pidev lõigus  $[-1, 1]$ , kuid Newton'i-Leibniz'i valemit võis kasutada ainult pideva funktsiooni jaoks.

◇ ◇ ◇



Allikas: internet

Ilma graafiku abita on sellist viiga, kus funktsioon katkeb integreerimislõigu sees, väga raske avastada.

**Definitsioon 12.6**

Kui funktsioon  $f$  on tõkestamata punktis  $c \in (a, b)$ , kuid pidev piirkonnas  $[a, c] \cup (c, b]$ , siis defineerime päratu integraali

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

## 12.4 Integraalide rakendusi statistikas \*

Tõenäosusteooria baseerub juhusliku suuruse mõistel, mida me siin rangelt andma ei hakka, aga midagi peame siiski selgituseks tooma.

**Definitsioon 12.7**

**Juhuslikuks suuruseks** nimetatakse funktsiooni, mis seab igale sündmusele vastavusse ühe reaalarvu.

**Märkus 12.1**

Täpsemalt, juhuslikuks suuruseks nimetatakse funktsiooni  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , mille korral hulk  $\{y : X(y) \leq x\}$  on sündmus iga  $x \in \mathbb{R}$  jaoks. Siinjuures hulk  $\Omega$  tähistab sündmuste ruumi.

**Näide 12.8** Olgu antud lame laud ja selle peal sirgjoon. Viskame nõela juhuslikult lauale ja vaatame, millise nurga all nõel lauale asetub. Tähistame iga viske korral nõela ja sirge vahelise nurga juhusliku suurusega  $X \in [0, 90]$  kraadi. Proovime arvutada tõenäosust, et nõel satub näiteks 45-kraadise nurga alla. Tõenäosus, et  $X = 45$  kraadi on tegelikult null, kuna erinevaid nurki on lõpmata palju. Küll aga saab näiteks arvutada tõenäosust, et  $X \in [40, 50]$ . Viimane arvutatakse kui lõigu pikkus 10 jagatud kogulõigu pikkus 90 ehk

$$P(40 \leq X \leq 50) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

◇ ◇ ◇

**Definitsioon 12.8**

Kui  $X$  on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et  $X$  asub arvude  $a$  ja  $b$  vahel, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (12.5)$$

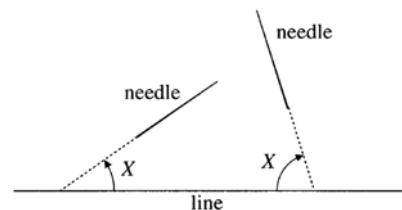
kus funktsioon  $f$  on pideva juhusliku suuruse  $X$  **tihedusfunktsioon** või ka lihtsalt tihedus.

Näiteks mündi viskamisel on sündmuste hulgas

$$\Omega = \{ \text{kull, kiri, serv} \}.$$

Siinjuures juhuslik suurus  $X$  peaks omandama mingi arvulise väärtuse, mille tähenduseks on näidata, kas tuli kull, kiri või maandus münt serva peale. Näiteks võiksime võtta, et  $-1, 0, 1$  tähistaksid vastavalt kulli, kirja ja serva. Siis väärtus  $X = 1$  tähistaks mündi serva peale kukkumist.

Juhuslikku suurust  $X$  nimetatakse pidevaks, kui  $X$  võib omandada (mingis piirkonnas) mistahes reaalarvulisi väärtusi. Näiteks mündi viskamisel  $X$  on diskreetne juhuslik suurus, aga nõela viskamine lauale ja selle asendi fikseerimine on pidev sündmus, kuna nõel võib lauale kukkuda mistahes nurga all võrrelduna laua servaga.



**Näide 12.9** Jätkame nõela näitega. Tõenäosus, et  $X$  kraadi kuulub lõiku  $[a, b] \subset [0, 90]$  on alati

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{b-a}{90} = \frac{1}{90}(b-a).$$

Viimase saab kirjutada kujul

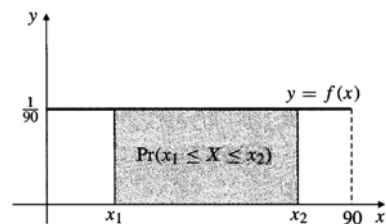
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{90} dx.$$

Seega nõela viskamisel pideva juhusliku suuruse  $X$  tihedusfunktsiooniks on konstantne funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{90}, & x \in [0, 90], \\ 0, & x \notin [0, 90]. \end{cases}$$

Sellise konstantse funktsiooni korral öeldakse, et juhuslik suurus on ühtlase jaotusega.

◇ ◇ ◇



Kuna kogu teooria peab sobima tõenäosuste arvutamisega, siis peab tihedusfunktsioon  $y = f(x)$  rahuldama tingimusi

1.  $f(x) \geq 0$  iga  $x \in \mathbb{R}$  korral;
2.  $P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

### Definitsioon 12.9

Tiheduse algfunktsiooni  $F$ , kus  $F'(x) = f(x)$  (punktides, kus  $F$  on diferentseeruv), nimetatakse pideva juhusliku suuruse  $X$  **jaotusfunktsiooniks**.

Statistikas uuritakse teatud jaotusfunktsioonide (ja tihedusfunktsioonide) klasse. Enim tuntud jaotused on ühtlane jaotus, normaaljaotus, eksponentjaotus. Nende jaotuste tihedusfunktsioonid on teada ja selle järgi on lihtne arvutada tõenäosusi.

### Definitsioon 12.10

Pideva juhusliku suuruse  $X$  **keskväärtuseks** nimetatakse suurust

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (12.6)$$

**Märkus 12.2**

Paneme tähele, et kui meil on homogeenest materjalist plaat pindalaga 1, mis on piiratud tihedusfunktsiooni  $f$  graafikuga ning  $x$ -teljega, siis sellise plaadi massikese  $x$ -telje sihis ongi jaotuse keskväärus.

**Definitsioon 12.11**

Pideva juhusliku suuruse  $X$  **dispersiooniks** nimetatakse suurust

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx. \quad (12.7)$$

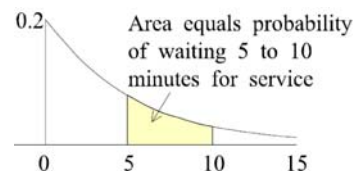
**Märkus 12.3**

Dispersioon  $D(X)$  mõõdab suuruse  $X$  jaotuse hajumist keskvääruse  $E(X)$  suhtes.

**Definitsioon 12.12**

**Standardhälbeks** nimetatakse arvu

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$



Allikas: [19]

**Näide 12.10** Olgu juhuslikuks suuruseks ajaintervall  $T$ , mis jääb kahe erineva kliendi teenindamise vahele, nõ. ooteaeg. Kui  $\mu$  on nende ajaintervallide keskmine, siis  $T$  jaotub eksponentsiaalselt tihedusega

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} & , t \geq 0 \end{cases}.$$

Olgu konkreetselt vaatluse all restoran, kus laud vabaneb keskmiselt iga 5 minuti järel. Kui laud vabaneb näiteks kell 6:00, milline on tõenäosus, et järgmine laud vabaneb kella 6:05 ja 6:10 vahel?

Siin  $\mu = 5$  minutit. Sellisel juhul tihedusfunktsiooniks on

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-t/5} & , t \geq 0 \end{cases}.$$

Me otsime tõenäosust  $P(5 \leq T \leq 10)$ , mille leiame integraalist

$$P(5 \leq T \leq 10) = \int_5^{10} f(t) dt = - \int_5^{10} e^{-t/5} d\left(-\frac{t}{5}\right) = -e^{-t/5} \Big|_{t=5}^{t=10} \approx 0.233,$$

ehk 23.3%.

◇ ◇ ◇

Päratud integraalid tekiks meil, kui me küsiks näiteks, et milline on tõenäosus, et ooteaeg  $T$  on suurem kui 20 minutit. Sellisel juhul otsime tõenäosust  $P(20 \leq T < \infty)$ ,

$$\begin{aligned} P(20 \leq T < \infty) &= \int_{20}^{\infty} f(t) dt = - \int_{20}^{\infty} e^{-t/5} d\left(-\frac{t}{5}\right) = - \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-t/5} \Big|_{t=20}^{t=M} \\ &= - \lim_{M \rightarrow \infty} \left( e^{-M/5} - e^{-4} \right) = e^{-4} \approx 0.018, \end{aligned}$$

ehk 1.8%. Võib leida, et dispersioon

$$D(T) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_0^{\infty} (t-5)^2 e^{-t/5} dt = 25,$$

ja standardhälve on  $\sigma = \sqrt{D(T)} = \sqrt{25} = 5$ .

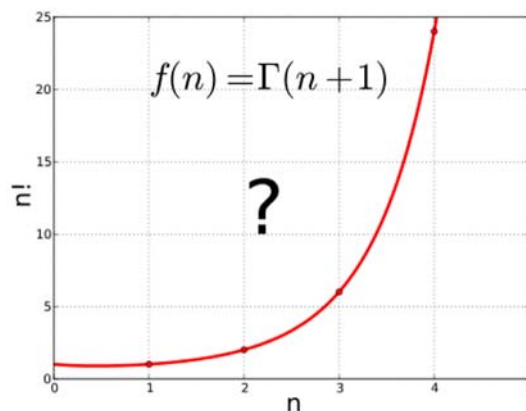
◇ ◇ ◇

## 12.5 Euler'i integraalid \*

Olgu meil antud naturaalarv  $n \in \mathbb{N}$ . Siis saame arvutada faktoriaali

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Kui koostada graafik punktidest  $1, 2, \dots, n$  ( $x$ -teljel) ja vastavatest faktoriaali väärtustest  $1!, 2!, \dots, n!$  ( $y$ -teljel), siis tekib küsimus, kas on võimalik leida selline heade omadustega funktsioon, mis läbib kõiki punkte  $(1, 0!), (2, 1!), \dots, (n, (n-1)!)$ ? See on nn. interpoleerimisülesanne.



Joonis: Wikipedia.

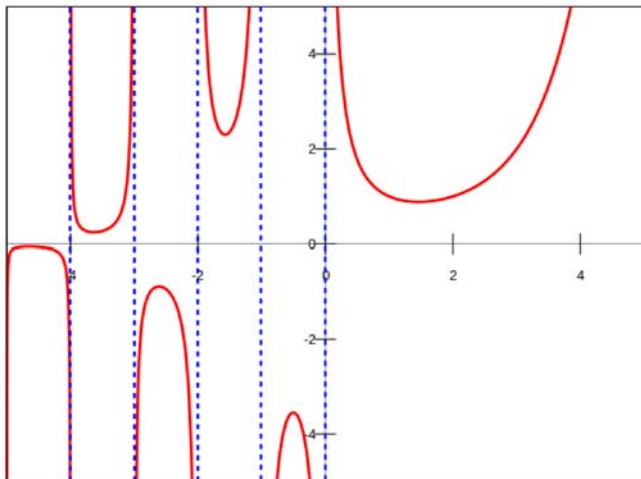
Joonisele peale vaadates on selge, et selline funktsioon leidub, aga nüüd tekib küsimus, et millised on selle funktsiooni vahepealsed väärtused ja kas annaks korrektselt defineerida ka faktoriaal murdarvust, näiteks  $4.5!$ . Osutub, et sellele küsimusele on vastus jaatav ning defineeritava funktsiooni väärtusi tuleb matemaatikas arvutada väga sageli.

**Definitsioon 12.13**

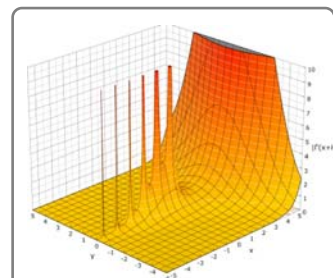
Euler'i teist liiki integraali

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

nimetatakse **gammafunktsiooniks**.



Gammafunktsiooni graafik reaalse argumendi korral (Wikipedia).



Joonis: Wikipedia.

Gammafunktsiooni mooduli graafik kompleksitasandil.

Gammafunktsioonil on järgmised omadused:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12.8)$$

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x), \quad x > 0, \quad (12.9)$$

$$\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}. \quad (12.10)$$

Gammafunktsioon on matemaatikas ja tema rakendustes (kvantfüüsikas, astrofüüsikas, vedelike dünaamikas, statistikas nt. gammajaotus) üsna laialt levinud. Viimastel aastakümnetel on suure populaarsuse saavutanud murruliste tuletiste teooria ja rakendamine füüsika nähtuste modelleerimises. Murrulise tuletise korral võib tuletise aste olla murdarv (näiteks tuletis järku 1.5). Murrulised tuletised on aga juba väga tihedalt seotud Euler'i integraalidega.

**Näide 12.11** On palju integraale, millel ei leidu algfunktsiooni elementaarfunktsioonide kujul, kuid mis avalduvad Euler'i integraalide kaudu. Arvutame

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^3} dx.$$

Teeme muutuja vahetuse  $t = x^3$ . Siis

$$x = t^{1/3}, \quad dt = 3x^2 dx, \quad x^{-2} = t^{-2/3} = t^{1/3-1}.$$

Siis

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} x^{-2} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} t^{1/3-1} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma(1/3).$$

◇ ◇ ◇

Euler'i integraalide ligikaudseteks arvutamiseks on olemas üsna kiired ja täpsed arvutialgoritmid. Kui integraali õnnestub esitada Euler'i I või II liiki integraalide kaudu, siis üldjuhul on see hea omadus.



**Definitsioon 12.14**

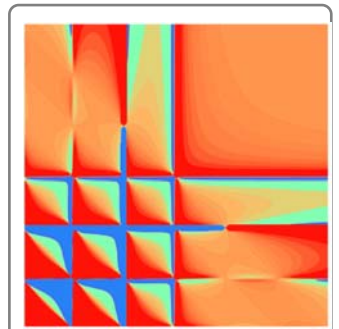
Euler'i esimest liiki integraali

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0,$$

nimetatakse **beetafunktsiooniks**.

Beeta- ja gammafunktsiooni vahel kehtib järgmine seos:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (12.11)$$



Joonis: Wikipedia.

Beetafunktsiooni kontuurgraafik kompleksstasandil.

Siit järeldub, et

$$B(0.5, 0.5) = \frac{\Gamma(0.5)\Gamma(0.5)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{0!} = \pi.$$

**Näide 12.12** Arvutame

$$I = \int_0^1 x^3 (1 - \sqrt{x})^5 dx.$$

Teeme muutuja vahetuse  $t = \sqrt{x}$ . Siis

$$x = t^2, \quad 2t dt = dx.$$

Antud muutuja vahetuse korral rajad ei muutu. Seega

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^1 t^7 (1-t)^5 dt = 2 \int_0^1 t^{8-1} (1-t)^{6-1} dt \\ &= 2B(8, 6) = 2 \frac{\Gamma(8)\Gamma(6)}{\Gamma(14)} = 2 \frac{7!5!}{13!} = \frac{2 \cdot 5!}{8 \cdot 9 \cdots 13} = \frac{1}{5148}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

## 12.6 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

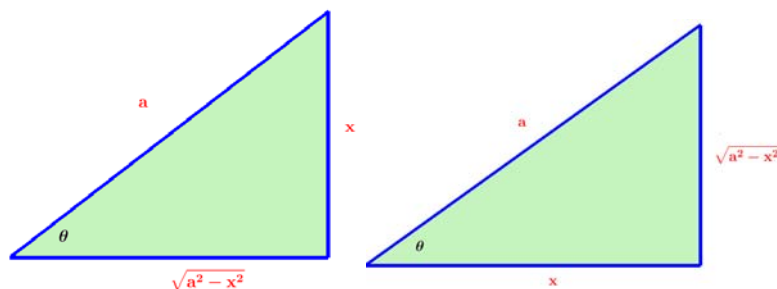
Vaatleme siinkohal funktsioone, mis sisaldavad ruutjuurt. Teatud tüüpi avaldiste korral võib abi olla muutuja vahetusest trigonomeetriliste funktsioonide kaudu. Võib ette anda mitmeid muutuja vahetusi, kuid lihtsamal juhul saab need asendused tuletada täisnurksest kolmnurgast siinuse, koosinuse ja tangensi seostest ning Pythagoras'e teoreemist.

Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > x,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \sin t \quad \text{või} \quad x = a \cos t.$$



### Märkus 12.4

Ruutjuure alt saame ruudu välja tuua vaid absoluutväärtuse märgi abil,

$$\sqrt{t^2} = |t|, \quad \sqrt{\sin^2 t} = |\sin t|, \quad \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|.$$

Trigonomeetrilised funktsioonid võivad olla ka negatiivsed ja absoluutväärtuse märgist vabanemine ei ole nii lihtne. Teema lihtsustamiseks eeldame siin kõikides ülesannetes, et meie ruutjuure all tekkivad funktsioonid on positiivsed (näiteks  $t \in (0, \pi/2)$  korral on siinus, koosinus ja tangens positiivsed). Kui argument  $t$  peaks kuuluma mõnda teise vahemikku, siis tuleks kaasata ka märgi analüüs.

**Näide 12.13** Leiame integraali

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

Siin  $a = 1$ . Teeme muutuja vahetuse

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t dt.$$

◇ ◇ ◇

Kuna  $a > x$  ja meil on avaldis ruutude vahest  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , siis peab  $a$  olema kõige pikem külg, milleks on täisnurkse kolmnurga hüpoteenus. Sõltuvalt sellest, millise kaatediga siduda  $x$  ja  $a$ , tuleks teha muutuja vahetus  $x = a \sin t$  või  $x = a \cos t$ .

Kui me ei tea, kas  $\sin t > 0$  või hoopis  $\sin t < 0$ , siis võib kasutada põhimõtet

$$A(t) = \text{sign}(\sin t),$$

kus signum näitab suuruse  $\sin t$  märki. Sel juhul

$$|\sin t| = A(t) \sin t$$

ja

$$\int |\sin t| dt = A(t) \int \sin t dt.$$

Selle  $A(t)$  võib integraali märgi alt välja tuua, kuid ainult siis, kui suurust (mitte kui funktsiooni)  $A(t)$  tõlgendada **koos märgi analüüsiga vaadeldavas piirkonnas**. Sisult peaksime integraali vaatama eraldi kahes piirkonnas: positiivses  $\sin t$  piirkonnas ja negatiivses  $\sin t$  piirkonnas. Kuna pikkade avaldiste kaasas kandmine on tülikas ja topelt sama asja läbi teha ka tülikas, siis avaldise  $A(t)$  defineerimine on üks mõttelisi lahendusi mida tuleb ka hiljem vastavalt tõlgendada. Määratud integraali korral teaksime konkreetsemalt, milline on trigonomeetrilise funktsiooni väärtus vaadeldavas piirkonnas ja oskaksime integraali tükeldada vastavalt vajadusele.

Siis

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t \sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t |\cos t|}.$$

Kui  $\cos t > 0$ , siis

$$I = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\cot t + C.$$

Vastuse võiksime ka niimoodi jätta, aga viisakas oleks see siiski esitada esialgse argumendi  $x$  kaudu. Kuna  $x = \sin t$ , siis  $\cot t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  (vaata paremal olevat selgitust) ja

$$I = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Näitame, et sama tulemuse saame muutuja vahetusega

$$x = \cos t, \quad dx = -\sin t dt.$$

Siis

$$I = \int \frac{-\sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{1 - \cos^2 t}} = -\int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t |\sin t|}.$$

Kui  $\sin t > 0$ , siis

$$I = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\tan t + C.$$

Kuna  $x = \cos t$ , siis  $t = \arccos x$  ja arkusfunktsioone kasutades (ei pea, aga võib) saame samuti

$$I = -\frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} + C = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}}{x} + C = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C.$$

◇ ◇ ◇

Kuna meil on asendus

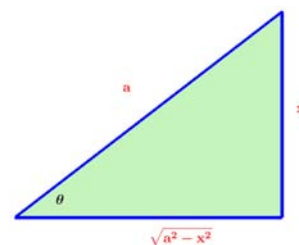
$$x = \sin t,$$

siis alumisest kolmnurgast järeldub konstruktsiooni põhjal, et

$$\cos t = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$\tan t = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Sedasi saab nii siinused, koosinused kui tangensid asendada ilma arkusfunktsioone kasutamata.

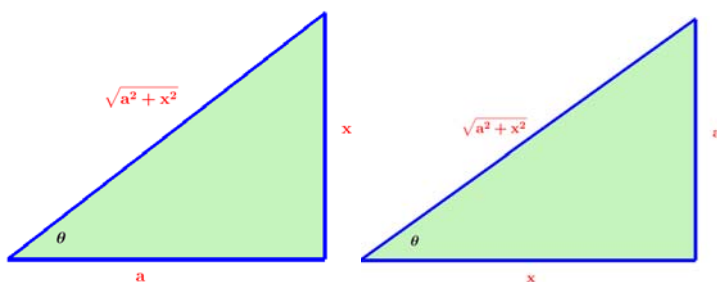


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \tan t \quad \text{või} \quad x = a \cot t.$$



Kuna meil on avaldis ruutude summast  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , siis peab see asuma kolmnurga hüpoteenuusil. Sõltuvalt sellest, millise kaatediga siduda  $x$  ja  $a$ , tuleks teha muutuja vahetus  $x = a \tan t$  või  $x = a \cot t$ .

**Näide 12.14** Leiame integraali

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Siin  $a = 2$ . Teeme muutuja vahetuse

$$x = 2 \tan t, \quad dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

Siis

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2dt}{\cos^2 t \sqrt{4 \tan^2 t + 4}} = \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1}} \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} = \int \frac{|\cos t| dt}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

Kui  $\cos t > 0$ , siis

$$I = \int \frac{dt}{\cos t}.$$

Tundub päris lihtne integraal, aga päris nii see ei ole. Kasutame siin diferentsiaali märgi alla viimise võtet:

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1 - \sin^2 t} \stackrel{u = \sin t}{=} = \int \frac{du}{1 - u^2} = \int \frac{du}{(1 - u)(1 + u)}.$$

Nüüd saab kasutada ratsionaalsete avaldiste integreerimise võtteid,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du = \frac{1}{2} (\ln |1 + u| - \ln |1 - u|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C. \end{aligned}$$

Teisandame

$$\frac{1 + u}{1 - u} = \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} = \frac{(1 + \sin t)^2}{\cos^2 t} = \left( \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right)^2.$$

Seega

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{\cos t} \right|^2 + C = \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \tan t \right| + C.$$

Tulemuse saamine oli päris keeruline ja sisaldas palju matemaatikas tuntud võtteid. Minnes tagasi muutujale  $x$ , peame vabanema liikmetest  $\cos t$  ja  $\tan t$ . Teeme seda päris „stiilselt“, kuna me ei kasuta trigonomeetrilisi teisendusi, vaid esialgset konstrueeritud täisnurkset kolmnurka:

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad \tan t = \frac{x}{2}.$$

Siit saame lõppvastuseks

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \sqrt{x^2 + 4} + x \right| + \underbrace{C - \ln 2}_{C'}.$$

◇ ◇ ◇

Kuna meil on asendus

$$x = 2 \tan t,$$

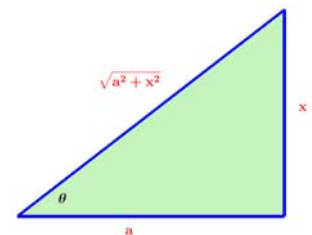
siis alumisest kolmnurgast järel-  
dub konstruktsiooni põhjal, et

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

$$\tan t = \frac{x}{2}.$$

Sedasi saab nii siinused, koo-  
sinused kui tangensid asenda-  
da ilma arkusfunktsioone kasu-  
tamata.

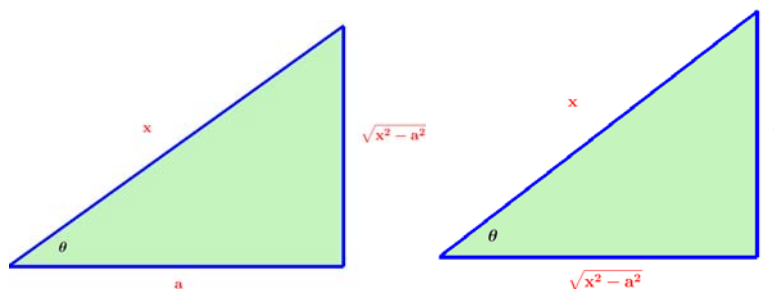


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x > a \text{ või } x < -a,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin t}.$$



**Näide 12.15** Leiame integraali

$$I = \int \frac{2dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Siin  $a = 3$ . Teeme muutuja vahetuse

$$x = \frac{3}{\cos t}, \quad dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt.$$

Siis

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{\sin t \cos t dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} = \frac{2}{3} \int \frac{\sin t dt}{\cos t \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\sin t |\cos t| dt}{\cos t |\sin t|}. \end{aligned}$$

Kui  $\cos t > 0$  ja  $\sin t > 0$ , siis

$$I = \frac{2}{3} \int dt = \frac{2}{3} t + C = \frac{2}{3} \arccos \frac{3}{x} + C.$$

◇ ◇ ◇

## 12.7 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine \*

Trigonomeetriliste avaldiste korral saab kasutada tuntud teisendusi ja valemeid, kuid teisenduste läbiviimine võib ise osutada üpris keeruliseks ettevõtmiseks. Lisaks on vaja teada või üles otsida kõiki neid „tuhandeid“ teisendusvalemeid. Sageli on võimalik ka teisiti. Trigonomeetrilisi murde ja lihtavaldisi saab viia ratsionaalseteks funktsioonideks universaalse muutujavahetusega.

Teeme integraalis  $\int f(x) dx$  muutuja vahetuse

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{kui } x \in (-\pi, \pi). \quad (12.12)$$

Sel juhul

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad (12.13)$$

ja

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (12.14)$$

**Näide 12.16** Leiame integraali

$$I = \int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx.$$

Toodud muutuja vahetuse abil saame, et

$$I = \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} + t + 2\right) dt.$$

Vastuseks tuleb

$$I = \frac{1}{2} \left( \ln |t| + \frac{t^2}{2} + 2t \right) + C, \quad \text{kus } t = \tan \frac{x}{2}.$$

◇ ◇ ◇

### Märkus 12.5

Kuigi universaalne trigonomeetriline asendus viib alati sihile, võib lahenduskäik osutada siiski üpris keeruliseks. Erijuhul võib proovida ka lihtsamaid asendusi  $t = \cos x$ ,  $t = \sin x$  ja  $t = \tan x$ .

# Peatükk 13

## Vektorid ruumis

---

13.1 Suunatud lõikude hulk . . . . .	220
13.2 Vabavektorid . . . . .	222
13.3 Projektsioonivektor . . . . .	224
13.4 Kohavektorid . . . . .	225
13.5 Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$ . . . . .	226
13.6 Skalaarkorrutis . . . . .	228
13.7 Vektorkorrutis . . . . .	232
13.8 Segakorrutis . . . . .	234

---

### Kontrolltöö teemad

1. Vektorite skalaarkorrutis ja selle omadused, nurk kahe vektori vahel.
2. Vektorkorrutis, segakorrutis. Nende omadused.

### Eksamiteemad

1. Seotud vektorid, vabavektorid. Vektori projektsioonivektor ja projektsioon vektori sihile. Eukleidiline vektorruum  $\mathbb{R}^n$ , tema loomulik baas, vektori pikkus ruumis  $\mathbb{R}^n$ .
2. Skalaarkorrutise mõiste. Skalaarkorrutise omadused. Skalaarkorrutise arvutamine koordinaatkujul. Vektorite ristseisu tingimus. Kahe vektori vahelise nurga leidmine.
3. Vektorkorrutise mõiste. Vektorkorrutise omadused. Vektorkorrutise arvutamine koordinaatkujul. Rööpküliliku ja kolmnurga pindala arvutamine. Vektorite kollineaarsuse tingimus.
4. Segakorrutise mõiste. Segakorrutise omadused. Segakorrutise arvutamine koordinaatkujul. Kolme vektori komplanaarsus. Rööptahuka ja tetraeedri ruumala arvutamine.

Antud loengu materjal pärineb suuresti **Aivo Parringu** loengukonseptist <http://math.ut.ee/pmi/kursused/ag/parring/> peatükist "IV. Vektoralgebra". Viidatud materjal on kogu teoreetiline ülesehitus algusest lõpuni läbi tehtud koos vajalike tõestustega. Meie peame siin paratamatult tegema käsitluses teatud kärpeid, sest muidu me asja tuumani pikka aega ei jõuakski.

## 13.1 Suunatud lõikude hulk

### Märkus 13.1

**Punkt** on meie jaoks algmõiste, mida me ei defineeri ja mida on aastatuhandeid näitlikult ette kujutatud, kui pikkuseta ja laiuseta objekti. Punkte tähistame suurte trükitähtedega. Fikseeritud punkti korral kasutame reeglina suuri trükitähti tähestiku algusest, näiteks  $A, B, C$ . Kui on tegemist suvalise punktiga, siis tähestiku lõpuosast, näiteks  $X, Y, Z$ .

### Märkus 13.2

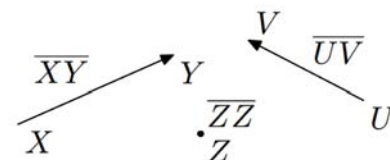
Osutub, et ruumi, tasandi kui ka sirge punktide abil saab üsna loomulikult anda igaihe korral eraldi teatava vektorruumi.

### Definitsioon 13.1

Ruumi, tasandi ja sirget me tähistame järjekorras vastavalt  $E_3, E_2$  ja  $E_1$  abil. Üldiselt kasutame nende ruumide jaoks ühtset tähist  $E$ .

### Märkus 13.3

Mistahes kahe punkti  $X, Y \in E$  poolt määratud lõiku saame tähistada kahel erineval moel –  $XY$  või  $YX$ . Esimesel kohal olevat tähte loeme lõigu alguspunktiks ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktiks. Seega  $XY$  ei tähista ainult lõiku otspunktidega  $X$  ja  $Y$ , vaid tähistab lõiku alguspunktiga  $X$  ja lõpp-punktiga  $Y$ .



### Definitsioon 13.2

Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, s.t. suund, nimetatakse **suunatud lõiguks** ehk **seotud vektoriks**. Seotud vektorit alguspunktiga  $X$  ja lõpp-punktiga  $Y$  tähistame edaspidi  $\overline{XY}$  abil.

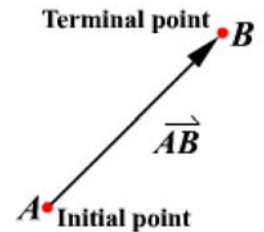


**Definitsioon 13.3**

Seotud vektorit  $\overline{XX}$ , mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**.

**Märkus 13.4**

Joonisele seotud vektori kandmisel joonistame teda määrava lõigu, tähistame ära tema otspunktid. Et eristada lõigul algus- ja lõpp-punkti, kujutame seda lõiku noole abil, mis määrab temal suuna. Noole kõrvale kirjutame seotud vektori tähise.

**Definitsioon 13.4**

Kõikide seotud vektorite hulka tähistame vastavalt  $\overline{\mathbb{E}}_3$ ,  $\overline{\mathbb{E}}_2$  ja  $\overline{\mathbb{E}}_1$  abil, ühtse tähisena  $\overline{\mathbb{E}}$ .

**Definitsioon 13.5**

Seotud vektori  $\overline{XY}$  pikkuseks  $|\overline{XY}|$  nimetatakse teda määrava lõigu  $XY$  pikkust.

**Definitsioon 13.6**

Seotud vektorit  $\overline{YX}$  nimetatakse seotud vektori  $\overline{XY}$  **vastandvektoriks**, mida tähistame  $-\overline{XY}$  abil, s.o  $-\overline{XY} = \overline{YX}$ .

**Definitsioon 13.7**

Seotud vektorit  $\overline{AB}$  nimetatakse **kollineaarseks** seotud vektoriga  $\overline{CD}$ , kui lõik  $AB$  on paralleelne lõiguga  $CD$ . Öeldut tähistatakse  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  abil ning kui vektorid ei ole kollineaarsed, siis  $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$  abil.

**Märkus 13.5**

Seotud nullvektor on kollineaarne iga seotud vektoriga, kuna seda nullvektorit määrav lõik on paralleelne mistahes seotud vektorit määrava lõiguga.

**Definitsioon 13.8**

Seotud vektorit  $\overline{AB}$  nimetatakse **samasuunaliseks** (vastassuunaliseks) seotud vektoriga  $\overline{CD}$ , kui esiteks  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  ja teiseks suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistatakse esimesel juhul  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$  ja teisel juhul  $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$  abil.

**Märkus 13.6**

Seotud nullvektor on nii samasuunaline kui vastassuunaline iga teise seotud vektoriga.

**Definitsioon 13.9**

Seotud vektorit  $\overline{AB}$  nimetatakse **ekvivalentseks** seotud vektoriga  $\overline{CD}$ , tähistatakse  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  abil, kui  $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$  ja  $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ .

## 13.2 Vabavektorid

**Definitsioon 13.10**

Seotud vektoriga  $\overline{AB}$  ekvivalentsete seotud vektorite hulka  $\{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}$  nimetatakse **ekvivalentsiklassiks moodustajaga**  $\overline{AB}$ . Viimast tähistatakse  $\mathbf{AB}$  abil. Seega

$$\mathbf{AB} = \{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}.$$

**Märkus 13.7**

Seotud nullvektorid moodustavad omaette ekvivalentsiklassi

$$\mathbf{0} = \{\overline{XX} \mid X \in E\}.$$

**Definitsioon 13.11**

Tähistame

$$\mathbb{E}_3 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_3}\},$$

$$\mathbb{E}_2 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_2}\}$$

ja

$$\mathbb{E}_1 = \{\mathbf{XY} \mid \overline{XY} \in \overline{\mathbb{E}_1}\}$$

abil vastavalt kõiki ruumi  $E_3$ , tasandi  $E_2$  ja sirge  $E_1$  poolt moodustatud ekvivalentsiklasse ja nimetatakse nende elemente **vabavektoriteks**.

Ühine tähis vabavektorite vektorruumi jaoks olgu  $\mathbb{E}$ .

Siin mõtleme, et näiteks ruumi  $E_3$  (punktide) poolt moodustatud seotud vektorite ruumi  $\overline{\mathbb{E}_3}$  elementide abil moodustatud ruum  $\mathbb{E}_3$ .

**Definitsioon 13.12**

Vabavektori  $\mathbf{x} = \mathbf{AB} \in \mathbb{E}$  **vastandvektoriks** nimetatakse vabavektorit  $-\mathbf{x} = \mathbf{BA} \in \mathbb{E}$ .

**Definitsioon 13.13**

Vabavektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  **pikkuseks** nimetatakse seotud vektori  $\overline{AB} \in \mathbf{x}$  pikkust  $|\overline{AB}|$ . Tähistame  $|\mathbf{x}|$ .

**Definitsioon 13.14**

Vabavektoreid  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$  nimetatakse **kollineaarseteks**, kui nende vektorite moodustajad on kollineaarsed ehk  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  ning tähistatakse  $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$ .

**Definitsioon 13.15**

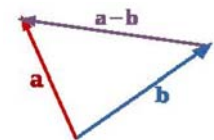
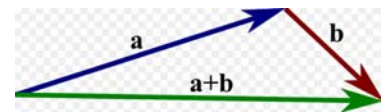
Vabavektoreid  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$  nimetatakse **samasuunalisteks** (**vastassuunalisteks**), kui nende vektorite moodustajad on samasuunalised (vastassuunalised) ehk  $\overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{A'B'}$  ( $\overline{AB} \uparrow \downarrow \overline{A'B'}$ ). Tähistatakse  $\mathbf{x} \uparrow \uparrow \mathbf{y}$  ( $\mathbf{x} \uparrow \downarrow \mathbf{y}$ ).

**Definitsioon 13.16**

Vektorite  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$  **summaks** nimetatakse vektorit  $\mathbf{c} \in \mathbb{E}$ :

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

mille alguspunkt langeb kokku vektori  $\mathbf{a}$  alguspunktiga ja lõpp-punkt vektori  $\mathbf{b}$  lõpp-punktiga eeldusel, et vektor  $\mathbf{b}$  on rakendatud vektori  $\mathbf{a}$  lõpp-punkti.

**Definitsioon 13.17**

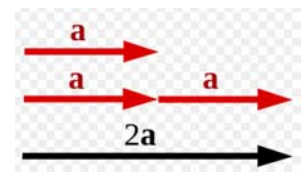
Vektorite  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$  **vaheks** nimetatakse vektorit  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$ , mis on võrdne summaga

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

**Definitsioon 13.18**

Vektori  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  **korruptiseks reaalarvuga**  $\lambda \in \mathbb{R}$  nimetatakse vektorit  $\lambda\mathbf{a} \in \mathbb{E}$ , mis määratakse tingimustega

1.  $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ ;
2.  $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \lambda\mathbf{a}$ , kui  $\lambda > 0$ ,  $\mathbf{a} \uparrow \downarrow \lambda\mathbf{a}$ , kui  $\lambda < 0$ .



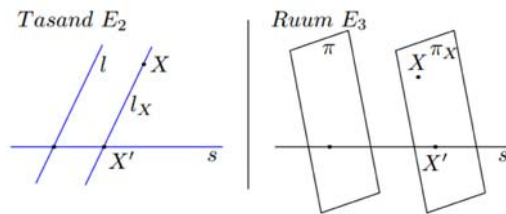
**Omadus 13.1**

Kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1.  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  iga  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}$  korral;
2.  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$  iga  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  korral;
3.  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = -\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$  iga  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  korral;
4.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  iga  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$  korral;
5.  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$  iga  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  korral;
6.  $(\alpha \cdot \beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$  iga  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ja iga  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  korral;
7.  $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$  iga  $\alpha \in \mathbb{R}$  ja iga  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$  korral;
8.  $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$  iga  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ja iga  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}$  korral.

### 13.3 Projektsioonivektor

Projektsioonivektorit ja projektsiooni vaadeldakse tasandil  $E_2$  ja ruumis  $E_3$ . Olgu tasandil (ruumis) fikseeritud mingi sirge  $s$  (vt. joonist).

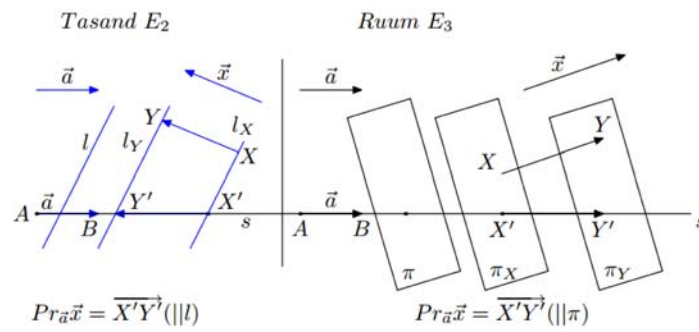


Sejärel fikseerime sirge  $l$  (tasandi  $\pi$ ), nõudes, et ta lõikab sirget  $s$  ja seejuures ainult ühes punktis. Iga punkti  $X$  korral sirgel  $l_X$  (tasandil  $\pi_X$ ) tekib sirge  $s$  ja sirge  $l_X$  (tasandi  $\pi_X$ ) lõikepunkt  $X'$ .

**Definitsioon 13.19**

Punkti  $X'$  nimetame punkti  $X$  **nimetatatakse** sirgel  $s$  paralleelselt sirgega  $l$  (tasandiga  $\pi$ ).

Võtame nullvektorist erineva vektori  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}_2$  ( $\mathbf{a} \in \mathbb{E}_3$ ). Fikseerime vabalt mingi punkti  $A \in E_2$  ( $A \in E_3$ ) (vt. joonist). Leidub selline punkt  $B \in E_2$  ( $B \in E_3$ ), et  $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$ . Kuna vektor  $\mathbf{a}$  ei ole nullvektor, siis punktid  $A$  ja  $B$  on erinevad. Tekkinud lõik  $AB$  määrab üheselt sellise sirge  $s$ , et  $AB \subset s$ . Edasi fikseerime sirge  $l \in E_2$  (tasandi  $\pi \in E_3$ ) nii, et  $l$  ( $\pi$ ) lõikab sirget  $s$  ainult ühes punktis. Mistahes vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_2$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$ ) korral, lähtudes mingist punktist  $X \in E_2$  ( $X \in E_3$ ), saame leida sellise punkti  $Y \in E_2$  ( $Y \in E_3$ ), et  $\mathbf{XY} = \mathbf{x}$ . Projekteerime punktid  $X$  ja  $Y$  sirgele  $s$  paralleelselt sirgega  $l$  (tasandiga  $\pi$ ), saades sirgel  $s$  vastavalt punktid  $X'$  ja  $Y'$ . Viimaste abil moodustame vektori  $\mathbf{X'Y'}$ .

**Definitsioon 13.20**

Vektorit  $\overrightarrow{X'Y'}$  nimetatakse vektori  $\mathbf{x}$  **projektsioonivektoriks** vektori  $\mathbf{a}$  sihile paralleelselt sirgela  $l$  (tasandiga  $\pi$ ). Projektsioonivektorit  $\overrightarrow{X'Y'}$  tähistatakse  $Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}$ .

**Omadus 13.2**

Vabavektorite summa projektsioonivektor on võrdne nende vabavektorite projektsioonivektorite summaga, s.t.

$$Pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} + Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{y}.$$

**Omadus 13.3**

Mistahes reaalarvu  $\lambda \in \mathbb{R}$  ja mistahes vabavektori  $\mathbf{x}$  korral

$$Pr_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}.$$

**Definitsioon 13.21**

Vabavektori  $\mathbf{x}$  **projektsiooniks** vabavektori  $\mathbf{a}$  sihile nimetatakse reaalarvu

$$pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} = \begin{cases} |Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}|, & \text{kui } Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} \uparrow \mathbf{a}, \\ -|Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x}|, & \text{kui } Pr_{\mathbf{a}}\mathbf{x} \updownarrow \mathbf{a}. \end{cases} \quad (13.1)$$

## 13.4 Kohavektorid

Märgime ruumis  $E$  (ruum, tasand või sirge) koordinaatide alguspunkti tähega  $O$ . Antud ruumis on loomulikul moel antud ristkoordinaatide süsteem, s.t. iga punkti  $X \in E$  korral on määratud selle punkti asukoht ja koordinaadid.

**Definitsioon 13.22**

Mistahes punkti  $X \in E$  **kohavektoriks** nimetatakse vektorit  $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}$ .

**Märkus 13.8**

Igal punktil  $X$  on olemas kohavektor ja seejuures ainult üks. Lisaks sellele iga vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  määrab sellise punkti  $X$ , millele ta on kohavektoriks. Rakendades vektori  $\mathbf{x}$  punktist  $O$ , tekib üheselt määratud punkt  $X$  nii, et  $\mathbf{OX} = \mathbf{x}$ . Järelikult leitud punkt  $X \in E$  on selline, et tema kohavektoriks on vektor  $\mathbf{x}$ .

**Märkus 13.9**

Kokkuvõttes ruumi  $E$  punktide ja vektorruumi  $\mathbb{E}$  vektorite vahel on üksühene vastavus. See annab võimaluse punktide uurimise taandada nende kohavektorite uurimisele.

## 13.5 Eukleidiline vektorruum $\mathbb{R}^n$

**Märkus 13.10**

Me ei pea piirduma sirge, tasandi ja ruumiga  $E$ , vaid võime kogu teooriat laiendada. Analoogiliselt punkti koordinaatidele  $(x) \in E_1$  sirgel,  $(x, y) \in E_2$  tasandil ja  $(x, y, z)$  ruumis  $E_3$  saab vaadelda  $n$ -korteeži  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mille abil defineerime palju üldisema vektorruumi.

Tegelikult kasutatakse vektorruumide jaoks palju üldisemat definitsiooni, mis meie kursusele ära ei mahu. Selle üldisema definitsiooni abil saab näidata, et ruum  $\mathbb{R}^n$  on vektorruum nimetatud tehete suhtes. Seega meie peame olukorra lihtsalt ära defineerima.

**Definitsioon 13.23**

Hulka

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.2)$$

nimetatakse  $n$ -mõõtmeliseks (eukleidiliseks) vektorruumiks, millel on defineeritud liitmine

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (13.3)$$

ja skalaariga korrutamine

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (13.4)$$

**Definitsioon 13.24**

Vektorite süsteemi  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, \dots, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (13.5)$$

nimetatakse vektorruumi  $\mathbb{R}^n$  loomulikuks baasiks.

Tegelikult leidub ühel vektorruumil lõpmata palju erinevaid baase ja viimaste muutmisel muutuvad ka koordinaadid (mis sõltuvad lisaks veel koordinaatide alguspunkti valikust). Selle pärast on oluline rõhutada, et meie koordinaadid kehtivad vaid nimetatud baasi jaoks. Kursustes Algebra 1 ja Kõrgem matemaatika 2 defineeritakse vektorruumi, baasi ja koordinaatide mõiste palju üldisemalt.

**Definitsioon 13.25**

Kordajaid  $x_1, \dots, x_n$  avaldises

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

nimetatakse vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  koordinaatideks baasil  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ .

**Omadus 13.4**

Igat vektori  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  saab üheselt avaldada loomuliku baasi  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  kaudu,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (13.6)$$

**Definitsioon 13.26**

Vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pikkus  $|\mathbf{x}|$  leitakse valemiga

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (13.7)$$

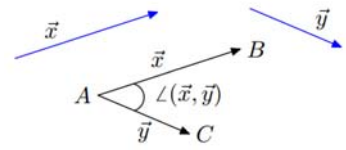
**Märkus 13.11**

Ei ole raske näha, et igale ruumi punkti  $X \in E_3$  kohavektorile  $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}_3$  saab leida üheselt koordinaatidega vektori  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  ja vastupidi: igale elemendile  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  saab üheselt leida punkti  $X \in E_3$  ja selle kohavektori  $\mathbf{OX} \in \mathbb{E}_3$ . Samasugune arutelu kehtib sirge ja tasandi korral. Kui  $n > 3$ , siis on ruumi  $\mathbb{R}^n$  vektoreid visuaalselt (geomeetriliselt) väga raske ette kujutada, kuid matemaatiliselt saab lihtsasti kogu teooriat ikkagi ära kasutada.

## 13.6 Skalaarkorrutis

**Definitsioon 13.27**

Nullvektorist erinevate vektorite  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$  vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka, mis tekib lõigu  $AB$  pööramisele ümber punkti  $A$  lühemat teed pidi lõigule  $AC$ . Tähistame seda nurka  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0, \pi]$  abil.

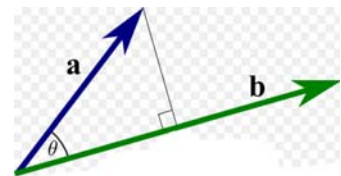

**Definitsioon 13.28**

Kui vektoritest  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$  vähemalt üks on nullvektor, siis nurgaks  $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  loetakse ükskõik millist reaalarvu lõigust  $[0, \pi]$ .

**Definitsioon 13.29**

Vektorite  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}$  skalaarkorrutiseks nimetatakse reaalarvu, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nendevahelise nurga koosinuse korrutisega,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (13.8)$$


**Omadus 13.5**

Definitsioonist järeldeb vahetult, et

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}. \quad (13.9)$$

Skalaarkorrutis on inglise keeles tuntud kui *dot product* ja seda tähistatakse ka kujul  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , kuid selline kuju nõuab hoolikat jälgimist, kuna märgitud korrutis ei tähenda arvude korrutamist.

**Omadus 13.6**

Kui ruumis  $\mathbb{R}^n$  on toodud koordinaadid loomuliku baasi suhtes, siis vektorite  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  skalaarkorrutise kohta kehtib valem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Kui on teada ruumivektorite koordinaadid, siis on skalaarkorrutist lausa lapsikult lihtne leida. See teebki mõned geomeetria ülesanded oluliselt lihtsamaks, kuna ei pea sehkendama igasugu nurkadega.

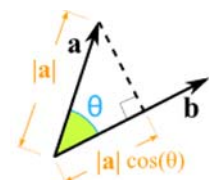
**Märkus 13.12**

Edaspidi eeldame, et meil on vektorid ruumis  $\mathbb{E}$  või ruumis  $\mathbb{R}^n$  oma loomuliku baasiga. Kõik järgnevad omadused kehtivad mõlemal juhul.

**Omadus 13.7**

Vektorite  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  vaheline nurk leitakse valemiga

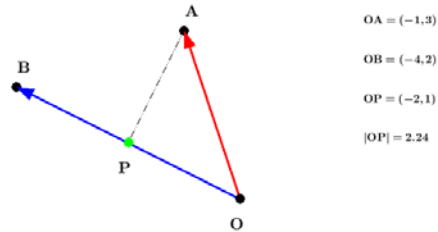
$$\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$



Skalaarkorrutis on oma sisult ühe vektori projektsioon mingile teisele ühikvektorile. Projektsiooni leidmine on eriti kasulik ehituses ja näiteks füüsikas kõiksugu valguse ja optika teemades.



**Näide 13.1** Olgu tasandil antud vektorid  $\mathbf{OA} = (-1, 3)$  ja  $\mathbf{OB} = (-4, 2)$ .



Leiame vektori  $\mathbf{OA}$  projektsiooni vektori  $\mathbf{OB}$  sihile:

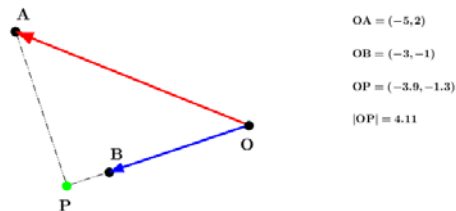
$$\begin{aligned} pr_{\mathbf{OB}}(\mathbf{OA}) &= |\mathbf{OP}| = \frac{\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\langle (-1, 3), (-4, 2) \rangle}{|(-4, 2)|} \\ &= \frac{4+6}{\sqrt{16+4}} = \frac{10}{\sqrt{20}} = \sqrt{5} \approx 2.24. \end{aligned}$$

Märgime, et vektor

$$\mathbf{OP} = pr_{\mathbf{OB}}(\mathbf{OA}) \cdot \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} \cdot (-4, 2) = (-2, 1).$$

◇ ◇ ◇

**Näide 13.2** Olgu tasandil antud vektorid  $\mathbf{OA} = (-5, 2)$  ja  $\mathbf{OB} = (-3, -1)$ .



Leiame vektori  $\mathbf{OA}$  projektsiooni vektori  $\mathbf{OB}$  sihile:

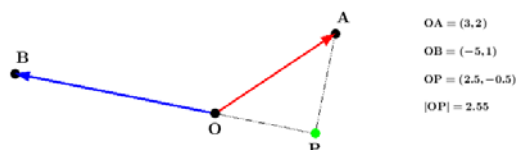
$$\begin{aligned} pr_{\mathbf{OB}}(\mathbf{OA}) &= |\mathbf{OP}| = \frac{\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle}{|\mathbf{OB}|} = \frac{\langle (-5, 2), (-3, -1) \rangle}{|(-3, -1)|} \\ &= \frac{15-2}{\sqrt{9+1}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \approx 4.11. \end{aligned}$$

Märgime, et vektor

$$\mathbf{OP} = pr_{\mathbf{OB}}(\mathbf{OA}) \cdot \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \frac{13}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \cdot (-3, -1) = (-3.9, -1.3).$$

◇ ◇ ◇

**Näide 13.3** Olgu tasandil antud vektorid  $\mathbf{OA} = (3, 2)$  ja  $\mathbf{OB} = (-5, 1)$ .



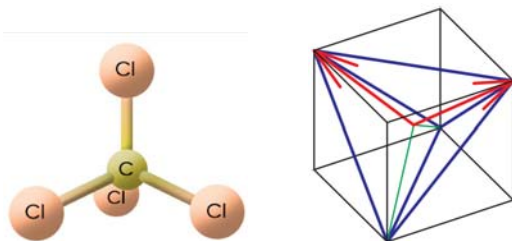
Antud juhul on projektsioon miinusemärgiga, kuna projektsioonivektor  $pr_{\mathbf{OB}}\mathbf{OA}$  ja vektor  $\mathbf{OB}$  on erisuunalised. Seega

$$pr_{\mathbf{OB}}\mathbf{OA} = -|pr_{\mathbf{OB}}\mathbf{OA}| = -2.55.$$

◇ ◇ ◇

NB! Sama skeem töötab ka siis, kui vektorid on ruumis, mitte tasandil.

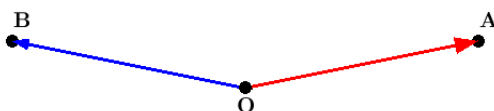
**Näide 13.4** Leiame süsinik-tetrakloriidi  $\text{CCl}_4$  molekulis olevate kloori ja süsiniku aatomi vahelise sideme nurga. Osutub, et kloori aatomid paiknevad siin tetraeedri tippudes ning süsiniku aatom asub tetraeedri keskpunktis.



Allikas: <http://math.oregonstate.edu/bridge/papers/dot+cross.pdf>

Joonisel otsime näiteks punase värviga tähistatud vektorite vahelist nurka. Olgu kuubi serv  $a$ . Siis täisnurkse võrdhaarse (küljega  $a$ ) kolmnurga pool hüpoteenuusi pikkust on

$$c = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Olgu tetraeedri keskpunkt koordinaatide alguspunktis  $(0, 0, 0)$ . Asetades  $xy$ -tasandi punaste vektoritega seotud tasandile, saame kaks vektorit koordinaatidega  $\mathbf{OA} = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{a}{2})$  ja  $\mathbf{OB} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{a}{2})$  ning nede vaheline nurk  $\theta$  avaldub valemiga

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{OA}, \mathbf{OB} \rangle}{|\mathbf{OA}| \cdot |\mathbf{OB}|} = \frac{-\frac{2}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}} = -\frac{1}{3}.$$

Seega  $\theta = \arccos(-1/3) \approx 109.5^\circ$ .

◇ ◇ ◇

#### Omadus 13.8

Skalaarkorrutisel on järgmised tehete seotud omadused:

1. kommutatiivsus  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$ ;
2. distributiivsus  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ ;
3. assotsiatiivsus skalaariga korrutamise suhtes  
 $\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  iga  $\lambda \in \mathbb{R}$  korral.

#### Omadus 13.9

Kaks vektorit  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  on risti parajasti siis, kui

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0.$$

See omadus on skalaarkorrutise üks olulisemaid rakendusmatemaatikas.

**Näide 13.5** Veendume, et vektor  $\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$  on risti vektoriga  $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$  ruumis  $\mathbb{E}^3$ , kus vektorid  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  on ruumi  $\mathbb{R}^3$  loomulikule baasile vastavad kohavektorid.

◇ ◇ ◇

Esiteks märgime, et vektorid  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  on omavahel risti ning nende pikkused võrduvad ühega. Leiame skalaarkorrutise

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 \rangle \\ &= 6 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + 3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle - 12 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &\quad - 4 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle - 2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + 8 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle - 4 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle \\ &= 6|\mathbf{e}_1|^2 + 3 \cdot 0 - 12 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 2|\mathbf{e}_2|^2 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 4|\mathbf{e}_3|^2 \\ &= 6 - 2 - 4 = 0.\end{aligned}$$

Kuna skalaarkorrutis on null, siis järelikult on vektorid  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  omavahel risti. Selle kontrollimine oli aga veel lihtsam läbi ruumi  $\mathbb{R}^3$  vektorite:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (3, -2, 1), (2, 1, -4) \rangle = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = 6 - 2 - 4 = 0.$$

◇ ◇ ◇

### Märkus 13.13

Füüsikas läheb tihti vaja vektori  $\mathbf{b}$  jagamist mingi teise vektoriga  $\mathbf{a}$  paralleelseks  $\parallel$  ja risti  $\perp$  olevateks komponentideks. Need komponendid leitakse skalaarkorrutise seosest vastavate projektsioonidega:

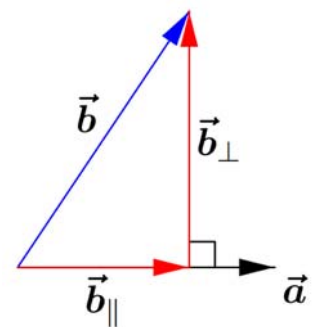
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp},$$

kus vastavalt

$$\mathbf{b}_{\parallel} = pr_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$$

ja

$$\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_{\parallel} = \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$



**Näide 13.6** Olgu antud magnetvälja vektor  $\mathbf{B} = (1, 2, 3)$  mingil hetkel  $t$ . Läbi magnetvälja liigub samal ajal osake kiirusvektoriga  $\mathbf{v} = (5, 1, -3)$ . Leiame kiirusvektori  $\mathbf{v}$  komponendid  $\mathbf{v}_{\parallel}$  (paralleelne magnetvälja vektoriga  $\mathbf{B}$ ) ja  $\mathbf{v}_{\perp}$  (risti magnetvälja vektoriga  $\mathbf{B}$ ):

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\parallel} &= pr_{\mathbf{B}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{B}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{B}|} \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{\langle (1, 2, 3), (5, 1, -3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle} (1, 2, 3) \\ &= \frac{5 + 2 - 9}{1 + 4 + 9} (1, 2, 3) = -\frac{1}{7} (1, 2, 3)\end{aligned}$$

ja

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (5, 1, -3) + \frac{1}{7} (1, 2, 3) = \frac{1}{7} (36, 9, -18).$$

Kontrolliks võib tuua, et

$$\langle \mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\perp} \rangle = \left\langle -\frac{1}{7} (1, 2, 3), \frac{1}{7} (36, 9, -18) \right\rangle = -\frac{1}{49} \cdot (36 + 18 - 54) = 0,$$

s.t. et vektorid  $\mathbf{v}_{\parallel}$  ja  $\mathbf{v}_{\perp}$  on omavahel risti.

◇ ◇ ◇

Miks see info võiks meile kasulik olla? Kui mõelda, et elektrivälja ja magnetvälja jõujooned on omavahel risti, siis peaks sellest potentsiaalset mingit moodi aimu saama ...

## 13.7 Vektorkorrutis

### Märkus 13.14

Vektorkorrutis defineeritakse ainult ruumis  $\mathbb{E}_3$  või  $\mathbb{R}^3$ .

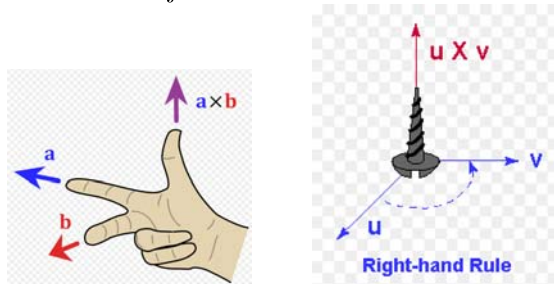
### Definitsioon 13.30

Vektorite  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}_3$  vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , mis rahuldab järgmist kolme tingimust:

1.  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;
2.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$  ja  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$ , s.t.  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  on risti vektoriga  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ;
3.  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$  on parema käe kolmik.

### Märkus 13.15

Parema käe kolmik on kolmest vektorist koosnev süsteem, kus parema käe põial tähistab korrutise  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  suunda, sel juhul pöidlast järgmine sõrm tähistab vektorit  $\mathbf{a}$  ja keskmine sõrm vektorit  $\mathbf{b}$ .



Parema käe kolmiku korral näitab kruvi (lahti)liikumise suund vektorkorrutise  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  suunda (sul juhul pööratakse vektorit  $\mathbf{a}$  vektori  $\mathbf{b}$  suunas vastupäeva). Kui pöörata vektorit  $\mathbf{a}$  vektori  $\mathbf{b}$  suunas päripäeva, siis kruvi (kinni)liikumise suund näitab  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  suunda.

### Omadus 13.10

Vektorite  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  vektorkorrutise kohta kehtib valem

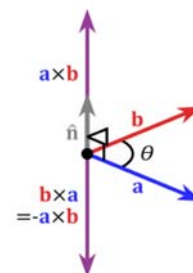
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{\text{skeem}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

kus  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  on ruumi  $\mathbb{R}^3$  loomulik baas. Determinandi arendamise valemist järeldub siit, et

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{e}_3$$

ehk

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \quad (13.10)$$



Kui skalaarkorrutis  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  „möödab“ vektorite paralleelsust (kollineaarsust), siis vektorkorrutis  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  „möödab“ vektorite risti olekut. Sellepärast on skalaarkorrutise juures koosinus (sest  $\cos 0 = 1$  ja  $\cos 90^\circ = 0$ ) ja vektorkorrutise juures siinus ( $\sin 90^\circ = 1$  ja  $\sin 0 = 0$ ).

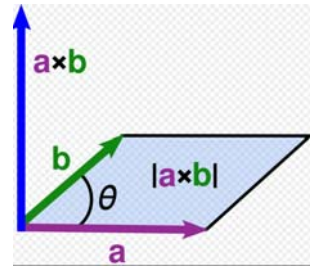
Analoogiliselt annab vasaku käe kolmik vastupidise  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  suuna.

Determinandiga toodud valemi korral mõtleme võrdusmärgi, kui skemaatilist seost. Probleem on selles, et determinandi väärtus peaks olema reaalarv, aga antud juhul tuleb vektor. Seega võrdus ei ole matemaatiliselt päris korrektne. Küll aga on niimoodi avaldist lihtsam meelde jätta ja selle abil on lihtne tuletda korrektne avaldis (13.10).

**Omadus 13.11**

Vektoritele  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ehitatud rööpküliku pindala

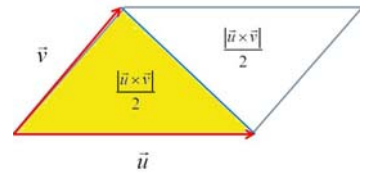
$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



**Omadus 13.12**

Vektoritele  $\mathbf{a}$  ja  $\mathbf{b}$  ehitatud kolmnurga pindala

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



**Omadus 13.13**

Vektorkorrutis on võrdne nulliga ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ), kui üks vektoritest on nullvektor või vektorid on kollineaarsed.

**Näide 13.7** Vektorkorrutis on väga laialt levinud füüsikas, kuna seal käsitletakse jõudusid kui vektoriaalseid suurusi.

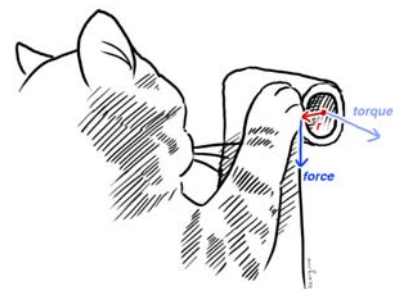
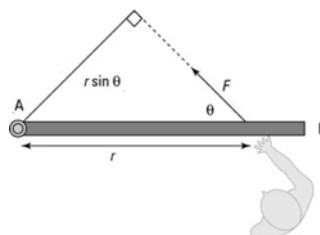
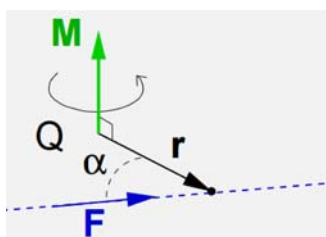
**Definitsioon.** Vektorit  $\mathbf{M}$  nimetatakse **jõumomendiks punkti  $Q$  suhtes**, kui on täidetud järgmised tingimused:

1. vektor  $\mathbf{M}$  on risti tasandiga, millel asub punkt  $Q$  ja jõu  $\mathbf{F}$  mõjusirge;
2. vektori  $\mathbf{M}$  pikkus võrdub jõu suuruse ja jõu õla (punkti  $Q$  kaugus jõu mõjusirgest) korrutisega;
3. punktist  $Q$  jõu rakenduspunkti tõmmatud vektor  $\mathbf{r}$ , jõuvektor  $\mathbf{F}$  ja vektor  $\mathbf{M}$  moodustavad parema käe kolmiku.

Jõumoment punkti  $Q$  suhtes iseloomustab jõu võimet põhjustada pöörlevat liikumist ümber selle punkti. Kui punkt  $Q$  asub jõu mõjusirgel, siis  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , s.t. et jõul puudub võime pöörlemist põhjustada. Mida suurem on jõumoment, seda suurem on jõu võime põhjustada pöörlemist.

Definitsioonist järeldub, et kehtib seos

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$



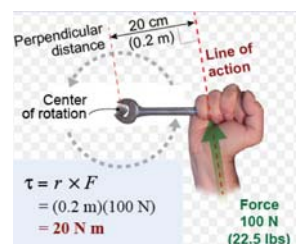
Allikas: <http://www.dummies.com/how-to/content/how-to-calculate-torque-that-is-not-perpendicular-.html>

Kui rakendada uksele jõudu 200 N nurga  $45^\circ$  all näiteks ühe meetri kaugusel ukse hingedest, siis sellise punkti  $A$  suhtes on jõumomendi suurus

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = 200 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ = 100\sqrt{2} \approx 141.4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

On selge, et kõige suurema momendi saame, kui lükkame ust  $90^\circ$  all, siis  $|\mathbf{M}| = 200 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

◇ ◇ ◇



**Omadus 13.14**

Vektorkorrutisel on järgmised tehete seotud omadused:

1. vektorkorrutis ei ole kommutatiivne:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ;
2. distributiivsus:  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ;
3. skalaariga korrutamine:  $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .

**13.8 Segakorrutis****Definitsioon 13.31**

Vektorite  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$  **segakorrutiseks** nimetatakse arvu

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

Läheb juba päris raskeks nende erinevate korrutiste märkimisel.

**Omadus 13.15**

Kolme vektori segakorrutist saab  $\mathbb{R}^3$  loomuliku baasi korral arvutada valemiga

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Omadus 13.16**

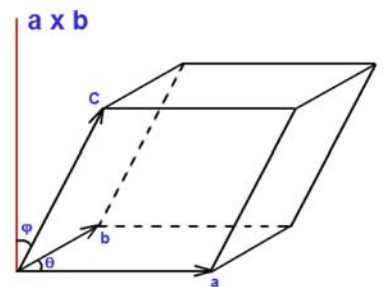
Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus võrdub neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga,

$$V_{rt} = |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|.$$

**Omadus 13.17**

Kolmele vektorile ehitatud tetraeedri ruumala on

$$V_{te} = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|.$$

**Omadus 13.18**

Kolm nullvektorist erinevat vektorit on **komplanaarsed** (asuvad ühel ja samal tasandil) parajasti siis, kui nende segakorrutis võrdub nulliga ehk

$$\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = 0.$$

**Näide 13.8** Lihtne on kontrollida, et vektorid  $(1, 2, 3), (0, 2, 2), (-1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$  asuvad kõik ühel ja samal tasandil:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{3v-1v}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{2v=3v}{=} 0.$$

◇ ◇ ◇

**Omadus 13.19**

Kolme nullvektorist erinevat vektorit moodustavad parema käe kolmiku, kui  $\mathbf{abc} > 0$  ja vasaku käe kolmiku, kui  $\mathbf{abc} < 0$ .

**Omadus 13.20**

Skalaarkorrutise omadusest jäeldub, et

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \mathbf{cab}.$$

**Omadus 13.21**

Vektorite segakorrutises tegurite ümbertõstmisel kehtivad reeglid

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}.$$





# Peatükk 14

## Sirge ja tasand ruumis

---

14.1 Tasandi vektorvõrrandid . . . . .	238
14.2 Tasandi üldvõrrand . . . . .	239
14.3 Sirge vektorvõrrandid . . . . .	242
14.4 Sirge võrrandid ruumis . . . . .	243
14.5 Punkti kaugus sirgeni . . . . .	244
14.6 Punkti kaugus tasandini . . . . .	246
14.7 Nurk kahe sirge vahel . . . . .	248
14.8 Nurk kahe tasandi vahel . . . . .	248
14.9 Nurk sirge ja tasandi vahel . . . . .	249

---

### Kontrolltöö teemad

1. Tasandi ja sirge võrrandite koostamine ruumis.
2. Punkti kaugus sirgest ja tasandist.
3. Tasandite ja sirgete vastastikused asendid (nurgad nende vahel).

### Eksamiteemad

1. Tasandi riht. Normaalvektor. Sihivektor.
2. Tasandi parameetriline vektorvõrrand, tasandi üldvõrrand.
3. Sirge parameetriline vektorvõrrand, sirge kanooniline võrrand ruumis.
4. Punkti kaugus sirgest ja punkti kaugus tasandist.
5. Kahe sirge vaheline nurk, kahe tasandi vaheline nurk, sirge ja tasandi vaheline nurk.

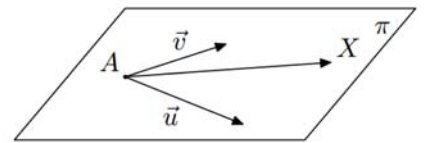
Antud loengu materjal pärineb suuresti **Aivo Parringu** loengu-konseptist <http://math.ut.ee/pmi/kursused/ag/parring/> peatükist "V. Sirged ja tasandid". Viidatud materjalis on kogu teoreetiline ülesehitus algusest lõpuni läbi tehtud koos vajalike tõestustega.

## 14.1 Tasandi vektorvõrrandid

Vaatame tasandit  $\pi$  ruumis  $E_3$ . Olgu antud tasandil punkt  $A \in \pi \subset E_3$  ning kaks **mittekollineaarset** vektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  ruumis  $E_3$ .

### Definitsioon 14.1

Tasandit määravate mittekollineaarset vektorsüsteemi  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset E_3$  nimetatakse **tasandi rihiks**, vektoreid  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  ka tasandi rihivektoriteks.



Punkti  $A$  ja rihivektorite  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  abil saab leida mistahes vabavektori  $\mathbf{AX}$  tasandil  $\pi$ .

### Definitsioon 14.2

Võrrandit

$$\pi = \{X \mid \mathbf{AX} = t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad (14.1)$$

nimetatakse tasandi **parameetriliseks vektorvõrrandiks**. Muutujaid  $t_1$  ja  $t_2$  nimetatakse aga parameetriteks.

Kuna punkti  $A$  ja rihivektoreid  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  tasandi  $\pi$  peal saab valida väga erineval moel, siis tasandil on lõpmata palju parameetrilisi vektorvõrrandeid.

Esitame selle võrrandi ka kohavektorite kaudu. Olgu ruumi  $E_3$  nullpunkt tähistatud tähega  $O$ . Olgu punktide  $A, X \in \pi$  kohavektorid vastavalt  $\mathbf{OA}$  ja  $\mathbf{OX}$ . Sel juhul

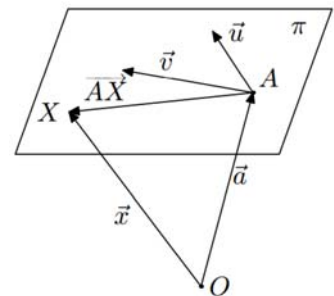
$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX} = \mathbf{OA} + t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}.$$

### Definitsioon 14.3

Võrrandit

$$\pi = \{X \mid \mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t_1 \mathbf{u} + t_2 \mathbf{v}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \quad (14.2)$$

nimetatakse tasandi  $\pi$  **parameetriliseks vektorvõrrandiks kohavektorite abil**.



Olgu antud kohavektori  $\mathbf{OX}$ ,  $\mathbf{OA}$  ning kaks mittekollineaarset vektorit koordinaatidega ruumis  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{OX} = (x, y, z), \quad \mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

**Definitsioon 14.4**

Võrrandit

$$\pi : \begin{cases} x = a_1 + t_1 u_1 + t_2 v_1 \\ y = a_2 + t_1 u_2 + t_2 v_2 \\ z = a_3 + t_1 u_3 + t_2 v_3 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (14.3)$$

nimetatakse tasandi  $\pi$  **parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides**.

**14.2 Tasandi üldvõrrand**

Olgu antud suvaline tasandiga  $\pi$  risti olev **nullvektorist erinev** vektor  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ . Sel juhul tasandil olevate punktide  $A, X \in \pi$  korral,  $\mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3)$  ja  $\mathbf{OX} = (x, y, z)$ , saame

$$\mathbf{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3).$$

Kuna  $\mathbf{n}$  on risti tasandiga  $\pi$ , siis  $\mathbf{n} \perp \mathbf{AX}$  ja skalaarkorrutise omadusest saame

$$0 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{AX} \rangle = A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3).$$

Tähistame siin

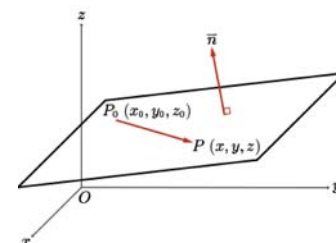
$$D := -(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3).$$

**Definitsioon 14.5**

Võrrandit

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (14.4)$$

nimetatakse tasandi  $\pi$  **üldvõrrandiks** ning nullvektorist erinevat vektorit  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  nimetatakse tasandi  $\pi$  **normaalvektoriks**.

**Märkus 14.1**

Tasandi üldvõrrandi võib vektorkujul esitada kui

$$\pi : \langle \mathbf{n}, \mathbf{AX} \rangle = 0, \quad (14.5)$$

kus  $\mathbf{n}$  on tasandi normaalvektor ja  $\mathbf{AX}$  on vektor tasandi peal.

**Näide 14.1** Olgu antud tasand  $\pi : 2x - 3y - 4z = 0$ . Sellest informatsioonist saame teada, et tasandi normaalvektor on  $\mathbf{n} = (2, -3, -4)$  ja konstant  $D = 0$ . Viimane tähendab, et tasand läbib koordinaatide alguspunkti  $O(0, 0, 0)$ , kuna see punkt rahuldab tasandi võrrandit:  $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 14.2** Leiame tasandi võrrandi, kui on teada punkt tasandil  $A(-1, 5, 7)$  ja normaalvektor  $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$ . Kirjutame tasandi üldvõrrandist  $(A, B, C) = (2, 3, 4)$  abil, et

$$\pi : 2x + 3y + 4z + D = 0.$$

Arvu  $D$  leiame tasandil asuva punkti  $A$  järgi:

$$2(-1) + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = -41.$$

Seega tasandi üldvõrrandiks on

$$\pi : 2x + 3y + 4z - 41 = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 14.2**

Tasandi üldvõrrandist saame järeldada järgmisi omadusi:

1. Kui  $D = 0$ , siis tasand läbib koordinaatide alguspunkti  $O(0, 0, 0)$ .
2. Kui  $A = 0$ , siis tasand on paralleelne  $x$ -teljega (kuna  $\langle (\mathbf{0}, \mathbf{B}, \mathbf{C}), (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rangle = 0$ ).
3. Kui  $B = 0$ , siis tasand on paralleelne  $y$ -teljega (kuna  $\langle (\mathbf{A}, \mathbf{0}, \mathbf{C}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \rangle = 0$ ).
4. Kui  $C = 0$ , siis tasand on paralleelne  $z$ -teljega (kuna  $\langle (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \rangle = 0$ ).
5. Kui  $A = D = 0$ , siis tasand läbib  $x$ -telge. Analoogiliselt saab arutleda teiste telgede kohta.
6. Kui  $A = B = 0$ , siis tasand on paralleelne  $(xy)$ -tasandiga. Kui lisaks  $D = 0$ , siis tasandiks ongi  $xy$ -tasand, mis läbib  $x$  ja  $y$  telge. Analoogiliselt saab arutelu läbi viia teiste kordajate kohta.

**Näide 14.3** Leiame võrrandi tasandile, mis on paralleelne  $xz$ -tasandiga ja läbib punkti  $A(1, 2, 3)$ . Sellise tasandi normaalvektoriks sobib  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ , kuna see on risti  $x$ - ja  $z$ -teljega ja seega  $xz$ -tasandiga. Sel juhul tasandi üldvõrrandi abil ja punkti  $A$  kaudu saame

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + D = 0$$

ehk  $D = -2$ . Tasandi võrrandiks on  $\pi : y - 2 = 0$ . Märkame, et oleksime ka kohe saanud kirjutada  $\pi : y = 2$ .

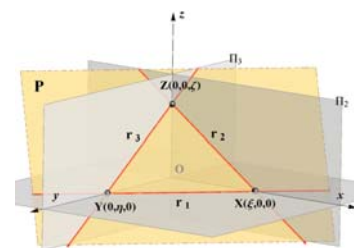
◇ ◇ ◇

**Märkus 14.3**

Kui  $D \neq 0$ , siis võime **üldasendis** tasandi üldvõrrandi kirjutada kujule

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1,$$

kus  $p_1 = -\frac{D}{A}$ ,  $p_2 = -\frac{D}{B}$  ja  $p_3 = -\frac{D}{C}$  on telglõikude pikkused. Seda võrrandit nimetatakse **tasandi võrrandiks telglõikudes**. Sellisel juhul tasand lõikab koordinaattelgi punktides  $x = p_1$ ,  $y = p_2$  ja  $z = p_3$ , kuna punktid  $(p_1, 0, 0)$ ,  $(0, p_2, 0)$  ja  $(0, 0, p_3)$  asuvad tasandi peal.



**Näide 14.4** Leiame tasandi  $3x + 4y - 2z + \frac{1}{2} = 0$  lõikepunktid telgedega.

Selleks jagame tasandi võrrandit läbi suurusega  $-\frac{1}{2}$ . Saame

$$-6x - 8y + 4z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-\frac{1}{6}} + \frac{y}{-\frac{1}{8}} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Seega telgede lõikepunktid on  $-\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{1}{8}$  ja  $\frac{1}{4}$ .

◇ ◇ ◇

**Märkus 14.4**

Kui meil on antud kaks rihivektorit  $\mathbf{u}$  ja  $\mathbf{v}$  tasandil  $\pi$ , siis tasandi normaalvektoriks sobib vektor

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (14.6)$$

**Näide 14.5** Olgu tasandil antud kolm punkti  $P(1, 1, 0)$ ,  $Q(0, 2, 1)$  ja  $R(3, 2, -1)$ . Leiame neid punkte läbiva tasandi  $\pi$  võrrandi. Selleks kirjutame

$$\mathbf{PQ} = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{PR} = (2, 1, -1)$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} &= \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-2, 1, -3) = -(2, -1, 3). \end{aligned}$$

Seega sobib normaalvektoriks ka vastassuunaline vektor  $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$ .

Tasandi üldvõrrandist saame, et

$$2x - y + 3z + D = 0.$$

Arvestades, et punkt  $P(1, 1, 0)$  asub tasandi peal, siis

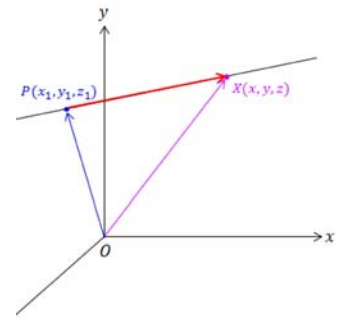
$$D = -1.$$

Kokkuvõttes saime tasandi võrrandiks  $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$ .

◇ ◇ ◇

### 14.3 Sirge vektorvõrrandid

Sirget saab klassikaliselt määrata kahe ette antud punkti abil. Tavaliselt kasutatakse järgmist võimalust: sirgel fikseeritakse üks punkt  $A$  ja nullvektorist erineva vektori  $\mathbf{s}$  abil antakse sirge siht. Tähistame sirget tähega  $l$ . Olgu sirge suvaline punkt tähistatud tähega  $X \in l$ , siis punkte  $A$  ja  $X$  ühendab vabavektor  $\mathbf{AX} \in \mathbb{E}$ .



#### Definitsioon 14.6

Nullist erinevat vektori  $\mathbf{s} \in \mathbb{E}$  nimetatakse sirge  $l$  **sihivektoriks**.

#### Definitsioon 14.7

Võrrandit

$$l = \{X \mid \mathbf{AX} = t\mathbf{s}, t \in \mathbb{R}\} \quad (14.7)$$

nimetatakse sirge  $l$  **parameetriliseks vektorvõrrandiks**.

Anname selle võrrandi ka kohavektorite kaudu. Olgu ruumi  $E$  nullpunkt tähistatud tähega  $O$ . Olgu punktide  $A, X \in l$  kohavektorid vastavalt  $\mathbf{OA}$  ja  $\mathbf{OX}$ . Sel juhul

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{s}.$$

#### Definitsioon 14.8

Võrrandit

$$l = \{X \mid \mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{s}, t \in \mathbb{R}\} \quad (14.8)$$

nimetatakse sirge  $l$  **parameetriliseks vektorvõrrandiks kohavektori abil**.

Olgu antud kohavektorite koordinaadid ruumis  $\mathbb{E}$ :

$$\mathbf{OX} = (x, y, z), \quad \mathbf{OA} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3).$$

#### Definitsioon 14.9

Võrrandit

$$l : \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + ts_1 \\ y = a_2 + ts_2 \\ z = a_3 + ts_3 \end{array} \right\}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (14.9)$$

nimetatakse sirge  $l$  **parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides**.

## 14.4 Sirge võrrandid ruumis

Olgu sirge sihivektor antud ruumis  $E_3$ . Oletame hetkeks, et sirge sihivektori  $\mathbf{s}$  ükski koordinaat ei võrdu nulliga, s.t.  $s_1 \neq 0$ ,  $s_2 \neq 0$  ja  $s_3 \neq 0$ . Avaldame sirge  $l$  parameetristest võrranditest parameetri  $t$ :

$$t = \frac{x - a_1}{s_1}, \quad t = \frac{y - a_2}{s_2}, \quad t = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

Paneme kõik võrdused ühte võrduste ahelasse.

### Definitsioon 14.10

Võrrandeid

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} \quad (14.10)$$

nimetatakse sirge  $l$  **kanoonilisteks** võrranditeks ruumis  $E_3$ .

### Märkus 14.5

Teeme kokkuleppe: kui sirge kanoonilistes võrrandites (14.10) sihivektori komponent  $s_1, s_2$  või  $s_3$  võrdub nulliga (kuid mitte kõik korraga), siis jätame valemis (14.10) selle osa ära ning lugeja võtame võrdseks nulliga. Seega

$$s_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a_1$$

$$s_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = a_2$$

$$s_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = a_3.$$

Kui kaks komponenti võrduvad nulliga, näiteks  $s_1 = 0$  ja  $s_3 = 0$ , siis jääb kogu võrduste ahelast järgi süsteem

$$x = a_1, \quad z = a_3.$$

Sirge võrrandit ruumis saab anda ka läbi kahe mitteparalleelse tasandi lõikesirge.

### Definitsioon 14.11

Sirge  $l$  **üldvõrrandiks ruumis** nimetatakse võrrandite süsteemi

$$l : \left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \right\}. \quad (14.11)$$

Sel juhul sirge sihivektor avaldub kahe tasandi normaalvektorite vektorkorrutisena:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2). \quad (14.12)$$

**Näide 14.6** Leiame tasandite

$$\pi_1 : x + y - z = 0 \quad \text{ja} \quad \pi_2 : y + 2z = 6$$

lõikesirge kanoonilised võrrandid. Esiteks  $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$  ja  $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 2)$ . Seega

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, 1).$$

Esialgu oleme jõudnud punkti, et sirge  $l$  kanoonilised võrrandid on kujul

$$\frac{x - a_1}{3} = \frac{y - a_2}{-2} = \frac{z - a_3}{1}.$$

Jääb üle leida üks suvaline punkt lõikesirge peal. Selleks tuleks formaalselt lahendada süsteem

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 2z = 6 \end{cases}.$$

Kuna meil on kolm tundmatut ja kaks võrrandit, siis võiks loota, et saame ühe tundmatu vabalt ette anda. Olgu  $z = 0$ , siis  $y = 6$  ja  $x = -6$ . Seega punkt  $A(-6, 6, 0)$  asub lõikesirgel ja sirge  $l$  kanoonilised võrrandid näeksid välja järgmised:

$$\frac{x + 6}{3} = \frac{y - 6}{-2} = z.$$

◇ ◇ ◇

## 14.5 Punkti kaugus sirgeni

Teeme selle läbi ruumis  $E_3$ . Tasandil on skeem analoogiline. Anname valemile tuletamiseks kaks skeemi.

### Definitsioon 14.12

Punkti  $P$  **kauguseks** sirgeni  $s$  nimetame sellest punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust ja tähistame seda  $d(P, s)$  abil.

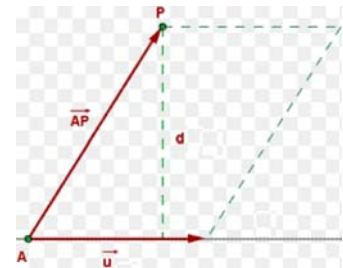
Olgu ruumis antud punkt  $P$  ja sirge  $s$  sihivektor  $\mathbf{u}$ . Võtame sirgel suvalise punkti  $A \in s$  ja moodustame vabavektori  $\mathbf{AP}$ .

**Skeem 1.** Vektorite  $\mathbf{AP}$  ja  $\mathbf{u}$  vahelisest nurgast  $\theta = \angle(\mathbf{AP}, \mathbf{u})$  ja täisnurksest kolmnurgast saame, et

$$\sin \theta = \frac{d(P, s)}{|\mathbf{AP}|} \quad \Rightarrow \quad d(P, s) = \sin \theta \cdot |\mathbf{AP}|.$$

Korrutame ja jagame viimast võrdust sihivektori pikkusega  $|\mathbf{u}|$ . Siis

$$d(P, s) = \frac{\sin \theta \cdot |\mathbf{AP}| \cdot |\mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$





**Skeem 2.** Moodustame vektorite  $\mathbf{AP}$  ja  $\mathbf{u}$  abil rööpküliku, kus mõlema vektori alguspunktid asuvad punktis  $A \in s$ . Rööpküliku pindala  $S_{rk} = |\mathbf{AP} \times \mathbf{u}|$ . Teisalt, rööpküliku pindala saab arvutada ka kui aluse  $|\mathbf{u}|$  ja kõrguse  $d(P, s)$  korrutis. Seega

$$d(P, s) = \frac{S_{rk}}{|\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

**Omadus 14.1**

Punkti  $P \in E_3$  kaugus sirgest  $l \subset E_3$  arvutatakse valemiga

$$d(P, l) = \frac{|\mathbf{AP} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}, \quad (14.13)$$

kus  $A$  on suvaline punkt sirgel  $l$  ja  $\mathbf{s}$  on sirge sihivektor.

**Näide 14.7** Leiame punkti  $A(3, -1, 4)$  kauguse sirgest

$$l : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parameetristest võrranditest loeme välja, et sihivektor  $\mathbf{s} = (3, -2, 4)$  ja punktiks sirge peal sobib  $B(-2, 0, 1)$ . Seega

$$d(A, l) = \frac{|\mathbf{BA} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(\mathbf{5}, -1, \mathbf{3}) \times (\mathbf{3}, -2, \mathbf{4})|}{\sqrt{9 + 4 + 16}}.$$

Leiame

$$(\mathbf{5}, -1, \mathbf{3}) \times (\mathbf{3}, -2, \mathbf{4}) = \left( \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (2, -11, -7).$$

Seega

$$d(A, l) = \frac{|(2, -11, -7)|}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 14.8** Kuigi punkti kaugust sirgeni tasandi  $E_2$  peal saab leida veidi lihtsama valemi abil, siis valem ruumis kehtib ka tasandil. Leiame punkti  $A(2, 1)$  kauguse sirgest  $l : 3x - 4y + 1 = 0$ . Ruumi valemi kasutamise jaoks peame punkti  $A$  ja sirge võrrandi viima ruumi. Selleks kolmas koordinaat  $z = 0$ . Seega võtame punkti  $A'(2, 1, 0)$ . Lihtne on näha, et  $P(1, 1, 0) \in l$ . Sirge tõus on  $\frac{3}{4}$  ja siit saab välja lugeda sirge sihi (tasandil on see  $(4, 3)$ ) ja kirjutame sirge võrrandi kujul

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{0}.$$

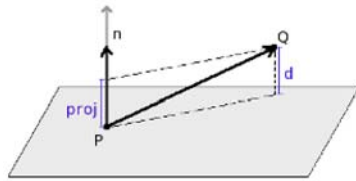
Seega sihivektoriks ruumis on  $\mathbf{s} = (4, 3, 0)$ . Edasi,

$$d(A', l) = \frac{|\mathbf{PA}' \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{|(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \times (\mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{0})|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|(0, 0, 3)|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

◇ ◇ ◇

## 14.6 Punkti kaugus tasandini

Olgu ruumis antud punkt  $Q \in E_3$  ja tasand  $\pi$ , mille normaalvektor on  $\mathbf{n}$  ja tasandil asub suvaline punkt  $P \in \pi$ .



Moodustame vabavektori  $\mathbf{PQ}$ .

### Definitsioon 14.13

Punkti  $A$  kauguseks tasandini  $\pi$  nimetatakse sellest punktist tasandini tõmmatud ristlõigu pikkust, mida tähistame  $d(A, \pi)$  abil.

Märkame, et punkti  $Q$  (märgiga) kaugus tasandist on vektori  $\mathbf{PQ}$  projektsioon normaalvektori  $\mathbf{n}$  sihile. Seega

$$d(Q, \pi) = |pr_{\mathbf{n}}\mathbf{PQ}| = \frac{|\langle \mathbf{PQ}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|}.$$

### Omadus 14.2

Punkti  $A \in E_3$  kaugus tasandist  $\pi \subset E_3$  arvutatakse valemiga

$$d(A, \pi) = \frac{|\langle \mathbf{AP}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|}, \quad (14.14)$$

kus  $P$  on suvaline punkt tasandil  $\pi$  ja  $\mathbf{n}$  on tasandi normaalvektor.

**Näide 14.9** Leiame punkti  $Q(1, 5, -4)$  kauguse tasandist  $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$ . Tasandi normaalvektor  $\mathbf{n} = (3, -1, 2)$ . Tasandil asub kindlasti punkt  $P(2, 0, 0) \in \pi$ . Moodustame vektori  $\mathbf{PQ} = (-1, 5, -4)$ .

Seega

$$\begin{aligned} d(Q, \pi) &= \frac{|\langle \mathbf{PQ}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\langle (-1, 5, -4), (3, -1, 2) \rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} \\ &= \frac{|-3 - 5 - 8|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} \approx 4.28. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Järgnevalt tuletame ühe efektiivsema valemi punkti kauguse leidmiseks. Olgu antud tasandi üldvõrrand

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Olgu antud punkt  $Q(q_1, q_2, q_3) \in E_3$  ja punkt tasandil  $P(p_1, p_2, p_3) \in \pi$ . Tasandi normaalvektor on  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ . Kirjutame

Punkti leidmiseks tasandil võib võtta osa koordinaate nullideks ja asendada need tasandi võrrandisse.

$$\begin{aligned}
 d(Q, \pi) &= \frac{|\langle \mathbf{PQ}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|((q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3), (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}))|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
 &\stackrel{\pm D}{=} \frac{|A(q_1 - p_1) + B(q_2 - p_2) + C(q_3 - p_3) + D - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
 &= \left| \frac{Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.
 \end{aligned}$$

Kuna punkt  $P$  asub tasandil, siis ta rahuldab tasandi võrrandit, s.t.

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0.$$

### Omadus 14.3

Olgu kõik koordinaadid antud ruumis  $\mathbb{R}^3$  loomuliku baasi suhtes. Punkti  $P(x_0, y_0, z_0) \in E_3$  kaugus tasandist

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (14.15)$$

Seega tuleb punkti  $A$  kauguse leidmiseks panna punkti  $A$  koordinaadid tasandi võrrandisse ja saadud tulemuse absoluutväärtus tuleb jagada normaalvektori pikkusega. Väga elegantne matemaatiline tulemus, mis päästab täisnurksete kolmnurkade ja nurkadega sahemerdamisest.

### Näide 14.10 Leiname paralleelsete tasandite

$$\pi_1 : 3x - y + 2z - 6 = 0, \quad \pi_2 : 6x - 2y + 4z + 4 = 0$$

vahelise kauguse. Selleks võtame tasandil  $\pi_1$  ühe punkti, näiteks  $P(0, 0, 3) \in \pi_1$  ja leiame selle punkti kauguse tasandist  $\pi_2$ . Tasandi  $\pi_2$  normaalvektor on  $\mathbf{n}_2 = (6, -2, 4) = 2(3, -1, 2)$ . Siis

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot (3) + 4|}{2\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{16}{2\sqrt{14}} \approx 2.14.$$

◇ ◇ ◇

### Märkus 14.6

Kui meil on antud sirge  $l$  üldvõrrand tasandil

$$l : Ax + By + C = 0,$$

siis seda võib tõlgendada ka kui  $z$ -teljega paralleelset tasandi võrrandit, mis läbib  $xy$ -tasandil asuvat sirget. Sel juhul punkti  $P(x_0, y_0) \in E_2$  kaugus sirgest  $l : Ax + By + C = 0$  arvutatakse kui punkti kaugus tasandist ehk valemiga

$$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad l \subset E_2. \quad (14.16)$$

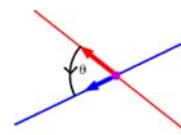
Näide 14.11 Leiame uuesti punkti  $A(2, 1)$  kauguse sirgest  $l : 3x - 4y + 1 = 0$ , seekord siis viimase märkuse abil,

$$d(A, l) = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{3}{5}.$$

◇ ◇ ◇

## 14.7 Nurk kahe sirge vahel

Olgu antud **lõikuvate** sirgete  $l_1$  ja  $l_2$  sihivektorid  $\mathbf{s}_1$  ja  $\mathbf{s}_2$  ruumis  $\mathbb{E}$ . Kui asetada sihivektorite alguspunktid sirgete lõikepunkti, siis võib leida nurgad vektorite  $\mathbf{s}_1$  ja  $\mathbf{s}_2$  vahel, kuid ka  $\mathbf{s}_1$  ja vastandvektori  $-\mathbf{s}_2$  vahel. Kui sirged on paralleelsed, siis nurkade kohta jääb põhimõtte samaks, kuigi sirgetel ei pruugi olla lõikepunkti.



### Definitsioon 14.14

Sirgete  $l_1$  ja  $l_2$  vaheliseks nurgaks nimetatakse nende sirgete sihivektorite  $\mathbf{s}_1$  ja  $\mathbf{s}_2$  ning  $\mathbf{s}_1$  ja  $-\mathbf{s}_2$  vahelistest nurkadest vähimat ehk

$$\angle(l_1, l_2) = \min\{\angle(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2), \angle(\mathbf{s}_1, -\mathbf{s}_2)\} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Kahe vektori vaheline nurk leitakse skalaarkorrutise abil. Lihtne on näha, et soovitud tulemuse saamiseks piisab skalaarkorrutise ümber panna absoluutväärtuse märgid (kuna  $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$ ).

### Omadus 14.4

Sirgete  $l_1$  ja  $l_2$  vahelise nurga koosinus leitakse valemiga

$$\cos(\angle(l_1, l_2)) = \frac{|\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle|}{|\mathbf{s}_1| \cdot |\mathbf{s}_2|}, \quad (14.17)$$

kus  $\mathbf{s}_1$  on sirge  $l_1$  ja  $\mathbf{s}_2$  on sirge  $l_2$  sihivektor.

**Näide 14.12** Leiame sirgete

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+5}{0}, \quad l_2: \frac{x}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

vahelise nurga. Sirgete sihivektorid on  $\mathbf{s}_1 = (2, -1, 0)$  ja  $\mathbf{s}_2 = (5, 2, 3)$ .

Arvutame

$$\cos(\angle(l_1, l_2)) = \frac{|2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{4+1+0} \cdot \sqrt{25+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{190}}.$$

Siit  $\angle(l_1, l_2) = \arccos(8/\sqrt{190}) \approx 0.95 = 54.52^\circ$ .

◇ ◇ ◇

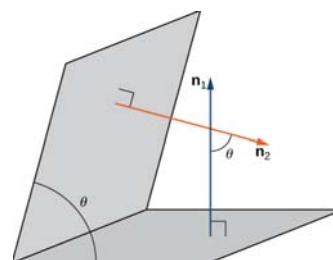
## 14.8 Nurk kahe tasandi vahel

Olgu ruumis  $E_3$  antud tasandid  $\pi_1$  ja  $\pi_2$  ning nende normaalvektorid  $\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{n}_2$ . Võib leida nurgad vektorite  $\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{n}_2$  vahel, kuid ka  $\mathbf{n}_1$  ja vastandvektori  $-\mathbf{n}_2$  vahel. Defineerime tasandite vahelise nurga analoogiliselt sirgete juhule.

**Definitsioon 14.15**

Tasandite  $\pi_1$  ja  $\pi_2$  vaheliseks nurgaks nimetatakse nende tasandite normaalvektorite  $\mathbf{n}_1$  ja  $\mathbf{n}_2$  ning  $\mathbf{n}_1$  ja  $-\mathbf{n}_2$  vahelistest nurkadest vähimat ehk

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \min\{\angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2), \angle(\mathbf{n}_1, -\mathbf{n}_2)\} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

**Omadus 14.5**

Tasandite  $\pi_1$  ja  $\pi_2$  vahelise nurga kosinus leitakse valemiga

$$\cos(\angle(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}, \quad (14.18)$$

kus  $\mathbf{n}_1$  on tasandi  $\pi_1$  ja  $\mathbf{n}_2$  on tasandi  $\pi_2$  normaalvektor.

**Näide 14.13** Leiame tasandite

$$\pi_1 : x - 2y + z = 0, \quad \pi_2 : 2x + 3y - 2z = 0$$

vahelise nurga. Tasandite normaalvektorid on  $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 1)$  ja  $\mathbf{n}_2 = (2, 3, -2)$ . Arvutame

$$\cos(\angle(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 9 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{102}}.$$

Siit  $\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos(6/\sqrt{102}) \approx 0.59 = 53.55^\circ$ .

◇ ◇ ◇

## 14.9 Nurk sirge ja tasandi vahel

Olgu antud sirge  $l$  ja tasand  $\pi$  ruumis  $E_3$ . Olgu sirge  $l$  sihivektor  $\mathbf{u}$  ja tasandi normaalvektor  $\mathbf{n}$ . Projekteerime (ristprojektsioon) sirge  $l$  tasandi peale ja tähistame tasandil olevat sirget  $l'$ .

**Definitsioon 14.16**

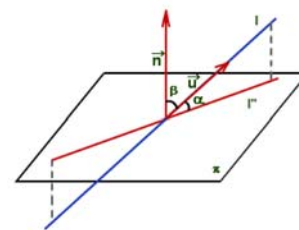
Sirge  $l$  ja tasandi  $\pi$  vaheliseks nurgaks nimetatakse sirge  $l$  ja tasandile projekteeritud sirge  $l'$  vahelist nurka ning seda tähistatakse  $\angle(l, \pi)$  abil.

Sirgete  $l$  ja  $l'$  vahelise nurga võib leida vektorite  $\mathbf{n}$  ja  $\mathbf{u}$  vahelise nurga abil:

$$\angle(l, l') = \frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{n}).$$

Seega

$$\sin(\angle(l, \pi)) = \sin(\angle(l, l')) = \sin(\frac{\pi}{2} - \angle(\mathbf{u}, \mathbf{n})) = \cos(\angle(\mathbf{u}, \mathbf{n})) = \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$



**Omadus 14.6**

Sirge  $l$  ja tasandi  $\pi$  vahelise nurga siinus leitakse valemiga

$$\sin(\angle(l, \pi)) = \frac{|\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{n}|}, \quad (14.19)$$

kus  $\mathbf{s}$  on sirge  $l$  sihivektor ja  $\mathbf{n}$  on tasandi  $\pi$  normaalvektor.

**Näide 14.14** Leiame sirge  $l$  ja tasandi  $\pi$  vastastikuse asendi, kui

$$l : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6}, \quad \pi : 2x + 3y + 5 = 0.$$

Leiame

$$\mathbf{s} = (4, 2, 6) = 2(2, 1, 3), \quad \mathbf{n} = (2, 3, 0)$$

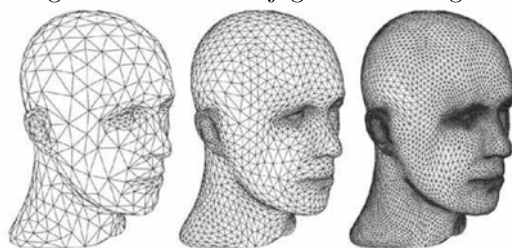
ja

$$\sin(\angle(l, \pi)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{4+9+0}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{182}} \approx 0.496.$$

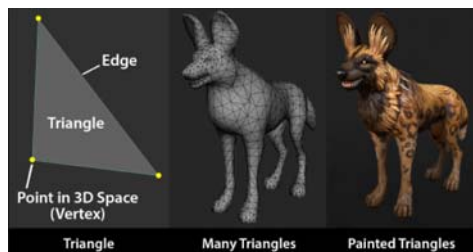
Seega  $\angle(l, \pi) = \arcsin(7/\sqrt{182}) \approx 0.546 = 31.26^\circ$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 14.15** Arvutimängudes modelleeritakse ruumilisi objekte tetraeedrite abil, mis tähendab, et keha pind koosneb tüüpiliselt kolmnurkadest. Võidakse kasutada ka teisi kujundeid, kuid kolmnurk on mingis mõttes kõige lihtsam geomeetriline objekt, millega saab midagi kasulikku teha. Igat nelinurka saab jagada kolmnurgaks.

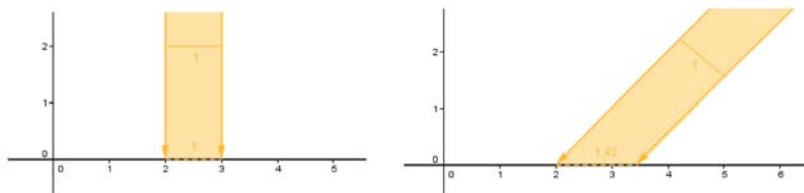


Mida rohkem on kolmnurki, seda sujuvamad on kumerate pindade üleminekud. Pärast ruumilise mudeli loomist võib keha ära värvida (määrata kolmnurga toon ja läbipaistvus).

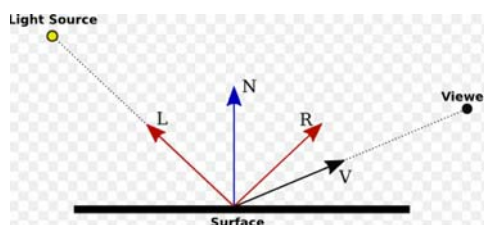


Üks väga oluline probleem 3D-modelleerimisel on valguse peegeldus. Kui arvutimängus või animatsioonis on valgusallikas, siis sellelt tulevad kiired peegelduvad pindadelt ning vastavalt peegeldusele peab muutuma ka ruumilise keha valgustus, varjud ja värvid. Vastasel korral näeks tulemus väga ebarealistlik välja.

◇ ◇ ◇



Kui valgussammas langeb risti pinnale (tasandile), siis (joonisel ühiklõigule) jõuab kõige rohkem valgust. Kui valgussammas langeb mingi nurga all, siis pinna peal kaetakse ära suurem ala, kui risti langeva valguse korral ning suurema ala tõttu jõuab pinnaühikule vähem valgust ning objekt on vähem valgustatud. Seega peegeldunud valguse intensiivsus on otseselt seotud valguse langemise nurgaga. Sarnaselt, kui vaatleja (kaamera) ei asu valguskiire peegeldumistrajektoorigil, siis jõuab vaatlejani vähem valgust ja ka see on seotud valguse langemise nurgaga.



Kolmnurki hoitakse arvutis läbi tipu koordinaatide. Kogu ülejäänud arvutused tehakse ära vektorite abil. Seega on olulised küsimused, kui suur on kolmnurkade ja punktide vahelised kaugused ning milliste nurkade all need omavahel (perspektiivi) ruumis paiknevad.

◇ ◇ ◇



**Näide 14.16** Olgu antud punkt  $P(1, -2, 4)$  ja kolmnurk tippudega  $A(1, -3, 7)$ ,  $B(2, 1, 1)$  ja  $C(-1, 0, 6)$ . Leiame nurga, mille moodustab punktist  $P$  tõmmatud kiir kolmnurga tsentrisse  $D$ . Esiteks leiame kolmnurga tsentri

$$D = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{2}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2} \right) = (1, -1, 7).$$

Moodustame vektorid

$$\mathbf{PD} = (0, 1, 3), \quad \mathbf{AB} = (1, 4, -6), \quad \mathbf{AC} = (-2, 3, -1).$$

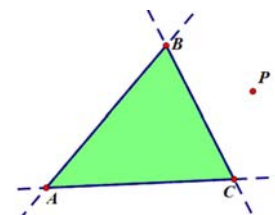
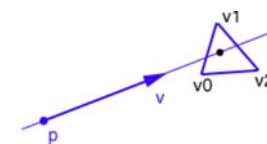
Kolmnurk  $ABC$  määrab ruumis tasandi, millel ta asub. Selle tasandi normaalvektori leiame vektorkorrutisest

$$\mathbf{n} := \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \left( \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \right) = (14, 13, 11).$$

Kolmnurk asub tasandil

$$\pi : 14x + 13y + 11z + D = 0 \quad \stackrel{C \in \pi}{\Rightarrow} \quad \pi : 14x + 13y + 11z - 52 = 0.$$

◇ ◇ ◇



Sirge, sihivektoriga  $\mathbf{PD}$ , ja tasandi vahelise nurga valemist saame

$$\sin(\angle(\mathbf{PD}, \mathbf{n})) = \frac{|\langle \mathbf{PD}, \mathbf{n} \rangle|}{|\mathbf{PD}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|\langle (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{14}, \mathbf{13}, \mathbf{11}) \rangle|}{\sqrt{0+1+9} \cdot \sqrt{14^2+13^2+11^2}} = \frac{46}{9\sqrt{60}}.$$

Seega  $\angle(\mathbf{PD}, \mathbf{n}) = \arcsin(46/(9\sqrt{60})) \approx 0.72 = 41.29^\circ$ . Arvutame ka punkti  $P$  kauguse kolmnurgaga seotud tasandist  $\pi$ ,

$$d(P, \pi) = \frac{|14 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) + 11 \cdot 4 - 52|}{|\mathbf{n}|} = \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 0.91.$$

◇ ◇ ◇



## Peatükk 15

# Kompleksarvud. Algebraalne ja trigonomeetriline kuju

---

15.1 Sissejuhatus . . . . .	254
15.2 Kompleksarvud . . . . .	256
15.3 Kompleksarvu algebraalne kuju . . . . .	256
15.4 Tehted kompleksarvudega . . . . .	257
15.5 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju . . . . .	259
15.6 Siinus ja koosinus . . . . .	261
15.7 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega . . . . .	262

---

### Eksamiteemad

1. Kompleksarv, kompleksarvu algebraalne, geomeetriline, trigonomeetriline kuju.
2. Tehted kompleksarvudega (+, -, ·, ÷, täisarvuline astendamine).

## 15.1 Sissejuhatus

Euroopas juhtus 16. sajandil palju sündmusi, kuid samal ajal kuskil Itaalia maakonnas uurisid mitmed rahutud hinged kuupvõrrandi lahendamist.

Üks nendest hingedest oli **Gerolamo Cardano (1501 - 1576)**, kes väga kuulsas algebra õpikus *Ars Magna* esitas küsimuse: "Leidke kaks arvu, mille summa on 10 ja mille korrutis on 40." Olgu üks arv  $x$ , siis teine on  $y = 10 - x$ . Seega ülesanne on samaväärne ruutvõrrandi

$$x(10 - x) = 40 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0.$$

lahendamisega. Proovime lahendada,

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

See ei olnud sugugi esimene (ega ka viimane) kord, kui inimkond nägi öudusunenägusi ruutjuure leidmisest **negatiivsest arvust**.

Sama painaja rikkus ära ka Cardano unerikkad ööd, kuid erinevalt teistest võttis Cardano korraks julguse kokku ja ütles midagi sellist nagu "Võimatu, kuid hetkeks oletame, et me lihtsalt opereerime selle mõttetu liikmega nagu  $\sqrt{-1}$ ". Võime kontrollida. Olgu

$$x = 5 + \sqrt{-15}, \quad y = 10 - x = 10 - 5 - \sqrt{-15} = 5 - \sqrt{-15}.$$

Leiame arvude summa

$$x + y = 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10 + 0 = 10$$

ja korrutise

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} \\ &= 25 - (\sqrt{-15})^2 = 25 + 15 = 40. \end{aligned}$$

"Täiesti õige, kuid kasutu." ütles Cardano ja imaginaarne painaja jätkas Euroopas oma isandate kiusamist.

Järgmine rahutu hing oli itaalia matemaatik **Rafael Bombelli (1526 - 1572)**, kes muutus koguni nii rahutuks, et ütles otse välja, et ruutjuured negatiivsest arvust vajavad eraldi nime ning aritmeetilised tehted nendega on väga erinevad sellest, mida seni reaalarvude jaoks kasutatud on. Bombelli avastas aga midagi veel, midagi, mida võiks võrrelda ka kullasoone leidmisega teaduses. Kui Cardano sõnastas need uued arvud kui kasutatud, siis Bombelli avastas hoopis vastupidist... Bombelli uuris teatud tüüpi kuupvõrrandite lahendamist, näiteks

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$



**Gerolamo Cardano**  
(1501 - 1576)



**Rafael Bombelli**  
(1526 - 1572)

Kasutades juba tuletatud lahendivalemeid, saab välja kirjutada

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Kui me hetkeks ignoreerime, mis täpsemalt  $\sqrt{-121}$  on ja kirjutame  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$  ja  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$ , siis

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Viimane tähendab seda, et me oleme leidnud võrrandi **reaalarvulise lahendi** nende uute tundmatue arvude abil.

Bombelli sõnastas ära tehted kompleksarvudega ning näitas, et me saame lahendada reaalelus ette tulevaid probleeme ning saada ka nendele reaalarvulisi lahendeid ja hoolimata sellest, et me peame vahepeal opereerima uute - väljamõeldud arvudega. Seega oli teaduses avatud uus Pandora laegas, kuid sedakorda siis heas ja kasulikus võtmes. Lugeses Bombelli raamatut *Algebra*, ei hoidnud oma imetlust tagasi ka matemaatilise analüüsi üks isadest - Gottfried Wilhelm Leibniz: "Bombelli on imeline meister analüütilise kunsti vallas."

Värske avastus oli esialgu väga visa levima ja võib öelda, et veel sajandiks kui mitte paariks hirmutasid kompleksarvud Euroopat ja maailma laiemalt. Kui juba matemaatikud ise üritasid pidada püha sõda kompleksarvudega, siis mis veel teised teadlased pidid tegema? Prantsuse filosoof ja matemaatik **Rene Descartes (1596 - 1650)** nimetas neid arve sõnaga "imaginary" ja seda halvustavas võtmes, justkui insuldiks matemaatikas, nagu algaja veaks või ürituseks nulliga jagada või nagu alustaks uut sõda Aasias. Ja tuleb tõdeda, et tõepoolest, kui meil on  $3i$  ( $i$  on üks nendest uutest arvudest) sõpra või  $5i$  miljonit eurot, siis see meid eriti elus edasi ei aita. Juhtus aga nii, vähemalt seekord, et kõik uuenduste vastu sõdijad said imaginaarselt vastu nina ja päris valusalt.

Üsna pea me oskame avaldisest

$$f(t) = e^{(2+5i)t}$$

välja lugeda, et see kirjeldab võnkumist, mille amplituud muutub ajas eksponentsiaalselt, kui  $e^{2t}$ , ja mille sagedus on  $\omega = 5$  radiaani (või siis periood on  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$ ). Hetkel ei ole niivõrd tähtis, mida täpselt (reaalelu mõttes) tähendab avaldis nagu  $e^{(2+5i)t}$  ise, vaid see, mida selle abil saab kirjeldada ning mida sellest välja annab lugeda.

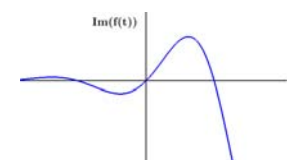
Visalt, aga kindlalt oleme tänaseks päevaks jõudnud sinna, et elektroonikas ja kvantmehaanikas ilma kompleksarvudeta justkui nagu ei saagi midagi mõistlikku teha...



Reaalosa ja imaginarosa graafikud funktsioonile  $e^{(2+5i)t}$ .



$$\operatorname{Re}(f(t)) = e^{2t} \cos(5t)$$



$$\operatorname{Im}(f(t)) = e^{2t} \sin(5t)$$

## 15.2 Kompleksarvud

### Definitsioon 15.1

**Kompleksarvuks** nimetatakse avaldist

$$z = a + bi, \quad (15.1)$$

kus  $a$  ja  $b$  on reaalarvud ning  $i$  on imaginaarühik; seejuures esimest liidetavat nimetatakse kompleksarvu reaalosaks ( $a = \operatorname{Re} z$ ) ja teist liidetavat  $ib$  kompleksarvu imaginaarosaks, kus  $b$  on imaginaarosa kordaja ( $b = \operatorname{Im} z$ ).

„Elu on kompleksne. Tal on olemas reaalne ja imaginaarne osa...“

Kompleksarvuks on näiteks  $z = 5 + 8i$ .

Märgime, et elektroonikas kasutatakse tihti  $i$  asemel tähist  $j$ , kuna  $i$  on seal voolutugevuse tähistamiseks.

### Definitsioon 15.2

Kompleksarvu  $i$ , mille korral kehtib  $i^2 = -1$ , nimetatakse **imaginaarühikuks**.

### Definitsioon 15.3

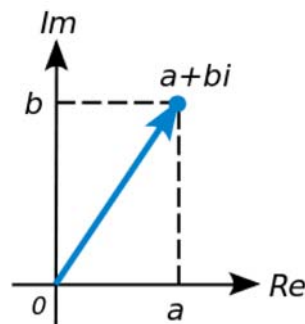
Kui kompleksarvu  $z = a + bi$  reaalosa on null, so kui  $a = 0$ , siis kompleksarvu kujul  $z = bi$  nimetatakse puhtimaginaararvuks.

Kõigi kompleksarvude hulka tähistame sümboliga  $\mathbb{C}$ .

### Märkus 15.1

Igale kompleksarvule  $z = a + bi$  vastab üks-üheselt reaalarvude järjestatud paar  $(a, b)$ , millele omakorda vastab üks-üheselt ristkoordinaatistiku tasandi punkt koordinaatidega  $(a, b)$ . **Seega võime kõiki kompleksarve kujutada punktidenähtena koordinaattasandil.** Sellist tasandit, mille igale punktile  $(a, b)$  on seatud vastavusse kompleksarvu  $z = a + bi$ , nimetatakse *komplekstasandiks* ehk ka Argand'i tasandiks (joonis selle peal – *Argand'i diagrammik*). Koordinaatistiku abstsissitelge nimetatakse *reaalteljeks* (tähistatakse  $\operatorname{Re}$ ) ja ordinaattelge nimetatakse *imaginaarteljeks* (tähistatakse  $\operatorname{Im}$ ).

Punkti  $A = (a, b)$  (ka tema kohavektorit  $\mathbf{OA}$ ) nimetatakse kompleksarvu  $z = a + bi$  geomeetriliseks kujutiseks.



Joonis: Wikipedia

Jean-Robert Argand (1768 - 1822) oli Šveitsis sündinud prantsuse amatöörmatemaatik.

## 15.3 Kompleksarvu algebraalne kuju

### Definitsioon 15.4

Kompleksarvu  $z$  esitusviisi  $z = a + bi$ , kus  $a, b \in \mathbb{R}$ , nimetatakse kompleksarvu  $z$  **algebraalseks** (ka Descartes'i) **kujuks**.

### Definitsioon 15.5

Kompleksarvu  $z = a + bi$  **mooduliks** nimetatakse reaalarvu  $|z|$ , mis leitakse järgmise seosega:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (15.2)$$

Kompleksarvu  $3+4i$  moodul on  $|3+4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ . Seega leitakse moodul Pythagoras'e teoreemi abil.

**Märkus 15.2**

Moodul  $|z| \geq 0$  on **reaalarv** ja see kujutab endast komplekstasandil asuva punkti  $(a, b)$  kaugust nullpunktist.

**Definitsioon 15.6**

Kompleksarvu  $z = a + bi$  **kaaskompleksarvuks** (kaaskompleksiks) nimetatakse kompleksarvu

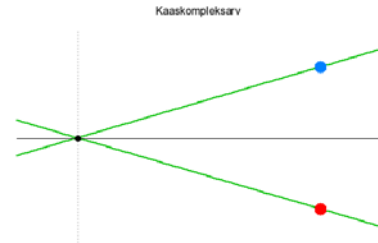
$$\bar{z} = a - bi. \quad (15.3)$$

**Märkus 15.3**

Kaaskompleksarv  $\bar{z}$  asub arvuga  $z$  nullpunktist võrdse kaugusel ning  $z$  ja  $\bar{z}$  on sümmeetrilised reaaltelje suhtes. On kerge kontrollida, et

1.  $|z| = |\bar{z}|$ ,
2.  $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ .

Kompleksarvu  $3 + 4i$  kaaskompleks on  $3 - 4i$ .



## 15.4 Tehed kompleksarvudega

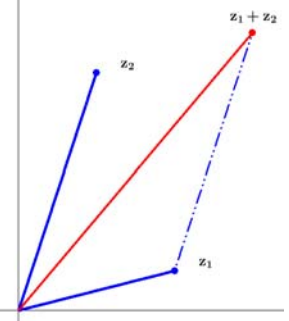
Olgu antud kompleksarvud  $z_1 = a_1 + b_1 i$  ja  $z_2 = a_2 + b_2 i$ . Siis nende võrdus, summa, vahe, korrutis ja jagatis defineeritakse järgnevalt:

1.  $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2$  ja  $b_1 = b_2$ ;
2.  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$ ;
3.  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ ;
4.  $\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

**Märkus 15.4**

Osutub, et kõigi nende tehete suhtes käitub kompleksarv  $z = a + 0 \cdot i$  nagu reaalarv  $a$ . Seetõttu võime need arvud omavahel samastada, s.t.  $a = a + 0 \cdot i$ . Sel viisil saame, et  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Kompleksarvude liitmine on analoogiline vektorite liitmisega.



Korrutamine algebraisel kujul on tavaline algebraaliste avaldiste korrutamine, millel on geomeetriliselt päris huvitav ja lihtne omadus (vaatleme seda hiljem trigonomeetrilise esituse juures).

Jagamine defineeritakse korrutamise kaudu.

**Näide 15.1** Leida  $z_1 \pm z_2$ ,  $z_1 z_2$  ja  $\frac{z_1}{z_2}$ , kui

$$z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 - i.$$

Kirjutame

$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (5 - 1)i = 7 + 4i,$$

◇ ◇ ◇

$$z_1 - z_2 = (3 - 4) + (5 + 1)i = -1 + 6i,$$

$$z_1 z_2 = (3 + 5i)(4 - i) = (12 - (-5)) + (-3 + 20)i = 17 + 17i,$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 5i}{4 - i} \cdot \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{(3 + 5i)(4 + i)}{|4 - i|^2} = \frac{(12 - 5) + (3 + 20)i}{16 + 1} \\ &= \frac{7}{17} + \frac{23}{17}i. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Leida ise  $u \cdot v$  ja  $\frac{u}{v}$ , kui

$$u = 6 + 3i, v = 4 - 2i.$$

**Ülesanne 15.1** Kus (ja kas üldse) tehakse viga järgmises arutluses?

Kirjutame võrdused

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} = \sqrt{-1} &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \\ &\Rightarrow \sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \Rightarrow 1 = -1. \end{aligned}$$

Millised vead võiksid olla järgmistes vastustes?

- Reaalarv on kõikide arvude hulk.
- Reaalarv on arv, mis ei koosne murdudest, ega ka muudest lisanditest, vaid on lihtsalt arv.
- Kompleksarv on reaalarvu ja imaginaarühikuga määratud punkt.
- Ratsionaalarvude hulka kuuluvad naturaalarvud ja neil on täpne väärtus.

**Näide 15.2 Kompleksarvude kasutamine praktikas.** Lennuk lendab loode suunas, kus kiirusvektorile vastab kompleksarv  $v_L = -480 + 210i$  km/h. Tuul puhub edela suunast (kirde suunas) kiirusega  $v_T = 60 + 210i$  km/h. Leidke lennuki resultantkiirus.

Lahendus. Tihti kasutatakse vektorite asemel kompleksarve. Kuna kompleksarvude liitmisel kehtib sama reegel, mis vektorite liitmisel, siis saame

$$v = v_L + v_T = -480 + 210i + 60 + 210i = -420 + 420i.$$

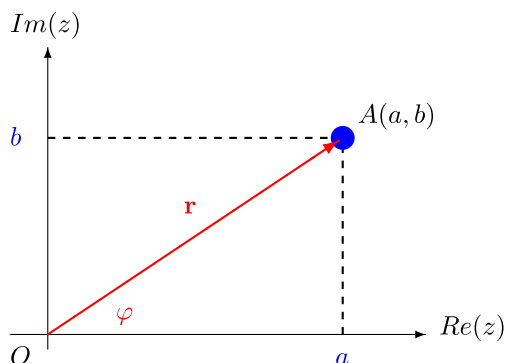
Paneme tähele, et ühes kompleksarvus on peidus info mitme erineva suuruse kohta. Saame teada, et lennuk lendab tuule mõjul täpselt kirdesse (suunal  $(-420, 420)$  on sama mis suunal  $(-1, 1)$  ja see on  $135^\circ$  reaaltelje suhtes). Lisaks saame, et lennuk lendab tegeliku kiirusega, mille arvvaartuseks on  $|v| = \sqrt{420^2 + 420^2} = 420\sqrt{2}$  km/h.

Selles ülesandes me tegelikult ei pea kasutama kompleksarve, kuid samas on nende kasutamine siin väga lihtne.

◇ ◇ ◇

## 15.5 Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Tähistame kohavektori  $\mathbf{OA}$  pikkuse  $|z| = |\mathbf{OA}|$  sümboliga  $r$  ning olgu  $\varphi$  nurk vektori  $\mathbf{OA}$  ja  $x$ -telje positiivse suuna vahel.



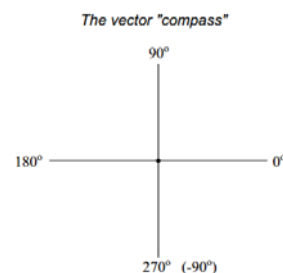
Siis siinuse ja koosinuse seostest täisnurkses kolmnurgas saame

$$b = r \sin \varphi, \quad a = r \cos \varphi,$$

ning

$$z = a + bi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi,$$

millest saamegi kompleksarvu trigonomeetrilise kuju.



### Definitsioon 15.7

Avaldist

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{15.4}$$

nimetatakse kompleksarvu  $z$  **trigonomeetriliseks kujuks**, kus reaalarv  $r$  on kompleksarvu  $z$  moodul  $|z|$ , reaalarv  $\varphi$  on kompleksarvu  $z$  argument, mida tähistatakse  $\varphi = \arg z$ .

Trigonomeetrilist kuju esitatakse lühemalt

$$z = r \angle \varphi \text{ või ka } z = r \text{ cis } \varphi.$$

### Märkus 15.5

Kompleksarvu  $z = a + bi$  argumendi  $\varphi$  leidmisel tuleb jälgida  $a$  ja  $b$  märki. Kuigi  $\varphi$  on loogiliselt tuletatav, võib jälgida järgmist skeemi:

$$\theta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| \text{ ja vastavalt veeranditele} \tag{15.5}$$

$\varphi = 180^\circ - \theta$	$\varphi = \theta$
$a < 0, b > 0$	$a > 0, b > 0$
$a < 0, b < 0$	$a > 0, b < 0$
$\varphi = 180^\circ + \theta$	$\varphi = -\theta$

Kompleksarvu  $z = a + bi$  võib vaadelda kui reaalarvude paari  $(a, b)$  või siis reaalarvude paari  $r \angle \varphi$ . Tegemist on lihtsalt kahe erineva koordinaatide süsteemiga.

Reaalarvude paar  $(a, b)$  näitab kompleksarvu  $z$  ristkoordinaate tasandil. Punkti  $z$  jõudmiseks tuleb liikuda  $a$  ühikut reaaltelje ja  $b$  ühikut imaginaartelje suunas.

Paar  $r \angle \varphi$  kujutab endast polaarkoordinaate ning punkti  $z$  jõudmiseks tuleb pöörata reaaltelje positiivsest poolest vastupäeva  $\varphi$  kraadi mööda ringjoont raadiusega  $r$ .

**Näide 15.3** Viime  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$  trigonomeetrilisele kujule.

Märgime, et punkt  $z$  asub teises veerandis ja  $z$  koordinaadid tasandil on  $(a, b) = (-2, 2\sqrt{3})$ . Sel juhul moodul

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4.$$

Leiame

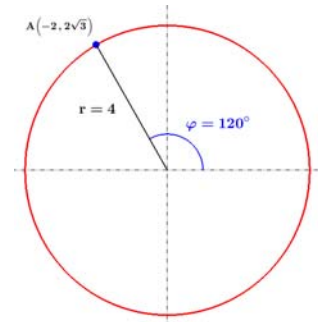
$$\theta = \arctan \left| \frac{b}{a} \right| = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ.$$

Vastuse võimegi kirjutada näiteks kujul

$$z = 4(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Punkti  $z$  jõudmiseks peaksime liikuma 120 kraadi vastupäeva mööda ringjoont raadiusega  $r = 4$ . Sama tulemuse annab liikumine samal ringjoonel, aga 240 kraadi päripäeva.

◇ ◇ ◇



**Näide 15.4** Insener soovib rajada sirgjoonelise raudtee linnast  $A$  linna  $B$ . Punktist  $C$  punkti  $D$  tuleb rajada tunnel läbi mäe. Mõõtmisi saab teha vaid maa peal, kuid kahjuks varjab mägi vaatevälja linnade  $A$  ja  $B$  vahel. Ümber mäe on võimalik mõõta vahemaa ja nurk suure puuni (punkt  $P$ ), kivirahnuni (punkt  $Q$ ) ja punktis  $Q$  tekib silmside linnaga  $B$ . Mõõtmised:

$$AP(10.13 \text{ km}, 19.8^\circ), \quad PQ(3.17 \text{ km}, 125.3^\circ), \quad QB(8.68 \text{ km}, -177.4^\circ).$$

Milline on linnade  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus ja millise nurga all tuleks hakata linnast  $A$  liikuma?

Üks võimalikke lahendusi  $AB$  leidmiseks on kasutada vektorite liitmist.

Viimast saab edukalt teha kompleksarvu algebralise kuju kaudu,

$$\begin{aligned} z_1 &= 10.13(\cos 19.8^\circ + i \sin 19.8^\circ) && \approx 9.53 + 3.43i, \\ z_2 &= 3.17(\cos 125.3^\circ + i \sin 125.3^\circ) && \approx -1.83 + 2.59i, \\ z_3 &= 8.68(\cos(-177.4^\circ) + i \sin(-177.4^\circ)) && \approx -8.67 - 0.39i. \end{aligned}$$

Märgime, et koordinaadid algebralises kujus töötavad punkti  $A$  suhtes.

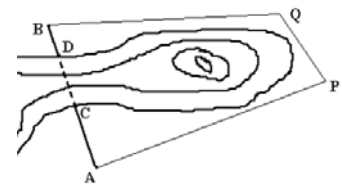
Edasi on juba lihtne,

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = -1.03 + 5.63i,$$

$$|z| = \sqrt{1.13^2 + 5.63^2} \approx 5.72, \quad \arg z \approx \pi - 1.39 = 1.75 \text{ rad} \approx 100.3^\circ.$$

Saime, et linnade  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus on 5.72 km ja linnast  $A$  tuleks liikuma hakata  $100.3^\circ$  nurga all.

◇ ◇ ◇



(Allikas: [12])

$$\pi \text{ radiaani} = 180^\circ.$$



Kaks trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

on võrdsed parajasti siis, kui

1. nende moodulid on võrdsed ( $r_1 = r_2$ );
2. nende argumentide vahe on  $360^\circ$ -kordne, s.t.  $\varphi_1 - \varphi_2 = k \cdot 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 15.6 Siinus ja koosinus

Tuletame siinkohal meelde mõningad elementaarsed omadused siinus- ja koosinusfunktsioonidele.

nurk $\varphi^\circ$	nurk $\varphi$ rad	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\infty$
120	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
180	$\pi$	0	-1	0

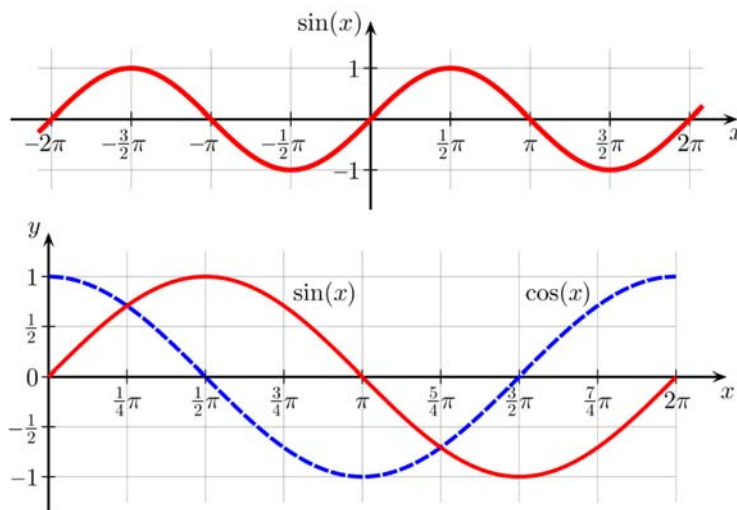
Näiteks on

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

ja

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

omavahel võrdsed kompleksarvud.



(Graafikud: Wikipedia)

Siinuse ja koosinuse väärtused jäävad alati löiku  $[-1, 1]$ .

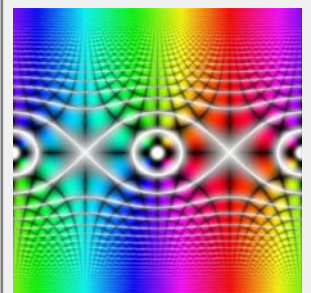
Siinus on paaritu ja koosinus on paarisfunktsioon, s.t.

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi.$$

Igaks juhuks tuletame ka meelde, et

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Rääkides kompleksarvudest, siis võib näiteks  $\sin z$  ( $z$  on kompleksarv !!) graafikuks saada midagi üsna müstilist (heledus on seotud mooduliga  $|\sin z|$  ja saturatsioon on seotud suurustega  $\operatorname{Re}(\sin z)$  ja  $\operatorname{Im}(\sin z)$ ):



$\sin z, z \in \mathbb{C}$ ,  
Allikas: Wikipedia

## 15.7 Tehted trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

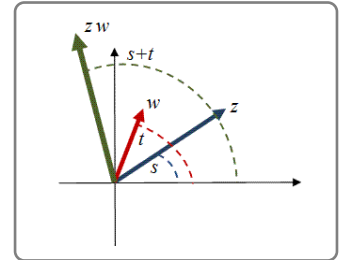
Siis kahe kompleksarvu korrutamise ja jagamise kohta kehtivad järgmised reeglid:

1. korrutamisel moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

2. jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad r_2 \neq 0.$$



Reeglid on lihtsalt tuletatavad trigonomeetrilistest valemitest  $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2)$  ja  $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)$  kohta. Näiteks,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 [\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1] r_2 [\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

### Märkus 15.6

Oma olemuselt annavad korrutamise ja jagamise reeglid trigonomeetrilisel kujul lihtsa matemaatilise aparatuuri vektorite pööramiseks või punktihulga liigutamiseks tasandil.

Kui te tahate mingit punkti  $z$  tasandil liigutada samal ringjoonel 90 kraadi vastu päeva, siis tuleb vastavat punkti  $z$  korrutada kompleksarvuga  $i$  (ehk  $1 \angle 90^\circ$ ).

Kui soovite punkti keerata 45 kraadi päripäeva, siis tuleb arvu  $z$  korrutada kompleksarvuga  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$  (ehk arvuga  $1 \angle -45^\circ$ ) jne.

**Näide 15.5** Leiame  $z_1 z_2$  ja  $\frac{z_1}{z_2}$ , kui

$$z_1 = 2 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ), \quad z_2 = 4 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Eeltoodud valemite põhjal

$$z_1 z_2 = 8 (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

◇ ◇ ◇

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$z^k = r^k (\cos k \varphi + i \sin k \varphi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15.6)$$

*Tõestus.* Näitame viimast. Esiteks on selge, et valem kehtib  $k = 0$  korral ja  $k = 1$  korral (trigonomeetrilise kuju tõttu). Kasutame matemaatilist induksiooni. Oletame, et valem kehtib suvalise naturaalarvu  $k \in \mathbb{N}$  korral. Näitame, et siis kehtib de Moivre'i valem ka  $k + 1$  korral. Kirjutame

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = r^k (\cos k \varphi + i \sin k \varphi) \cdot r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= r^{k+1} (\cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi)). \end{aligned}$$

Kui  $k$  on negatiivne täisarv, siis

$$\begin{aligned} z^{-|k|} &= \frac{1}{z^{|k|}} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r^{|k|} (\cos(|k|\varphi) + i \sin(|k|\varphi))} \\ &= \frac{1}{r^{|k|}} (\cos(-|k|\varphi) + i \sin(-|k|\varphi)) = r^k (\cos k \varphi + i \sin k \varphi). \end{aligned}$$

□

**Märkus 15.7**

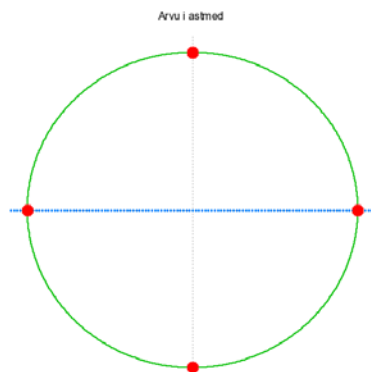
De Moivre'i valem ei kehti ühese võrdusena suvalise reaalarvu  $\alpha \in \mathbb{R}$  jaoks, vaid ainult täisarvude  $k \in \mathbb{Z}$  korral. Näiteks,  $\sqrt{-1} = \pm i$  (kuna  $(\pm i)^2 = -1$ ). De Moivre'i valem annaks aga ainult ühe vastuse,

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i.$$

**Näide 15.6** Leiame imaginaararvu  $i$  astmed. Esiteks,  $|i| = 1$  ja  $\varphi = 90^\circ$ . Kompleksarvu korrutamisel muutub uue arvu nurk korrutatava arvu nurga võrra, meie juhul 90 kraadi. Seega

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \dots$$

Kõik astmed asuvad ühikringjoonel ja on üksteisest eraldatud  $90^\circ$ .

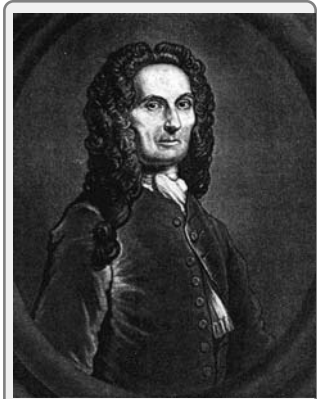


◇ ◇ ◇

**Näide 15.7** Leiame ühikringi elemendi  $z = \cos 50^\circ + i \sin 50^\circ$  seitsmenda astme. Kirjutame

$$z^7 = \cos(7 \cdot 50^\circ) + i \sin(7 \cdot 50^\circ) = \cos 350^\circ + i \sin 350^\circ = 1 \angle 350^\circ.$$

◇ ◇ ◇



Allikas : Wikipedia  
**Abraham de Moivre**  
(1667 - 1754)

oli prantsuse päritoluga inglise matemaatik, kes on tuntud ka tõenäosusteooria vallas. De Moivre ei avaldanud kunagi valemite ilmutatud kujul ja valemi tõestas hoopis šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783). De Moivre avaldas valemi ilmutamata kujul (mille jätmata selle keerukuse tõttu siinkohal vahele) aastal 1707 ning teeb vastava märkuse veel aastal 1722 (vt. [18]), millest saab teatud asendustega tuletada valemi

$$\begin{aligned} &[\cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi]^n \\ &= \cos n\varphi \pm \sqrt{-1} \sin n\varphi, \\ &n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Meie kasutatava ilmutatud kuju võttis kasutusele samuti Euler, kes üldistas kompleksarvude astendamist ka reaalsete astmete  $\nu \in \mathbb{R}$  jaoks.

Londoni kohvikud olid omaaegselt informatsiooni- ja kultuurikeskused, kus tolle aja teadlased said uut infot ja arutlesid huvitavaid probleeme. Sealhulgas mängiti ka malet ning viimasest ei jäänud eemale ka de Moivre, kes andis muuhulgas lahenduse ratsu teekonnale malelual (selle esmapilgul lihtsa ja teisejärgulise probleemiga on kokku puutunud paljud väga kuulsad matemaatikud nagu näiteks Euler, Legendre, Vandermonde). Mingil määral võib analoogi leida meie Werner Kohvikuga Paul Kerese aegadest.

**Ülesanne 15.2** Näidake, et kui kompleksarv  $z$  asub ühikringjoonel, siis kehtib võrdus

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## Peatükk 16

# Kompleksarvu juured. Eksponentkuju

---

16.1 Kompleksarvu $n$ -astme juured . . . . .	266
16.2 Kompleksarvu eksponentkuju . . . . .	267
16.3 Algebraaliste võrrandite lahendamisest . . . . .	270
16.4 Loome ise Piparkoogimehikese * . . . . .	272

---

### Eksamiteemad

1. Kompleksarvu eksponentkuju.
2.  $n$ -astme juure mõiste.
3. Euler'i valem ja samasus.
4. Algebraaliste võrrandite lahendamine (lihtsamal juhul).

## 16.1 Kompleksarvu $n$ -astme juured

### Definitsioon 16.1

Kompleksarvu  $z$   $n$ -astme juureks nimetatakse iga kompleksarvu  $w$ , mille korral  $w^n = z$ .

Igal nullist erineval kompleksarvul on  $n$  erinevat  $n$ -astme juurt, mis leitakse valemiga

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + k 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\varphi + k 360^\circ}{n} \right), \quad (16.1)$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

### Märkus 16.1

Avaldise saab lihtsalt meelde jätta, kui esiteks kirjutada kompleksarvu  $z$  perioodiliselt trigonomeetrilisel kujul

$$z = r (\cos(\varphi + k 360^\circ) + i \sin(\varphi + k 360^\circ)), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ja edasi võib juba kasutada de Moivre'i valemit ratsionaalsete astmete jaoks

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{\varphi + k 360^\circ}{n} + i \sin \frac{\varphi + k 360^\circ}{n} \right).$$

**Näide 16.1** Leiame kompleksarvu  $z = 16i$  neljanda astme juured

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16} \left( \cos \frac{90^\circ + k 360^\circ}{4} + i \sin \frac{90^\circ + k 360^\circ}{4} \right).$$

Siinjuures  $k = 0, 1, 2, 3$  korral saame

$$w_0 = 2 (\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ),$$

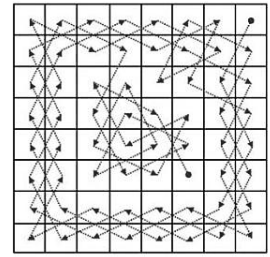
$$w_1 = 2 (\cos 112.5^\circ + i \sin 112.5^\circ),$$

$$w_2 = 2 (\cos 202.5^\circ + i \sin 202.5^\circ),$$

$$w_3 = 2 (\cos 292.5^\circ + i \sin 292.5^\circ).$$

◇ ◇ ◇

Räägitakse, et oma viimastel aastatel aitas kohvikus malemängimine de Moivre'l pisut leevendada oma rahalist olukorda.



Ratsu teekond (Allikas: [1])

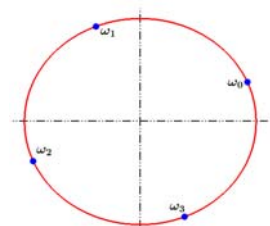


19. sajandi London Slaughter's Coffeehouse (Allikas: [1])

Legend pajatab, et de Moivre ennustas täpselt ette oma surmapäeva. Tervislikel põhjustel magas de Moivre iga päev kaua. Märgates, et ta magab iga päev u. 15 minutit kauem kui eelmisel päeval, arvutas ta välja, millal jõuab kätte 24-tunnine uneperiood ... see saabus 27. novembril 1754.

Siinkohal ei ole karta vae tulemust, kuna  $z$  on kirjutatud perioodiliselt kujul ja juurimise tulemus tuleb mitteühene. Tähtis on meelde jätta, et igal kompleksarvul  $z \neq 0$  on alati  $n$  erinevat juurt. Kui kirjutada  $k \in \mathbb{Z}$ , siis on tulemus igal juhul õige, kuna  $n$  juurt on erinevad ja ülejäänud lihtsalt kattuvad.

Paneme tähele, et kõik juured asuvad komplekstasandil raadiusega  $r = 2$  antud ringjoone peal.



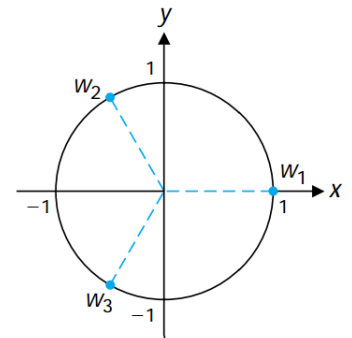
**Näide 16.2** Reaal arvude korral tundub esmapilgul petlikult, et siin on asi triviaalselt lihtne... Kahjuks või õnneks mitte. Leiame reaalarvu 1 kui kompleksarvu  $z = 1$  kolmanda astme juured

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{0^\circ + k 360^\circ}{3} + i \sin \frac{0^\circ + k 360^\circ}{3} = 1 \angle k 120^\circ, \quad k = 0, 1, 2.$$

Eraldi välja kirjutatuna saame

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1, \\ w_2 &= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ w_3 &= \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Paneme tähele, et juuri võiksime leida ka ilma erivalemiteta. Siin ülesandes peab ühikringjoonel asuma 3 erinevat juurt. Seega peavad nad asuma üksteisest  $360/3 = 120$  kraadi eraldatuna. Kuna 1 on positiivne reaalarv, siis üks juurtest asub reaalteljel ja teised kaks  $\pm 120$  kraadi pööratuna samal ringjoonel.

## 16.2 Kompleksarvu eksponentkuju

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob **Euler'i valem**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (16.2)$$

kus  $\varphi$  on suvaline reaalarv ja  $e \approx 2.71828$  on naturaallogaritmi alus,

$$\ln x = y, \quad x > 0 \quad \leftrightarrow \quad e^y = x, \quad \ln e = 1, \quad \ln 1 = 0.$$

Arv  $e$  on nn. Euler'i arv šveitsi matemaatiku **Leonhard Paul Euler'i (1707 - 1783)** järgi (aastast 1727).



Johann Georg Brucker'i portree Leonhard Euler'ist  
(Allikas: Wikipedia)

Kuna Euler viibis enamuse oma täiskasvanu east Sankt-Peterburg'is, siis kohati nimetatakse teda ka vene matemaatikuks. Euler oli esimene, kes võttis arvu  $e$  põhjalikumalt uurimise alla, enne teda mainivad arvu  $e$  veel näiteks Jacob Bernoulli ja Gottfried Leibniz. Euler oli esimene, kes näitas 1737. aastal, et  $e$  on irratsionaalarv, 1748. aastal arvutas Euler arvu  $e$  esimesed 18 komakohta (vt. [24]).

### Märkus 16.2

Matemaatilises mõttes tuleks Euler'i valemis kasutada argumenti  $\varphi$  rollis radiaanides, mitte kraades. Siiski, kui mõelda nurgast  $\varphi$  kui vektori pöördenurgast  $\varphi^\circ$ , siis „praktiliselt“ töötab valem ka koos kraadidega.

Kuna trigonomeetrilise kuju järgi  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , siis Euler'i valemi põhjal saab kompleksarvu  $z$  esitada nn. eksponentkujul.

### Definitsioon 16.2

Kompleksarvu  $z$  **eksponentkujuks** nimetatakse järgmist esitust:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (16.3)$$

kus  $r$  on kompleksarvu moodul ja  $\varphi$  on argument radiaanides.

### Märkus 16.3

Paneme tähele, et kompleksarvud  $e^{i\varphi}$  on kõik ühikringi elemendid kompleksitasandil.

**Näide 16.3** Viime kompleksarvu  $z = -1 - \sqrt{3}i$  eksponentkujule.

Leiame mooduli

$$r = \sqrt{3+1} = 2.$$

Arv  $z$  asub III veerandis. Seega leiame argumenti järgmiselt:

$$\varphi = \pi + \arctan \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Siit saame korraga kirjutada nii trigonomeetrilise kuju kui ka lühema eksponentkuju:

$$z = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 e^{i \frac{4\pi}{3}}.$$

Kuna nurk  $-\frac{2\pi}{3}$  liigutab meid samasse punkti, siis võime kirjutada ka

$$z = 2 e^{-i \frac{2\pi}{3}}.$$

◇ ◇ ◇

**Märkus 16.4**

Erijuhul, kui  $\varphi = \pi$ , saame Euler'i samasuse

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \tag{16.4}$$

mis kaasab ühte lihtsasse valemisse 5 tähtsamat matemaatilist konstanti ja lisaks 4 põhitehet: astendamist, korrutamist, liitmist ja võrdust. Viimase põhjal peavad paljud matemaatikud Euler'i samasust läbi aegade üheks kõige ilusamaks valemiks. Kui kirjutada

$$e^{i\pi} = -1,$$

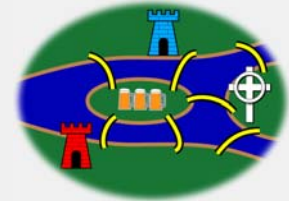
siis võib näha, et irratsionaalarvu  $e$  aste imaginaararvuga  $i\pi$  annab tulemuseks täisarvu (reaalarvu)  $-1$ . Üsna kummaline, eks ole?

Paneme järgnevalt kirja tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega.

Olgu antud kaks kompleksarvu eksponentkujul  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  ja  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ . Siis kehtivad järgmised reeglid:

1.  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ ;
2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ,  $r_2 \neq 0$ ;
3.  $z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
4.  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Leonhard Euler'it on nimetatud läbi aegade kõige olulisemaks matemaatikuks (see viimane teema on muidugi väga subjektiivne). Euler on populaar-teaduslikus kirjanduses eelkõige tuntud Köningsberg'i sildade probleemi lahendajana (eelkõige siis range matemaatilise lahenduse mõttes). Omal ajal kerkis ülesse probleem, kas saab läbida Köningsberg'i 7 silda nii, et alustades mingist punktist jõuame tagasi algusesse, kusjuures kõiki sildu tuleks läbitada vaid ühe korra.



Köningsberg'i sillad  
(Allikas: Wikipedia)

Harvard'i matemaatik Benjamin Pierce ütleb: "Me ei suuda seda (samasust) mõista ja me ei tea, mida see täpselt tähendab, kuid me oleme selle tõestanud ja seeläbi me teame, et see peab olema tõde."

Briti teaduskirjaniku David Darling'i sõnul on arv  $e$  võimalik, et kõige tähtsam konstant matemaatikas, olles palju olulisem ja üldlevinum kui meile kõigile tuttav  $\pi$ . Olgu tegelikult kuidas on, aga eksponentfunktsiooni  $e^x$  häid omadusi saame järgmistes loengutes veel korduvalt näha.



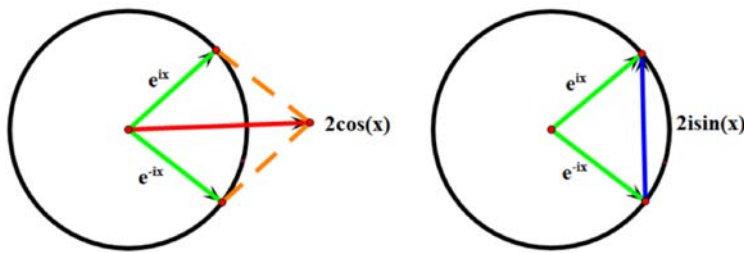
**Märkus 16.5**

Euler'i valem lubab meil tuletada siinuse ja koosinuse alternatiivsed avaldised. Nimelt,

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi, \\e^{-i\varphi} &= \cos \varphi - i \sin \varphi.\end{aligned}$$

Vastavalt mõlemat avaldist kas liites või lahutades, saame

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (16.5)$$



Allikas: <http://mathforum.org/mathimages>

**Näide 16.4** Kompleksarvud ja nende eksponentkuju koos Euler'i valemiga lubavad väga lihtsalt tuletada mõningaid raskesti meeldejäätavaid trigonomeetrilisi valemeid. Näiteks,

$$\begin{aligned}z &= \cos(a + b) + i \sin(a + b) = e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} \\ &= (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \sin b + \sin a \cos b)i.\end{aligned}$$

Avaldised on võrdsed, kui nende vastavad reaalosad ja imaginaarosad on omavahel võrdsed, seega saame ühest teisendusest lausa kaks valem:

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

**Näide 16.5** Vaatleme veel näiteks järgmist teisendust:

$$\begin{aligned}z &= \cos 2a + i \sin 2a = e^{i2a} = (e^{ia})^2 = (\cos a + i \sin a)^2 \\ &= (\cos^2 a - \sin^2 a) + (2 \sin a \cos a)i\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a, \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Üks humoorikas lugu (ilmselt siiski legend, [8]). Denis Diderot oli 18. sajandi prantsuse filosoof, kes reisis palju mööda Euroopat. Oma teekonnal sattus ta ka Sankt-Peterburg'i. Oma sarmiga kogus ta kiiresti enda ümber noori järgijaid ja sama juhtus tema ateistliku filosoofiaga. Viimane tegi murelikuks vene keisrinna Katariina II.

Samal ajal töötas Sankt-peterburg'is Leonhard Euler, kes vastupidiselt Diderot'le oli pühendunud kristlane. Keisrinna Katariina II palus Euler'it oma mures aidata, mille peale Euler tutvustaski ennast Diderot'le kui meest, kes leidis matemaatilise tõestuse Jumala olemasolust.

Kindla olemisega seletas ta Diderot'le: "Härra, võrdus  $\frac{a+b^n}{n} = x$  kehtib. Järelikult, Jumal on olemas. Mis Te tolle peale kostate?" Selle peale oli kiire taibuga Diderot sõnatu (kelle teadmised algebrast olid nullilähedased). Ta naerdi tema poolehoidjate poolt välja ja järgmisel päeval küsis luba naaseda tagasi Prantsusmaale. Märgime, et Euler'i toodud avaldis ei tähenda ilmselt midagi erilist.

Üks üsna vaimukas (ja võimalik, et väga sügavamõtteline ... ning on seoses ka meie eelmise naljaga) internetis olev vastus küsimusele: "Millist praktilist väärtust annab samasus  $e^{i\pi} + 1 = 0$ ?" kõlas:

"Kõige olulisem väärtus on see, et nii mõnedki tüütud filosoofid on sunnitud vaikima".

### 16.3 Algebraaliste võrrandite lahendamisest

#### Definitsioon 16.3

Võrrandid

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (16.6)$$

nimetatakse  $n$ -nda astme algebraaliseks võrrandiks. Kordajad  $a_0, \dots, a_n$  võivad olla nii reaalsed kui komplekssed, kusjuures  $a_0 \neq 0$ .

#### Teoreem 16.1

**Algebra põhiteoreem.** Igal  $n$ -nda astme algebraisel võrrandil on kompleksarvude hulgas  $n$  lahendit (kui lugeda kordsed (võrdsed) lahendid erinevaks).

**Näide 16.6** Lahendame võrrandi

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0.$$

Selle võrrandi saame esitada kujul

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x - 2)^2(x + 2)^2 = 0.$$

Siit järeldub, et peavad kehtima

$$(x - 2)^2 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0.$$

Seega esialgse võrrandi lahendid on  $x_1 = x_2 = 2$  ja  $x_3 = x_4 = -2$ .

Algebra põhiteoreemi järgi teame, et rohkem lahendeid olla ei saa.

◇ ◇ ◇

Polünoom  $P_n(x)$  lahutub järgmiste (reaalarvude vallas taandumatute) tegurite korrutiseks

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_rx + q_r)^{s_r}, \quad (16.7)$$

kusjuures ruutkolmliikmed  $x^2 + p_jx + q_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  on positiivsed, s.t vastavad ruutvõrrandid  $x^2 + p_jx + q_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , ei oma reaalarvulisi lahendeid. Seega on reaalarvud  $x_1, x_2, \dots, x_m$  võrrandi (16.6) lahendid vastavalt kordsusega  $k_1, \dots, k_m$ , selle võrrandi kompleksarvuliste lahendite leidmiseks tuleb lahendada ruutvõrrandid

$$x^2 + p_jx + q_j = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (16.8)$$

(lahenditeks on kaaskompleksarvude paar).

Algebra põhiteoreemi tõestuse idee seotakse tavaliselt saksa matemaatiku Carl Friedrich Gauss'i nimega aastast 1797, kuid hiljem on seda mitte päris veatut tõestust mõnede kohtade peal täiendatud. Teisiti, selle lihtsalt kõlava ja üsna tähtsa teoreemi tõestamisel on vaeva näinud päris paljud matemaatikud.

Teoreem ütleb meile, et kui me oleme leidnud  $n$  erinevat lahendit, siis ei ole vaja enam edasi otsida ning väiksema arvu korral tuleks "edasi kaevata".

Seda skeemi ei pea eksamil ja kontrolltöös detailselt teadma, kuid see kirjeldab ideed kordsete lahendite arvu määramiseks.

**Näide 16.7** Lahendame võrrandi

$$x^3 - 1 = 0.$$

Selle võrrandi saame esitada kujul

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Reaalne lahend on  $x_1 = 1$  ja kompleksed lahendid on

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

ehk  $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  ja  $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

Märgime, et veelgi lihtsam on leida kolmandat juurt ühest (võrrand on samaväärne avaldisega  $x^3 = 1$  ehk  $\sqrt[3]{x} = 1$ ). Viimane avaldub seosena

$$x_{k+1} = e^{i\frac{0+2k\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

◇ ◇ ◇

**Näide 16.8** Lahendame võrrandi

$$x^6 - 2x^3 + 2 = 0.$$

Siin viib väga lihtsalt sihile järgmine standardvõte: tähistame  $z = x^3$ .

Sel juhul saame võrrandi

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

mille lahenditeks on

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i.$$

Lahendi  $x$  leidmiseks peame leidma kolmanda astme juured arvudest  $1 + i$  ja  $1 - i$ ,

$$x_{1,2,3} = z_1^{\frac{1}{3}} = (1 + i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ja

$$x_{4,5,6} = z_2^{\frac{1}{3}} = (1 - i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Seega

$$\begin{aligned} x_{1,2,3} &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{(8k+1)\pi}{12} + i \sin \frac{(8k+1)\pi}{12} \right), \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_{4,5,6} &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{(8k-1)\pi}{12} + i \sin \frac{(8k-1)\pi}{12} \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kasutades võrrandi  $x^3 - 1 = 0$  lahendamiseks komplekstasandil ligikaudseid meetodeid (näiteks Newton'i meetod - iteratsioonimeetod - mida te ilmselt õpite kunagi hiljem), siis võib saada midagi sellist:



Greg Fowler'i teos

Allikas: [24]

Nullkohtade  $x_1, x_2$  ja  $x_3$  ümber jäävaid suuri ovaalseid alasid kutsutakse ka pulli silmadeks.

## 16.4 Loomise Piparkoogimehikese \*

Vaatleme iteratsiooniprotsessi

$$z_{n+1} = z_n^2 + C, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Siin  $z_n$  ja  $C$  on kompleksarvud, kusjuures klassikaliselt  $z_0 = 0$ . Kui võtta  $z_0$  midagi muud, siis muutub ka kujund.

1. Võtame komplekstasandil näiteks ruudu suurusega  $[-2, 2] \times [2, 2]$  (nullpunkt on keskel).
2. Nüüd tuleb valida samm  $h$ , millega käia läbi kõik ruudustiku punktid (näiteks  $h = 0.01$ ).
3. Tuleb ka otsustada, kui suur võib olla maksimaalne iteratsioonide arv  $N$ , näiteks  $N = 50$ .

4. **Iga punkti  $C$  korral** (näiteks  $C = -0.5 + 1.2i$ ) ruudustikust arvutame

$$z_1 = 0 + C, \quad z_2 = z_1^2 + C, \quad z_3 = z_2^2 + C, \quad \dots, \quad z_N = z_{N-1}^2 + C.$$

5. Arvutame mooduli  $|z_N|$ .
6. Kui  $|z_N| \leq 2$ , siis värvime punkti  $C$  komplekstasandil mustaks, vastasel korral valgeks.
7. Läheme järgmise punkti  $C$  juurde ja alustame kogu iteratsiooni  $n$  suhtes uuesti.

### Märkus 16.6

Kui tahame kujundile värve lisada, siis seda tehakse järgmiselt:

1. Valime iga  $n = 1, 2, \dots, N$  jaoks ühe värvi.
2. Võrdleme moodulit  $|z_n|$  igal iteratsioonil.
3. Kui  $|z_n| > 2$ , siis lõpetame iteratsiooni ning värvime punkti  $C$  seda värvi, mis me  $n$  jaoks reserveerisime ja läheme järgmise punkti  $C$  juurde.

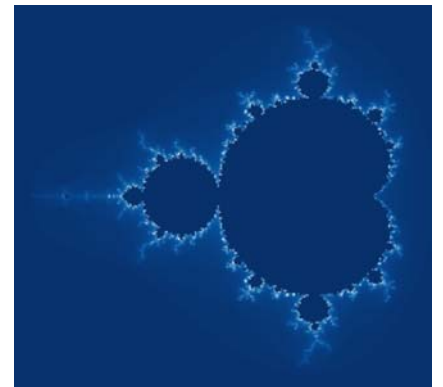
### Märkus 16.7

Loomulikult ei tehta neid arvutusi käsitsi ükshaaval :-D Kasutatakse näiteks for-tsükleid. Värvide jaoks võib kasutada paletti ja kuvada näiteks maatriksit kontuurgraafikuna, milles igale punktile vastab iteratsioonide arv  $n$ . Sedasi saab palju sujuvamad üleminekud.

Kuigi näiteks Pythonis saab kasutada kompleksarve, siis võib selle arvutuse kokku panna ka täiesti ilma. Selleks tuleb defineerida kaheelemendiline list  $[a, b]$  ning siis näiteks korrutus-tehe oleks

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac - bd, ad + bc].$$

Analoogiliselt tuleks teha defineerida summa ja mooduli jaoks.



Suurendused:



# Lisa A

## Lineaarvõrrandisüsteemid

---

A.1 Maatriksi omaväärtused *	273
A.2 Hückel'i meetod keemias *	274

---

### A.1 Maatriksi omaväärtused \*

Loodusteadustes viivad paljud ülesanded võrrandisüsteemini

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \mathbf{x}_1 + a_{12} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{1n} \mathbf{x}_n = \lambda x_1 \\ a_{21} \mathbf{x}_1 + a_{22} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{2n} \mathbf{x}_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n1} \mathbf{x}_1 + a_{n2} \mathbf{x}_2 + \dots + a_{nn} \mathbf{x}_n = \lambda x_n \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

või siis maatrikskujul

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0, \quad (\text{A.2})$$

kus  $\lambda \in \mathbb{C}$  on otsitav parameeter.

#### Definitsioon A.1

Neid  $\lambda$  väärtusi, mille korral

$$|A - \lambda I| = 0,$$

nimetatakse maatriksi  $A$  omaväärtusteks.

#### Definitsioon A.2

Vektorit  $x \neq 0$ , mille korral

$$Ax = \lambda x,$$

nimetatakse omaväärtusele  $\lambda$  vastavaks **omavektoriks**.

Maatriksi omaväärtusülesanne on näiteks otseselt kasutatud leidnud Google'i otsingumootori algoritmis. Omaväärtuste leidumist ja omadusi kasutatakse väga palju andmeanalüüsis, piltide ja videode pakkimisel jne.

**Näide A.1** Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Viimane on samaväärne homogeense süsteemiga

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sellel homogeensel süsteemil leidub mittetriviaalne lahend parajasti siis, kui  $|A - \lambda I| = 0$  ehk

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0.$$

Saime, et matriksi  $A$  omaväärtusteks on  $\lambda_1 = 4$  ja  $\lambda_2 = -1$ . Kui  $\lambda = 4$ , siis vastavad omavektorid leiame süsteemist

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

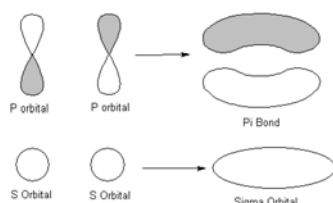
Kui  $\lambda = -1$ , siis vastavad omavektorid leiame süsteemist

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 3c \\ -2c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

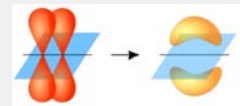
◇ ◇ ◇

## A.2 Hückel'i meetod keemias \*

Molekulaarorbitaalide **teooria** kohaselt ei paikne elektronid aatomite vahelistel fikseeritud sidemetel, vaid võivad liikuda kogu molekuli ulatuses vabalt ringi. Molekulaarorbitaalid moodustuvad üksikutest aatomorbitaalidest, kusjuures orbitaaliks nimetatakse siin sellist ruumiosa aatomis, kus elektroni leidumise tõenäosus on suur (s.t. orbitaal ei pruugi olla kinnine kitsas ruumiline joon, vaid võib olla ka laiem ala). Matemaatikas esitatakse seda orbitaali lainefunktsiooni abil, mille väärtus näitab, kui suur on elektroni leidmise tõenäosus antud ruumpunktis. Kui elektronid liiguvad suurema tõenäosusega kahe aatomituuma vahel (ja mitte neist eemal), siis nimetatakse seda orbitaali siduvaks (*bonding*) ning sellisel orbitaalil on kalduvus hoida aatomeid ühes molekulis koos.



*P*-orbitaali (*principal orbital*) moodustuvad kaks kera, mis on omavahel eraldatud aatomituumaga.  $\pi$ -side tekib *p*-orbitaalide külgmisest kattumisest tsükli üla- ja alaosas.



Joonis: Wikipedia.

*S*-orbitaal on kerakujuline, kus aatomituum asub kera keskpunktis.  $\sigma$ -side tekib aatomorbitaalide „otste“ kattumisel (lihtsam on vaadata järgnevaid jooniseid).

Erinevatel orbitaalidel võivad olla erinevad energia tasemed. Osakeste süsteemi on samuti võimalik kirjeldada lainefunktsiooni abil ja konkreetse süsteemi jaoks saab arvutada vastava energia ja sidemepikkused.

Orbitaalidele vastavate energiatega leidmiseks on tuntud **Hückel'i meetod**, mida kasutatakse konkreetsemalt  $\pi$ -orbitaalide energia leidmiseks vesinik-süsinik ühendites. Kuna teema läheks liiga pikaks ja keeruliseks (peaksime minema tagasi keemia algkursuste juurde ja teisalt kvantmehaanika sügavustesse), anname Hückel'i meetodist vaid vastavad võrrandid, mille täpse tuletuskäigu jätame vahele.

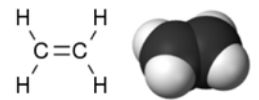
Erich Hückel (1896-1980) oli saksa füüsik ja keemik.

**Näide A.2** Vaatleme etüleen (eteeni) molekuli  $C_2H_4$ . Etüleenis on kaks süsiniku aatomit, millele vastavad eraldi aatomorbitaalid, kusjuures nendele orbitaalidele vastavad matemaatikas lainefunktsioonid  $p_1$  (esimene süsiniku aatom) ja  $p_2$  (teine süsiniku aatom). Kui need kaks süsiniku aatomit ühendada ühte allüülradikaali molekuli, siis tekib kaks uut erineva energiaga molekulaarorbitaali (jutt käib  $\pi$ -orbitaalidest), mis esituvad matemaatiliselt lainefunktsiooniga

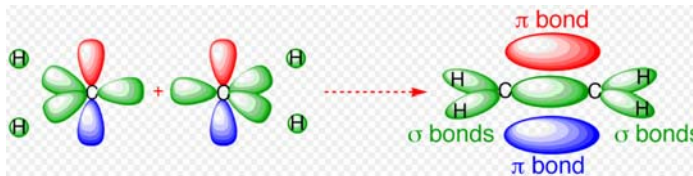
$$\Psi = c_1 p_1 + c_2 p_2.$$

Viimane tähendab lihtsalt seda, et lainefunktsioonid  $p_1$  ja  $p_2$  liituvad, kusjuures  $c_1$  on esimese süsiniku aatomi kordaja ja  $c_2$  on teise süsiniku aatomi kordaja. Need tundmatud  $c_1$  ja  $c_2$  tuleb meil leida.

Etüleen on normaaltingimusel värvitu gaas ja on lihtsaim alkeen ning kaksiksideme tõttu süsiniku aatomite vahel nimetatakse seda ka küllastumata süsivesinikuks.



Joonis: Wikipedia.



Joonis: <http://chemtube3d.com/orbitalsethene.htm>

Vasakul oleval teisel joonisel on  $\pi$ -sidemeteks punase ja sinisega toodud alad. Just nende orbitaalide energia leitaksegi Hückel'i meetodiga.

Molekulaarorbitaalide energia  $\varepsilon$  arvutamiseks lahendame süsteemi

$$\begin{cases} (\alpha - \varepsilon) c_1 + \beta c_2 = 0 \\ \beta c_1 + (\alpha - \varepsilon) c_2 = 0 \end{cases}$$

tundmatute aatomorbitaalide kordajate  $c_1$  ja  $c_2$  suhtes. See süsteem saadakse Hückel'i meetodiga. Siin  $\alpha$  ja  $\beta$  on (negatiivsed) arvud, mida saab hiljem fikseerida, et parandada katseandmete mõõtetulemusi või siis saab mudelit kasutada mõne teise aatomi jaoks. Parameeter  $\varepsilon$  on konkreetsele molekulaarorbitaalile vastav energia, mille avaldame  $\alpha$  ja  $\beta$  kaudu. Viimane süsteem on samaväärne süsteemiga

$$(A - \varepsilon I)c = 0,$$

millel leidub mittetriviaalne lahend  $c \neq 0$  parajasti siis, kui

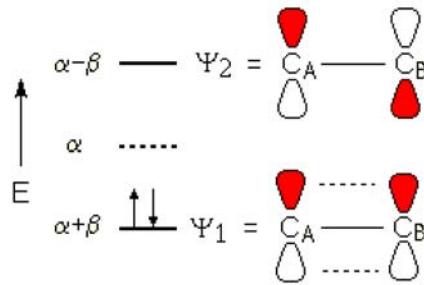
$$|A - \varepsilon I| = 0.$$

Leiame esiteks determinandi

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varepsilon & \beta \\ \beta & \alpha - \varepsilon \end{vmatrix} = (\alpha - \varepsilon)^2 - \beta^2 \\ = (\alpha - \varepsilon - \beta)(\alpha - \varepsilon + \beta).$$

Näeme, et  $|A - \varepsilon I| = 0$  parajasti siis, kui

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta, \quad \varepsilon_2 = \alpha - \beta.$$



Joonis: <http://fptchl02.tu-graz.ac.at/cgi-bin/access.com?c1=0000&c2=0000&c3=0000&file=0393>

[//fptchl02.tu-graz.ac.at/cgi-bin/access.com?c1=0000&c2=0000&c3=0000&file=0393](http://fptchl02.tu-graz.ac.at/cgi-bin/access.com?c1=0000&c2=0000&c3=0000&file=0393)

Kui  $\varepsilon_1 = \alpha + \beta$ , siis saame homogeense süsteemi

$$(A - \varepsilon I) c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lahenditeks

$$c = (c_1, c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{juhul } \varepsilon_1 = \alpha + \beta.$$

Molekulaarorbitaalide teoorias võetakse  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (et viia arvulised väärtused õigesse mõõtkavasse), saades esimeseks lainefunktsiooniks

$$\Psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2).$$

Kui  $\varepsilon_1 = \alpha - \beta$ , siis saame homogeense süsteemi

$$(A - \varepsilon I) c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lahenditeks

$$c = (c_1, -c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{juhul } \varepsilon_2 = \alpha - \beta.$$

Sellisel juhul teine lainefunktsioon on

$$\Psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2).$$

Leitud orbitaalfunktsioonidest võib välja lugeda, et näiteks  $\Psi_+$  maksimiseerib elektronide tihedust sellel orbitaalil (tõenäosused liituvad) ja tegemist on siduva orbitaaliga.

◇ ◇ ◇

Näeme, et tasemel  $\alpha$  ei teki  $\pi$ -orbitaali, küll aga tekib tasemest  $\alpha$  ülal- ja allpool  $\beta$  ühikut kaks  $\pi$ -orbitaali.

Sõltumata  $\alpha$  väärtusest on kahe orbitaali energiatega vahe

$$\alpha - \beta - (\alpha + \beta) = -2\beta.$$

Kui näiteks  $\beta = -6$  eV, siis orbitaalide energiatega erinevus on  $-12$  eV. Kui lisaks  $\alpha = -4.5$  eV, siis  $\alpha - \beta = 1.5$  eV ja  $\alpha + \beta = -10.5$  eV.



**Näide A.3** Hückel'i meetodiga tuletatakse, et allüülradikaali  $C_3H_5$  molekulaarorbitaalide energiatasemed  $\varepsilon$  leitakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} (\alpha - \varepsilon)c_1 + \beta c_2 = 0 \\ \beta c_1 + (\alpha - \varepsilon)c_2 + \beta c_3 = 0 \\ \beta c_2 + (\alpha - \varepsilon)c_3 = 0 \end{cases}.$$

Sel juhul  $\pi$ -orbitaalidele vastavad lainefunktsioonid

$$\Psi = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3,$$

kus  $p_1, p_2$  ja  $p_3$  on vastava kolme süsiniku aatomiga seotud aatomorbitaalide lainefunktsioonid. Viimane süsteem on samaväärne süsteemiga

$$(A - \varepsilon I)c = 0,$$

millel leidub mittetriviaalne lahend  $c \neq 0$  parajasti siis, kui  $|A - \varepsilon I| = 0$ . Leiame determinandi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \alpha - \varepsilon & \beta & 0 \\ \beta & \alpha - \varepsilon & \beta \\ 0 & \beta & \alpha - \varepsilon \end{vmatrix} &= (\alpha - \varepsilon) \begin{vmatrix} \alpha - \varepsilon & \beta \\ \beta & \alpha - \varepsilon \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ \beta & \alpha - \varepsilon \end{vmatrix} \\ &= (\alpha - \varepsilon)((\alpha - \varepsilon)^2 - \beta^2) - \beta^2(\alpha - \varepsilon) \\ &= (\alpha - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon - \sqrt{2}\beta)(\alpha - \varepsilon + \sqrt{2}\beta). \end{aligned}$$

Näeme, et  $|A - \varepsilon I| = 0$  parajasti siis, kui

$$\varepsilon_1 = \alpha, \quad \varepsilon_2 = \alpha - \sqrt{2}\beta, \quad \varepsilon_3 = \alpha + \sqrt{2}\beta.$$

Kui  $\varepsilon_1 = \alpha$ , siis saame homogeense süsteemi

$$(A - \varepsilon I)c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lahenditeks

$$c = (c_1, 0, -c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{juhul } \varepsilon_1 = \alpha.$$

Teoorias võetakse  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (märkate, et siis kordajate ruutude summa annab tulemuseks ühe) ja orbitaali lainefunktsioon on

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_3).$$

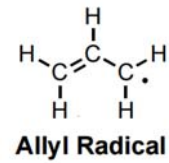
Kui  $\varepsilon_2 = \alpha - \sqrt{2}\beta$ , siis saame homogeense süsteemi

$$(A - \varepsilon I)c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}\beta & \beta & 0 \\ \beta & \sqrt{2}\beta & \beta \\ 0 & \beta & \sqrt{2}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lahenditeks

$$c = (c_1, -\sqrt{2}c_1, c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{juhul } \varepsilon_2 = \alpha - \sqrt{2}\beta.$$

◇ ◇ ◇



Allüülradikaali struktuur:

Wikipedia

Teoorias võetakse  $c_1 = \frac{1}{2}$  ja orbitaali lainefunktsioon on

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}(p_1 - \sqrt{2}p_2 + p_3).$$

Kui  $\varepsilon_3 = \alpha + \sqrt{2}\beta$ , siis saame homogeense süsteemi

$$(A - \varepsilon I)c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\beta & \beta & 0 \\ \beta & -\sqrt{2}\beta & \beta \\ 0 & \beta & -\sqrt{2}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

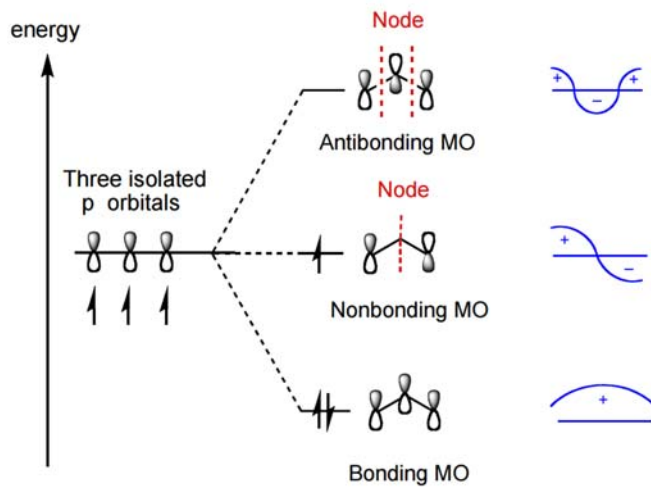
lahenditeks

$$c = (c_1, \sqrt{2}c_1, c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{juhul } \varepsilon_3 = \alpha + \sqrt{2}\beta.$$

Teoorias võetakse  $c_1 = \frac{1}{2}$  ja orbitaali lainefunktsioon on

$$\Psi_3 = \frac{1}{2}(p_1 + \sqrt{2}p_2 + p_3).$$

Näeme, et energiale  $\varepsilon = \alpha + \sqrt{2}\beta$  vastab lainefunktsioon  $\psi_3$ , mis maksimiseerib elektronide tihedust antud orbitaalil ja tegemist on siduva orbitaaliga. Järgmisel joonisel on kujutatud orbitaalid ülalt alla:  $\alpha - \sqrt{2}\beta$ ,  $\alpha$  ja  $\alpha + \sqrt{2}\beta$ .



Võttes sarnaselt eelnevaga  $\alpha = -4.5$  eV ja  $\beta = -6$  eV, saame orbitaalide energiateks vastavalt  $\alpha - \sqrt{2}\beta = 3.99$  eV,  $\alpha = -4.5$  eV ja  $\alpha + \sqrt{2}\beta = -12.99$  eV. Energiate erinevus on  $2\sqrt{2}\beta \approx -17.0$  eV.

Joonis: <http://www.chem.wisc.edu/courses/343/Lee/Ch13-2007-Spring2.pdf>

◇ ◇ ◇

# Lisa B

## Funktsioonid

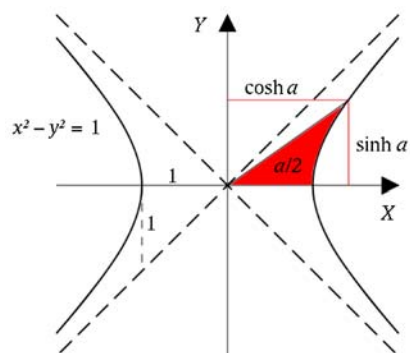
---

B.1 Hüperboolsed funktsioonid *	279
---------------------------------	-----

---

### B.1 Hüperboolsed funktsioonid \*

Trigonomeetrilised funktsioonid  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  on seotud ühikringjoo-  
nega  $x^2 + y^2 = 1$ . Analoogilised funktsioonid saab esitada hüperbooli  
 $x^2 - y^2 = 1$  kohta.

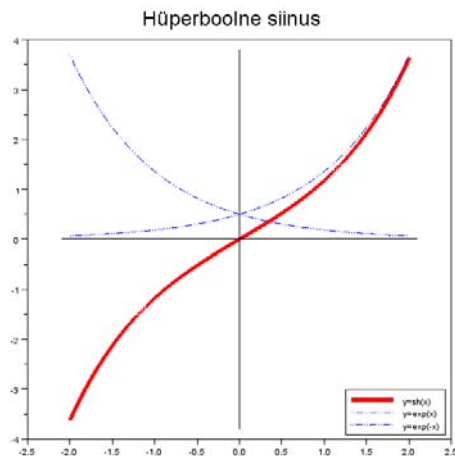


(Allikas: Wikipedia)

Ühikringjoone punktid saab esitada koordinaatidega  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Analoogiliselt saab esitada punktid hüperbooli  $x^2 - y^2 = 1$  peal:  $(\operatorname{ch} \varphi, \operatorname{sh} \varphi)$ , kus  $\operatorname{ch}$  on hüperboolne koosinus ja  $\operatorname{sh}$  on hüperboolne siinus.

Kohe näeme, et hüperboolseid funktsioone saab esitada eksponentfunktsioonide kaudu ja selles mõttes ei oleks vaja uusi tähistusi sisse tuua, kuid mõnikord teeb see meie töö oluliselt lihtsamaks.

- **Hüperboolne siinus**  $\operatorname{sh} x$ .

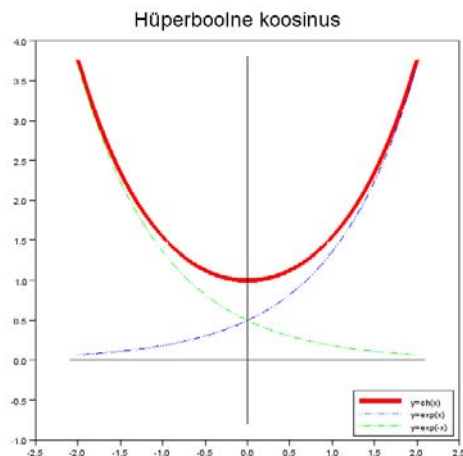


On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (\text{B.1})$$

Viimast märgitakse ka  $\sinh x$ . Hüperboolne siinus  $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paaritu üksühene pealekujutus.

- **Hüperboolne koosinus**  $\operatorname{ch} x$ .



On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (\text{B.2})$$

Viimast märgitakse ka  $\cosh x$ . Hüperboolne koosinus  $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

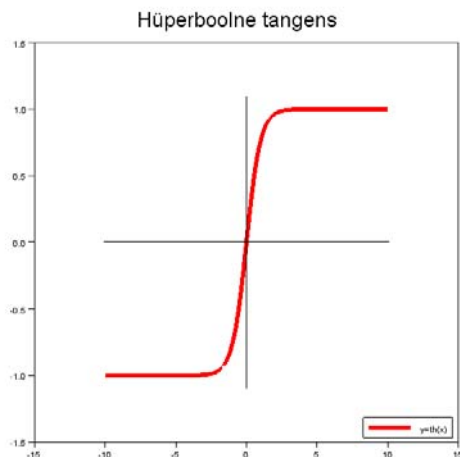
Hüperboolne koosinus võib tekkida funktsioonides, mis kirjeldavad rippuvaid ahelaid, nagu näiteks ketid, elektriliinid, kaarsillad ja teised sellised objektid, mis ripuvad kahelt poolt kinnitatuna ainult oma keha raskuse mõjul. Pöörates kujundi ümber, saame analoogiliselt projekteerida kaarsildu. Vastavat objekti võib matemaatiliselt kirjeldada hüperboolse koosinusfunktsiooniga

$$f(x) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad a > 0.$$



Maailma kõrgeim monument:  
St. Louis Gateway Arch (192  
m) (Allikas: Wikipedia)

- Hüperboolne tangens  $\text{th } x$ .

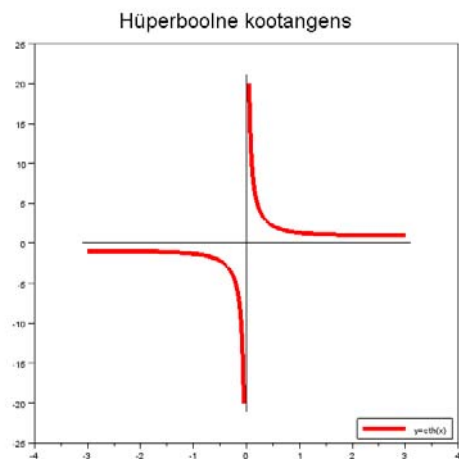


On defineeritud võrdusega

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (\text{B.3})$$

Viimast märgitakse ka  $\tanh(x)$ . Hüperboolne tangens  $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  on paaritu üksühene pealekujutus.

- Hüperboolne kootangens  $\text{cth } x$ .

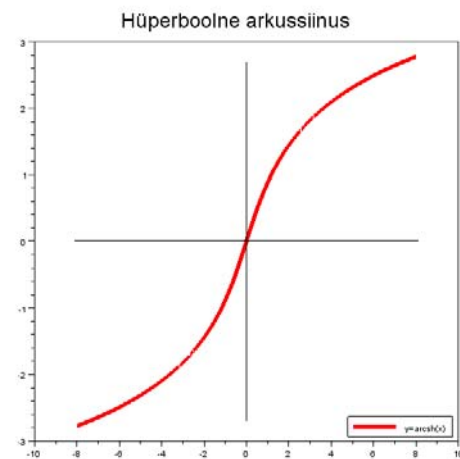


On defineeritud võrdusega

$$\text{cth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0. \quad (\text{B.4})$$

Viimast märgitakse ka  $\coth x$ . Hüperboolne kootangens  $\text{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  on paaritu üksühene pealekujutus.

- Areasiinus  $\text{arsh } x$  on  $\text{sh } x$  pöördfunktsioon.

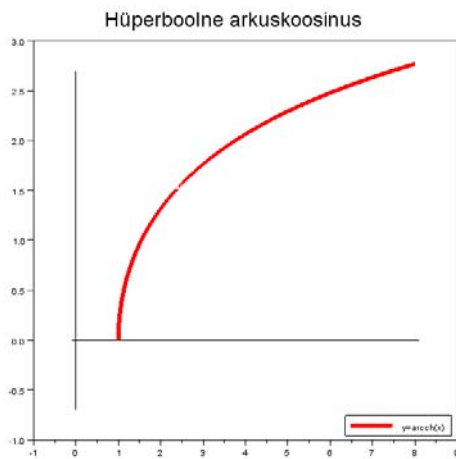


On defineeritud võrdusega

$$\text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (\text{B.5})$$

Areasiinus  $\text{arsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on üksühene pealekujutus.

- **Areakoosinus**  $\operatorname{arch} x$  on  $\cosh x$  pöördfunktsioon.

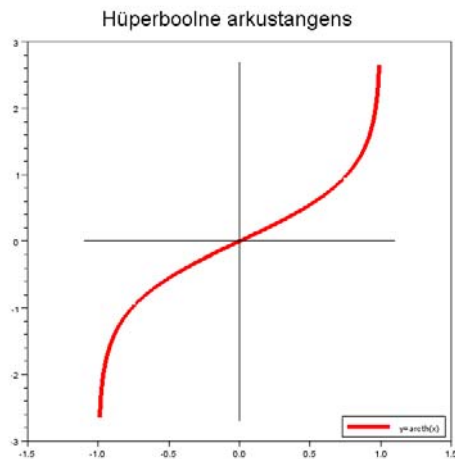


On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad (\text{B.6})$$

Areakoosinus  $\operatorname{arch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  on üksühene pealekujutus.

- **Areatangens**  $\operatorname{arth} x$  on  $\tanh x$  pöördfunktsioon.

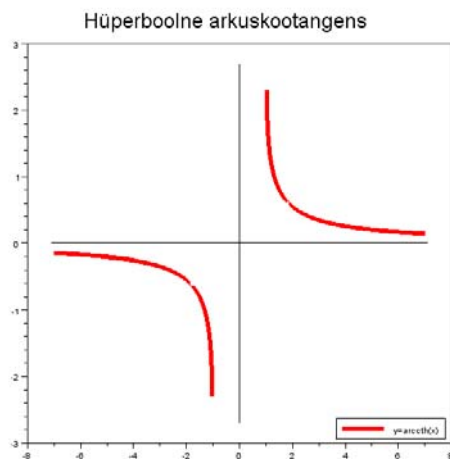


On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (\text{B.7})$$

Areatangens  $\operatorname{arth} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  on paaritu üksühene pealekujutus.

- **Areakootangens**  $\operatorname{arch} x$  on  $\coth x$  pöördfunktsioon.



On defineeritud võrdusega

$$\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}. \quad (\text{B.8})$$

Areakootangens  $\operatorname{arch} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  on paaritu üksühene pealekujutus.

Hüperboolsete funktsioonide põhivalemid:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (\text{B.9})$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad (\text{B.10})$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1, \quad (\text{B.11})$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}. \quad (\text{B.12})$$





## Lisa C

# Aritmeetiline ja geomeetriline jada

### Definitsioon C.1

Me nimetame jada  $(x_n)$  **aritmeetiliseks jadaks**, kui iga tema kahe järjestikuse liikme vahe on konstantne, s.t

$$x_n = x_{n-1} + d, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{C.1})$$

kus  $d$  on mingi reaalarv. Aritmeetiline jada esitub ka kujul

$$(x_n) = a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n - 1)d, \dots, \quad (\text{C.2})$$

kus  $a$  on jada esimene liige.

---

### Näide C.1 Jada

$$2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

on aritmeetiline jada, kuna iga kahe järjestikuse liikme vahe on  $d = 3$ .  
Sel juhul  $n$ -is liige avaldub valemiga

$$x_n = a + (n - 1)d = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1.$$

Saame, et näiteks 121. liige on  $3 \cdot 121 - 1 = 362$ .

◇ ◇ ◇

**Aritmeetilise jada  $n$  esimese liikme summa avaldub valemiga**

$$S_n = n \cdot \frac{x_1 + x_n}{2}. \quad (\text{C.3})$$

Tuletame selle valemi. Esiteks

$$S_n = x_1 + (x_1 + d) + (x_1 + 2d) + \cdots + (x_1 + (n-1)d).$$

Teisalt kehtib ka

$$S_n = x_n + (x_n - d) + (x_n - 2d) + \cdots + (x_n - (n-1)d).$$

Liites mõlemad võrdused, saame

$$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \cdots + (x_1 + x_n).$$

Kuna liidetavaid on täpselt  $n$  tükki, siis kahega jagamisel saamegi esitatud valemi.

---

**Näide C.2** Leiame esimese 10 naturaalarvu summa

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 10 \cdot \frac{1 + 10}{2} = 10 \cdot 5.5 = 55.$$

◇ ◇ ◇

---

**Näide C.3** Ülikooli lõpetajale pakutakse kahte töökohta: arvutifirmas, kus aastapalgaks on 42000 EUR koos palgatõusuga iga järgmise aasta kohta 1200 EUR. Turundusettevõtte pakub aastapalka 44000 EUR koos palgatõusuga iga järgmise aasta kohta 600 EUR. Milline ettevõtte maksab esimese kuue aastaga rohkem palka ja kui palju rohkem?

Esimene ettevõtte maksab kokku

$$S_6 = 6 \cdot \frac{42000 + (42000 + 5 \cdot 1200)}{2} = 3 \cdot 90\,000 = 270\,000 \text{ EUR.}$$

Teine ettevõtte maksab kokku

$$\tilde{S}_6 = 6 \cdot \frac{44000 + (44000 + 5 \cdot 600)}{2} = 3 \cdot 91\,000 = 273\,000 \text{ EUR.}$$

Seega teine ettevõtte maksab kokku 3000 EUR rohkem.

◇ ◇ ◇

### Definitsioon C.2

Me nimetame jada  $(x_n)$  **geomeetriliseks jadaks**, kui iga tema kahe järjestikuse liikme jagatis on konstantne, s.t

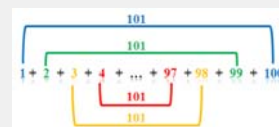
$$x_n = q x_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (\text{C.4})$$

kus  $q \neq 0$  on mingi reaalarv. Geomeetriline jada esitub ka kujul

$$(x_n) = a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}, \dots, \quad (\text{C.5})$$

kus  $a$  on jada esimene liige.

Populaarne lugu Karl Friedrich Gauss'i kohta räägib, et kui ta oli 10-aastane, palus õpetaja klassis kõigil arvutada 100 esimese naturaalarvu summa, lootes, et klassis jätkub nüüd tegevust üpris pikaks ajaks. Vaevalt oli õpetaja oma ülesande seletamisega lõpule jõudnud, kui Gauss esitas õige vastus:  $100 \cdot 50.5 = 5050$ .



Joonis:

<http://mathandmultimedia.com/2010/09/15/sum-first-n-positive-integers/>

**Näide C.4** Jada

$$2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

on geomeetiline jada, kuna iga kahe järjestikuse liikme jagatis on  $q = 2$ . Sel juhul  $n$ -is liige avaldub valemiga

$$x_n = a q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \Rightarrow \quad x_{11} = 2^{11} = 2048.$$

◇ ◇ ◇

**Geomeetrilise jada  $n$  esimese liikme summa** avaldub valemiga

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1. \quad (\text{C.6})$$

Tuletame selle valemi. Esiteks

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} = a \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

Kui  $q \neq 1$ , siis kehtib ka

$$\begin{aligned} S_n &= a \cdot \frac{1 - q}{1 - q} \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= \frac{a}{1 - q} \cdot (1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \dots + q^{n-1} - q^n). \end{aligned}$$

Näeme, et toodud summas taanduvad kõik vahepealsed liikmed, peale 1 ja  $-q^n$ , välja ning tulemuseks ongi esitatud valem.

**Näide C.5** Te võtate 500 eurot laenu kaheks aastaks intressiga 5 % kuus. Leiame, kui suureks see laen kasvab ja milline on intressimaksete suurus (kui vahepealseid tagasimakseid ei toimu).

Pärast ühte kuud on summa suuruseks koos intressiga

$$500 + 500 \cdot 0.05 = 500 \cdot 1.05.$$

Pärast teist kuud on summa suuruseks

$$500 \cdot 1.05 + 500 \cdot 1.05 \cdot 0.05 = (500 \cdot 1.05) \cdot 1.05 = 500 \cdot 1.05^2.$$

Niimoodi jätkates saab näidata, et pärast  $n$  kuud on summa suuruseks

$$x_n = 500 \cdot 1.05^n.$$

Üldjuhul, kui meil on summa  $S$  ja ajaühikus makstakse intressi  $r$ , siis pärast  $n$  kuud on summa suuruseks

$$x_n = S \cdot (1 + r)^n.$$

◇ ◇ ◇

Sellist intressilt intressi arvestamist nimetatakse ka liitintressiks. Kord küsitud Albert Einstein'i käest, et milline avastus on olnud läbi aegade kõige suurem avastus. Einstein vastanud, et liitintressi avastamine.

Kogu intressimakse kokku on

$$S_n = S \cdot (1+r)^n - S = S((1+r)^n - 1).$$

See on see sama, mis

$$S \cdot r + S \cdot r \cdot (1+r) + \dots + S \cdot r \cdot (1+r)^n = S \cdot r \cdot \frac{1 - (1+r)^{n+1}}{1 - (1+r)} = S \cdot ((1+r)^{n+1} - 1).$$

Selle summa liikmed moodustavad (lõpliku) geomeetrilise jada

$$S \cdot r, S \cdot r \cdot (1+r), S \cdot r \cdot (1+r)^2, \dots, S \cdot r \cdot (1+r)^n,$$

mis kujutab endast igal perioodil lisanduvat intressimakse suurust. Meil oli intress 5 % ehk  $r = 0.05$  ja  $S = 500$ . Kokku on makseid  $n = 12 \cdot 2 = 24$  (aastas on 12 kuud). Seega

$$x_{24} = 500 \cdot 1.05^{24} = 1612.55$$

ja intressimaksed kokku on ennast paisutanud  $1612.55 - 500 = 1112.55$  euro suuruseks. Ei ole just eriti kasulik tehing. Huvi pärast leiame summa suuruse, kui intress on 1 % kuus:

$$x_{24} = 500 \cdot 1.01^{24} = 634.87$$

ja intressimaksed kokku on 134.87 eurot. See on juba palju mõistlikum laen.

◇ ◇ ◇

---

**Näide C.6** Signaali tugevus fiiber-optilises kaablis väheneb 12 % iga 15 km tagant. Kui tugev signaal jääb järgi pärast 105 km?

Kasutame eelmist ülesannet. Meil  $r = -0.12$  (vähenemisel on miinusmärgiga). Kokku on signaali nõrgenemisi  $n = 105/15 = 7$ . Seega on signaali tugevuseks 105 km pärast

$$x_n = 1 \cdot (1 - 0.12)^7 \approx 0.41.$$

Kadunud on 59 % signaali tugevusest ning alles on 41 %.

◇ ◇ ◇

# Lisa D

## Funktsiooni piirväärtus

---

D.1 Piirväärtuse $(\varepsilon, \delta)$ -keelne definitsioon *	289
D.2 Lõpmatud piirväärtused *	293
D.3 Funktsiooni piirväärtuse omadused *	294
D.4 Absoluutse vea leidmise seos piirväärtuse definitsiooniga *	298
D.5 Ühepoolsed piirväärtused *	299
D.6 Ekvivalentsed lõpmata väikesed funktsioonid *	301

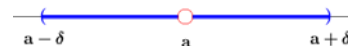
---

### D.1 Piirväärtuse $(\varepsilon, \delta)$ -keelne definitsioon \*

Olgu funktsioon  $f$  määratud punkti  $a$  mingis ümbruses

$$U_{a,\delta} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \quad \delta > 0, \quad a, \delta \in \mathbb{R}.$$

**NB! Funktsioon  $f$  ei pea olema määratud punktis  $a$  endas.**



#### Märkus D.1

Järgnev matemaatilisel range piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

definitsioon on üles ehitatud järgmisel ideel.

Andes ette **suvalise** positiivse reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , saab leida sellise punkti  $a$  ümbruse et **iga** argumenti  $x$  korral sellest ümbrusest erinevus  $|f(x) - L|$  jääb väiksemaks kui meie etteantud arv  $\varepsilon$ .

Piirväärtus on matemaatikas väga oluline kuid oma olemuselt üpris keeruline mõiste. Sellele mõistele baseeruvad matemaatilise analüüsi „suured“ valdkonnad nagu tuletis, integraal, read ja summeeruvus. Ka matemaatikutel endil tuli seda mõistet pikka aega otsida ja sõnastust parandada, enne kui leiti kõigile vastuvõetav käsitlus. Mõistest lõpuni arusaamine on kasulik ka mittematemaatikutele, kuid kuna kogemused ütlevad, et arusaamine tuleb väga raskelt, siis jätame range käsitluse põhikursusest välja ja toome selle vaid siin lisas.

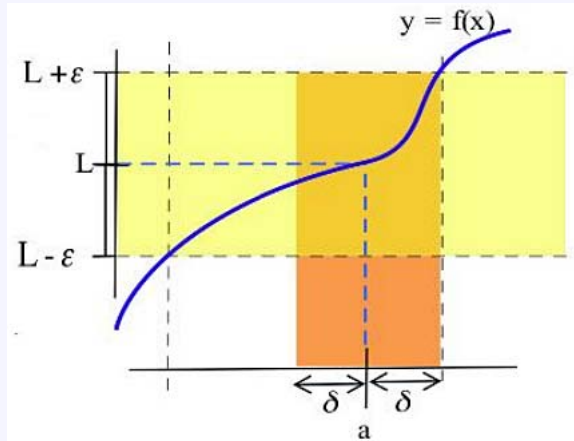
**Definitsioon D.1**

Arvu  $L$  nimetatakse funktsiooni  $f$  piirväärtuseks protsessis  $x \rightarrow a$ , kui iga positiivse arvu  $\varepsilon > 0$  jaoks leidub selline positiivne arv  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , et iga  $x$  korral, mis rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta, \quad (\text{D.1})$$

kehtib võrratus

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \quad (\text{D.2})$$



(Allikas: [13])

Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

või ka

$$f(x) \rightarrow L, \quad \text{kui } x \rightarrow a.$$

Üliõpilane: „Hobene kimab kiirusega 50 km/h. Mida see võiks tähendada?“

Professor: „Võttes suvalise  $\varepsilon > 0$ , leidub selline  $\delta > 0$ , et kui  $0 < |t_2 - t_1| < \delta$ , siis kehtib

$$\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \varepsilon.“$$

Üliõpilane: „Jumala pärast, kuidas on võimalik nii jabura vastuse peale tulla?“

Sümbol  $\lim$  on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, mis tähendab piiri.

**Märkus D.2**

Formaalselt saab  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  definitsiooni kirja panna järgmiselt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon). \quad (\text{D.3})$$

**Märkus D.3**

Vaadeldavas protsessis  $x \rightarrow a$  eeldame, et  $x \neq a$  (selle garanteerib definitsiooni D võrratus  $|x - a| > 0$ ), mis võimaldab vaadelda piirväärtust ka juhul, kui  $a$  ei kuulu funktsiooni  $f$  määramispiirkonda.

**Näide D.1** Tõestame piirväärtuse definitsiooni abil, et sirge  $y = 2x + 1$  piirväärtus, argumendi  $x$  lähenemisel arvule 1, on arv 3.

Fikseerime suvalise positiivse reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Märgime, et

$$|f(x) - L| = |(2x + 1) - 3| = 2 \cdot |x - 1|.$$

◇ ◇ ◇

Peame näitama, et  $|f(x) - L| < \varepsilon$  iga argumendi  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x - 1| < \delta$ .

Näeme, et  $2 \cdot |x - 1| < \varepsilon$ , kui võtta  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . Sel juhul saame, et iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  nii, et iga argumendi  $x$  korral ümbrusest

$$0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

järeldub võrratus

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seega tõepoolest

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3.$$

Näiteks, võtame  $\varepsilon = 1$ . Siis sobib  $\delta = \frac{1}{2}$  ja  $\delta$ -piirkonnaks on  $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$ . Paneme tähele, et arvuks  $\delta$  sobib ka iga väiksem arv  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , see ei ole üheselt määratud. Tähtis on, et leidub mingi  $\delta > 0$ , et  $|f(x) - 3| < 1$ .

Kui me võtame mingi teise arvu, näiteks  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , siis  $\delta = \frac{1}{2}$  ei sobi enam, kuna näiteks  $0.6 \in (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$  korral  $|f(0.6) - 3| = 0.8 > \varepsilon = \frac{1}{2}$ . Järelikult peame otsima mingit teist arvu  $\delta > 0$ . Sobib näiteks  $\delta = \frac{1}{4}$  ja  $\delta$ -piirkonnaks on  $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.75, 1) \cup (1, 1.25)$ .

Kui me võtame  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ , siis sobib  $\delta = \frac{1}{10}$  ja  $\delta$ -piirkonnaks on  $(1 - \delta, 1) \cup (1, 1 + \delta) = (0.9, 1) \cup (1, 1.1)$ .  $\diamond$

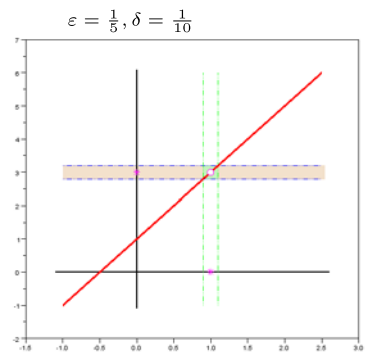
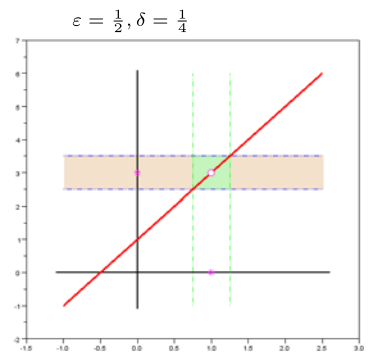
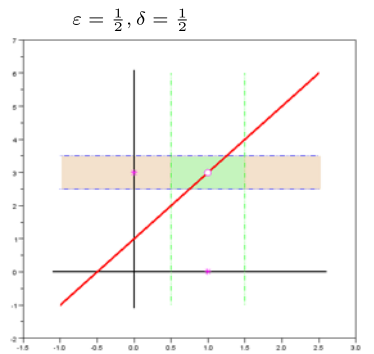
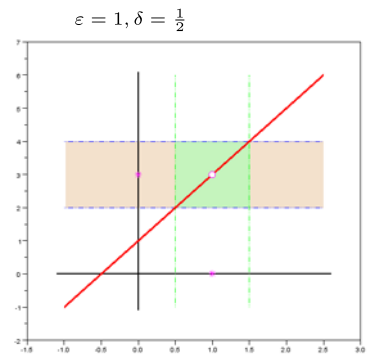
$\diamond \diamond \diamond$

**Märkus D.4**

Alati, kui sobib mingi  $\delta > 0$ , siis sobib ka iga väiksem  $0 < \delta_* < \delta$  (kuna punkti  $a$  väiksem ümbrus asub suurema ümbruse sees).

**Ülesanne D.1** Tõestada, et kui  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , siis iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub arv  $\delta > 0$  nii, et iga argumendi  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x - a| < \delta$  kehtib võrratus

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



**Näide D.2** Kontrollida, kas tükiti lineaarse funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 1$  on arv 4, s.t. kas  $\lim_{x \rightarrow 1} = 4$ ?

Võttes suurema arvu  $\varepsilon = 2 > 0$ , saame näiteks leida  $\delta = \frac{1}{2}$  nii, et  $|f(x) - 4| < 2$  iga  $x \in (0.5, 1) \cup (1, 1.5)$  korral.

Aga kui näiteks  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , siis võib joonisel näha, et siniste punktiiride vahele jääb ainult üks funktsiooni  $f$  väärtus:  $f(1) = 4$ , väärtus 1 aga ei kuulu ühtegi otsitavasse  $\delta$ -piirkonda.

Kui võtta  $x > 1$ , siis alati

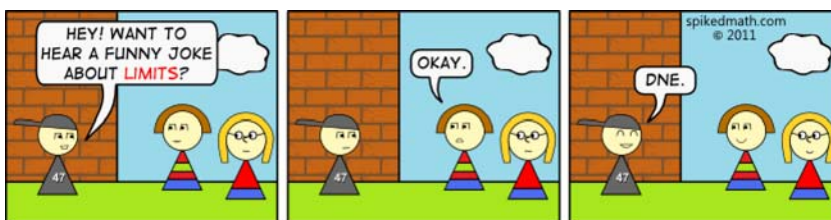
$$|f(x) - L| = |2x + 3 - 4| = |2x - 1| > 1 > \frac{1}{2}, \quad x > 1.$$

Samuti, võttes  $x < 1$ , siis alati

$$|f(x) - L| = |2x + 1 - 4| = |2x - 3| > 1 > \frac{1}{2}, \quad x < 1.$$

Meil ei õnnestu kuidagi leida arvu  $\delta > 0$ , et definitsiooni 5.1 nõuded oleksid täidetud. Seega funktsiooni  $f$  piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 1$  ei ole arv 4. Analoogiliselt võib tõestada (mitte ainult joonise järgi), et tegelikult funktsioonil  $f$  puudub igasugune piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 1$ .

◇ ◇ ◇



“DNE” = “Does Not Exist” (Allikas: spikedmath.com)

**Näide D.3** Vaatleme funktsiooni

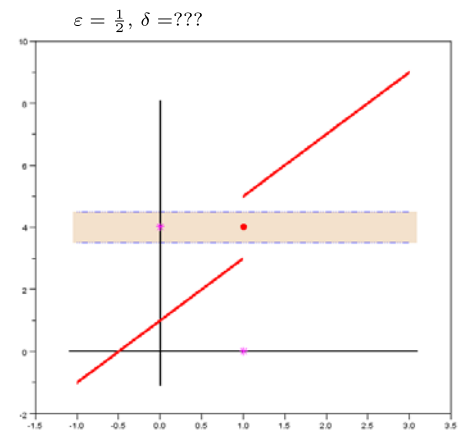
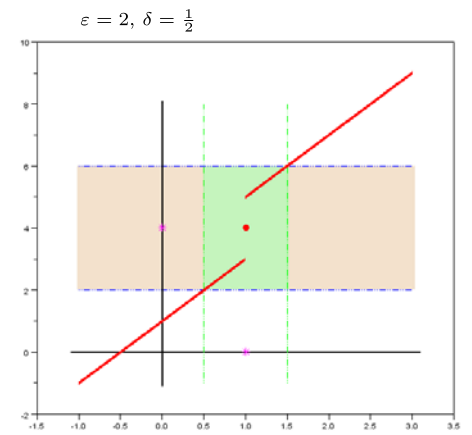
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Näitame, et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . Kui  $x \neq 2$ , siis

$$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |x - 2| |x + 2|.$$

Paneme tähele, et meil on punkti 2 ümbruseks piirkond  $(2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$  ehk  $0 < |x - 2| < \delta$ .

◇ ◇ ◇





Üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $\delta < 1$ , s.t. me otsime väiksemat  $\delta$ -piirkonda suurema piirkonna  $(1, 2) \cup (2, 3)$  (ehk  $0 < |x - 2| < 1$ ) sees. Siis kehtib  $|x + 2| < 5$  ja

$$|f(x) - L| = |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5 \cdot |x - 2| < 5 \cdot \delta.$$

Näeme, et kui võtta  $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\}$ , siis iga suvalise  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\} > 0$  nii, et iga

$$x \in (2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta) \subset (1, 2) \cup (2, 3)$$

korral kehtib võrratus

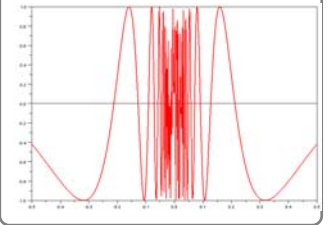
$$|f(x) - L| = |f(x) - 4| < 5 \cdot \delta \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 4| < \varepsilon.$$

◇ ◇ ◇

### Ülesanne D.2

Näidata, et  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  ja samas  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  ei eksisteeri.

Funktsioonil  $\cos \frac{1}{x}$  puudub piirväärtus protsessis  $x \rightarrow 0$ .



## D.2 Lõpmatud piirväärtused \*

### Definitsioon D.2

Öeldakse, et funktsioonil  $f$  on lõpmatu piirväärtus protsessis  $x \rightarrow a$ , kui **iga** positiivse arvu  $M > 0$  jaoks **leidub** selline positiivne arv  $\delta = \delta(M) > 0$ , et **iga**  $x \in X$  korral, mis rahuldab tingimust

$$0 < |x - a| < \delta, \quad (\text{D.4})$$

kehtib võrratus

$$f(x) > M \quad (\text{või siis } f(x) < -M). \quad (\text{D.5})$$

Sel juhul kirjutame

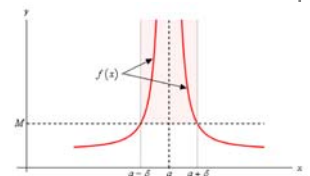
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad (\text{või siis } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty).$$

### Märkus D.5

Funktsiooni  $f$  lõpmatu piirväärtus  $\infty$  näitab, et antud funktsioon on selles protsessis ülalt tõkestamata ( $f(x) \rightarrow \infty$ ), analoogiliselt  $-\infty$  näitab, et  $f$  on alt tõkestamata ( $f(x) \rightarrow -\infty$ ).

Albert Einstein: "Ainult kaks asja on lõpmatud: universum ja inimese lollus, ning ma pole kindel esimeses."

Funktsiooni piirväärtus on lõpmatu, kui iga etteantud positiivse reaalarvu  $M > 0$  korral leidub punkti  $a$  selline ümborus, et iga argumenti  $x$  väärtuse korral sellest ümbrusest funktsiooni väärtus  $f(x)$  on suurem kui etteantud arv  $M$ .



Allikas: Pauls Online Notes :  
Calculus I

**Näide D.4** Tõestame, et

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty.$$

Olgu  $M > 0$  suvaline etteantud arv. Vaatame neid  $x \neq -1$  väärtusi, mille korral  $(x+1)^2 < \frac{1}{M}$ . Sel juhul

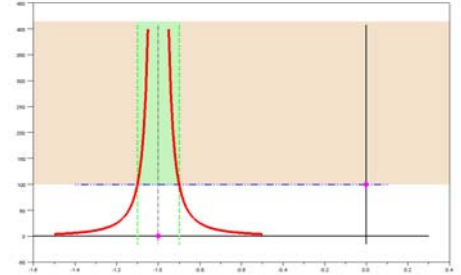
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > M.$$

Võttes  $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$  (siis  $0 < |x+1| < \delta$ ) näeme, et definitsiooni D.2 nõuded on täidetud.

Näiteks, olgu  $M = 100 > 0$ . Siis leidub  $\delta = \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1 > 0$  nii, et iga  $x \in (-1.1, -0.9) \setminus \{-1\}$  korral

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 100.$$

◇ ◇ ◇



### D.3 Funktsiooni piirväärtuse omadused \*

#### Teoreem D.1

**Piirväärtuse ühesus.** Vaadeldavas protsessis saab funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

*Tõestus.* Tõestuse võib leida näiteks õpikust [22]. □

#### Definitsioon D.3

Funktsiooni  $f$  nimetatakse tõkestatuks hulgal  $X$ , kui leidub positiivne arv  $M > 0$ , nii et  $|f(x)| \leq M$  iga  $x \in X$  korral.

#### Teoreem D.2

Kui  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ja funktsioon  $y = f(x)$  on tõkestatud punkti  $a$  mingis ümbruses, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0. \quad (\text{D.6})$$

*Tõestus.* Kuna  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , siis definitsiooni järgi iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub positiivne arv  $\delta_g$  nii, et iga argumendi  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x-a| < \delta_g$  kehtib võrratus  $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$  (vt. ka ülesannet 5.1). Võtame iga  $\varepsilon > 0$  jaoks  $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$ . Sel juhul kehtib iga  $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$  jaoks

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

Praktikas on piirväärtuse definitsiooni kasutamine siiski küllalt tülikas. Matemaatikas on tõestatud rida piirväärtuse omadusi, mida on palju lihtsam kasutada. Anname siinkohal ka mõned tõestused, kuid neid ei pea eksamil oskama. Teisalt, nende tõestuste korralik jälgimine aitab aru saada piirväärtuse matemaatilisest ülesehitusest.

Funktsioon  $f(x) = x$  on tõkestatud lõigus  $[-3, 2]$ , kuna näiteks  $M = 100$  jaoks (tegelikult iga  $M \geq 3$  jaoks) kehtib  $|f(x)| = |x| \leq 100$  iga  $x \in [-3, 2]$  korral. Samas ei ole  $f$  tõkestatud hulgal  $\mathbb{R}$ .

Eelduse järgi  $f$  on tõkestatud punkti  $a$  mingis ümbruses (näiteks piirkonnas  $0 < |x-a| < \delta_f$ ), seega leidub  $M > 0$  nii, et  $|f(x)| \leq M$  iga  $x \in (a - \delta_f, a) \cup (a, a + \delta_f)$ .

**Näide D.5** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{|x-1|}.$$

Siin  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  (lihtne näidata ka definitsiooni põhjal). Samas piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{|x-1|}$  ei leidu (selge kasvõi joonise järgi, argument  $\frac{1}{|x-1|} \rightarrow \infty$ ). Kuna aga  $|\sin(u)| \leq 1$  iga  $u \in \mathbb{R}$  korral (s.t.  $\sin$  on tõkestatud), siis 2. teoreemi järgi

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{|x-1|} = 0.$$

◇ ◇ ◇

**Teoreem D.3**

Kui leiduvad **lõplikud** piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \quad (\text{D.7})$$

siis kehtivad järgmised tehete seotud omadused:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$ .

*Tõestus.* Tõestused võib leida näiteks õpikust [22]. Tõestame siinkohal esimese omaduse vahe kohta.

Eelduse järgi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  ehk definitsiooni järgi (vt. ka ülesannet 1) leidub iga  $\varepsilon > 0$  korral positiivne arv  $\delta_f > 0$  nii, et iga argumenti  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x - a| < \delta_f$  kehtib võrratus

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eelduse järgi  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  ehk definitsiooni järgi leidub iga  $\varepsilon > 0$  korral positiivne arv  $\delta_g > 0$  nii, et iga argumenti  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x - a| < \delta_g$  kehtib võrratus

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võtame iga suvalise  $\varepsilon > 0$  korral  $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0$ . Sel juhul iga argumenti  $x$  korral piirkonnast  $0 < |x - a| < \delta$  kehtib võrratus

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (A - B)| &= |(f(x) - A) - (g(x) - B)| \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

On loogiline, et lõpliku arvu või suuruse korrutamine lõpmata väikese arvuga annab tulemuseks lõpmata väikese arvu.

Piirväärtuse leidmiseks praktiliselt kasutame enamasti just nimelt neid omadusi. Matemaatilist  $(\varepsilon, \delta)$ -keelset definitsiooni läheb vaja siis, kui tegemist ei ole standardolukorraga.

Teoreemi eeldus lõplike piirväärtuste leidumise kohta ( $A$  ja  $B$  peavad olema üheselt määratud reaalarvud) on väga oluline.

**Märkus D.6**

Teoreemi 3 nõue, et peavad leiduma lõplikud piirväärtused  $\lim f(x)$  ja  $\lim g(x)$  on olulised. Vastasel juhul näiteks  $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$  ja  $g(x) = \frac{1}{|x|}$  korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

aga kasutades valesti teoreemi 3 esimest omadust, saaksime

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{|x|} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = -\infty + \infty.$$

Suurus  $\infty - \infty$  on täiesti määramata suurus (üks määramatus miinus mingi teine määramatus) ja ei võrdu iialgi nulliga!!!

Antud näitest võime ka näha, et lõpmatute piirväärtuste  $\lim f(x)$  või  $\lim g(x)$  korral (või ka siis, kui neid piirväärtusi hoopis ei eksisteerigi) võib funktsioonide summal  $f + g$  antud protsessis lõplik piirväärtus ikkagi leiduda. Analoogiline on olukord vahe, korrutise ja jagatise korral.

**Teoreem D.4**

**Piirväärtuse monotoonsus.** Kui punkti  $a$  teatavas ümbruses  $U_{a,\delta}$  kehtib võrratus

$$f(x) < g(x) \quad (\text{või siis } f(x) \leq g(x)), \quad \forall x \in U_{a,\delta},$$

ning leiduvad lõplikud piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , siis kehtib võrratus

$$A \leq B \quad \text{ehk} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**Ülesanne D.3**

Tuua näide, kus rangest võrratusest  $f(x) < g(x)$  ei järeldu range võrratus  $\lim f(x) < \lim g(x)$ .

**Teoreem D.5**

**Keskmise muutuja omadus.** Kui punkti  $a$  mingis ümbruses  $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , kehtivad võrratused

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

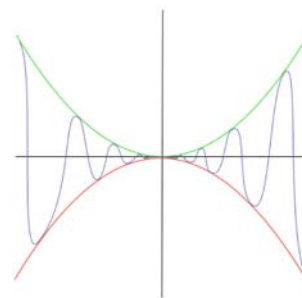
ja leiduvad lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

siis leidub ka piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ning

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Keskmise muutuja omadust nimetatakse ka "Squeeze Theorem" või ka "võileiva omaduseks" ("Sandwich Rule").



Nullümbres, keskmine sinine joon  $g(x)$  saab sama piirväärtuse, mis ülemine roheline  $h(x)$  ja alumine punane  $f(x)$  (Allikas: Wikipedia)

*Tõestus.* Tõestus pärineb õpikust [22]. Kuna leiduvad lõplikud piirväärtused  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ , siis definitsiooni järgi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_f > 0 : 0 < |x - a| < \delta_f \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_h > 0 : 0 < |x - a| < \delta_h \quad \Rightarrow \quad |h(x) - A| < \varepsilon.$$

Samuti kehtib  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  mingis ümbruses, näiteks piirkonnas  $0 < |x - a| < \delta_{fgh}$ . Võtame  $\delta = \min\{\delta_{fgh}, \delta_f, \delta_g\}$ . Sel juhul iga  $x \in U_{a,\delta}$  jaoks kehtivad võrratused

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon,$$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Neid võrratusi kombineerides saame

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$$

ja järelikult

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |g(x) - A| < \varepsilon.$$

Viimane aga tähendab, et iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub  $\delta > 0$  nii, et iga  $x \in U_{a,\delta}$  korral kehtib võrratus  $|g(x) - A| < \varepsilon$ , s.t  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .  $\square$

**Näide D.6** Kasutades omadust  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , leiame piirväärtuse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6}.$$

Paneme tähele, et  $n \rightarrow \infty$  korral kehtib

$$1 < 6 < n.$$

Sama moodi jäävad võrratused kehtima, kui neist võtta mingit järku juur,

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kuna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$  (1 on ainuke reaalne  $n$ -astme juur) ja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , siis võileiva omaduse tõttu järeldub, et ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1.$$

◇ ◇ ◇

## D.4 Absoluutse vea leidmise seos piirväärtuse definiitsiooniga \*

Anname siinkohal ühe võimaliku käsitluse piirväärtuse definiitsiooni rakendamise kohta. Teeme seda näite varal.

Meil on vaja lõigata 5 meetri pikkuseid raudlatte (kõik niivõrd võrdse pikkusega kui võimalik) ja moodustada nendest ruudukujuline raam väliekraani jaoks (oletame, et kinnitus on taoline, et saab moodustada ruudu). Siinjuures peab tulemus olema selline, et moodustatud ruudu pindala ei erineks rohkem kui 0.2% vajalikust 25 – st. Kui suur võib olla (absoluutne) viga lattide lõikamisel?

Esiteks märgime, et ruudu pindala arvutamiseks saame moodustada funktsiooni  $f(x) = x^2$ , mille korral

$$\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25.$$

Praktikas teeme mõõtmisel ja lõikamisel paratamatult mingi vea, ükskõik kui täpset tehnoloogiat me ka ei kasutaks ja ükskõik kui hoosad me ka ei oleks.

Sellest, et tulemus peab olema 0.2% vajalikust 25-st (ehk 0.05), saame tingimuse

$$|f(x) - 25| < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 25| < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 25 - 0.05 < x^2 < 25 + 0.05.$$

Funktsiooni  $x^2$  väärtused peavad jääma vahemikku  $\pm 0.05$  ühikut 25 ümbruses. Piirväärtuse definiitsioon kehtib iga  $\varepsilon > 0$  korral ja sellisel juhul ka 0.05 jaoks. Kuna piirväärtus eksisteerib, siis teame, et leidub selline  $\delta > 0$ , et meie tingimus  $|x^2 - 25| < 0.05$  kehtib iga  $x \in (5 - \delta, 5) \cup (5, 5 + \delta)$  korral (ehk  $0 < |x - 5| < \delta$ ). Antud juhul

$$|x^2 - 25| = |x - 5||x + 5| \leq 10.01 \delta,$$

kui piirata  $\delta \leq 0.01$  (s.t lõikamine peaks toimuma vähemalt 1 cm täpsusega,

siis  $x \in (4.99, 5.01)$  ja  $|x + 5| \leq 10.01$ ).

Näeme, et  $|x^2 - 25| < 0.05$ , kui nõuda

$$10.01 \delta < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \delta < \frac{0.05}{10.01} \approx 0.004995.$$

Saime, et me peame lauad mõõtma ja lõikama täpsusega 5 meetrit  $\pm 4.995$  millimeetrit ( $0 < |x - 5| < 0.004995$ ). Sellisel juhul on garanteeritud, et soovitud pindala ei erine 25-st rohkem kui 0.05.

Paneme tähele, et kogu „muusika“ tellib  $\varepsilon$  väärtus 0.05 (nö. tellija soovitud täpsus). Me võime alati täpsemini lõigata, aga me ei tohi saada näiteks latti pikkusega 5.006. Sellisel juhul

$$|x^2 - 25| = |5.006^2 - 25| \approx 0.06 > 0.05.$$

Teisiti,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  võiks tähendada ka seda, et me suudame täita mistahes tellija poolt soovitud lõpptoodangu täpsuse  $L \pm \varepsilon$ , nõudes „töötajatelt“ materjali  $x$  väärtust piirkonnast  $a \pm \delta$ , kusjuures viimane on (vähemalt teoreetiliselt) saavutatav ja ideaalset väärtust  $x = a$  ei ole vajagi nõuda.

## D.5 Ühepoolsed piirväärtused \*

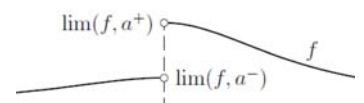
Vaatleme piirprotsesse:

1.  $x \rightarrow a$ ,  $x > a$ , lähenemine paremalt, s.o parempoolne piirväärtus.

Tähistame  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  või  $f(a+)$ .

2.  $x \rightarrow a$ ,  $x < a$ , lähenemine vasakult, s.o vasakpoolne piirväärtus.

Tähistame  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  või  $f(a-)$ .



Allikas: [15]

Ühepoolsed piirväärtused on ka  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

### Märkus D.7

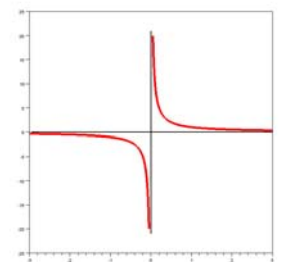
Piirväärtuse definitsioonis 5.1 tingimus  $0 < |x - a| < \delta$  omandab vastavalt kuju  $0 < x - a < \delta$  (parempoolse piirväärtuse korral) või  $0 < a - x < \delta$  (vasakpoolse piirväärtuse korral).

### Teoreem D.6

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused  $f(a+)$  ja  $f(a-)$ , siis nn. kahepoolne piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} = L$  eksisteerib parajasti siis, kui

$$f(a+) = f(a-) = L.$$

NB! Toodud piirväärtus on kontrolltöodes väga sageli valetati leitud.



**Näide D.7** Funktsioonil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

leiduvad ühepoolsed piirväärtused

$$f(0+) = \infty, \quad f(0-) = -\infty,$$

kuid on selge, et ei leidu kahepoolset piirväärtust  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ .

◇ ◇ ◇

**Definitsioon D.4**

Arvu  $L$  nimetatakse funktsiooni  $f$  piirväärtuseks protsessis  $x \rightarrow \infty$  (või  $x \rightarrow -\infty$ ), kui **iga** positiivse arvu  $\varepsilon > 0$  jaoks **leidub** selline positiivne arv  $N = N(\varepsilon) > 0$ , et iga

$$x > N \quad (x < -N), \quad x \in X, \quad (\text{D.8})$$

korral kehtib võrratus

$$|f(x) - L| < \varepsilon. \quad (\text{D.9})$$

Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \right).$$

**Näide D.8** Tõestada, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{2x - 1} = \frac{3}{2}.$$

Olgu  $\varepsilon > 0$  suvaline ette antud arv. Võime kirjutada

$$|f(x) - L| = \left| \frac{3x + 1}{2x - 1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2|2x - 1|} = \frac{5}{2(2x - 1)}, \quad x > \frac{1}{2}.$$

Järgnevalt leiame  $x > N > \frac{1}{2}$  jaoks, et

$$2x > 2N \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 > 2N - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x - 1} < \frac{1}{2N - 1}, \quad x > \frac{1}{2}.$$

Seega

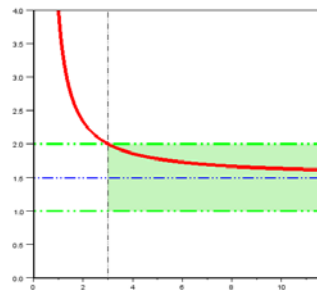
$$|f(x) - L| = \frac{5}{2(2x - 1)} < \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2N - 1} = \varepsilon,$$

kui võtta

$$N = \frac{1 + \frac{5}{2\varepsilon}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4\varepsilon} > 0.$$

Kui näiteks  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , siis  $N = 3$  ja iga  $x > 3$  korral  $|f(x) - L| < \frac{1}{2}$ .

◇ ◇ ◇

**Märkus D.8**

Asendades definitsioonis **D** tingimuse  $|f(x) - L| < \varepsilon$  tingimustega  $f(x) > N$  (vastavalt  $f(x) < -N$ ), saame defineerida piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \quad \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty \right).$$

**Märkus D.9**

Ühepoolsete piirväärtuste jaoks kehtivad samad piirväärtuse omadused, mis kahepoolsete protsesside korral.



## D.6 Ekvivalentset lõpmata väikesed funktsioonid \*

### Definitsioon D.5

Funktsiooni  $\alpha = \alpha(x)$  nimetame lõpmata väikeseks (hääbuvaks) piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Sel juhul me kirjutame  $\alpha(x) = o(1)$ .

**Näide D.9** Näiteks,

$$x^2 = o(1), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad \sin(x-1) = o(1), \quad x \rightarrow 1.$$

◇ ◇ ◇

### Märkus D.10

Koos väikese  $o(1)$  tähisega kasutatakse ka suurt  $O(1)$  tähist ja sellisel juhul tähendab see funktsiooni  $f$  tõkestatust protsessis  $x \rightarrow a$ , s.t

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \quad M, \delta > 0,$$

ja me kirjutame  $f(x) = O(1), x \rightarrow a$ .

### Märkus D.11

On üsna ilmne, et kahe lõpmata väikese funktsiooni summa, vahe ja korrutis on samuti lõpmata väikesed antud piirprotsessis. Viimane järeldub otseselt piirväärtuse omaduste teoreemist 5.3.

Lõpmata väikeste suuruste jagatis võib anda väga erinevaid tulemusi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} \quad \text{ei leidu.}$$

### Definitsioon D.6

Lõpmata väikesed funktsioonid  $\alpha = \alpha(x)$  ja  $\beta = \beta(x)$  nimetatakse ekvivalentseteks piirprotsessis  $x \rightarrow a$ , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Sellisel juhul me kirjutame  $\alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow a$ .

Sümboleid  $o(1)$  ja  $O(1)$  nimetatakse ka Landau sümbooliteks saksa matemaatiku Edmund Landau (1877 - 1938) järgi (ütleme “väike o ühest” ja “suur O ühest”).

NB! Kui te saate piirväärtuse arvutamisel tulemuseks  $\frac{0}{0}$ , siis on tegemist määramata suurussega. Sel juhul tuleb piirväärtuse leidmiseks avaldist sobivalt lihtsustada või teisendada.

**Näide D.10** Näiteks  $y = x - 1$  on ekvivalentne funktsiooniga  $y = \sin(x - 1)$  piirprotsessis  $x \rightarrow 1$ , kuna

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

◇ ◇ ◇

**Teoreem D.7**

Kui piirprotsessis  $x \rightarrow a$  lõpmata väikeste funktsioonide  $y = \alpha(x)$ ,  $y = \alpha_1(x)$ ,  $y = \beta(x)$  ja  $y = \beta_1(x)$  korral  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$  ja  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  ja eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

siis

1.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1(x)\beta_1(x).$$

*Tõestus.* Teeme tõestuse jagatise kohta, korrutise kohta käib see analoogiliselt. Eelduse kohaselt leidub piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$  ja kehtivad

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Siis võime kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

□

**Näide D.11** Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arctan 3x}.$$

Paneme tähele, et antud protsessis  $\sin x \sim x$ , seega  $\sin 5x \sim 5x$  ning analoogiliselt  $\arctan 3x \sim 3x$ . Sel juhul

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arctan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

◇ ◇ ◇

## Lisa E

# Pidevus loodusnähtuste korral

---

E.1 Lõigu poolitamise meetod \* . . . . . 304

E.2 Pidevus ja katkevus loodusnähtuste korral \* . . . . . 307

---

## E.1 Lõigu poolitamise meetod \*

Lõigus pidevad funktsioonid asuvad nii teoorias kui praktikas väga tähtsal kohal. On palju tulemusi stiilis “kui funktsioon  $f$  on pidev mingis piirkonnas, siis kehtib ...”. Toome lihtsa näite, mis omab ka praktikas olulist rolli.

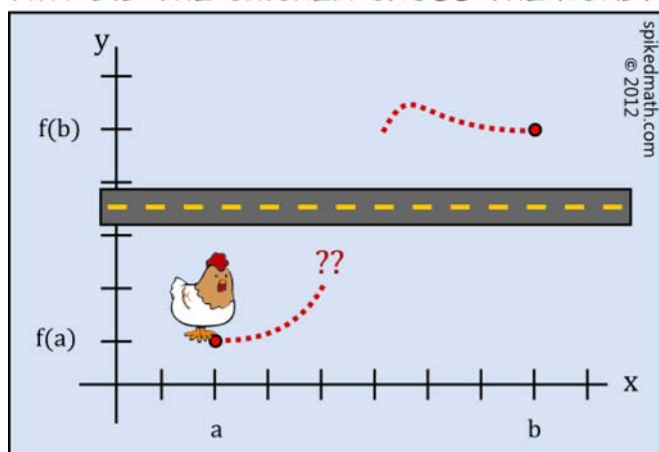
### Teoreem E.1

**Teoreem vahepealsetest väärtustest** (*Intermediate Value Theorem*, vt. [3, 13]). Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , siis  $f(x)$  väärtus võib omada iga väärtust arvude  $f(a)$  ja  $f(b)$  vahel. Täpsemalt, kui

$$f(a) \leq y_0 \leq f(b),$$

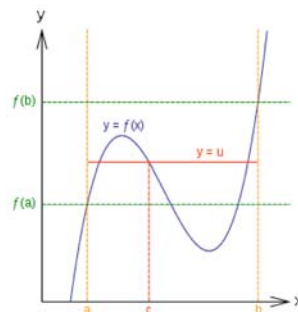
siis leidub argument  $x_0 \in [a, b]$ , et kehtib võrdus  $f(x_0) = y_0$ .

### WHY DID THE CHICKEN CROSS THE ROAD?



### THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM.

Allikas: spikedmath.com



Allikas: Wikipedia

**Märkus E.1**

Viimane teoreem ei ütle meile, kus asub see punkt  $x_0$ , et  $f(x_0) = y_0$  ja ta ei ütle meile, kui palju selliseid erinevaid väärtusi  $x_*$  (et  $f(x_*) = y_0$ ) üldse on. Küll aga on omaette väärtus ka antud infol, me teame, et selline (vähemalt üks) punkt  $x_0$  on tõepoolest olemas.

**Märkus E.2**

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile midagi väga elementaarset, infot, mida me enamasti teame niisamagi, ilma et peaksime sellele teoreemile mõtlema. Näiteks, kui te alustate paigalseisust autoga liikumist (kiirus on 0) ja jõuate kiiruseni 30 km/h, siis pidi vahepeal olema hetk, mil auto kiirus oli 10 km/h. Kui lapse temperatuur tõuseb 36.7 kraadi pealt 38.5 peale, siis pidi vahepeal olema hetk, mil lapse temperatuur oli 37.7 kraadi.

Veidi teistsugune on olukord võrrandite korral, kus me ei pruugi analoogilise järelduse peale ise tulla, kuid sama omadus kehtib ka siin.

**Teoreem E.2**

Kui funktsioon  $f$  on pidev lõigus  $[a, b]$ , kusjuures

$$f(a) f(b) < 0,$$

siis funktsioonil  $f$  leidub nullkoht  $c \in (a, b)$ , s.t

$$f(c) = 0.$$

**Lõigu poolitamise meetod** funktsiooni  $f$  (reaalse) nullkoha leidmiseks. Olgu lõigus  $[a, b]$  pideva funktsiooni  $f$  korral täidetud tingimus

$$f(a) f(b) < 0.$$

1. Jagame lõigu  $[a, b]$  kaheks võrdseks osaks  $[a, c]$  ja  $[c, b]$ , kus

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

2. Kui  $f(c) = 0$ , siis on nullkoht leitud.
3. Kui  $f(a) f(c) < 0$ , siis peab nullkoht asuma osalõigus  $[a, c]$  ja me jätkame nii, nagu punktis 1 (võttes  $b$  rolli  $c$ ).
4. Kui  $f(c) f(b) < 0$ , siis peab nullkoht asuma osalõigus  $[c, b]$  ja me jätkame nii, nagu punktis 1 (võttes  $a$  rolli  $c$ ).

Sammudega 1-4 jätkame, kuni nullkoht on leitud meile sobiva täpsusega.

Põhjendus on väga lihtne. Kuna tingimus

$$f(a) f(b) < 0$$

tähendab, et funktsioon on lõigu otspunktides erineva märgiga ja teoreemi 7.2 järgi saavutab funktsioon iga väärtuse  $f(a)$  ja  $f(b)$  vahel, siis funktsiooni graafik peab lõigus  $[a, b]$  läbima  $x$ -telge.

Märgime, et ilmselgelt ei ole sellist omadust lõigus katkeva funktsiooni korral.

Seni oleme vaadelnud võrrandite lahendamist ainult täpsete meetoditega. Lõigu poolitamise meetod on esimene, mis kujutab endast **ligikaudset meetodit**. Loomulikult on seda lihtsam kasutada arvuti abiga.

Ligikaudsete meetodite omadusi (täpsust, koonduvust, koonduvuskiirust, stabiilsust, kuluvat arvutusressurssi) uurib rakendusmatemaatika valdkond.

**Näide E.1** Lahendame võrrandi

$$x^3 - 8x^2 + 15x = -1.$$

Algebra põhiteoreemi tõttu me teame, et sellel võrrandil on kolm erinevat lahendit (ei rohkem ega vähem). Leiame nendest ühe (või siis, anname idee, kuidas ligikaudu leida vähemalt ühte).

Võtame  $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x + 1$ . Algvõrrandi lahendamine taandub funktsiooni  $f$  nullkohtade leidmisele. Funktsioon  $f$  kui polünoom on pidev tervel reaalteljel ja seega pidev igas osalõiguses  $[a, b]$ . Arvutame

$$f(-1) = -23, \quad f(0) = 1.$$

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile, et antud funktsiooni korral peab lõigus  $[-1, 0]$  leiduma punkt  $x_0$ , mille korral  $f(x_0) = 0$ . Nüüd saab jätkata lõigu poolitamise meetodiga. Leiame

$$f(-0.5) = -8.625.$$

Kuna  $f(0)$  oli positiivne ja  $f(-0.5)$  negatiivne, siis peab lõigus  $[-0.5, 0]$  leiduma punkt  $x_0$  nii, et  $f(x_0) = 0$ . Arvutame

$$f(-0.25) \approx -3.266.$$

Siit saame, et lõigus  $[-0.25, 0]$  peab leiduma punkt  $x_0$  nii, et  $f(x_0) = 0$  jne. Nii võib leida, et  $x_0 \approx -0.064434534$ .

Kuna nullkohti leidub rohkem kui üks, siis peame teisi (arvatavasti) kuskilt mujalt otsima. Näiteks,

$$f(4) = -3, \quad f(5) = 1.$$

Teoreem vahepealsetest väärtustest ütleb meile, et antud funktsiooni korral peab lõigus  $[4, 5]$  leiduma punkt  $x_*$ , mille korral  $f(x_*) = 0$ . Siin  $f(4.5) = -2.375$ , seega peame otsima lõigust  $[4.5, 5]$  jne. Lõigu poolitamise meetod ei ole küll kiire koondumisega, kuid see-eest väga lihtsa ideega.

◇ ◇ ◇

### Märkus E.3

Kuigi lõigu poolitamise meetod on väga lihtne ja pisut „algeline“ ning teda peetakse aeglaselt koonduvaks meetodiks (võib nõuda palju arvutamisi), siis on tal olemas ka üks väga tugev „trumpäss“. Nimelt, see meetod koondub alati, s.t see meetod annab alati tulemuse. Mõningate teiste ligikaudsete meetodite korral ei pruugi see tõsi olla.

**Näide E.2** Lõigu poolitamise meetodit saab kasutada ka irratsionaalsete väärtuste lähendamiseks. Leiame näiteks  $\sqrt{2}$  lähisväärtuse. Selleks lahendame võrrandi

$$x^2 = 2 \quad \text{ehk} \quad f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

$n$	$a_n$	$b_n$
0	1	2
1	1	1.5
2	1.25	1.5
3	1.375	1.5
4	1.375	1.4375
5	1.40625	1.4375
6	1.40625	1.421875
7	1.4140625	1.421875
8	1.4140625	1.41796875
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	1.414213181	1.414214134

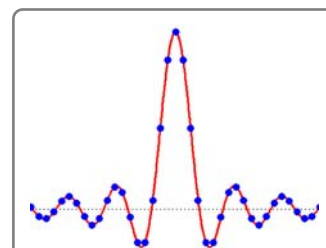
Ruutjuur kahe lähisväärtuseks võib siin võtta  $a_{20}$  (õiged on 6 koma kohta) või  $b_{20}$  (õiged on 5 komakohta).

◇ ◇ ◇

## E.2 Pidevus ja katkevus loodusnähtuste korral \*

„Küsimusega, kas loodusnähtused kulgevad pidevalt, sujuvalt või katkevalt, hüppeliselt, on filosoofid ja teadlased tegelnud kreeka klassikalisest ajastust peale. Üks vanemaid siiakuuluvaid probleeme on see, kas materiaalse, millest koosnevad kõik kehad, on pideva või katkeva struktuuriga, kas aine ehitus on, piltlikult öeldes, sõmera kohupiima või sulatatud juustu struktuuri sarnane? Kord on valitsenud arvamus, et aine täidab keha ruumala pidevalt, kord jälle, et aine koosneb jagamatutest osakestest, aatomitest, mis võtavad keha näivast ruumalast enda alla vaid väga väikese osa, nii et keha ruumala on vaid näivalt täidetud ainega. tegelikult aga on ta peale väga väikese osa „tühjust täis“: aine on diskreetse struktuuriga.

Pidevuse-katkevuse küsimus seati edasi ka liikumise kohta ja kandus siit üle igale looduses toimuvale protsessile. Võtame näiteks valguse levimise. Newton arvas, et valgus levib valgusosakeste vooluna, nagu liiguvad liivaterad liivatuisus või lumehelbed lumetormis. Huygens seevastu põhjendas veenvalt, et valgus on pidevalt kulgev võnkumisnähtus ruumi pidevalt täitvas eetris. Või võtame elektrivoolu: kas elekter voolab juhtmes pidevalt, vedelikutaoliselt, või on siin tegemist elektriosakeste „pilve“ liikumisega juhtmetes nagu haavlite liikumisega püssitorus?



Pidevuse ja katkevuse vastuolu on reaalelus selles mõttes raske avastada, et iga diskreetse joonise saab alati teha pidevaks (ühendades punktid kasvõi sirgeliikudega) ja iga pideva joonise saab teha diskreetseks (jättes punkte välja). Sellise vastavuse korral ei pruugi mingit vastuolu avastada (vähemalt esituse mõttes, sisu endaga on veidi teised lood).

Tänapäeva füüsika andmeil koosneb aine aatomitest, elekter elektriosakestest - elektronidest - ja valgus valguseosakestest - fotonitest. Niisiis on kõik aine liigid, samuti elekter ja valgus, oma struktuurilt mitte kontiinumid, vaid diskreetsed osakeste kogumid.

Aurumisel eraldub vee pinnalt ikka 1, 2, 3, ... molekuli; seega väheneb vee hulk anumas katkevult. Kui me vee aurumisel ei taju ruumala, massi või kaalu hüppeid, siis seda ainult tänu molekuli väiksusele ning meie meelte ja tavaliste mõõduriistade vähesele tundlikkusele. Leibniz pidas võimalikuks väita, et „loodus hüppeid ei tee“. Iga vaadeldud elementaarprotsess kinnitab vastupidist : kogu loodussündmustik kulgeb katkevult. Kui me seda tavaliselt ei taju, siis vaid selle tõttu, et massi, laengu, valgustugevuse jne. hüpete suurused asetsevad kõik kaugel allpool meie meelte tundlikkuse piire. Öeldu tõttu töötatakse loodusteadustes ja tehnikateadustes peaaegu eranditult pidevate funktsioonidega. Leidub aga külluses ka niisuguseid nähtusi, mille kulgemises esineb silmnähtava suurusega hüppeid. “ (Vt. [27].)

Kogu see pikk sissejuhatav lõik pärineb Gerhard Rägo 1962. aasta õpikust „Kõrgem Matemaatika I“.

Võib väita, et pea eranditult on matemaatika (looduse, universumi) tegelikkuse kirjeldamise **mudeliks**. See kuidas asi tegelikult on, see on kas liiga keeruline või me seda lihtsalt ei tea. Võtame näiteks maakera. On selge, et kõige lihtsam on maakera modelleerida kera abil, s.t. matemaatilise punktihulga

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

abil. Üldiselt me teame, et maakera ei ole üldplaanis päris kerakujuline ja seepärast kasutame täpsemates mudelites kera asemel ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Palju tülikam oleks arvestada igat maakera kumerust ja nõgusust, igat järve, orgu ja küngast ... lõpuks veel igat jooksvat oravat, hüppavat känguru ja õitsvat karuohakat. Muidugi, me peame sellega arvestama, kui hakkame tegelema mõne maakera lokaalse piirkonnaga, kuid teatud mõõtkavast alates on ellipsoid väga mugav ja piisavalt lihtne matemaatiline mudel.

Eelnevalt esitasime Gerhard Rägo teksti pidevuse ja katkevuse kohta looduses. Meil tuleb siiski tõdeda, et tegelikult ei pruugi asi päris nii lihtne olla (kuid viimane ei sega meid omaette edasi toimetamast). On juba igivana küsimus: „kas näiteks aeg ja ruum on pidevad või diskreetsed?“ Peame muidugi märkima, et sellele küsimusele vastamiseks on esiteks vaja teada, mis aeg ja ruum üldse on. Täna sel päeval tuleb veel tõdeda, et tegelikult me seda ei tea. Me küll oletame ja arvame midagi, aga tõestada ei suuda.



Mida me teame on see, et igapäevaelus mõistame aja all midagi, mida saab mõõta, mis peaks näitama, kui pikk viivitus on kahe sündmuse vahel, kuid mida me tegelikult mõõdame, see ei pruugi olla aeg ise, vaid jällegi mingi lihtsustus, mingi sobiv mudel. Matemaatikas kasutame me aja esitamiseks enamasti pidevat mudelit, nii on lihtsam. Analoogiline on olukord teiste füüsikaliste suurustega. Pidevus (matemaatilises mõttes) on mugav ja hea omadus, millega on lihtsam töötada ja sellepärast kasutame seda seal, kus vähegi võimalik.

Järgnevalt anname aga paar näidet selle kohta, et küsimused tüüpi „kas aeg ja ruum on pidevad või diskreetsed?“, võivad osutada väga rasketeks pähkliteks ja vastama asudes võime koguni sattuda igatsugu veidrate vastuoludeni. Vanast kreekast on pärit „kurikuulsad“ **Zenon**’i paradoksid. Peab tõdema, et tegelikult need esmapilgul naiivseõitu paradoksid, arutlused, järeldused ei pruugi üldsegi olla naiivsed, vaid nad võivad sisaldada maailma kohta midagi väga olulist, midagi väga fundamentaalset ja seepärast tuleks neisse suhtuda väga ettevaatlikult ja pigem suure lugupidamisega. Zenon’i paradokse ei ole siiani päris täielikult (rahuldavalt) ära seletatud või põhjendatud. On küll leitud osalisi (kohati siiski „arvatavaid“) lahendusi paradoksidest esinevatele vastuoludele, arutlusvigadele, väitevigadele, loogikavigadele, kategooriavigadele jne., kuid enamasti ühe probleemi lahendamine ei ole aidanud kuidagi kaasa mingi teise probleemi lahendamisele (tihti ühes ja samas paradoksis). Meie eesmärk ei ole anda vastuseid, vaid juhtida tähelepanu, et sellised probleemid on olemas.

Järgnevad Zenon’i apooriad juhivad meie tähelepanu sellele, et leiab loogilisi näiteid (mis küll tegelikult ei pea vastama tõele), et

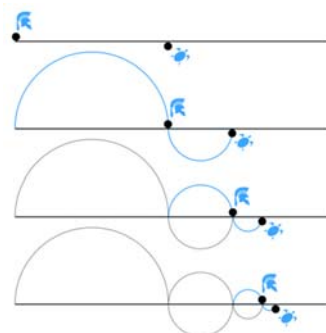
1. ruum ei saa olla pidev;
2. ruum ei saa olla diskreetne;
3. aeg ei saa olla pidev;
4. aeg ei saa olla diskreetne.

Ups ... kas need viimased ei ole mitte üksteisele vasturääkivad?

**Achilleus ja kilpkonn.** Achilleus annab kilpkonnale edumaad 10 meetrit. Kui Achilleus jookseb kilpkonnast 10 korda kiiremini, siis millal saab Achilleus kilpkonna kätte?

Võib hakata arutlema, et kui Achilleus on jooksnud 10 meetrit, siis kilpkonn on edasi läinud 1 meeter, kui Achilleus jookseb veel selle ühe meetri, siis on kilpkonn edasi läinud 10 cm, Achilleus jookseb 10 cm, aga kilpkonn on samas edasi läinud 1 mm jne. jne. jne.

Zenon Eleast oli vanakreeka filosoof Elea koolkonnast, Parmenidese õpilane (u. 5. sajand e.Kr.).



Joonis: Wikipedia.

Täiesti loogiline arutelu annab suhtelisel rumala tulemuse, et Achilleus ei saagi kunagi kilpkonna kätte. Võib täie kindlusega väita, et Zenon teadis ise ka, et tegelikult reaalelus saab Achilleus kilpkonna kätte (seda olevat talle isegi otse demonstreeritud). Küsimus ei ole ju selles, küsimus ei ole ka ju nüüdisaja füüsikas, ei Newton'is ega Einstein'is. Küsimus on pigem, et täiesti loogiliselt arutledes jõuame me valele tulemusele (igapäeva elu mõttes). Järeldus saab olla vaid üks: kuskil on midagi valesti, kuid nüüd tulebki tegelik „miljoni dollari küsimus“, et kuskohas täpselt on midagi valesti (kusjuures, kas meie arutelus, eeldustes, järeldustes või hoopis reaalses elus ja mis täpsemalt on valesti)?

**Dihhotoomia paradoks.** Tuntud on ka järgmine paradoks, mille sõnastame veidi sobilikumaks. Tudeng tahab tulla loengule, kuid selleks peab ta esiteks läbima pool teed kodust loengusaali. Selleks, et läbida see pool teed, peab ta esiteks läbima sellest pool ehk neljandiku. Esimese neljandiku läbimiseks tuleks siiski esmalt läbida kaheksandik jne. jne. Sedasi arutledes võime järeldada, et tudeng ei saagi loengusaali poole liikuma hakata ... Jällegi täielikult loogiline arutelu viis meid täiesti „napaka“ tulemuseni. Aga miks? Selleks et läbida terve distants, tuleb ju esmalt läbida pool. See argument peaks kehtima ka neljandiku ja kaheksandiku jne. kohta (siin ei tundu mingit vastuolu). Aga millise distantsi kohta see siis täpsemalt enam ei kehti?

**Noole paradoks.** Kujutleme, et nool lendab õhus märklaua poole (isegi, kui see läheb sellest täielikult mööda). Kui aeg oleks pidev, siis peaks eksisteerima kindel ajahetk  $t$ , mil nool mingis kindlas ruumipunktis ei liigu, s.t. on täielikult paigal, nagu foto peal. No aga siis peaks mingi teise ruumipunkti kohta samuti leiduma ajahetk, mil nool on paigal. Kui aeg oleks pidev, siis aeg peaks kulgema selliselt, et nool oleks **igal ajahetkel** paigal ja mittemingit liikumist ei saa eksisteerida (pideva aja korral saab ajahetkede vahel olla vaid mingi teine ajahetk ja seega on nool koguaeg paigal). Nüüd saime targemaks, järelikult aeg ehk ei ole pidev, kas ta siis on diskreetne?

**Staadioni paradoks.** Staadionil on kolm rivi (A,B,C) atleete. Olgu aeg ja ruum diskreetsed, s.t. ruumil on olemas väikseim osake (olgu see näiteks aatom või veel väiksem kvark, hadron, Higgs'i boson või misiganes muu osake, mida võib-olla ei ole veel avastatud) ja samuti on olemas väikseim ajaühik, midaiganes see täpselt tähendab. Igaljuhul, ajamomendid ei kulge pidevalt, vaid mingite hüpetega. Lihtsustavalt võtame atleetide asemel kolm rivi „osakesi“. Olgu rida B esimesest reast ühiku võrra vasakul ja rida C ühiku võrra paremal.

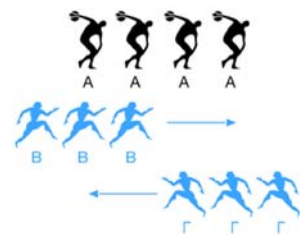


Allikas:  
<http://en.citizendium.org/wiki>

“Zeno of Elea. How come you never take me out anymore?”  
 “Why bother ... movement is a logical impossibility.”



Joonis: Wikipedia.



Joonis: Wikipedia.

$$\begin{array}{cccc}
 & A & A & A \\
 B & B & \mathbf{B} & \rightarrow \\
 \leftarrow & \mathbf{C} & C & C
 \end{array}$$

Liikugu teine rivi paremale ja viimane vasakule. Esimese jätame paigale.

$$\begin{array}{ccc}
 A & A & A \\
 B & B & \mathbf{B} \\
 \mathbf{C} & C & C
 \end{array}$$

Kõik kolm rivi reastuvad vertikaalselt, B ja C rida on liikunud 1 ruumiühikut ühes ajaühikus. Kui vaatleme aga B rea viimast ja C rea esimest aatomit, siis nemad on üksteise suhtes liikunud samal ajal kaks ruumiühikut (ühe ajaühikuga). Ka teisiti, B rea viimane element on samal ajal möödunud kahest C rea elemendist. Omadusest  $1 = 2$  väitis Zenon, et sellist liikumist ei saa toimuda. Seda vastuolu seletatakse tavaliselt relatiivse kiiruse abil (kiirus on erinev liikuva objekti ja seisva objekti suhtes), mis parandab ära vastuolu meie algversioonis. Küll aga ei seleta relatiivne kiirus ära seda, et kui ruum ja aeg on diskreetsed, siis kuidas toimus viimase B liikumine näiteks keskmise C suhtes. Kuna ruum ja aeg on diskreetsed, siis ei saa viimane B ja teine C ühes veerus rivistuda, kuna mingit vahepealset „poolikut“ positsiooni ega poolikut aega ei tohi olla.

$$\begin{array}{cccc}
 & A & A & A \\
 B & B & \mathbf{B} & \rightarrow \\
 \leftarrow & C & \mathbf{C} & C
 \end{array}$$

Järelikult peaks nende vaheline liikumine toimuma üheaegselt, hüppega, kusjuures üksteisest möödaliikumist (vahepealse asendi mõttes) ei ole. Kuidagi saavad viimane B ja teine C üksteisest mööda nii, et lõpuks on viimane B möödunud kahest C rea aatomist ja ainult ühest A rea aatomist. Paneme tähele, et viimane B peab keskmisest C-st möödumiseks ühel sammul mööduma korraga kahest C aatomist (kuna väiksemat ruumi- ja ajaühikut eelduse järgi ei ole). See viib meid vägisi selle juurde, et mingis süsteemis on viimase B kiiruseks 2 korda (aatomit/ajaühikus), mis annab uueks ajaühikuks poole esialgsest. Mitte, et seda oleks nüüd päris võimatu ette kujutada, aga mõtlemisainet siin on ...

Zenon'i apooriad justkui näitavad, et liikumist ei olegi olemas. Zenon'i paradoksidest on läbivaks teemaks see, kuidas lõpetada tegevust lõpliku ajaga, kui tuleb teha lõpmatult palju samme? Huvi korral võib lisaks lugeda näiteks järgmisi materjale.

<http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/#Arr>

<http://philosophy.uchicago.edu/faculty/files/davey/Stadium.pdf>

<https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/>

<SpaceTimeMotion/STM.html>



# Lisa F

## Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal

---

F.1 Ilmutamata funktsiooni $F(x, y)$ diferentseerimine *	313
F.2 Parameetrilisel kujul antud funktsiooni diferentseerimine *	316
F.3 Diferentseeruv funktsioon *	319
F.4 Logaritmiline diferentseerimine *	321
F.5 Kõrgemat järku diferentsiaal *	322
F.6 Tuletise erinevad tähistused *	324
F.7 Ligikaudne maksimaalse vea leidmine *	326
F.8 Pöördfunktsiooni tuletis *	328

---

### F.1 Ilmutamata funktsiooni $F(x, y)$ diferentseerimine \*

Mõnikord on funktsioon ette antud ilmutamata kujul (näiteks ühikringjoon  $x^2 + y^2 = 1$ ). Tasandil antud joon on üldiselt antud kujul

$$F(x, y) = 0. \tag{F.1}$$

Märgime, et iga kahte muutujat sisaldavat võrrandit on alati võimalik esitada ilmutamata funktsiooni kujul  $F(x, y) = 0$ , sealhulgas ilmutatud kujul antud funktsiooni  $y = f(x)$  võib kirjutada kui  $y - f(x) = 0$ . Mitte alati ei ole võimalik võrrandist  $F(x, y) = 0$  elementaarfunktsioonide abil ilmutatud funktsiooni  $y = f(x)$  välja eraldada.

Kui me tahame teada tasandil oleva joone muutumise kiirust (või siis puutujasirge tõusu), siis peaksime leidma  $y'(x)$ . Osutub, et ilmutamata kujul antud funktsioonide korral on seda võimalik teha üsna lihtsalt.

1. Mõtleme muutujast  $y$  kui argumendist  $x$  sõltuvast suurusel, s.t  $y = y(x)$  ja kirjutame

$$F(x, y(x)) = 0. \quad (\text{F.2})$$

2. Diferentseerime võrduse  $F(x, y(x)) = 0$  mõlemat poolt muutuja  $x$  järgi.
3. Saadud võrrandisse  $\frac{dF(x, y(x))}{dx} = 0$  tekib liige  $y'(x)$ , mille kordajad kogume kokku ja avaldame otsitud tuletise  $y'(x)$ .

### Märkus F.1

Joone puutuja mõiste jääb siin ikkagi samaks, mis oli ilmutatud funktsiooni  $y = f(x)$  korral. Kui  $y'(x)$  tuleb  $\pm\infty$ , siis puutujasirge on risti  $x$ -teljega. Kui  $y'(x) = 0$ , siis puutujasirge on paralleelne  $x$ -teljega. Kui tekib määramatus  $\frac{0}{0}$ , siis enamasti tähendab see, et joon löikab iseennast.

**Näide F.1** Leiame ühikringjoone  $x^2 + y^2 = 1$  puutuja punktis  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ . Selleks kirjutame

$$x^2 + y^2(x) - 1 = 0.$$

Diferentseerime seda võrrandit muutuja  $x$  järgi. Sel juhul liitfunktsiooni tuletise leidmise omadusest saame

$$2x + 2y(x) y'(x) = 0$$

või siis Leibniz'i tähistuses detailideni läbi tehes

$$\frac{dx^2}{dx} + \frac{dy^2}{dx} - \frac{d(1)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + 2y y' = 0.$$

Saame, et

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Punktis  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$  on puutujasirge tõusuks  $y'(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = \frac{3}{4}$  ja puutujasirge võrrand ise on kujul

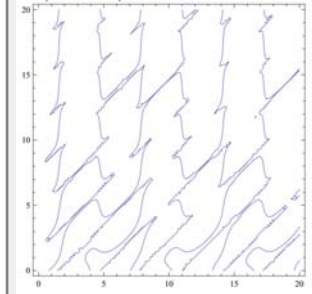
$$y + \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \left( x - \frac{3}{5} \right).$$

◇ ◇ ◇

Ilmutamata kujul antud funktsioonid (seosed) võivad olla väga keerulised, näiteks

$$x^{-y} + y \cos x - \tan(x - y) = 0$$

graafik on kujul



Allikas: [4]

**Ülesanne.** Leida ilmutamata funktsiooni

$$2y^3 + xy + 1 = 0$$

tuletis  $\frac{dy}{dx}$  ja  $\frac{dx}{dy}$ .



**Näide F.2** Leiame seosega

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

antud joone puutuja punktis  $A(2, 4)$ . Selleks kirjutame kujul

$$x^3 + y^3(x) - 9xy(x) = 0.$$

Diferentseerime viimast võrrandit muutuja  $x$  järgi

$$3x^2 + 3y^2(x) y'(x) - 9y(x) - 9x y'(x) = 0.$$

Saame, et

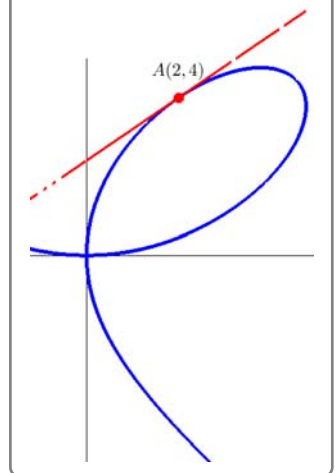
$$y' = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}.$$

Punktis  $A(2, 4)$  on puutujasirge tõusuks  $y'(2, 4) = \frac{4}{5}$  ja puutujasirge võrrand ise on kujul

$$y - 4 = \frac{4}{5}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Toodud joont nimetatakse ka Descartes'i leheks (*Descartes Folium*, 1630ndatest).



**Näide F.3** Leiame ilmutamata funktsiooni

$$2x^2 + 3y^2 = 6$$

teise tuletise  $y''(x)$ . Esiteks diferentseerime algvõrrandit

$$4x + 6y y' = 0.$$

Võiksime avaldada tuletise ning seejärel diferentseerida, kuid ilma selleta on isegi lihtsam. Seega, diferentseerime hoopis viimast võrrandit

$$2 + 3(y')^2 + 3y y'' = 0,$$

millest avaldame

$$y'' = -\frac{2 + 3(y')^2}{3y}.$$

◇ ◇ ◇

Asendades 1. järku tuletise, on võimalik kogu avaldist vajaduse korral lihtsustada,

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2 + 3\left(-\frac{2x}{3y}\right)^2}{3y} \\ &= -\frac{4}{3y^3}. \end{aligned}$$

**Märkus F.2**

Näidetest võib märgata, et ilmutamata kujul antud seosega  $F(x, y) = 0$  leitud funktsiooni  $y = y(x)$  tuletise võib leida valemist

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \tag{F.3}$$

kus  $F_x$  tähistab avaldisest  $F(x, y)$  leitud tuletist muutuja  $x$  järgi (sel juhul  $y$  käitub kui konstant) ja  $F_y$  tähistab avaldisest  $F(x, y)$  leitud tuletist muutuja  $y$  järgi (sel juhul  $x$  käitub kui konstant), vt. ka [22], lk. 267.

## F.2 Parameetrilisel kujul antud funktsiooni diferentseerimine \*

Vaatleme juhtu, kus tasandiline joon on antud parameetrilisel kujul

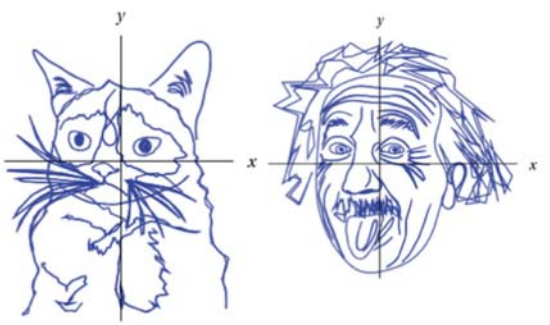
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in T. \quad (\text{F.4})$$

Praktikas on parameetri rollis tihti aeg  $t$ .

Näiteks, raadiusega  $r > 0$  oleva ringjoone saab esitada kujul

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Või siis hoopis arvuti poolt koostatud joonised (millele on leitud ka parameetrilised võrrandid).



Allikas: <http://io9.com/these-portraits-were-drawn-with-mathematical-equations-470859735>

Ka siin oleme huvitatud joone puutujast või siis joone muutumise kiirusest argumenti  $x$  või  $y$  järgi.

Sellist joont ei saa esitada ühe ilmutatud funktsiooniga. Samuti on raske kasutada mitut erinevat funktsiooni (kuigi on ilmselt võimalik). Küll aga on tihti tasandilist joont lihtsam kujutada parameetrilisel kujul kahe matemaatilise seose abil.

### Lause F.1

Parameetrilise joone (F.4) puutuja tõus  $y'(x)$  punktis  $(x(t), y(t))$  leitakse valemiga

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad (\text{F.5})$$

Tõestus. Formaalselt saab valemi tuletada liitfunktsiooni tuletise abil

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Pöördfunktsiooni abil tuletamine on toodud õpikus [22]. □

### Märkus F.3

Parameetrilise joonega (F.4) antud funktsiooni  $y(x)$  teine tuletis  $y''(x)$  punktis  $(x(t), y(t))$  leitakse valemiga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{dy'(x)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'(x)}{x'(t)}. \quad (\text{F.6})$$



**Näide F.4** Osake liigub ajas  $t$  mööda ühikringjoont

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 1000].$$

Leida joone muutumise kiirus  $y'(x)$  ja kiirendus  $y''(x)$  muutuja  $x$  suhtes.

Kirjutame välja diferentsiaalid aja  $t$  järgi

$$dx = d(\cos t) = -\sin t dt, \quad dy = d(\sin t) = \cos t dt.$$

Antud juhul võib diferentsiaale kasutada kui arve

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t dt}{\sin t dt} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t.$$

Leiame teise tuletise

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(-\cot t)}{dx} = -\frac{-\frac{1}{\sin^2 t} dt}{-\sin t dt} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Kuna  $y = \sin t$ , siis saab vastused esitada ka kujul

$$y'(x) = -\frac{x}{y}, \quad y''(x) = -\frac{1}{y^3}.$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leida parameetrilise joone

$$x = 0.8 t^{5/2},$$

$$y = 1 - t^2$$

muutumise kiirus  $y'(x)$  ja muutumise kiirendus  $y''(x)$  hetkel  $t = 2$ .

**Ülesanne.** Leida parameetrilise joone

$$x = t - \sin \theta,$$

$$y = 1 - \cos \theta$$

puutuja tõus  $y'(x)$  nurga  $\theta = \frac{\pi}{3}$  korral.

**Märkus F.4**

Levinud **viga** on Leibniz'i tähistuses teise tuletise

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

leidmine eraldi liikmete  $d^2y$  ja  $dx^2$  jagatisest, kui  $x$  ei ole sõltumatu muutuja, vaid esitub liitfunktsioonina. Näites 9.7 saime, et

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Leiame eraldi

$$d^2y = y''(t) dt^2 = -\sin t dt^2, \quad dx^2 = (-\sin t dt)^2 = \sin^2 t dt^2.$$

Siit jagatis

$$\frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{-\sin t dt^2}{\sin^2 t dt^2} = -\frac{1}{\sin t} = -\frac{1}{y}.$$

Näeme, et saadud tulemus ei ühti viimases näites 9.7 saadud tulemusega.

**Näide F.5** Osake liigub ajas  $t$  mööda joont

$$\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 200].$$

◇ ◇ ◇

Leiame joone muutumise kiiruse  $y'(x)$  ja kiirenduse  $y''(x)$  muutuja  $x$  suhtes. Lihtne on välja kirjutada diferentsiaale aja  $t$  järgi

$$dx = d(e^{-2t}) = -2e^{-2t} dt, \quad dy = d(1 + 2t) = 2 dt.$$

Siit saame

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{2 dt}{-2e^{-2t} dt} = -e^{2t}.$$

Leiame teise tuletise

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(-e^{2t})}{dx} = -\frac{-2e^{2t} dt}{-2e^{-2t} dt} = e^{4t}.$$

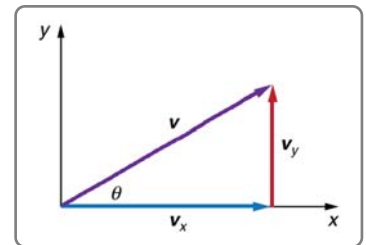
◇ ◇ ◇

Kui keha liigub mööda parameetrist joont koordinaatidega  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$ , siis selle keha kiirusvektori  $v$  komponendid  $v_x$  ja  $v_y$  avalduvad valemitega

$$v_x = x'(t), \quad v_y = y'(t), \quad (\text{F.7})$$

ning kogukiirus avaldub kiirusvektori  $v$  moodulina

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (\text{F.8})$$



**Näide F.6** Keha liigub trajektoiril, kus tema  $x$ - ja  $y$ -koordinaat muutuvad seaduste

$$x = 1 + 2t, \quad y = t^2 - 3t,$$

alusel. Leida keha kiirus, kiirendus ja suund hetkel  $t = 2$  sekundit.

Esiteks

$$v_x = x'(t) = 2, \quad v_y = y'(t) = 2t - 3.$$

Kuna hetkel  $t = 2$  on  $v_x = 2$  ja  $v_y = 1$ , siis kogukiirus

$$|v| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2.24 \text{ m/s}.$$

Analoogiliselt kiirustega leiame kiirenduse komponendid

$$a_x = v'_x(t) = 0, \quad a_y = v'_y(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad |a| = \sqrt{0 + 4} = 2 \text{ m/s}^2.$$

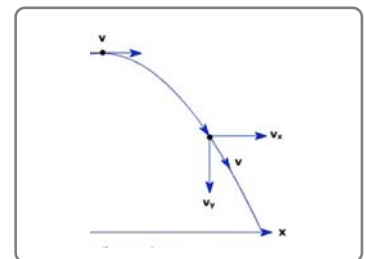
Liikumise suund leitakse liikumisvektori komponentide järgi (analoogiline kompleksarvude teemaga)

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 26.6^\circ.$$

Tekib küsimus, mis asi on siin aga kiirus  $y'(x)$ ? Võime selle ka leida

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇



Näeme, et  $y'(x)$  on liikumissuuna tõusnuruga tangens. Viimane ei ütle meile keha enda liikumiskiiruse kohta midagi, ta kirjeldab keha liikumise **trajektoori** muutumiskiirust antud punktis.

Tuletised  $v_x = x'(t)$  ja  $v_y = y'(t)$  aga iseloomustavad **keha** horisontaal- ja vertikaalsuunalist kiirust. Viimaste abil saab leida keha kiiruse  $v$  enda.

## F.3 Diferentseeruv funktsioon \*

### Definitsioon F.1

Kui piirprotsessis  $x \rightarrow a$  lõpmata väikeste funktsioonide  $\alpha = \alpha(x)$  ja  $\beta = \beta(x)$  korral

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

siis ütleme, et  $\alpha$  on piirprotsessis  $x \rightarrow a$  kõrgemat järku lõpmata väike kui  $\beta$ . Kirjutame  $\alpha = o(\beta)$  ( $\alpha$  on väike  $o(\beta)$ ).

Lihtsustatult võib öelda, et kõrgemat järku lõpmata väike suurus  $\alpha$  teise suuruse  $\beta$  suhtes tähendab, et  $\alpha$  läheb nulli oluliselt kiiremini, kui  $\beta$ .

### Näide F.7

Protsessis  $x \rightarrow 0$  funktsioon  $\alpha(x) = x^2$  on kõrgemat järku lõpmata väike funktsiooni  $\beta(x) = x$  suhtes, kuna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

◇ ◇ ◇

### Definitsioon F.2

Funktsiooni  $y = f(x)$  nimetatakse diferentseeruvaks punktis  $x$ , kui selle funktsiooni muut

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

avaldub kujul

$$\Delta y = A(x) \Delta x + \alpha, \quad \alpha = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (\text{F.9})$$

Siin funktsioon  $A = A(x)$  sõltub punktist  $x$ , ei sõltu aga  $\Delta x$  valikust.

### Märkus F.5

Funktsiooni diferentseerumine punktis  $x$  tähendab ühtlasi seda, et tema graafikul on punktis  $x$  olemas puutuja, mis ei ole risti  $x$ -teljega (puutuja võrrand oli teatavasti  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ , mis lühemalt näeb välja kui  $\Delta y = f'(x_0) \Delta x$ ).

Osutub, et funktsiooni diferentseeruvus (punktis  $x$ ) on samaväärne selle funktsiooni lõpliku tuletise olemasoluga punktis  $x$ .

### Teoreem F.1

[31]. Funktsioon  $y = f(x)$  on diferentseeruv punktis  $x$  parajasti siis, kui eksisteerib lõplik tuletis  $f'(x)$ .

Varem tõime sisse diferentseerimise mõiste, viimane oli teatavasti funktsiooni tuletise leidmine. Käesolevas punktis läheneme diferentseeruvale funktsioonile veidi teise nurga alt.

Viimane on oluline mõningates teoreetilistes valdkondades, kus oluline on funktsiooni diferentseeruvus kui eraldi omadus (mille selgitamiseks ei ole alati tuletist ennast vaja leida).

*Tõestus.* Tarvilikkus. Olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv punktis  $x$ , s.t iga  $\Delta x \neq 0$  puhul võime seose (F.9) kirjutada kujul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) + \frac{\alpha}{\Delta x}, \quad \alpha = o(\Delta x).$$

Kui nüüd  $\Delta x \rightarrow 0$ , siis seose  $\alpha = o(\Delta x)$  põhjal kehtib  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$ , mistõttu eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x).$$

Tuletise definitsiooni põhjal  $f'(x) = A(x)$ .

Piisavus. Oletame, et eksisteerib lõplik tuletis  $f'(x)$ , s.t eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Viimane on samaväärne tingimusega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = o(1), \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Seega võime kirjutada, et

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(1)\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha,$$

kus  $\alpha = o(1)\Delta x = o(\Delta x)$ , kui  $\Delta x \rightarrow 0$ , mis tähendabki, et funktsiooni  $f$  on diferentseeruv kohal  $x$ .  $\square$

## F.4 Logaritmiline diferentseerimine \*

Logaritmilise diferentseerimise võtte on vältimatu  $[u(x)]^{v(x)}$  tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui  $f$  sisaldab palju korrutisi ja jagatise.

Olgu meil antud funktsioon  $y = f(x)$ . Leiame tuletise  $y'$  järgmiselt.

1. Kirjutame  $|y| = |f(x)|$ .

2. Võtame võrduse  $|y| = |f(x)|$  mõlemast poolest logaritmi,

$$\ln |y| = \ln |f(x)|.$$

3. Võtame mõlemast poolest tuletise,

$$\frac{1}{y} y' = (\ln |f(x)|) '.$$

4. Saadud seosest avaldame  $y'$ ,

$$y' = y (\ln |f(x)|) '. \quad (\text{F.10})$$

**Näide F.8** Leiame funktsiooni  $y = x^x$  tuletise,  $x > 0$ . Kirjutame

$$\ln |y| = \ln |x|^x = x \ln |x|.$$

Siit

$$\frac{1}{y} y' = (x \ln |x|) '.$$

Seega

$$y' = x^x (\ln |x| + 1).$$

◇ ◇ ◇

**Näide F.9** Leiame funktsiooni  $y = (\sin x)^{\cos x}$  tuletise. Kirjutame

$$\ln |y| = \ln |\sin x|^{\cos x} = \cos x \ln |\sin x|.$$

Siit

$$\frac{1}{y} y' = (\cos x \ln |\sin x|) '.$$

Seega

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left( -\sin x \ln |\sin x| + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right).$$

◇ ◇ ◇

**Näide F.10** Leiame funktsiooni

$$y = \frac{\sqrt[4]{x+1} (x^7+8)^{12} (x+15)^2}{15 \sqrt{x^2+1}}$$

◇ ◇ ◇

**Ülesanne.** Leida funktsiooni

$$(x+1)^{x^2-1}$$

tuletise. Kirjutame

$$\ln |y| = \frac{1}{4} \ln |x+1| + 12|x^7+8| + 2 \ln |x+15| - \ln 15 - \frac{1}{2} \ln |x^2+1|.$$

Seega

$$y' = y \left( \frac{1}{4(x+1)} + \frac{84x^6}{x^7+8} + \frac{2}{x+15} - \frac{x}{x^2+1} \right).$$

◇ ◇ ◇

## F.5 Kõrgemat järku diferentsiaal \*

Funktsiooni  $y = f(x)$  diferentsiaal  $dy$  esitub teatavasti valemiga

$$dy = f'(x) dx,$$

kusjuures üldjuhul  $dy = dy(x, dx)$ . Kui fikseerime argumenti muudu  $\Delta x = dx$ , siis  $dy$  on argumenti  $x$  funktsioon (sisuliselt  $y'(x)$  korda reaalarv  $dx$ ). Kui see funktsioon on punktis  $x$  diferentseeruv, siis saame omakorda leida diferentsiaali  $d(dy)$ , mida nimetatakse funktsiooni  $f$  teist järku (teiseks) diferentsiaaliks punktis  $x$  ja tähistatakse sümboliga  $d^2y$ , seega

$$d^2y = d(dy).$$

Analoogselt jätkates, kolmandat järku diferentsiaal  $d^3y = d(d^2y)$  ja  $n$ -järku diferentsiaal

$$d^n y = d(d^{n-1}y). \quad (\text{F.11})$$

### Lause F.2

Kui  $x$  on sõltumatu muutuja ja funktsioonil  $y = f(x)$  eksisteerib lõplik tuletis  $f^{(n)}(x)$ , siis kehtib valem

$$d^n y = f^{(n)}(x) (dx)^n. \quad (\text{F.12})$$

*Tõestus.* Skemaatiliselt saame kasutada matemaatilist induktsiooni. Esiteks märgime, et valem on tõene  $n = 1$  korral (diferentsiaali definitsioonist). Oletame, et valem kehtib  $n - 1$  korral ( $n > 1$ ). Näitame, et siis kehtib valem ka  $n$  korral. Kirjutame

$$\begin{aligned} d^n y &= d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x) (dx)^{n-1}) \\ &= (dx)^{n-1} df^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(x) d(dx)^{n-1}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et  $d(dx)^{n-1} = 0$ , kui  $n > 1$ , sest et argumenti muut  $\Delta x = dx$  oli meil fikseeritud ja  $dx$  käitub  $x$  suhtes kui konstant. Seega

$$d^n y = (dx)^{n-1} d(f^{(n-1)}(x)) = (dx)^{n-1} f^{(n)}(x) dx = f^{(n)}(x) (dx)^n.$$

□

*Two statisticians were traveling in an airplane from LA to New York. About an hour into the flight, the pilot announced that they had lost an engine, but don't worry, there are three left. However, instead of 5 hours it would take 7 hours to get to New York.*

*A little later, he announced that a second engine failed, and they still had two left, but it would take 10 hours to get to New York. Somewhat later, the pilot again came on the intercom and announced that a third engine had died. Never fear, he announced, because the plane could fly on a single engine. However, it would now take 18 hours to get to new York.*

*At this point, one statistician turned to the other and said, "Gee, I hope we don't lose that last engine, or we'll be up here forever!"*

**Märkus F.6**

Kui  $x$  on sõltumatu muutuja, siis kirjutatakse  $(dx)^n$  lühidalt kui  $dx^n$ .  
Valemist (F.12) näeme, et

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad (\text{F.13})$$

s.t Leibniz'i tähistust  $\frac{d^n y}{dx^n}$  funktsiooni  $n$ -järku tuletise jaoks (sõltumatu muutuja järgi) võib vaadelda kui harilikku murdu.

Seni vaatlesime juhtu, kus  $y = f(x)$  ja  $x$  on sõltumatu muutuja. Sel juhul kehtib  $dx = \Delta x$ . Vaatleme nüüd olukorda, kus  $y = f(x)$  ja  $x = \varphi(t)$ , s.t  $y = F(t) = f(\varphi(t))$ . Kuna  $t$  on sõltumatu muutuja, siis

$$dy = dF = F'(t) dt, \quad dx = \varphi'(t) dt,$$

mistõttu liitfunktsiooni tuletise leidmise reegli põhjal

$$dy = F'(t) dt = f'(x) \varphi'(t) dt = f'(x) dx.$$

Seega avaldub funktsiooni  $y = f(x)$  diferentsiaal kujul

$$dy = f'(x) dx$$

sõltumata sellest, kas  $x$  on sõltumatu muutuja või omakorda mingi argumenti  $t$  funktsioon.

**Märkus F.7**

Õeldakse, et esimest järku diferentsiaali kuju on invariantne muutujavahetuse suhtes.

**Märkus F.8**

Kõrgemat järku diferentsiaali kuju ei ole invariantne muutujavahetuse suhtes. Leiame  $d^2y$ , kui  $y = f(x)$  ja  $x = \varphi(t)$ ,

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) dx) = d(f'(x)) dx + f'(x) d(dx)$$

ja siit

$$d^2y = f''(x) dx dx + f'(x) d^2x = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x.$$

Kirjutame tulemuse eraldi välja

$$d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x. \quad (\text{F.14})$$

Valem (F.12) enam ei kehti.

*Theorem: Every positive integer is interesting.*

*Proof. Assume towards a contradiction that there is an uninteresting positive integer. Then there must be a smallest uninteresting positive integer. But being the smallest uninteresting positive integer is interesting by itself. Contradiction!*

*Hello, this is probably 438-9012, yes, the house of the famous statistician. I'm probably not at home, or not wanting to answer the phone, most probably the latter, according to my latest calculations. Supposing that the universe doesn't end in the next 30 seconds, the odds of which I'm still trying to calculate, you can leave your name, phone number, and message, and I'll probably phone you back. So far the probability of that is about 0.645. Have a nice day.*

**Näide F.11** Vaatleme funktsiooni  $y = x^2$ , kus  $x = t^3$ . Sel juhul näeme lihtsalt, et  $y = t^6$  ja

$$dy = y'(t) dt = 6t^5 dt.$$

Esimest järku diferentsiaali invariantus tähendab, et võiksime leida eraldi

$$dy = y'(x) dx = 2x dx$$

ja asendada  $dy$  avaldisse  $x = t^3$  ning  $dx = 3t^2 dt$ ,

$$dy = 2x dx = 2t^3 3t^2 dt = 6t^5 dt.$$

Leiame teist järku diferentsiaali. Kuna  $t$  on sõltumatu muutuja, siis võime leida

$$d^2y = y''(t) dt^2 = 30t^4 dt^2.$$

Märgime, et

$$dx = 3t^2 dt.$$

Asetades vastavad väärtused valemisse (F.14), kirjutame

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x = 2(3t^2 dt)^2 + 2x(x''(t) dt^2) \\ &= 18t^4 dt^2 + 2t^3 6t dt^2 = 18t^4 dt^2 + 12t^4 dt^2 = 30t^4 dt^2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

## F.6 Tuletise erinevad tähistused \*

**Lagrange'i tähistus** on kujul  $f'(x)$ , mis on enim levinud matemaatikute hulgas. Siinjuures  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ja on üheselt selge, mida mõeldakse. Tähistuse puuduseks on liitfunktsiooni reegli “peidus” olek ja ranged operatsioonid diferentsiaalidega  $dx$ ,  $dy$  (käsitleme lähemalt Leibniz'i tähistuse juures).

**Newton'i tähistus** on kujul  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ , mis on enim levinud mehaanikas, füüsikas. See tähistus on tüüpiliselt kasutusel tuletise võtmisel aja  $t$  järgi. Enamasti kasutatakse ainult esimest ja teist järku tuletise tähistamiseks.

**Leibniz'i tähistus** on kujul  $\frac{dy}{dx}$ , mis on enim levinud füüsikas ja teistes teadustes, kuid on kohati põlu alla sattunud mõnedes matemaatika harudes. Leibniz'i kuju abil on lihtne meenutada liitfunktsiooni  $y(u(x))$  tuletist argumenti  $x$  järgi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Toome siinkohal mõningad head ja halvad küljed Leibniz'i tähistuse kohta:



- Paljud füüsikud käsitlevad tihti suurusi  $dy$  ja  $dx$  kui väga väikesi suurusi (vt. [5]), kuid seejuures selliseid, mis on reaalselt olemas. Seega tihti kujutatakse, et funktsiooni muut  $\Delta y \approx dy$  ja sel juhul  $\frac{dy}{dx}$  käitub kui kahe väikese suuruse jagatis  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  (s.t jagatis reaalarvude vahel). Viimane mõtteviis on praktiliste ülesannete lahendamisel väga efektiivne (eriti, arvestades diferentsiaali rakendusi), lubades vahele jätta mitmed matemaatilised finessid, kuid võib saatuslikuks saada mõnes ebastandardises olukorras (toome näite kõrgemat järku diferentsiaalide juures).
- Saksa matemaatik ja filosoof Gottfried Wilhelm von Leibniz ise mõtles alguses suuruse  $dx$  all kui lõpmata väikest suurust, s.t midagi sellist nagu nullist erinevat suurust, mis on väiksem igast positiivsest reaalarvust (nn *infinitesimal*), kuid reaalselt sellist suurust ei eksisteeri (vt. [15]). Seega on  $dx$  Leibniz'i mõttes lõpmata väike fikseeritud positiivne suurus (kuid mitte arv !!!), midagi sellist nagu  $\frac{1}{\infty}$  (samuti sümbol, mitte arv). See viimane tekitab küsimusi, et mida siis tähendab suuruste  $dy$  ja  $dx$  jagatis, korrutis või summa diferentsiaalidega opereerimisel (need ei ole tehted arvude vaid sellisel juhul tehted algebraliste suuruste vahel)?

Eelnev mõtteviis sai Leibniz'i ajal suure kriitika osaliseks, kuna oli ju ka loogiliselt vastuoluline. Hiljem muutis Leibniz oma seletustes  $dx$  mõiste kui suuruseks, mis võib jõuda lõpmata lähedale nullile, kuid ei saa kunagi võrdseks nulliga. Viimane on ju tegelikult päris hästi kooskõlas piirväärtuse mõistega. Ilmselt mõtles midagi sellist ka Newton oma teoorias, kuid ei pannud seda kunagi päris selgelt kirja. Teatud etapil, enne kriitikut, ei pidanud kumbki suur teadlane seda ilmselt niiväga oluliseks.

- Matemaatilises mõttes tähistab kirjutis  $\frac{dy}{dx}$  diferentseerimisoperaatori  $\frac{d}{dx}$  rakendamist funktsioonile  $y = f(x)$ , s.t

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Viimases kirjutises loetakse  $\frac{dy}{dx}$  kui ühte kokkukuuluvat sümbolit ja mitte kui jagatist (suurustel  $dx$  ja  $dy$  ei ole selles kirjutises eraldi tähendust). Sellisel juhul diferentsiaali avaldis

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

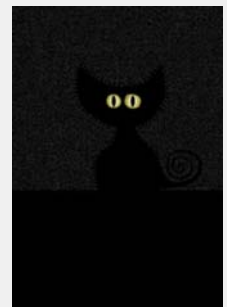
saadakse kui järeldus tuletise olemasolust ja mitte võrduse  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  läbi korrutamisest suurusega  $dx$ . Viimane näib norimisena, kuid matemaatika ja teised teadused ongi selles mõttes erinevad. Matemaatikas tuleb ette (vahel ka konstrueeritud) olukordi, kus analüüs peab olema rangelt täpne, et mitte saada valesid tulemusi.

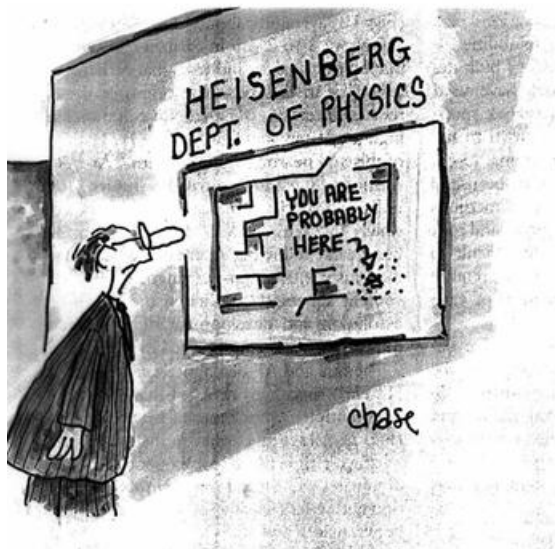
A mathematician, a theoretical economist, and an econometrician are asked to find a black cat (who doesn't really exist) in a closed room with the lights off.

The mathematician gets crazy trying to find a black cat that doesn't exist inside the darkened room and ends up in a psychiatric hospital.

The theoretical economist is unable to catch the black cat that doesn't exist inside the darkened room, but exits the room proudly proclaiming that he can construct a model to describe all his movements with extreme accuracy.

The econometrician walks securely into the darkened room, spends one hour looking for the black cat that doesn't exist and shouts from inside the room that he has caught it by the neck.





## F.7 Ligikaudne maksimaalse vea leidmine \*

Vaatleme olukorda, kus suurus  $x$  saadakse vahetult mõõtmise teel, suurus  $y$  aga arvutatakse valemist  $y = f(x)$ .

Olgu  $\Delta x$  suuruse  $x$  mõõtmisel tekkinud viga. Siis suuruse  $y$  viga on lihtsalt funktsiooni  $y$  muut  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$ .

Tavaliselt on meil teada mitte  $\Delta x$  ise, vaid suuruse  $x$  maksimaalne absoluutne viga  $\delta x$ , s.t. teame, et  $|\Delta x| \leq \delta x$ . Siis aga võime kirjutada

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x) \cdot \Delta x| \leq |f'(x)| \cdot \delta x.$$

Funktsiooni  $y = f(x)$  ligikaudne maksimaalne absoluutne viga  $\delta y$  on leitav valemiga

$$\delta y = |f'(x)| \cdot \delta x, \quad (\text{F.15})$$

kus  $\delta x$  on suuruse  $x$  maksimaalne absoluutne viga.

**Ülesanne.** Erinevate kuu-  
pide servi mõõdeti täp-  
susega  $a = 3.8 \pm 0.03$   
cm. Leidke kuubi välispin-  
na kogupindala  $S = S(a)$   
arvutamisel tehtud maxi-  
maalne absoluutne ja suhteline viga.

**Näide F.12** Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti mõõtmisel saadi kaatete pikkuseks  $a = 5.630 \pm 0.001$  cm, ([31]). Kui täpselt saab selle põhjal arvutada kolmnurga pindala?

Et otsitav pindala  $S = \frac{1}{2}a^2$ , siis  $S'(a) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$  ja

$$|\Delta S| \approx |dS| \leq |S'(a)| \cdot \delta a = 5.630 \cdot 0.001 = 0.00563 \approx 0.006 \text{ cm}^2.$$

◇ ◇ ◇

**Näide F.13** Hõbedast kuubi serv  $a$  mõõdeti 3.5 cm. Selle väärtuse abil arvutati kuubi ruumala  $V = a^3$  (hõbede kulu). Hiljem selgus, et mõõtmistulemus erines tegelikkusest  $\pm 0.02$  cm. Kui suur viga tehti hõbede kulu arvestamisel?

Leiame ligikaudu

$$|\Delta V| \approx |dV| = |V'(a) da| \leq |3a^2| \cdot 0.02 = 0.06 \cdot 3.5^2 = 0.735 \text{ cm}^3.$$

Viimast nimetatakse ka absoluutseks veaks. Tavaliselt huvitab meid lisaks viga protsentides. Leiame suhtelised vead (kasutame siin ainult positiivseid väärtusi). Esiteks kuubi külje mõõtmisel tehtud suhteline viga

$$\frac{da}{a} = \frac{0.02}{3.5} \approx 0.57\%$$

ja ruumala arvutamisel tehtud (ligikaudne) suhteline viga

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3a^2 \cdot 0.02}{a^3} = \frac{0.06}{3.5} \approx 1.71\%.$$

◇ ◇ ◇

## F.8 Pöördfunktsiooni tuletis \*

Pöördfunktsiooni tuletise leidmise näiteid vaatame praktikumis. See on kasulik teema, kuid eksamil seda eraldi ei küsita.

**Teoreem F.2**

Kui funktsioonil  $y = f(x)$  on olemas pöördfunktsioon  $x = \varphi(y)$  piirkonnas  $X$  ja eksisteerib lõplik tuletis  $\varphi'(y) \neq 0$ , siis eksisteerib lõplik tuletis  $f'(x)$  ning kehtib valem

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad (\text{F.16})$$

*Tõestus.* Kuna leidub lõplik tuletis  $\varphi'(y)$ , siis  $\varphi$  on pidev punktis  $y$  ja järelikult  $\Delta\varphi = \Delta x \rightarrow 0$ , kui  $\Delta y \rightarrow 0$ . Siinjuures funktsioonide üksühesusest tuleneb, et  $\Delta y \neq 0$ , kui  $\Delta x \neq 0$ . Järelikult võime kirjutada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

□

**Näide F.14**

Funktsioonid  $e^x$  ja  $\ln x$  on teineteise pöördfunktsioonid ( $x > 0$ ), s.t

$$y = \ln x, \quad x = e^y.$$

Leiame  $(\ln x)'$ , arvestades, et  $(e^y)' = e^y$ . Viimase teoreemi järgi

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide F.15**

Funktsioonid  $x^2$  ja  $\sqrt{x}$  on teineteise pöördfunktsioonid piirkonnas  $[0, \infty)$ ,

$$x = y^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

Leiame  $(\sqrt{x})'$ , arvestades, et  $(y^2)' = 2y$ . Viimase teoreemi järgi

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

◇ ◇ ◇

**Näide F.16**

Funktsioonid  $\sin x$  ja  $\arcsin x$  on teineteise pöördfunktsioonid, s.t

$$x = \sin y, \quad y = \arcsin x.$$

Leiame  $(\arcsin x)'$ , arvestades, et  $(\sin y)' = \cos y$ . Viimase teoreemi järgi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

◇ ◇ ◇

# Lisa G

## Tuletise rakendused

---

G.1 Taylor'i valem \* . . . . . 330

G.2 Piirväärtus funktsioonidest  $(f(x))^{g(x)}$  \* . . . . . 334

G.3 Newton'i meetod võrrandite ligikaudseks lahendamiseks \* . . . . . 335

---

## G.1 Taylor'i valem \*

Kas olete kunagi mõelnud, kuidas arvutada näiteks väärtust  $\sin(37.8^\circ)$  või  $\ln(12.678)$ ? Tõsi, te võite võtta kätte taskukalkulaatori või oma arvuti ja lasta tal arvutada, kuid sel juhul, mis moodi tema seda teeb? Millise eeskirja järgi neid väärtusi arvutatakse? Me oskame arve liita, lahutada. Me oskame neid näiteks korrutada. Seega  $x^3 - 2x$  arvutame näiteks kui  $x \cdot x \cdot x - 2 \cdot x$ . Võime tõdeda, et oskame arvutada mistahes polünoomi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

väärtust kohal  $x$ . Osutub, et keerulisemad funktsioonid annab teatavatel tingimustel samuti arvutada kuitahes täpselt polünoomide kaudu. Näiteks eksponentfunktsiooni  $e^x$  võib teatud täpsusega esitada kujul

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

Viimast on juba lihtne ise arvutada või siis arvuti jaoks "programmeerida".

Vaatleme funktsiooni  $f$ , mis on  $(n+1)$  korda diferentseeruv punkti  $a$  mingis ümbruses  $(a - \delta, a + \delta)$ ,  $\delta > 0$ . Moodustame polünoomi

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k \quad (\text{G.1})$$

või siis pikalt välja kirjutades

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (\text{G.2})$$

### Definitsioon G.1

Polünoomi

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k \quad (\text{G.3})$$

nimetatakse funktsiooni  $f$   $n$ -astme **Taylor'i polünoomiks** kohal  $a$ .

Siin  $P_n(x)$  on muutuja  $x$  suhtes  $n$ -astme polünoom, mis on arendatud  $(x-a)$  astmete järgi. Kerge on kontrollida, et kehtivad seosed

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Tähistame erinevuse  $\alpha_n(x) := f(x) - P_n(x)$ , millest  $f(x) = P_n(x) + \alpha_n(x)$ .

### Definitsioon G.2

Valemit

$$f(x) = P_n(x) + \alpha_n(x) \quad (\text{G.4})$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  Taylor'i valemiks, funktsiooni  $\alpha_n$  aga Taylor'i valemi jääkliikmeks.

Lõpetuseks toome ühe nalja.

Legendi järgi olevat loogik Bertrand Russell väitnud, et ta suudab tõestada ükskõik mida, kui võtta aluseks võrdus  $1 + 1 = 1$ .

Ühel päeval küsinud keegi ni-natark "Tõestage, et Te olete paavst". Russell mõtles natuke ja vastas "Mina olen üks ja paavst on üks. Seega, paavst ja mina oleme üks".

Käesolev peatüki materjal pärineb suuresti õpikust [31].

$k!$  on faktoriaal, mis leitakse seosega

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k.$$

Siinjuures  $0! := 1$ .

Nali. Mis on inseneride matemaatiline alusprintsip?

Igal funktsioonil on olemas Taylor'i rida, mis sisaldab vaid linearset liiget.

Jääkliige  $\alpha_n(x)$  näitab, kui suure vea me teeme, kui asendame funktsiooni  $y = f(x)$  tema Taylor'i polünoomiga  $y = P_n(x)$ .

**Teoreem G.1**

Kui funktsioon  $f$  on punkti  $a$  mingis ümbruses  $(n+1)$  korda diferentseeruv, siis kehtib funktsiooni  $f$  **Taylor'i valem** jääkliikmega Lagrange'i kujul:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k + \alpha_n(x), \quad (\text{G.5})$$

kus

$$\alpha_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x). \quad (\text{G.6})$$

*Tõestus.* Näitame, kuidas tuleb jääkliikme kuju. Seosest (G.4) järeldub, et funktsioonid  $\alpha_n(x), \alpha_n'(x), \dots, \alpha_n^{(n)}(x)$  on diferentseeruvad punkti  $a$  ümbruses ning

$$\alpha_n(a) = 0, \quad \alpha_n'(a) = 0, \quad \dots \quad \alpha_n^{(n)}(a) = 0.$$

Defineerime funktsioonid

$$\varphi_n(x) = (x-a)^{n+1},$$

siis ilmselt ka

$$\varphi_n(a) = 0, \quad \varphi_n'(a) = 0, \quad \dots \quad \varphi_n^{(n)}(a) = 0.$$

Kerge on veenduda, et funktsioonid  $\alpha_n, \alpha_n', \dots, \alpha_n^{(n)}$  ning  $\varphi_n, \varphi_n', \dots, \varphi_n^{(n)}$  täidavad Cauchy keskvärtusteoreemi eeldusi igal lõigul punkti  $a$  ümbruses  $(a-\delta, a+\delta)$ ,  $\delta > 0$ . Seetõttu võime kirjutada

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} &= \frac{\alpha_n(x) - \alpha_n(a)}{\varphi_n(x) - \varphi_n(a)} = \frac{\alpha_n'(x_1)}{\varphi_n'(x_1)} = \frac{\alpha_n'(x_1) - \alpha_n'(a)}{\varphi_n'(x_1) - \varphi_n'(a)} \\ &= \frac{\alpha_n''(x_2)}{\varphi_n''(x_2)} = \dots = \frac{\alpha_n^{(n)}(x_n)}{\varphi_n^{(n)}(x_n)} \\ &= \frac{\alpha_n^{(n)}(x_n) - \alpha_n^{(n)}(a)}{\varphi_n^{(n)}(x_n) - \varphi_n^{(n)}(a)} = \frac{\alpha_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi_n^{(n+1)}(x_{n+1})}, \end{aligned}$$

kus  $x_1$  asub vahemikus otspunktidega  $a$  ja  $x$ ,  $x_2$  asub vahemikus otspunktidega  $a$  ja  $x_1$  jne. Kuna  $\varphi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$  ja

$$\alpha_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x),$$

siis tähistades  $\xi = x_{n+1}$ , võime kirjutada

$$\frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{\alpha_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi_n^{(n+1)}(\xi)} \Leftrightarrow \frac{\alpha_n(x)}{\varphi_n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

millest saame seose

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1},$$

kus  $\xi$  on mingi punkt vahemikust otspunktidega  $a$  ja  $x$ . □

Järgnev lõik pärineb ümberjutustusena raamatust [7]. 1919. aastal Odessas füüsika professorina töötanud Igor Tamm (Nobeli laureaat 1958) jutustas järgmise loo.

Kuskil 1919. a. paiku jõudis ta Odessa lähedale punaste poolt okupeeritud külla. Tamm üritas välja selgitada, mitu kana ta saaks vahetada oma tosina hõbelusika vastu. Ta arreteeriti ühe Makhno (punastest eraldi võidelnud väepealik) salga liikme poolt.

Tamm viidi atamani juurde. Viimane oli habetunud ja kandis pikka karusnahkset mütsi, ümber keha oli seotud automaadi lindid koos paari käsigranaadiga. Ataman süüdistam Tamme kommunistlikus agitatsioonis, Emakese Ukraina rüvetamises ja nõudis surmanuhtlust. Tamm selgitas, et ta on kõigest Odessa Ülikooli professor ja tuli külasse toitu ostma. "Jama!" öelnud ataman: "Mis sorti professor sa õige oled?" Tamm vastanud alandlikult, et ta õpetab matemaatikat.

"Matemaatikat?" imestanud ataman ja küsinud: "Süis peaksid sa oskama n-liikmelise Maclaurin'i rea jääkliiget hinnata." Väriseva käega koostas Tamm püssitoru ees õige vastuse ja tal lasti minna. Senini ei ole teada, kes oli ataman, kellel olid teadmised ka kõrgemas matemaatikas.

**Märkus G.1**

Taylor'i valemi juures mõtleme kirjutise  $\xi \in (a, x)$  all seda, et  $\xi$  kuulub vahemikku otspunktidega  $a$  ja  $x$ , seega  $\xi \in (a, x)$  või  $\xi \in (x, a)$ . Lühiduse mõttes kirjutame neist vaid ühe.

**Märkus G.2**

Erijuhul  $a = 0$  saame Maclaurin'i valemi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x). \quad (\text{G.7})$$

**Näide G.1** Leiame funktsiooni  $f(x) = \sin x$  Taylor'i valemi punktis  $a = 0$  (Maclaurin'i valem). Kirjutame tuletised

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \dots,$$

millest

$$\begin{aligned} f'(0) &= \cos 0 = 1, & f''(0) &= -\sin 0 = 0, & f'''(0) &= -\cos 0 = -1, \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0, & f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1, & \dots \end{aligned}$$

Valemi (G.7) põhjal

$$\sin x = \sin 0 + (\sin 0)'x + \frac{(\sin 0)''}{2!} x^2 + \dots + \frac{(\sin 0)^{(n)}}{n!} x^n + \alpha_n(x),$$

kus

$$\alpha_n(x) = \frac{(\sin \xi)^{(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

Seega võime siinust arvutada valemi

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{(\sin 0)^{(n)}}{n!} x^n + \alpha_n(x).$$

abil. Kui võtta  $x = 1$  (mis asub päris kaugel punktist 0 ja  $n = 9$ ), siis saame

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0.84147101,$$

mis erineb arvutiga leitud väärtusest  $\sin 1 \approx 0.84147098$  suuruse  $3 \cdot 10^{-8}$  võrra. Jääkliiget ennast võime siin hinnata üpris jämedalt:

$$|\alpha_n(x)| = \left| \frac{(\sin \xi)^{(n+1)}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}, \quad |x| \leq 1,$$

millest

$$|\alpha_9(x)| \leq \frac{1}{10!} \leq 2.8 \cdot 10^{-7}, \quad |x| \leq 1.$$

Viimane tähendab, et  $-1 \leq x \leq 1$  korral võime siinuse väärtuse leida polünoomi  $P_9(x)$  abil nii, et viga ei ole suurem kui  $2.8 \cdot 10^{-7}$ .

◇ ◇ ◇

Brook Taylor (1685 - 1731) oli inglise matemaatik.



Brook Taylor. Allikas: Wikipedia

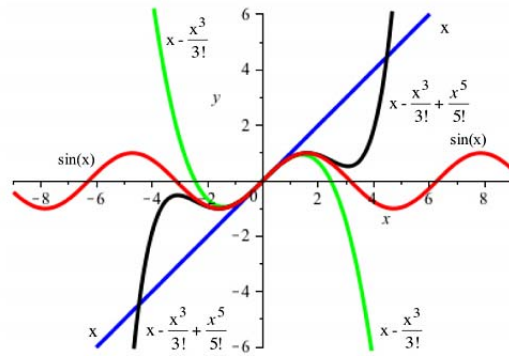
Taylor'i poolt tuletatud valem (1712) jäi kauaks suurema tähelepanuta, kuni J. L. Lagrange avastas valemi "tõelise" väärtuse.

Maclaurin'i nimi tuleb šoti matemaatiku Colin Maclaurin'i (1698 - 1746) nimest.



Colin Maclaurin. Allikas: Wikipedia





Allikas: [13]

Analoogiliselt võime leida, et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

◇ ◇ ◇

**Märkus G.3**

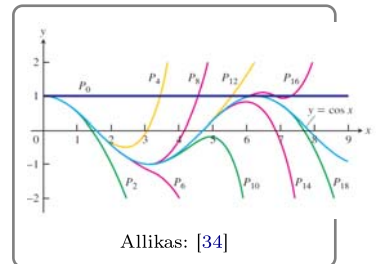
Kui punkt  $x$  on küllalt lähedane punktile  $a$ , siis võime funktsiooni  $f$  väärtust arvutada ligikaudu Taylor'i polünoomiga  $P_n(x)$ , s.t.

$$f(x) \approx P_n(x),$$

kusjuures tehtav viga võrdub jääkliikmega  $\alpha_n(x)$ . Kui nüüd punkti  $a$  vaadeldavas ümbruses on tuletis  $f^{(n+1)}(x)$  tõkestatud, s.t. leidub konstant  $M > 0$ , et  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , siis Taylor'i valemi jääkliikme jaoks Lagrange'i kujust kehtib hinnang

$$|\alpha_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}, \quad (\text{G.8})$$

mis võimaldab hinnata funktsiooni  $f$  lähendamisel Taylor'i polünoomiga tehtavat viga.



Allikas: [34]

**Näide G.2** Leiame funktsiooni  $f(x) = e^x$  Taylor'i valemi punktis  $a = 0$  (Maclaurin'i valem) ja arvutame selle abil ligikaudu arvu  $e$ , võttes Taylor'i valemis  $n = 8$ . Et  $(e^x)^{(n)} = e^x$ , siis valemi (G.7) põhjal

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi, \quad \xi \in (0, x).$$

Kuna  $0 < e < 3$ , siis  $|x| \leq 1$  korral saame jääkliikme hinnangu

$$|\alpha_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}, \quad |x| \leq 1.$$

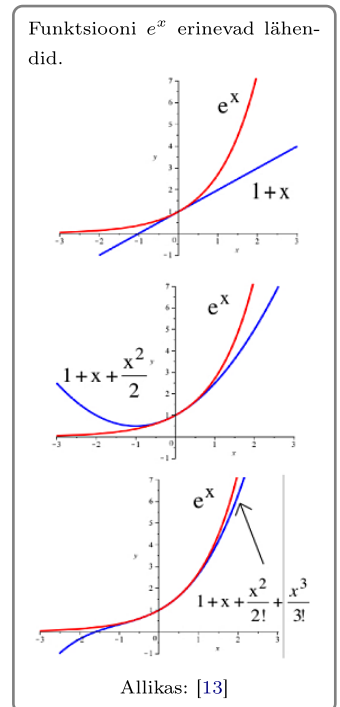
Kui  $x = 1$ ,  $n = 8$ , võime kirjutada

$$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828,$$

kusjuures tehtud vea jaoks kehtib hinnang

$$|\alpha_8| \leq \frac{3}{9!} < 0.000009 = 9 \cdot 10^{-6}.$$

◇ ◇ ◇



Allikas: [13]

## G.2 Piirväärtus funktsioonidest $(f(x))^{g(x)}$ \*

Määramatused  $0^0$ ,  $\infty^0$  ja  $1^\infty$  tekivad astme-eksponentfunktsiooni

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

piirväärtuse leidmisel ( $f(x) > 0$ ). Logaritmi omadustest järeldeb võrdus

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}. \quad (\text{G.9})$$

**Ülesanne.** Leida piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Kuna eksponentfunktsioon  $y = e^x$  on pidev oma määramispiirkonnas, siis kehtib seos

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))}. \quad (\text{G.10})$$

### Näide G.3

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \stackrel{\infty^0}{=} e^A,$$

kus

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Siit järeldeb, et vastus on

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1.$$

◇ ◇ ◇

### Näide G.4

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x \stackrel{1^\infty}{=} e^A,$$

kus

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{7}{x}\right) \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{7}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{7}{x}} \cdot \left(-\frac{7}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 7.$$

Siit järeldeb, et vastus on

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = e^7.$$

◇ ◇ ◇

### G.3 Newton'i meetod võrrandite ligikaudseks lahendamiseks \*

Olgu meil lahendada võrrand

$$f(x) = 0 \quad (\text{G.11})$$

ja olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv piisavalt suures nullkoha  $x = x_*$  ümbruses. Valides sellest ümbrusest mingi alglähendi  $x = x_0$ , saame leida funktsiooni  $f$  puutujavõrrandi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kuna me otsime nullkohta, siis oleks tark leida puutuja lõikepunkt  $x$ -teljega (kuna otsitav lahend  $x_*$  peab asuma sel juhul nii  $x$ -teljel kui ka puutuja peal). Sel juhul aga  $y$  väärtus on null. Seega

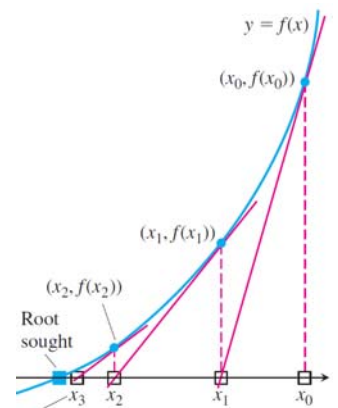
$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Avaldame lõikepunkti  $x$ -teljega,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Olles leidnud lõikepunkti  $x_1$ , võime kasutada sama valemit, asendades alglähendi  $x_0$  lõikepunktiga  $x_1$  ja otsides järgmist lõikepunkti  $x_2$  jne.

Johann Wolfgang von Goethe: "Mathematicians are like Frenchmen: whatever you say to them, they translate it into their own language, and forthwith it means something entirely different."



Allikas: [34]

Võrrandi  $f(x) = 0$  lahendamiseks kasutatavat iteratiivset meetodit

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)}{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{G.12})$$

nimetatakse **Newton'i meetodiks**.

**Näide G.5** Meetodi jälgimiseks lahendame esiteks väga lihtsa võrrandi, mille täpset lahendit me teame. Näiteks ruutvõrrandi

$$x^2 = 0,$$

mille täpseks lahendiks on  $x_1 = x_2 = 0$ . Leiame esiteks  $f(x) = x^2$  tuletise avaldise,

$$f'(x) = 2x.$$

Olgu  $x_0 = 1$  (mis on päris kaugel nullpunktist  $x = 0$ ). Siis

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$x_i$	1	0.5	0.25	0.125	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$3.13 \cdot 10^{-2}$
$f(x_i)$	1	0.25	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$3.91 \cdot 10^{-3}$	$9.77 \cdot 10^{-4}$
$f'(x_i)$	2	1	0.5	0.25	0.125	$6.25 \cdot 10^{-2}$

Näeme, et Newton'i meetod koondub täpseks lahendiks  $x = 0$ . Tabelis on meil väärtus  $x_5 = 3.13 \cdot 10^{-2}$ .

◇ ◇ ◇

**Näide G.6** On olemas palju võrrandeid, mida ei saagi täpselt lahendada. Vaatleme näiteks võrrandit

$$2^x = 4x,$$

mis on just seda tüüpi, mille jaoks täpse lahendamise meetodid puuduvad. Leiame antud võrrandi ühe nullkoha (mingi täpsusega, kasutades selleks arvuti abi). Leiame esiteks  $f(x) = 2^x - 4x$  tuletise avaldise,

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 4.$$

Olgu  $x_0 = 0$ . Siis (kõiki komakohti me siinjuures ei kirjuta)

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$x_i$	0	0.302402	0.309902	0.309907	0.309907
$f(x_i)$	1	0.0235868	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$8.41 \cdot 10^{-12}$	0.00
$f'(x_i)$	-3.3068528	-3.1452135	-3.1407587	-3.1407555	-3.1407555

Näeme, et Newton'i meetod koondub päris kiiresti. Juba 4. iteratsioonil saadakse  $x_3 = 0.309907$ , mille korral funktsiooni väärtus  $f(x_3) = 8.41 \cdot 10^{-12}$ , mis annab piisavalt väikese vea. Arvutiekraanil oli õigeid komakohti isegi rohkem.

◇ ◇ ◇

Alglähend  $x_0$  on vabalt ette antav, mis aga praktikas peab siiski olema valitud küllalt "hästi". Tihti kasutatakse selleks graafiku abi. Märgime, et Newton'i meetod leiab ainult ühe nullkoha. Kui võrrandil on neid rohkem, siis tuleb kasutada mitut erinevat alglähendit. Praktikas on Newton'i meetod väga laialt levinud, sealhulgas ka arvuti-programmides. Newton'i meetod on päris kiire koonduvusega, kuid sõltub väga tugevalt alglähendi  $x_0$  valikust.

**Ülesanne.** Lahendada ligikaudu võrrand

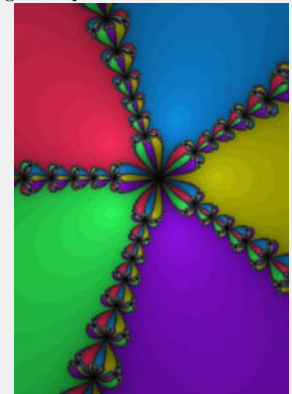
$$x^2 - 1 = \sqrt{4x - 1},$$

kasutades alglähendina nt.  $x_0 = 1.5$ .

Kui kasutada Newton'i meetodit kompleksarvude jaoks, siis võib luua ilusaid fraktaalsetid mustreid. Näiteks järgmine joonis on saadud võrrandi

$$z^5 - 1 = 0$$

lahendamisel Newton'i meetodiga komplekstasandil.



Allikas: Wikipedia

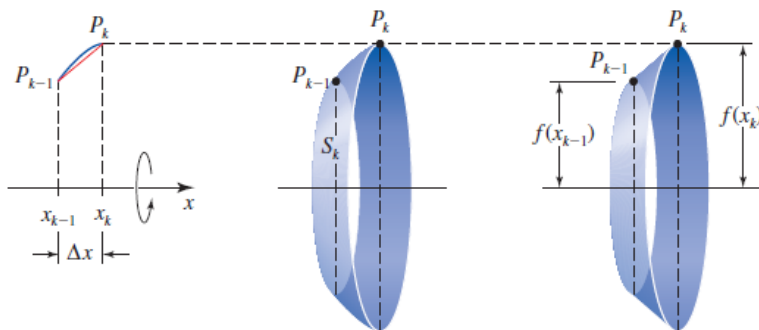
Erinevad värvid näitavad meetodi koondumiskiirust valitud alglähendi korral (mitu iteratsiooni läheb vaja, et meetod koonduks või siis hajuks).

# Määratud integraali rakendusi

<b>H.1 Pöördkeha pinna pindala *</b> . . . . .	<b>337</b>
<b>H.2 Massikeskme leidmine *</b> . . . . .	<b>338</b>
<b>H.3 Pöördkeha ruumala *</b> . . . . .	<b>340</b>

## H.1 Pöördkeha pinna pindala \*

Lähtudes ringjoone pikkuse valemist  $2\pi r$  saab analoogiliselt teiste teemadega tuletada järgmise tulemuse.

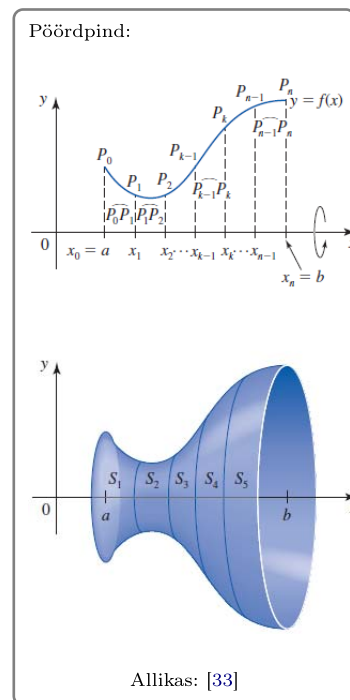


Allikas: [33]

**Lause H.1**

Olgu funktsioon  $f$  lõigus  $[a, b]$  mittenegatiivne diferentseeruv funktsioon. Siis funktsiooni  $f$  poolt ümber  $x$ -telje tekitatud pöördkeha pinna pindala avaldub valemiga

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (H.1)$$



Allikas: [33]

## H.2 Massikeskme leidmine \*

Kui meil on kiigele pandud kaks raskust, üks massiga  $m_1$  ja teine massiga  $m_2$ , siis on teoreetiliselt võimalik leida punkt

$$\bar{x} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2},$$

kuhu kiige asetades jääb süsteem tasakaalu. Kui raskusi on rohkem, siis

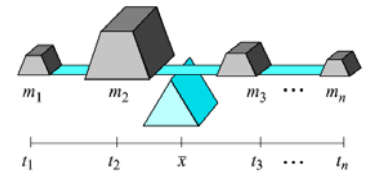
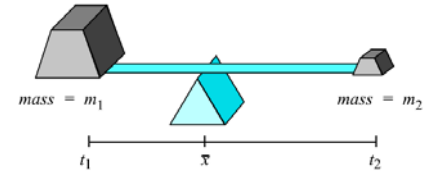
$$\bar{x} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Kui punktid massidega  $m_1, \dots, m_n$  asuvad tasandil koordinaatidega  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , siis süsteemi massikeskme asub punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$ , kus

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (\text{H.2})$$

ja

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (\text{H.3})$$



Allikas: [19]

### Definitsioon H.1

Me ütleme, et tasandilisel pinnal  $R$  on massikeskme punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$ , kui selle pinna toetamisel nn. nõelale punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$  jääb pind tasakaalu.

### Lause H.2

Olgu  $R$  pind, mis jääb kahe funktsiooni  $f$  ja  $g$  graafiku vahele, kus  $f(x) \geq g(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Sel juhul pinna  $R$  massikeskme asub punktis  $(\bar{x}, \bar{y})$ , kus

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \int_a^b \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx. \quad (\text{H.4})$$

Siin  $S$  on pinna pindala

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (\text{H.5})$$

*Tõestus.* Näitame seda skemaatiliselt. Vaatleme pinda  $R$ , mille väikese tükikese pindala lõigus  $\Delta x_i$  on

$$\Delta S_i \approx (f(x) - g(x)) \Delta x_i.$$

Eelduse järgi on meil ühtlane pind tihedusega  $\rho$ . Sel juhul pinnatüki mass punktis  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  on

$$\rho \Delta S_i = \rho (f(x) - g(x)) \Delta x_i.$$

Kogu pinna  $R$  pindala on  $S$  ja mass on sel juhul

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \rho S.$$

Väikese pinnatüki moment punktis  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  on (jõuõlg korda mass)

$$\frac{1}{2} (f(x) + g(x)) \rho (f(x) - g(x)) \Delta x_i.$$

Seega kogu moment avaldub

$$M_x = \rho \int_a^b \left( \frac{f(x) + g(x)}{2} \right) (f(x) - g(x)) dx = \frac{\rho}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

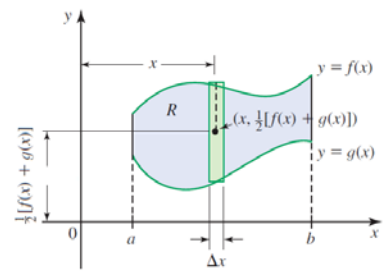
Pinnatüki moment  $y$ -teljel punktis on  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,

$$x \rho (f(x) - g(x)) \Delta x_i.$$

Siit

$$M_y = \rho \int_a^b x (f(x) - g(x)) dx.$$

Massikeske asub punktis  $(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right)$ . □



Allikas: [33]

**Näide H.1** Leiame lõigul joonte  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  ja  $g(x) = x^2 - 3$  vahele jääva pinna masskeskme.

Funktsioonide lõikepunktid asuvad punktides  $x = -1$  ja  $x = 2$ . Leiame pindala

$$S = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = 9.$$

Edasi leiame masskeskme  $x$ -koordinaadi

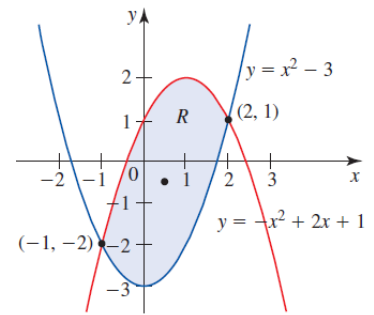
$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_{-1}^2 x (f(x) - g(x)) dx = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 (-2x^3 + 2x^2 + 4x) dx = \frac{1}{2}$$

ja  $y$ -koordinaadi

$$\bar{y} = \frac{1}{S} \int_{-1}^2 \frac{1}{2} (f^2(x) - g^2(x)) dx = \frac{1}{9} \int_{-1}^2 (-2x^3 + 4x^2 + 2x - 4) dx = -\frac{1}{2}.$$

Seega pinna massikeske asub punktis  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ .

◇ ◇ ◇



Allikas: [33]

### H.3 Pöördkeha ruumala \*

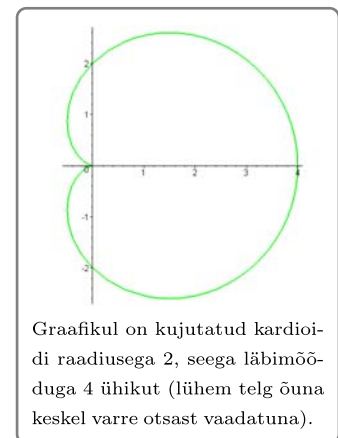
**Näide H.2** Ideaalse Euroõuna ruumala. Näide on suhteliselt pikk ja tehniline. Kui me lõikame õuna varre juurest pooleks, siis saadud lõikepind meenutab tuntud joont, mida nimetatakse **kardioidiks**.

Olgugi, et kardioid ei kirjelda õuna läbilõiget üks-ühele, siis ometigi võime teda päris edukalt kasutada, kui tahame arvutada õuna ligikaudset ruumala, pindala või näiteks ümbermõõtu. Matemaatikas on kardioid kirja pandav polaarkoordinaatides valemiga

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (\text{H.6})$$

kus  $a$  on siis kardioidi raadius ehk pool lühema telje läbimõõtu,  $\varphi$  on kasutatav nurk ja  $r$  on antud nurgale vastav punkti kaugus koordinaatide alguspunktist.

◇ ◇ ◇



Graafikul on kujutatud kardioidi raadiusega 2, seega läbimõõduga 4 ühikut (lühem telg õuna keskel varre otsast vaadatuna).



Et seda pilti näha klassikalisel  $xy$ -tasandil nagu joonisel, siis tuleb meil minna üle  $x$  ja  $y$  jaoks defineeritud polaarkoordinaatidele, mis on kirja pandav järgmiselt:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (\text{H.7})$$

Polaarkoordinaadid tähendavad siin, et igale nurgale  $\varphi$  saame leida punkti  $(x, y)$  kauguse  $r$  nullpunktist.

Ühendades valemid (H.6) ja (H.7) saamegi kardioidi jaoks  $xy$ -tasandil järgmised seosed:

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \\ y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (\text{H.8})$$

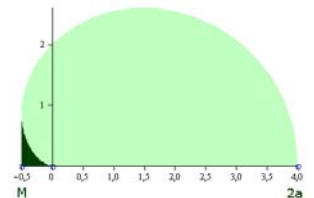
Õuna ruumala leidmiseks kasutame suhteliselt lihtsat meetodit, pannes kardioidi joone ümber  $x$ -telje pöörlema. Paneme tähele, et sel juhul tekib meil iga  $x$  väärtuse jaoks ümber  $x$ -telje ringjoon raadiusega  $y$ . Ringjoone pindala oli aga teatavasti  $\pi R^2$ . Seega tekib meil ümber  $x$ -telje pöörleva kujundi ristlõike pindala

$$S(x) = \pi y^2. \quad (\text{H.9})$$

Keha ruumala kahe tasandi  $x = \alpha$  ja  $x = \beta$  vahel võib leida kui määratud integraali ristlõike pindalast

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (\text{H.10})$$

Läheme nüüd täpsemalt meie kardioidi juurde. Esiteks peame arvesse võtma õuna südame juures asuvat tühimikku, kuna kujundi pöörlemisel ümber  $x$ -telje tekib ringjooneline kujund, mis on keskelt täidetud. Seega peaksime kogu pöördepinna ruumalast maha lahutama tekkiva tühimiku ruumala.



Arvestades valemid (H.9)-(H.10) saame

$$V = \pi \int_M^{2a} y^2 dx - \pi \int_M^0 y^2 dx, \quad (\text{H.11})$$

kus esimene integraal kirjeldab seest täidetud kardioidi ruumala ilma tühimikuta (kasutades kumera joone  $y$  väärtusi) ja teine integraal kirjeldab varre juures oleva tühimiku ruumala (kasutades nõgusa joone  $y$  väärtusi vasakust otspunktist  $M$  kuni punktini  $0$ ). Märgime, et punktile  $M$  vastab kardioidi joonel punkt  $\left(-\frac{1}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ .

Vahetades võrrandis (H.11) teises integraalis rajad (integraali märk muutub siis vastupidiseks), saame integraalid kokku liita ning tegelikult on kogu pöörleva kardioidi ruumala arvutatav valemiga

$$V = \pi \int_0^{2a} y^2 dx. \quad (\text{H.12})$$

Järgnevalt läheb meil vaja integreerimisvõtteid nagu näiteks muutuja vahetus ja diferentsiaali märgi alla viimine. Suuruse  $y^2$  leiame lihtsalt valemist (H.8). Lisaks läheb meil vaja diferentsiaali  $dx$ , mille leiame samuti valemist (H.8):

$$dx = x'(\varphi)d\varphi = (-a \sin \varphi - 2a \sin \varphi \cos \varphi)d\varphi = -a \sin \varphi(1 + 2 \cos \varphi)d\varphi. \quad (\text{H.13})$$

Viimaseks sammuks üleminekul ainult muutujast  $\varphi$  sõltuvale funktsioonile peame integraalis (H.12) muutma integraali rajad  $0 \dots 2a$ . Paneme tähele, et kui  $\varphi = 0$ , siis valemist (H.8) saame et  $x = a(1 + \cos 0) \cos 0 = a(1 + 1) \cdot 1 = 2a$ . Analoogiliselt, kui  $\varphi = \pi$ , siis  $x = a(1 + \cos \pi) \cos \pi = a(1 - 1) \cdot (-1) = 0$ . Arvestades seda ja valemid (H.12)-(H.13) saame

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2a} y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 (a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi)^2 (-a \sin \varphi(1 + 2 \cos \varphi)) d\varphi \\ &= -\pi a^3 \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^2 \sin^3 \varphi(1 + 2 \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Kuna  $-\sin \varphi d\varphi = d(\cos \varphi)$  ja  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ , siis saame

$$V = \pi a^3 \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^2 (1 - \cos^2 \varphi)(1 + 2 \cos \varphi) d(\cos \varphi). \quad (\text{H.15})$$

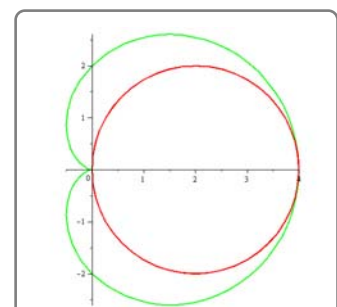
Teeme muutujavahetuse  $\cos \varphi = u$ . Sel juhul muutuvad integraali rajad  $\pi \dots 0$  asemel  $-1 \dots 1$ . Valem (H.15) teisendub kujule

$$V = \pi a^3 \int_{-1}^1 (1 + u)^2 (1 - u^2)(1 + 2u) du. \quad (\text{H.16})$$

Jääb veel üle viia arvutus lõpule. Järgnevas arvestame, et integraal paaritute funktsioonidest  $u$ ,  $u^3$  ja  $u^5$  on sümmeetriliste rajade korral võrdsed nulliga ja paarisfunktsioonide  $1$ ,  $u^2$  ja  $u^4$  korral võime võtta kahekordse pooliku integraali:

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_{-1}^1 (1 + 4u + 4u^2 - 2u^3 - 5u^4 - 2u^5) du \\ &= 2\pi a^3 \int_0^1 (1 + 4u^2 - 5u^4) du = 2\pi a^3 \left( u + \frac{4}{3}u^3 - u^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

◇ ◇ ◇



Tulemus

$$V = \frac{8}{3}\pi a^3 \quad (\text{H.18})$$

ütleb meile, et pöörleva kardioidi ruumala on kaks korda suurem sama raadiusega  $a$  olevast kera ruumalast (viimane oli teatavasti  $\frac{4}{3}\pi a^3$ ). Jooniselt võime näha sama raadiusega 2 olevat kardioidi ja ringi.

# Lisa I

## Kompleksarvud

---

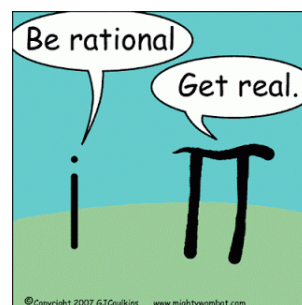
I.1 Kompleksarvude ajaloost *	343
I.2 Kompleksarvude kasutamisest *	345
I.3 Fraktalid *	346
I.4 Kompleksarvud kujundi pööramiseks *	348
I.5 Kompleksarvude kasutamine vooluahelates *	351

---

### I.1 Kompleksarvude ajaloost \*

Imaginaararvud viitavad millelegi, mida saab vaid ette kujutada ja mida ei ole realselt olemas. Teisalt, reaalarvud viitaksid millelegi, mis on realselt olemas. Ometigi on selline lähenemine pisut kahtlane. Võtame näiteks irratsionaalarvu  $\sqrt{2}$ , mis on ühtlasi reaalarv ja mis valmistab kunagi kreeklastele palju peavalu. Kas te suudaksite leida selle arvu täiesti täpse väärtuse (aga arvuti abiga)? Kas te näete looduses midagi, mille täpne väärtus on  $\sqrt{2}$ ? Ruudu  $1 \times 1$  diagonaali pikkus? Seda nüüd küll, aga vaevalt looduses ideaalset ruutu leidub ... Seega on  $\sqrt{2}$  pigem matemaatiline abstraktsioon.

Samasugune abstraktsioon on imaginaarühik  $i$ , mida saab kasutada piisavalt realselt, võttes appi tasandi ja kujutades arvu  $i$  vastavale imaginaarteljele (punkt  $(0, 1)$ ).



Nii arvul  $\sqrt{2}$  kui imaginaarühikul  $i$  on olemas lihtne (matemaatiline) geomeetiline seos, kuid reaalsusega tundub mõlemal juhul vähe ühist olevat. Osutub, et tihti on nendest “abstraktsetest” arvudest palju abi ka reaalelus leiduvate suuruste arvutamisel. Kompleksarvude abil saab palju mugavamalt kirjeldada elektri- ja magnetvälja, elektromagnetlaineid jne.

Üks vanemaid viiteid imaginaararvust pärineb kreeka matemaatikult Aleksandria Heron’ilt (u. 10-70, 1. sajand), kus ühe püramiidi tükiga seotud ruumalaks on märgitud ruutjuur negatiivsest arvust  $\sqrt{81 - 144}$  ning kus ajastut arvestades muudeti ruutjuure all olev avaldis lihtsalt positiivseks.

Imaginaararvudega hakati tõsisemalt tegelema 16. sajandi Euroopas, enamasti Itaalias. Kummalisel kombel kerkisid imaginaararvud esmalt esile mitte ruutvõrranditest (nagu võiks eeldada), vaid kuupvõrranditega seotud probleemidest. Imaginaararve ei võetud teadlaste poolt sugugi rõõmuga vastu, vaid neist üritati vabaneda, ignoreerida, nende vastu võidelda. Itaalia matemaatikud Niccolo Fontana Tartaglia (1499/1500 - 1557) ja Gerolamo Cardano (1501 - 1576) uurisid erikujulise kuupvõrrandi

$$ax^3 + bx + c = 0$$

lahendamist ja peagi jõuti järeldusele, et ei ole võimalik vältida ruutjuurt negatiivsest arvust. Kuupvõrrandi lahendivalemite esmaavastaja tiitli ümber valitseb korralik segadus. Cardano olevat valemid teada saanud Tartaglia käest, kes pani Cardano’le südamele neid mitte avaldada. Hiljem Cardano need siiski oma nime all avaldas (“Ars Magna” ehk Suur Kunst on ajaloos oluline raamat, 1545) ja pälvis sellega suuri sekeldusi Tartaglia ja kohtu näol. Loosse lisasid vürtsi ka nende õpilased ja kes täpselt avastas ühe ja kes teise asja, on suuresti teadmata.

Kuupvõrrandi lahendivalemitest oli näha, et teatud juhtudel tulevad lahenditesse ruutjuure väärtused negatiivsest arvust. 1572. aastal avaldas itaalia matemaatik Rafael Bombelli (1526 - 1572) soode kuivatamise kõrvalt raamatu “L’Algebra”, kus ta tutvustas ühte huvitavat nähtust. Vaatleme näiteks võrrandit

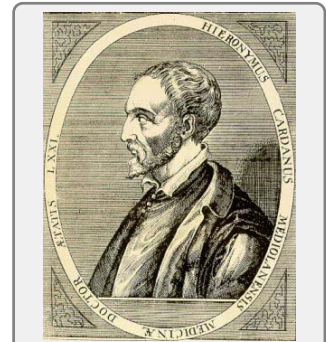
$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Kasutades lahendivalemeid, saab välja kirjutada

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Kui me hetkeks ignoreeriksime, mis täpsemalt  $\sqrt{-121}$  on ja kirjutame  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$  ja  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$ , siis

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$



Gerolamo Cardano  
(Allikas: Wikipedia)

Cardano oli arstiharidusega mängusõltlane, kelle elus vaheldusid tõusud ja mõõnad üsna trastilisel kombel. Cardano ema üritas juba enne sündi temast korduvalt vabaneda abordi abil. Sündides oli Cardano tervislik olukord väga vilets, hiljem laastas piirkonda muhkaktk, kuid sellest hoolimata elas Cardano 75 aastaseks!

Samuti ei vedanud Cardano’l poegadelega. Giovanni poodi oma naise mürgitamise eest, noorem poeg Aldo töötas inkvisitsiooni juures vabatahtliku piinajana. Hiljem, kohtuvaidluses Tartaglia’ga, aitas noorem poeg tunnistada isa vastu. Õli valas tulle ka asjaolu, et Cardano tegeles horoskoopide koostamisega ja sai hakkama ka Jeesus Kristuse omaga. Viimane muidugi kirikule ei meeldinud ja Cardano sai maitsta ka õomaja vanglamüüride vahel.

Cardano ise alustas elu vaesena. Olles sunnitud elatist ka hasartmängude abil hankima, langes ta kiirelt mänguruse lõksu. Oli hetki, kus ta mängis maha kogu oma perekonna varanduse. Siiski, Cardano’l oli annet taibata juhuslikkuse ja tõenäosuse rolli ning see aitas tal kohati ka korralikult teenida. Hiljem kirjutas ta raamatu õnnemängudest. Helgemad ajad pakkusid Cardano’le Padua Ülikooli rektori kohta, peapiiskopi astmast terveks ravimise eest kopsakat rahasummat ja näiteks pensioni paavst Gregory XIII enda käest.

Meie näeme ja seda nägi ka Bombelli, et mõnikord taanduvad ruutjuured negatiivsest arvust lihtsalt välja ning tulemuseks on reaalarv - meie otsitav võrrandi lahend. Alates sellest hetkest hakkasid seni üksnes segadust ja tüli tekitanud arvud äratama laiemat huvi kompleksarvude vastu. Seni mõttetuna tundunud objektid muutusid abivahenditeks, mille abil saab jõuda võrrandi lahendi leidmiseni. Õhku jäi veel küsimus kompleksarvude olemuse kohta, kas need siis on mingid arvud või anomaalia või miski muu.

Gottfried Leibniz ütles imaginaararvude kohta järgmist: "A wonderful flight of God's spirit; they are almost an amphibian between being and not being."

1673. aastal soovitas inglise matemaatik John Wallis (1616-1703) suhtuda kompleksarvudesse kui punktidesse tasandil (**analoogiliselt reaalarvudega reaalteljel**). Ta naerdi välja ja kritiseeriti selle idee eest päris tugevalt. Sajand hiljem soovitas Argand pea sama ideed, kusjuures naerda ei soovinud enam keegi. Šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783) võttis  $\sqrt{-1}$  tähistamiseks kasutusele tähe  $i$  (ladina sõna *imaginarium* esimene täht). William Rowan Hamilton (1805 - 1865) soovitas kompleksarvu  $z = a + bi$  vaadelda kui lihtsalt reaalarvude järjestatud paari  $(a, b)$ . Viimane soovitus jäi aga laiema tähelepanuta, kuna Euler'i poolt kasutusele võetud sümbolist  $i$  ei tahtnud ühtäkki enam keegi loobuda. Kui juba suurmehed nagu Euler, Gauss, Leibniz hakkasid tegelema kompleksarvudega, siis oli vastav matemaatiline teooria kiirelt tulema ja valmima. Peagi leiti kompleksarvudele rakendusi siin ja seal ning lõpuks vaat et igal pool.

## I.2 Kompleksarvude kasutamisest \*

Vaatleme vaid mõningaid lihtsamaid ideid, muidu peaksime ümber kirjutama terve füüsika raamatu.

- Kompleksarvud lubavad vaadata matemaatilisi võrrandeid, mis ei ole lahenduvad reaalarvude hulgal. Näiteks,  $x^2 + 1 = 0$ . Teisisõnu, kompleksarvude abil on lahend olemas kõikidel algebralistel võrranditel. Viimane lubab lahendusalgoritme kasutada universaalselt, muretsemata lahendi olemasolu või mitteolemasolu küsimuste üle.
- Kompleksarve kasutatakse sageli praktikas info salvestamiseks kahemõõtmeliste objektide kohta. Näiteks graafiku punkti  $(x, y)$  saab esitada kui kompleksarvu  $z$  esitusega  $z = x + yi$ . Nii võiksime esitada koos ka mistahes kahe erineva hulga elemente, näiteks koerte hulga  $Y$  ja kasside hulga  $X$  korral võiksime liita ja lahutada kassekoeri kartmata nende segamini ajamist või näiteks kui kehal on kaks eraldiseisvat omadust laius-kõrgus või lainepikkus-võnkesagedus jne.

Paljudes programmeerimiskeeltes on kompleksarvude struktuur ja tehted süsteemiselt juba olemas ning see lihtsustab kahemõõtmeliste objektidega opereerimist, ilma et peaks hakkama iga kord uuesti vastavaid struktuure ja tehteid defineerima hakkama.

Võrrand  $x^2 + 1 = 0$  ei ole lahenduv reaalarvude hulgal, kuid kompleksarvude seas on lahendid olemas:  $i$  ja  $-i$ .

Iseenesest ei ole see ainuke viis. Sama hästi võiks kasutada näiteks vektorit koordinaatidega  $\vec{u} = (x, y)$ , polaarkoordinaate  $(r, \varphi)$  (nurk  $\varphi$  ja kaugus  $r$ ), funktsiooni parameetrist kuju,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , kahemuutujafunktsioone, info salvestamist kahte erinevat tüüpi muutujasse või mingit muud vastavat matemaatilist objekti.

Näiteks, 3 kassi ja 5 koera võiksime märkida arvuna  $u = 3 + 5i$ , 8 kassi ja üks koer arvuna  $v = 8 + i$ . Kasside ja koerte eraldi liitmise asemel saame opereerida arvudega  $u$  ja  $v$  kartmata koerte ja kasside arvestuse segamini minekut,  $u + v = 11 + 6i$ .

- Kompleksarvude üks kasulik omadusi peitub võimaluses esitada tasandilisi vektoreid kompleksarvudena ja pöörata neid vektoreid väga lihtsate tehete abil. Viimane lubab oluliselt lihtsustada matemaatilist aparatuuri, mida on vaja mõningate füüsikas ette tulevate nähtuste uurimiseks. Kahe kompleksarvu korrutamisel saadakse uus kompleksarv, mille argument  $\varphi$  (vektori nurk reaaltelje positiivse suunaga) on lihtsalt selle kahe kompleksarvu argumentide summa  $\varphi_1 + \varphi_2$ . Viimane omadus on aga kasulik näiteks vahelduvvoolu korral, kus erinevad faasid summeeruvad, kompleksarvu kaugusest nullpunktist saame aga infot voolutugevuse, pinge või takistuse kohta.
- Kompleksarvud on väga tõhus vahend kirjeldamiseks võnkumisi (amplituudi saab siduda mooduliga  $|z|$  ning vektoriga seotud nurka  $\varphi$  on võimalik siduda sagedusega, faasiga, faasinihkega vms). Kui veel arvestada, et looduses leidub väga palju võnkumisi (helilained, raadiolained, elementaarosakeste levimine, elektrivool, perioodilised protsessid looduses jne), siis võib vähemalt aimata, kuidas kompleksarvud saavad meile kasulikud olla.

### I.3 Fraktalid \*

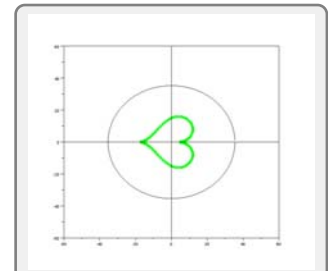
Kompleksarvudega käib kaasas midagi täiesti müstilist ja sõnulseletamatut, nimelt fraktalid ja muinasjutulised mustrid komplekstasandil (tekivad näiteks iteratsioonidest või ligikaudsetest meetoditest). Gaston Maurice Julia (1893 - 1978) oli Jules Henri Poincare (1854 - 1912) õpilane (vt. [21]), kes uuris kujutust

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

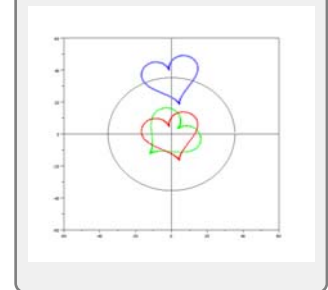
kus nii  $z_n$  kui  $c$  on kompleksarvud. Me saame uurida selle protsessi koondumist, andes ette algväärtused  $z_0$  ja  $c$  ning vaadates protsessi edasist kulgu. Kui  $n$ -i kasvades  $|z_n|$  väärtus tõkestamatult kasvab, siis protsess hajub.

Kui reaali- ja imaginaariosad jadast  $z_n$  lähenevad mingile kindlale arvule, siis protsess koondub. Tihti pakub huvi ka juhtum, kus protsess on lihtsalt tõkestatud (s.t.  $|z_n| < M$  mingi reaalarvu  $M > 0$  korral). Kandes vastavad punktid  $z_0$  komplekstasandile ja tähistades erineva värviga, kas protsess hajub või koondub teatud iteratsioonide arvu järel, võime saada väga keerulise struktuuriga kujundid: fraktaalsete struktuuriga kujundid, mille korral mingi väikese ala suurendamine toob ikka uuesti ja uuesti esiele algse kujundiga sarnased jooned, elemendid või algkujundi enda.

Julia pani oma töö kirja 199 leheküljel, mis avaldati trükis 1918. aastal. Sõltumatult Juliast jõudis analoogiliste tulemusteni ka Pierre Fatou (avaldas tulemused 1919). Julia ja Fatou tööd jäid kauaks ajaks tähelepanuta.



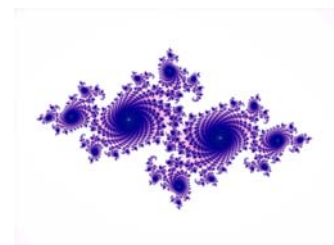
Südame pööramiseks ja liigutamiseks tasandil tuleks südamepunktide koordinaadid esiteks salvestada kompleksarvudena ühte vektorisse. Pööramiseks tuleb vastavat vektorit korrutada teatud kompleksarvuga ja nii lihtne see ongi. Lähemalt vaatleme seda ülejäärgmises peatükis.



Olgu  $c = 1$ , siis

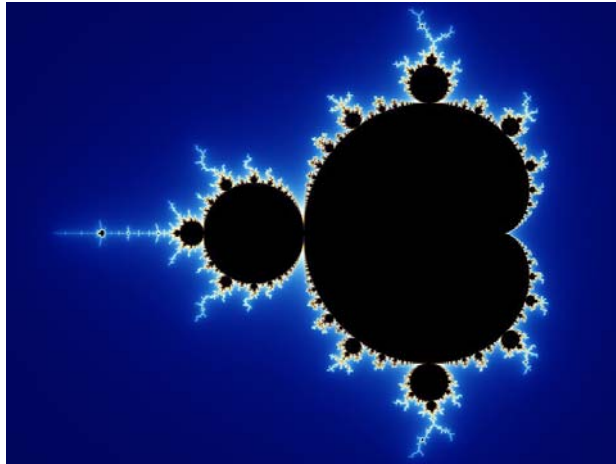
$$z_{n+1} = z_n^2 + 1$$

ja  $z_0 = i$  korral  $z_1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ . Edasi on lihtne näha, et  $z_2 = 0 + 1 = 1$ ,  $z_3 = 1 + 1 = 2$  jne. Antud juhul  $|z_n| \rightarrow \infty$ , s.t. protsess hajub.



Julia hulgad  
(Allikas: Wikipedia)

Benoit B. Mandelbrot (1924 - 2010) tutvus Julia töödega onu soovitusel 1945. aastal, kuid tõsisem huvi ilmnas antud teema vastu alles 1970. aastate teises pooles.



Piparkoogimehike (Allikas: Wikipedia)

Mandelbrot'il õnnestus näidata, et Julia hulgad saab koguda üheks keerukaks hulgaks, mida tänapäeval tuntakse Mandelbrot'i hulgana (Piparkoogimehike). Selliseid kauneid jooniseid saab valmistada arvuti abiga, lähtudes mistahes kompleksetest kujutustest. Tulemusi on kasutatud näiteks vaibamustrite koostamiseks, samuti kunstlike maastike loomiseks ulmefilmides.

Kogu see jutt võiks olla ainult ilus matemaatiline teooria, kui kõigel sellel ei oleks ka väga praktilist väärtust. Nimelt, ükskõik kuhu looduses me enda ümber ka ei vaataks, leiame sealt eest fraktaalset struktuuriid (puud, põõsad, pilved, rannajooned, galaktikad), protsessid on tihti kaotilised kuid siiski mingi korrapäraga jne. Näiteks, suurendatud brokkoli. Kummalisel kombel on see kõik ka kuidagi seotud kompleksarvudega.



Brokkoli (Wikipedia)



## I.4 Kompleksarvud kujundi pööramiseks \*

Vaatleme konkreetsemalt südame graafikut ja moodustame südame punktide koordinaatidest kompleksarvulise vektori

$$A = (z_1, z_1, \dots, z_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neile, keda teema rohkem huvitab, võib tuua, et sellise südame graafik polaarkoordinaatides on antud valemiga

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 13 \cos \varphi - 5 \cos 2\varphi - 2 \cos 3\varphi - \cos 4\varphi \\ y = 16 \sin^3 \varphi \end{array} \right\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

mille abil saame vektori  $A$  jaoks kompleksarvud

$$z_j = 13 \cos \varphi - 5 \cos 2\varphi - 2 \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + 16i \sin^3 \varphi, \quad \varphi = j \frac{2\pi}{n}.$$

Meid huvitab järgnevalt, kuidas liigutada või pöörata kogu südame graafikut ühe korraga ja seda ilma erilist keeruliste valemitega. Lahendus on elegantselt lihtne. Järgnevalt peame arvestama, et kasutame kohati programmeerimisel kasutatavaid omistamisi.

- Esiteks pöörame südant näiteks  $45^\circ$ , selleks korrutame vektori  $A$  punktiivisiliselt ühikringi elemendiga  $\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$ :

$$A \leftarrow A (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

- Nihutamaks tulemust mingile kaugusele, liidame saadud vektorile näiteks vektori  $C$ , mis koosneb üksnes arvudest  $25 + 25i$ ,

$$B = A + C.$$

Nihutatud südame keskpunkt asub ringjoonel raadiusega  $|25 + 25i|$ .

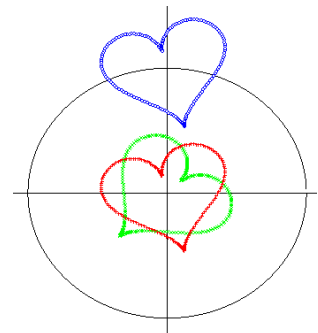
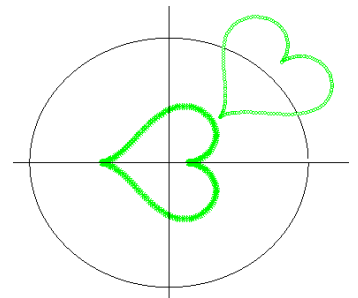
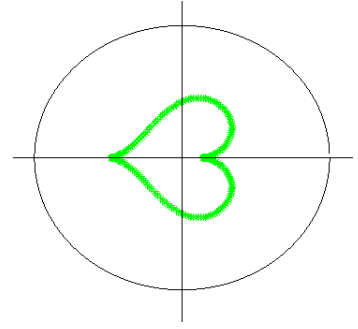
- Pöörame viimases asendis südant näiteks  $60^\circ$  ümber oma telje, selleks korrutame viimati saadud vektori  $A$  punktiivisiliselt suurusega  $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ :

$$A \leftarrow A (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).$$

- Järgnevalt viime vektori punktid uuesti ringjoonele ja liigutame südant ringjoonel  $45^\circ$  kraadi vastupäeva ... säilitades viimati saadud asendi. Selleks tuleb lihtsalt korrutada vektori  $C = 25 + 25i$  suurusega  $(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$  ja liita saadud tulemusele,

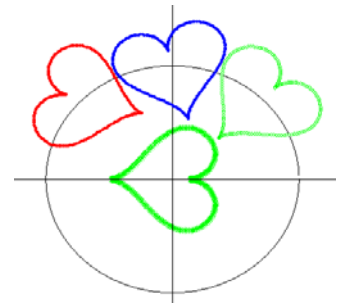
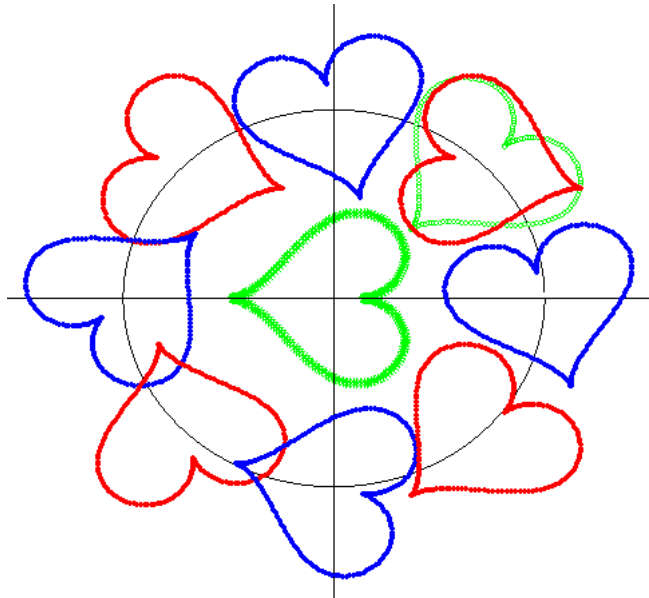
$$B = A + C (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

Saadud vektori  $B$  punktid kanname graafikule (graafikul on toodud kolm erinevat etappi: viimane asend, pööramine  $60^\circ$  ja nihutamine õigele orbiidile).





- Järgmine etapp: keerame  $60^\circ$  ja nihutades veel  $45^\circ$  kraadi vastupäeva. Graafikul on salvestatud ka eelmised südamed:
- Sarnaselt toimides teeme täisringi:



Analoogiliselt saab tasandil (kuid laiendatud tehetega ka ruumis) teisen-  
dada ükskõik millist tasandilist objekti, sealhulgas fotot. Viimaste korral  
peab muidugi kuskil olema salvestatud info värvide kohta. Korrutades  
pilti mingi muu kui ühikringi  $|z| = 1$  elemendiga, saab pilti kokku suruda  
või välja venitada. Toome lisaks SciLab'is kasutatud koodi. Kellel huvi  
on, võib ise proovida järgi teha (valides näiteks mõne teise programmi).

```

clear
i = %i; // T h i s t a m e i m a g i n a a r h i k u r i n g i
M = 200; // G r a a f i k u p u n k t i d e a r v
N = 8; // K e e r a m i s t e a r v
A = zeros( M ); // P u n k t i d e v e k t o r i d
B = zeros( M ); // A b i v e k t o r

for j = 1 : M
    fii = j*( 2*%pi/M ); // A r v u z a r g u m e n t
    // D e f i n e e r i m e s d a m e p u n k t i a r g u m e n d i g a f i i , R e ( ) j a I m ( ) o s a
    A( j ) = 13*cos( fii ) - 5*cos( 2*fii ) - 2*cos( 3*fii ) - ...
            cos( 4*fii ) + i*( 16*sin( fii )**3 )
end

C = 25 + 25*i; // N i h k e v e k t o r ( S c i L a b k a s u t a b s e d a k u i v e k t o r i t )

gcf(); scf(0); clf(0); // G r a a f i k u g a s e o t u d k s u d S c i L a b ' i s

plot( real( A ) , imag( A ) , "g*" ) // E s i a l g n e s d a

```

```

plot( 60*[ -1 , 1 ] , [ 0 , 0 ] , "k-" ) // Reaaltelg
plot( [ 0 , 0 ] , 60*[ -1 , 1 ] , "k-" ) // Imaginaartelg
plot( abs( C ) * cos( [1:M] * ( 2 * %pi / M ) ) , ...
      abs( C ) * sin( [1:M] * ( 2 * %pi / M ) ) , "k-" ) // Ringjoon |C|

for j = 0 : N

  varv = [ "r." , "b." ] // V rvide jaoks

  if j==0 then
    varv( 1 ) = "go";
    A = A .* ( cos( %pi/4 ) + i * sin( %pi/4 ) ) // Keerame 45 kraadi
    B = A + C // Nihutame vektori C v rra
  else
    varv( 1 ) = "r.";
    A = A .* ( cos( %pi/3 ) + i * sin( %pi/3 ) )
              // P rame viimases asendis s dant
    B = A + C * exp( i * 2 * %pi * j / N )
              // Nihutame s dame igele orbiidile
  end
  // S dame graafik
  plot( real( B ) , imag( B ) , varv( modulo( j , 2 ) + 1 ) , ...
        "MarkerSize" , 2 )
  sleep( 1000 ) // Paus
end

```

## I.5 Kompleksarvude kasutamine vooluahelates \*

Vahelduvvooluahelas elektrivoolule avaldatavat takistust nimetatakse näivtakistuseks või ka impedantsiks  $Z$ . Impedantsi  $Z$  esitatakse kompleksarvuna

$$Z = R + jX, \quad j^2 = -1.$$

See koosneb kahest komponendist: aktiivtakistusest  $R$  (iseloostab elektrienergia muundumist teist liiki energiaks, näiteks soojuseks) ja reaktiivtakistusest  $X$  (iseloostab elektrienergia perioodilist võnkumist ahelaelementide vahel).

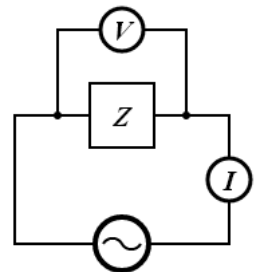
Induktiivsete ahelaelementide reaktiivtakistus on induktiivtakistus  $X_L$  ja mahtuvuslike elementide reaktiivtakistus on mahtuvustakistus  $X_C$ .

Ideaalse takisti korral puudub reaktiivtakistus ( $\varphi = 0$ ), ideaalsel induktioonipoolil ja kondensaatoril puudub aktiivtakistus (vastavalt  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ja  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ). Reaalelus on aga mingil määral esindatud mõlemad komponendid - aktiivtakistus ja reaktiivtakistus.

Seoses impedantsiga  $Z$  kehtib Ohm'i seaduse üldistus

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}, \quad (\text{I.1})$$

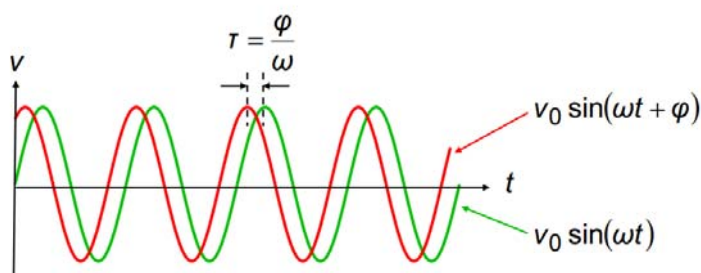
kus  $V$  on pinge ja  $I$  voolutugevus (mõlemad võivad olla kompleksed).



Vahelduvvoolu korral on tüüpiliselt tegemist siinuslainega, mida saab kirjeldada kui ajast  $t$  sõltuvat funktsiooni

$$v_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (\text{I.2})$$

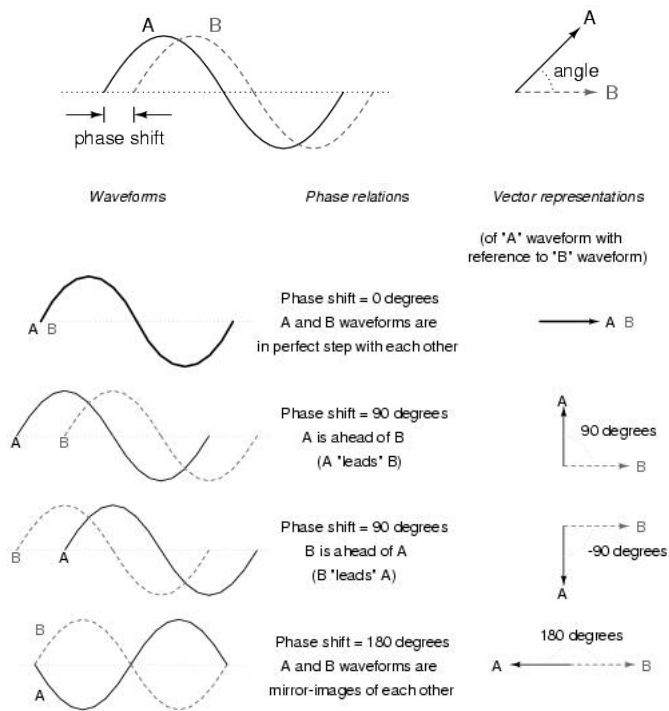
kus  $v_0$  on pinge efektiivväärtus (võnkumise maksimaalne amplituud),  $\varphi$  on pinge algaas ja  $\omega = 2\pi f$  on võnkumise nurksagedus ( $f$  on sagedus).



Antud siinuslainele saab vastavusse seada kindla vektori, mille pikkus on võrdne laine amplituudiga ja nurga  $\omega t + \varphi$  saab siduda “faasinihkega” mingi teise (baas-) laine suhtes. Kuna vektorile saab vastavusse seada kompleksarvu, siis kasutataksegi kompleksarve elektrotehnikas üsna massiliselt. Eespool toodud joonise korral võiksime kasutada järgmist vastavusse seadmist:

$$v_0 \sin(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow \operatorname{Im}(v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}).$$

Fikseeritud aja  $t$  korral võime kasutada lihtsalt kompleksarvu  $v_0 e^{j\varphi}$  ja siinuslaine korral võtta hiljem sellest imaginaarosa ja koosinuslaine korral reaalosa.



Allikas: [29]

### Näide I.1

Olgu meil antud vahelduvvoolu ahelas kolm vooluallikat, milles ühes on 22 V vool faasiga  $-64^\circ$ , teises allikas 12 V vool faasiga  $25^\circ$  ja kolmandas 15 V faasiga  $0^\circ$ . Sel juhul saame kolmele allikale vastavusse seada kompleksarvud

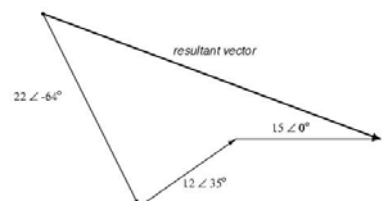
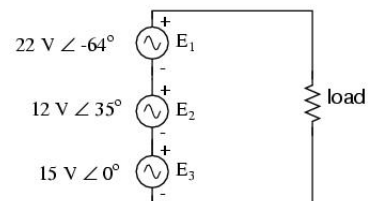
$$\begin{aligned} v_1 &= 22 e^{j(-64 - \frac{\pi}{180})} \approx 9.64 - 19.77j, \\ v_2 &= 12 e^{j35 \frac{\pi}{180}} \approx 9.83 + 6.88j, \\ v_3 &= 15 e^{j0} = 15 + 0j. \end{aligned}$$

Paralleelühenduse puhul pinged summeeritakse, seega summaarse pingega saab leida avaldisest

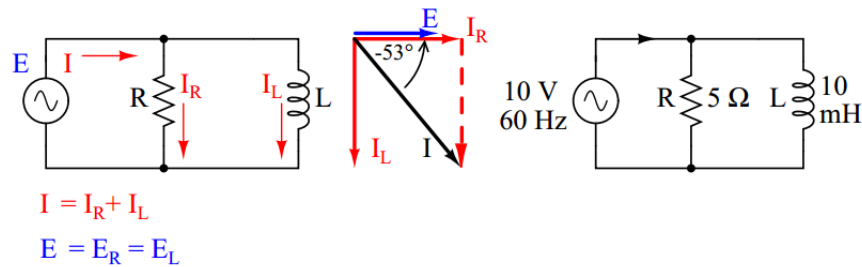
$$v = v_1 + v_2 + v_3 \approx 34.47 - 12.89j \approx 36.8 e^{j(-0.36)},$$

millest saab välja lugeda, et kogupinge on 36.8 volti faasiga  $-0.36 \text{ rad} \approx -20.5^\circ$  (nullfaasiga voolu suhtes).

◇ ◇ ◇



**Näide I.2** Vahelduvvoolu ahelas on paralleelselt ühendatud takisti ( $5 \Omega$ ) ja induktioonipool (reaktiivtakistusega  $3.77 \Omega$ ). Leida vooluvõrgu impedantsid, kui vooluallika pinge on 10 volti sagedusega 60 Hz (vt. [20]).



Paralleelühenduse korral liidetakse impedantside pöörväärtused,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} = \frac{1}{5 e^{j0}} + \frac{1}{3.77 e^{j\frac{\pi}{2}}} = 0.200 - 0.265 j \approx 0.332 e^{j(-0.92)},$$

millest

$$Z = 3.01 e^{j0.92} \approx 1.82 + 2.39 j,$$

kujuures näivtakistus ja faasinihe on vastavalt

$$|Z| = \sqrt{1.82^2 + 2.39^2} \approx 3.01 \Omega, \quad \arg(Z) = \arctan \frac{2.39}{1.82} \approx 0.92 \text{ rad} \approx 53^\circ.$$

Paralleelühenduse korral on voolu pinge kõikjal sama, meie juhul  $E = E_R = E_L = 10 + 0 j$  volti. Arvutame voolutugevuse takistis,

$$I_R = \frac{E_R}{Z_R} = \frac{10 e^{j0}}{5 e^{j0}} = 2 e^{j0}.$$

Takisti pinge on 10 volti, voolutugevus 2 ampri ning mõlemad “lained” asuvad samas faasis. Arvutame voolutugevuse induktioonipoolis,

$$I_L = \frac{E_L}{Z_L} = \frac{10 e^{j0}}{3.77 e^{j\frac{\pi}{2}}} \approx 2.65 e^{j(-\frac{\pi}{2})}.$$

Pooli pinge on 10 volti, voolutugevus 2.65 ampri ning voolutugevusega seotud “laine” faasinihe on  $-90^\circ$ . Paralleelühenduse korral voolutugevused summeeritakse, seega voolutugevus kokku on

$$I = I_R + I_L = 2 - 2.65 j \approx 3.32 e^{j(-0.92)}.$$

Teeme kokkuvõtva tabeli:

	takisti ( $R$ )	induktor ( $L$ )	kokku
pinge $E$	$10 + 0 j$	$10 + 0 j$	$10 + 0 j$
	$10 V, 0^\circ$	$10 V, 0^\circ$	$10 V, 0^\circ$
tugevus $I$	$2 + 0 j$	$0 - 2.65 j$	$2 - 2.65 j$
	$2 A, 0^\circ$	$2.65 A, -90^\circ$	$3.32 A, -53^\circ$
impedants $Z$	$5 + 0 j$	$0 + 3.77 j$	$1.82 + 2.39 j$
	$5 \Omega, 0^\circ$	$3.77 \Omega, 90^\circ$	$3.01 \Omega, 53^\circ$

◇ ◇ ◇

**Näide I.3** Olgu meil vahelduvvoolu ahelas antud jadaühenduses takisti (250 oomi), induksioonipool (induktiivsusega 650 millihenrit) ja kondensaator (mahtuvusega 1.5 mikrofaradit). Leida vooluvõrgu impedantsid, kui vooluallika pinge on 120 volti sagedusega 60 hertsi (vt. [20]).

Pooli takistus on defineeritud valemiga  $|X_L| = 2\pi\omega L$ , kus  $\omega$  on sagedus ja  $L$  induktiivsus. Seega

$$|X_L| = 2\pi \cdot 60 \cdot 650 \cdot 10^{-3} \approx 245 \Omega.$$

Kondensaatori takistus on defineeritud valemiga  $|X_C| = \frac{1}{2\pi\omega C}$ , kus  $\omega$  on sagedus ja  $C$  mahtuvus. Seega

$$|X_C| = \frac{1}{2\pi \cdot 60 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6}} \approx 1768 \Omega = 1.768 \text{ k}\Omega.$$

Ideaalse takisti impedantsi faasinihe on  $0^\circ$ ,

$$R = 250 + 0j = 250 e^{j0}.$$

Ideaalse induksioonipooli impedantsi faasinihe on  $90^\circ$ ,

$$X_L = 0 + 245j = 245 e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Ideaalse kondensaatori impedantsi faasinihe on  $-90^\circ$ ,

$$X_C = 0 - 1768j = 1768 e^{j(-\frac{\pi}{2})}.$$

Jadaühenduse korral impedantsid liidetakse,

$$Z = R + X_L + X_C = 250 - 1523j = 1543 e^{j(-1.41)},$$

millest saame näivtakistuse ja faasinihke:

$$|Z| = \sqrt{250^2 + 1523^2} \approx 1543 \Omega, \quad \arg(Z) = -\arctan \frac{1523}{250} \approx -1.41 \text{ rad} \approx -81^\circ.$$

Üldistatud Ohm'i seadusest saame kogu vooluvõrgu voolutugevuse,

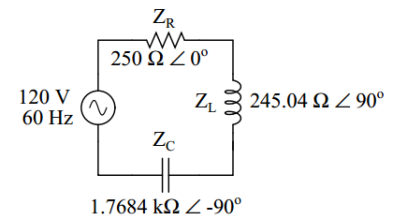
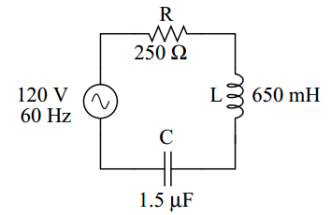
$$I = \frac{E}{Z} = \frac{120 + 0j}{250 - 1523j} = \frac{120 e^{j0}}{1543 e^{j(-1.41)}} \approx 77.8 \cdot 10^{-3} e^{j1.41}.$$

Saime, et voolutugevus on 77.8 milliamprit ja vastav "laine" on vooluallika lainest ees  $81^\circ$ .

Arvutame üldistatud Ohm'i seaduse põhjal pinget takistis, induktoris ja kondensaatoris,

$$\begin{aligned} E_R &= I_R \cdot Z_R = 77.8 \cdot 10^{-3} e^{j1.41} \cdot 250 e^{j0} \approx 19.45 e^{j1.41} = 19.45 e^{j81^\circ}, \\ E_L &= I_L \cdot Z_L = 77.8 \cdot 10^{-3} e^{j1.41} \cdot 245 e^{j\frac{\pi}{2}} \approx 19.06 e^{j2.98} = 19.06 e^{j171^\circ}, \\ E_C &= I_C \cdot Z_C = 77.8 \cdot 10^{-3} e^{j1.41} \cdot 1768 e^{j(-\frac{\pi}{2})} \approx 137.55 e^{j(-0.16)} \\ &= 137.55 e^{j(-9^\circ)}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇



Teeme kokkuvõtva tabeli:

	takisti ( $R$ )	induktor ( $L$ )	kondensaator ( $C$ )	kokku
$E$	$3.11 + 19.20j$	$-18.81 + 3.07j$	$135.79 - 21.91j$	$120 + 0j$
	$19.45 V, 81^\circ$	$19.06 V, 171^\circ$	$137.55 V, -9^\circ$	$120 V, 0^\circ$
$I$	$0.012 + 0.077j$	$0.012 + 0.077j$	$0.012 + 0.077j$	$0.012 + 0.077j$
	$77.8 mA, 81^\circ$	$77.8 mA, 81^\circ$	$77.8 mA, 81^\circ$	$77.8 mA, 81^\circ$
$Z$	$250 + 0j$	$0 + 245j$	$0 - 1768j$	$250 - 1523j$
	$250 \Omega, 0^\circ$	$245 \Omega, 90^\circ$	$1768 \Omega, -90^\circ$	$1543 \Omega, -81^\circ$

Paneme tähele, et kuigi vooluallika pinge on 120 volti, siis kondensaatoris on see koguni 137.55 volti!

◇ ◇ ◇





# Kirjandus

- [1] D. R. Bellhouse. Abraham De Moivre: Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications. CRC Press, 2011.
- [2] D. R. Causton. A Biologist's Basic Mathematics. Edward Arnold, 1983.
- [3] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).
- [4] E. Dummit. Calculus I. Introduction to Differentiation (veebikonspekt). 2013.
- [5] C. Fletcher. Physics with Calculus. Volume I (Classical Mechanics). California, 1994.
- [6] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.
- [7] G. Gamow. My World Line. Viking Press, 1970.
- [8] R. J. Gillings. The So-Called Euler-Diderot Incident. Am. Math. Mont. vol. 61 (2), 77-80, 1954.
- [9] J. Grabiner. A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings. MAA, 2010.
- [10] J. V. Grabiner. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Amer. Math. Mon. 90 (3): 185-194, 1983.
- [11] J. Grimbleby. Systems and Circuits (loengukonspekt). University of Reading.
- [12] A. P. Hillman, G. L. Alexanderson, M. E. Newton. Complex Numbers and Trigonometry (veebikonspekt), 2005.
- [13] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.
- [14] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.
- [15] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross,
- [16] K. Kaarli. Algebra praktikum. Lineaarvõrrandisüsteemid. Tartu, 1986.
- [17] M. Kilp. Algebra I. Tartu, 2005.

- [18] M. Kline. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 2*. Oxford University Press, 1990.
- [19] J. Knisley, K. Shirley. *Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt)*. 2002.
- [20] T. R. Kuphaldt. *Lessons In Electric Circuits, Volume II - AC*. 2007.
- [21] Ü. Lepik. *Kaos ja kord*. Tartu Ülikooli Kirjastus 1997.
- [22] L. Loone, V. Soomer. *Matemaatilise analüüsi algkursus*. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [23] V. Luigelaht, E. Reiman. *Matemaatika tehnikumidele*. Tallinn, Valgus 1978.
- [24] C. A. Pickover. *The Math Book*. Sterling, New York, 2009.
- [25] I. Piir. *Füüsika ajalugu*. Ilmamaa, 2013.
- [26] P. Puusemp. *Lineaaralgebra*. Avita, 2008.
- [27] G. Rägo. *Kõrgem matemaatika I*. Tallinn, 1962.
- [28] T. Sauer. *Numerical analysis*. Pearson, 2012.
- [29] S. W. Smith. *The Scientist and Engineer Guide to Digital Signal*
- [30] V. Soomer. *Kõrgem matemaatika (loengukonspekt)*.
- [31] V. Soomer. *Matemaatiline analüüs*. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.
- [32] I. Stewart. *17 Equations that Changed the World*. Profile Books, 2013.
- [33] S. T. Tan. *Single Variable Calculus*. Brooks/Cole 2010.
- [34] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. *Thomas' Calculus 11th*. Pearson, 2005.
- [35] K. Tsishchanka. *Section 9.4. Areas and Lengths in Polar Coordinates (veebikonspekt)*. New York University 2010.
- [36] A. J. Washington. *Basic Technical Mathematics with Calculus*. 10th ed. Pearson, 2014.