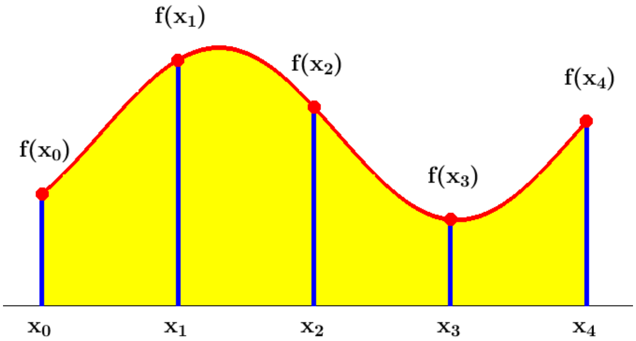
MTMM.00.340
Kõrgem matemaatika 1



2018 sügis

Ülesannete kogu
2. osa

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{aligned}
(Const)' &= 0 & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' &= -\sin x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(e^x)' &= e^x & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\
(a^x)' &= a^x \ln a & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
(\ln|x|)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0\,dx = C$

(2) $\int dx = x + C$

(3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

Sisukord

Praktikum 13

Riemanni integraal ja numbriline integreerimine

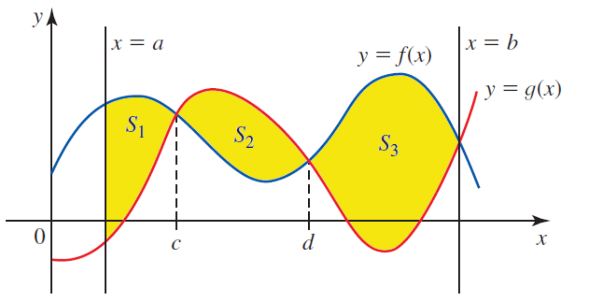
Selles praktikumis tuleks võimalikult palju kasutada arvuti abi.

13.1 Kõvertrapets ja selle pindala

Kõvertrapetsi pindala

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{13.1}$$

Kui f ja g graafikud lõikuvad, siis tuleb leida lõikepunktid ja arvutada kogu pindala osade kaupa.



Ülesanne 13.1. Järgnev tabel näitab mudelrongi kiirust esimese 10 sekundi jooksul.

Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)	Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)
0	0	6	28
1	30	7	15
2	56	8	5
3	25	9	15
4	38	10	0
5	33		

Leidke rongi poolt läbitud teepikkus, moodustades 10 osalõiku pikkusega 1 ning summeerides kord vasak-, kord parempoolsete ristkülikute pindalad.

Ülesanne 13.2. Leidke järgmiste joontega ja x-teljega määratud kujundite pindalad ligikaudselt, jagades toodud osalõigud n võrdseks osaks ning summeerides tekkinud ristkülikud. Ristkülikuid saab tekitada erinevat moodi. Valige ise sobiv meetod ja proovige erinevaid võimalusi.

(a) $y = 3x$, $x \in [0, 3]$, $n = 3$ ja $n = 10$

(b) $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, $n = 5$ ja $n = 10$

(c) $y = 4x - x^2$, $x \in [1, 4]$, $n = 6$ ja $n = 10$

(d) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$, $n = 3$ ja $n = 12$

Ülesanne 13.3. Koostage järgmiste joontega piiratud tasandiliste kujundite pindala arvutamiseks õiged integraalid (või nende summad). Integraale ei ole vaja välja arvutada, kuid joonise tegemine võib olla abiks.

(a) $y = x^2,\ x + y = 2$

(b) $y = \sqrt{4 - x^2},\ y = 0$

(c) $y = x^2,\ y = x^3$

(d) $y = \frac{x^2}{4},\ y = 1,\ y = x$

(e) $y = 4 - x^2,\ y = -x + 2$

(f) $y = \frac{x^3}{3} - x,\ y = \frac{x}{3}$

Ülesanne 13.4. Visandage integraalimärgi all olevast funktsioonist graafik ning arvutage integraali väärtus, kasutades tuntud geomeetriliste kujundite pindala leidmise valemeid.

(a) $\int\limits_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ **(b)** $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$ **(c)** $\int\limits_{-1}^{1} (1 - |x|)\, dx$ **(d)** $\int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$

Ülesanne 13.5. Selgitage pindala mõiste kaudu, miks kehtib võrdus $\int\limits_{0}^{1} x^3\, dx = \int\limits_{1}^{2} (x-1)^3\, dx$?

Ülesanne 13.6. Kirjutage vahe $\int\limits_{3}^{8} f(x)\, dx - \int\limits_{4}^{8} f(x)\, dx$ ühe määratud integraalina.

Ülesanne 13.7. Milliste a ja b väärtuste korral on integraali $\int\limits_{a}^{b} (x - x^2)\, dx$ väärtus suurim?

13.2 Määratud integraal, Newton'i-Leibniz'i valem

Valem 13.1

Newton'i-Leibniz'i valem

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \tag{13.2}$$

Ülesanne 13.8. Arvutage integraalid kasutades Newton'i-Leibniz'i valemit.

(a) $\displaystyle\int\limits_{-3}^{2} (2x^2 + 1)\, dx$

(b) $\displaystyle\int\limits_{-5}^{-1} \frac{(x+5)\, dx}{x^2}$

(c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$

(d) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x^2 + 1}\, dx$

(e) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

(f) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^3 2x}{\cos x^3}\, dx$

13.3 Numbriline integreerimine *

Trapetsmeetod.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

Simpsoni meetod (liitvalem).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\big(f(x_0)+4\,f(x_1)+2\,f(x_2)+4\,f(x_3) + \cdots + 2\,f(x_{n-2})+4\,f(x_{n-1})+f(x_n)\big).$$

Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise n jaoks.

Ülesanne 13.9. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused trapetsmeetodiga märgitud osalõikude n korral.

(a) $\int_0^1 (1-x^2)\,dx$, n=3 **(b)** $\int_1^4 (1+\sqrt{x})\,dx$, n=6 **(c)** $\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$, n=5

Ülesanne 13.10. Kahe alajaama vaheline vahemaa on täpselt 100 m. Alajaamade ühendamiseks vajaminev telefonikaabli pikkus L (arvestades lõtku) arvutatakse valemiga

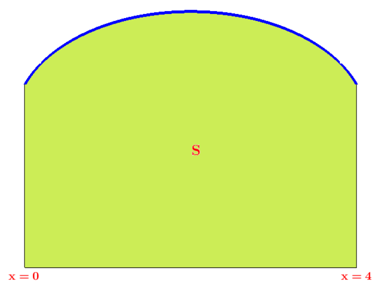
$$L = 2\int_0^{50} \sqrt{6.4\cdot 10^{-7}x^2+1}\,dx.$$

Kasutades 10 osalõiku $n = 10$, arvutage trapetsmeetodiga kaabli pikkus L.

Ülesanne 13.11. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused Simpsoni meetodiga märgitud osalõikude n korral.

(a) $\int_0^2 (1+x^3)\,dx$, n=2 **(b)** $\int_0^8 x^{1/3}\,dx$, n=4 **(c)** $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx$, n=4

Ülesanne 13.12. Raudteetunneli ristlõige on kujuga, mis tekib ülalt kaarega $y = 4+\sqrt{1+8x-2x^2}$, alt x-teljega ja külgedelt sirgetega $x = 0$ ja $x = 4$ piiratud alast.Kui tunnel on 100 m pikkune ja kõik muud ühikud on samuti meetrites, siis kui mitu kuupmeetrit tulvavett on võimalik vajaduse korral tunnelisse lasta (eeldame, et tunnelit saab mõlemalt poolt sulgeda)? Arvutage ruumala trapetsmeetodiga ja Simpsoni meetodiga $n = 8$ jaoks. Kumb tulemus võiks olla täpsem?

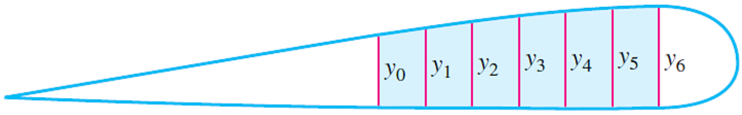


Ülesanne 13.13. Lennuki üks tagumistest tiibadest (stabilisaator) on kujuga, mida piirab x-telg ja funktsiooni $y = f(x)$ graafik, kus

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{0.6}.$$

Koostage pindala arvutamiseks integraal. Arvutage lennuki tiiva pindala trapetsmeetodiga ja Simpson'i meetodiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 13.14. (F) Uue lennuki tootmiseks on igasse lennuki tiiba vaja konstrueerida kütusemahuti (joonisel näidatud alas), millesse mahub 22240 N kütust tihedusega 6600 N/m^3.



Leidke Simpsoni meetodiga, kui sügav peab olema kütusemahuti, kui

$$y_0 = 0.457,\quad y_1 = 0.488,\quad y_2 = 0.549,\quad y_3 = 0.579,\quad y_4 = 0.610,\quad y_5 = y_6 = 0.640.$$

Ühikud on meetrites ja lõigu pikkus on siin 0.3048 m.

Ülesanne 13.15. (K) Gaasi paisumisel 2 cm^3-st 10 cm^3-ni tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$W = \int_2^{10} 500\, V^{-1.4}\, dV$$

Arvuage töö W Simpsoni meetodiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 13.16. (IT) Robotkäsi on disainitud liikuma trajektooril

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) & = \frac{20}{3} + 0.3 \cdot t + 3.9 \cdot t^2 - 2.3 \cdot t^3 \\ y(t) & = \frac{10}{3} + 0.3 \cdot t + 0.9 \cdot t^2 - 2.7 \cdot t^3 \end{array} \right\}.$$

Robotkäe poolt esimese 2 sekundiga läbitud teepikkus arvutatakse valemiga

$$s = \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Arvutage läbitud teepikkus s Simpsoni meetodiga $n = 6$ osalõigu korral. Kirjutage programm üldise ajavahemiku $[t_1, t_2] \subset [0, 2]$ jaoks, kasutades n osalõiku (n on suvaline paarisarv).

Ülesanne 13.17. (M) Teoorias on näidatud, et integraali $\int_a^b f(x)\, dx$ arvutamisel Simpsoni meetodiga tehakse viga

$$M \cdot \frac{(b-a)^5}{180\, n^4},$$

kus M on f neljanda tuletise absoluutväärtuse maksimaalne väärtus vahemikus (a, b). Hinnake maksimaalset viga integraali $\int_2^3 \frac{dx}{2x}$ jaoks, kui $n = 4$.

Ülesanne 13.18. (M) Arvestades eelmises ülesandes toodud Simpsoni valemi jääkliiget, siis leidke vajalik n väärtus, et arvutada integraalid nii, et viga oleks väiksem kui 10^{-4}.

(a) $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\, dx$ **(b)** $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\, ds$ **(c)** $\int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx$ **(d)** $\int_0^2 \sin(x+1)\, dx$

Ülesanne 13.19. (M) Vea funktsioon (*error function*)

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

on väga tähtsal kohal tõenäosusteoorias, soojuse levimise ja näiteks signaali levimise uurimisel. Seda integraali saab leida vaid numbriliste meetoditega. Kasutades Simpsoni meetodit $n = 10$ korral, arvutage $erf(1)$. Lõigus $[0, 1]$ kehtib hinnang

$$\left| \frac{d^4}{dt^4} \left(e^{-t^2} \right) \right| \le 12.$$

Hinnake oma arvutustes tehtud maksimaalset viga.

Praktikum 14

Määratud integraali arvutamine

14.1 Määratud integraali omadused, muutujavahetus

Omadus 14.1

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{14.1}$$

Omadus 14.2

Aditiivsus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{14.2}$$

Omadus 14.3

Integraal sümmeetrilisel lõigul

kui f on paaritu, siis

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0, \tag{14.3}$$

kui f on paaris, siis

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx. \tag{14.4}$$

Ülesanne 14.1. Integreerige, kasutades määratud integraali aditiivsuse omadust.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{4} |2-x|\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x(x-2)|\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,dt$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\sqrt{(x^2-1)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-5}^{3} |x^2+2x-3|\,dx$

Ülesanne 14.2. Arvutage integraalid muutuja vahetuse või diferentsiaali märgi alla viimise teel.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+2)^5\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3x+4}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3(2x^4-5)^6\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0{,}1}^{e} \frac{|\ln 5x|\,dx}{x}$

(f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi} \sin 2x\cos^2 2x\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Ülesanne 14.3. Arvutage integraalid märgitud muutuja vahetusega.

(a) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4},\ t = x+1$

(b) $\int\limits_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}},\ t = \sqrt{1+3x}$

(c) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx,\ x = \sin t$

(d) $\int\limits_0^2 \frac{6x}{(1+2x)}\,dx,\ t = 1+2x$

Ülesanne 14.4. Integreerige järgmised funktsioonid, võttes integreerimislõiguks funktsiooni määramispiirkonna.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -1 \le x \le 0, \\ \sqrt{x}, & \text{kui } 0 < x \le 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos^{-2} x, & \text{kui } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ \sin^{-2} x, & \text{kui } \frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

> Järgnevad praktilisi ülesandeid on soovitav lahendada alles peale järgmise praktikumi ülesannete lahendamisi.

Ülesanne 14.5. (F) Kui molekulid massiga m ja kiirusega v rõhuvad vastu seina, siis seinale avalduv kogurõhk P leitakse valemiga $P = mnv^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos^2(\theta)\,d\theta$, kus n on molekulide arv ühikruumalas ja θ on molekulide liikumissuuna ja seina vaheline nurk. Lihtsustage P avaldis.

Ülesanne 14.6. (F) Termodünaamikas mõõdetakse korrapäratust entroopiaga S. Mida suurem on korrapäratus, seda suurem on ka entroopia. Entroopia muutus temperatuurivahemikus T_1 kuni T_2 väljendatav valemiga

$$\Delta S = \int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{m\,C_s\,dT}{T} \quad \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}},$$

kus m on keha mass ja C_s on keha erisoojus. 500 g 80 °C-list vett valatakse jää peale. Vee erisoojus on 4190 J/(kg · K). Milline on vee jahtumise protsessi entroopia muutus? (NB! Ärge unustage teisendada temperatuurid kelviniteks: T(K)=t (°C)+273,15 .)

Ülesanne 14.7. (K) Olgu K tasakaalukonstant CO_2 ja H_2 moodustamiseks konstantsel temperatuuril T ainetest CO ja H_2O. Termodünaamikast on teada van't Hoff'i võrrand

$$\frac{d}{dT}\ln K = \frac{\Delta H}{RT^2}.$$

Eeldades, et ΔH (termodünaamiline potentsiaal) on temperatuurist sõltumatu, leidke $\ln K$ sõltuvus temperatuurist T (s.t. integreerige võrrand). Võttes $\Delta H = 42.3$ kJ/mol, leidke, kui palju muutub $\ln K$, kui tõsta temperatuur 500 K-lt 600 K-ni. Siin $R \approx 8.31$ J/(K·mol) on ideaalse gaasi konstant.

Ülesanne 14.8. < * > Leidke $f(4)$, kui $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$.

Praktikum 15

Määratud integraali arvutamine

15.1 Määratud integraali ositi integreerimine

Valem 15.1

Ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ülesanne 15.1. Arvutage integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \ln x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x^2}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x^3\cos\frac{x}{2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x\sin x\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\arctan x\,dx$

Ülesanne 15.2. Arvutage integraalid

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(8x^{2015}+\sin x\right)dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^4-\cos x\right)dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{5x}{(4+x^2)^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2+1}{x^2-4}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+4)\sqrt{x^2+8x+7}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{-x}\cos 2x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x+3}{x^2+4}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_{1}^{3} x^x(1+\ln x)\,dx$

Ülesanne 15.3. Olgu f pidev reaalarvude hulgas. Millised järgmistest võrdustest on õiged suvaliste reaalarvude a ja b korral? Põhjendage.

(a) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x-3)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{3} f(x)\,dx - \int_{b}^{3} f(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{3a}^{3b} f(x)\,dx = 3\int_{a}^{b} f(3x)\,dx$

15.2 Täiendavaid integreerimisvõtteid *

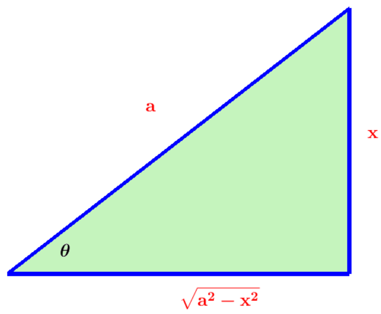
15.2.1 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > |x|,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \sin\theta \quad \text{või} \quad x = a \cos\theta.$$

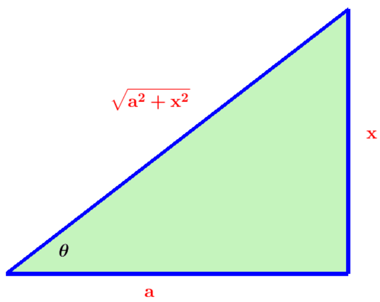


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = a \tan\theta \quad \text{või} \quad x = a \cot\theta.$$

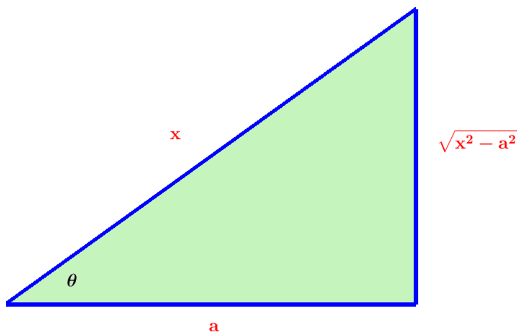


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad |x| > a,$$

siis võib sobida muutuja vahetus

$$x = \frac{a}{\cos\theta} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin\theta}.$$



Ülesanne 15.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int x\sqrt{16 - x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2\, dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{3\, dz}{z^2\sqrt{z^2 + 9}}$

(g) $\displaystyle\int \frac{6\, dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$

(h) $\displaystyle\int \frac{6\, dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$

(i) $\displaystyle\int \frac{4x^3\, dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

(j) $\displaystyle\int_0^{0.5} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

(k) $\displaystyle\int_0^4 \frac{9}{(t^2 + 9)^{3/2}}\, dt$

(l) $\displaystyle\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2}\, dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{6\, dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

(n) $\displaystyle\int_{2.5}^3 \frac{dy}{y\sqrt{4y^2 - 9}}$

(o) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

(p) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

(q) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}$

Ülesanne 15.5. Kujund on piiratud joontega $y = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{5}$ ja $y = 0$. Arvutage kujundi pindala.

Ülesanne 15.6. Maantee äravoolutoru ristlõige on ellipsi $x^2 + 9y^2 = 9$ kujuline. Arvutage ristlõike pindala (ühikud on meetrites).

Ülesanne 15.7. **(F)** Robotkäe kaks liigest liiguvad edasi-tagasi joonel $y = 3\ln x$ punktist $x = 1\,\text{cm}$ punkti $x = 4\,\text{cm}$. Leidke ühenduse pikkus (s.t. joone kaare pikkus).

Ülesanne 15.8. **(F)** Elektrilaeng Q on jaotunud piki kaablit pikkusega $2a$. Elektriline potentsiaal punktis P, mis asub b ühiku kaugusel kaabli keskpunktist, võrdub

$$V = kQ\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{b^2+x^2}}.$$

Siin k on konstant ja x on kaugus piki kaablit. Leidke integraali väärtus.

Ülesanne 15.9. Kasutades muutuja vahetust kujul $u = (ax+b)^{1/q}$, leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{8-x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int x(x-4)^{2/3}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4x+1)^{5/2}}$

Ülesanne 15.10. < ∗ > Masina detaili elektriisolatsiooni rõngas on selline keha, mille moodustab joontega $y = x^2\sqrt{x^2-4}$, $y = 0$ ja $x = 2.5$ piiratud kujundi pöörlemine ümber y-telje. Arvutage rõnga ruumala (cm^3).

15.2.2 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Lihtsamal juhul tasub proovida trigonomeetrilisi asendusi

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}. \tag{15.1}$$

Ülesanne 15.11. Leidke järgmised integraalid diferentsiaalimärgi alla viimise võttega või siis avaldise teisendamise abil.

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \cos^5 2x\,dx$ **(g)** $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^2 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int 8\cos^4 2\pi x\,dx$ **(h)** $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^6 x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ **(f)** $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx$ **(i)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^4 x}\,dx$

Ülesanne 15.12. **(F)** Valguse intensiivsus avaldub integraalina

$$I = A\int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(b\pi(c-x))\,dx,$$

kus A, a, b ja c on konstandid. Leidke I väärtus ning lihtsustage avaldist nii palju kui võimalik.

Ülesanne 15.13. **(F)** Vedeliku voolamisel ümber silindri avalduv tõstejõud L avaldub valemiga

$$L = k\int_0^{2\pi} (a\sin\theta + b\sin^2\theta - b\sin^3\theta)\,d\theta,$$

kus k, a ja b on konstandid. Leidke L väärtus.

Kui integraalimärgi all on murd trigonomeetrilistest funktsioonidest, siis töötab tihti universaalne muutuja vahetus

$$t = \tan\frac{x}{2}, \qquad \text{kui } x \in (-\pi, \pi). \tag{15.2}$$

Sel juhul

$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \tag{15.3}$$

ja

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{15.4}$$

Ülesanne 15.14. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1-2\sin x}$ **(g)** $\displaystyle\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$ **(e)** $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x}$ **(h)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x}$ **(f)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\cos x}$ **(i)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x-\cos x-1}$

Ülesanne 15.15. Proovides asendusi $t = \sin x$, $t = \cos x$ või $t = \tan x$, leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{3+\sin x}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{(1-\cos x)^2}\,dx$ **(f)** $\displaystyle\int \frac{1+9\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,dx$

Ülesanne 15.16. (M) $< * >$ Leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{2\sin x+3\cos x}{3\sin x+2\cos x}\,dx$

Ülesanne 15.17. $< * >$ Leidke parabooli $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$ kaare pikkus.

Ülesanne 15.18. (IT) $< * >$ Robot on programmeeritud läbima spiraalset trajektoori

$$x(t) = t\,\cos t, \quad y(t) = t\,\sin t,$$

kus t on aeg sekundites. Kui pika teekonna läbis robot aja $t = 10$ ja $t = 20$ vahel? Milline oli roboti keskmine kiirus?

Praktikum 16

Määratud integraali rakendusi

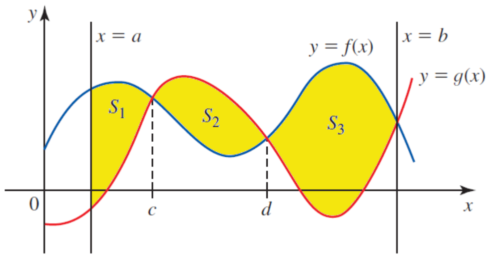
16.1 Kõvertrapetsi pindala

Kõvertrapetsi pindala.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ kui } f(x) \geq 0.$$

Üldjuhul

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$



Ülesanne 16.1. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad.

(a) $y = 4x,\ y = 0,\ x = 1$

(b) $y = x,\ y = 3 - x,\ x = 0$

(c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2,\ x = 0,\ y = 4\ (x > 0)$

(d) $y = 8 - 2x^2,\ y = 0$

(e) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

(f) $y = x^2,\ y = x^3$

(g) $y = \frac{3}{x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3$

(h) $y = \sqrt{x-1},\ y = 3 - x,\ y = 0$

(i) $y = \frac{1}{2}x^5,\ x = -1,\ x = 2,\ y = 0$

(j) $y = x^2,\ y = x^{1/3},\ x = -2,\ x = 2$

(k) $y^2 = x^4(1 - x^3)$

16.2 Kõversektori pindala

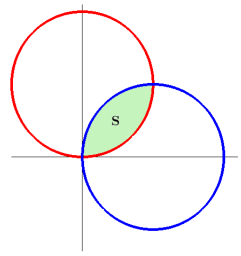
Kõversektori pindala. Pideva mittenegatiivse funktsiooni $r(\theta)$ poolt määratud kõverssektori pindala avaldub kui

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta,$$

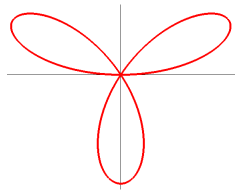
kus θ on nurk radiaanides.

Ülesanne 16.2. Leidke joontega $r = 2\sin\theta$ (ringjoon), $\theta = \frac{\pi}{4}$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$ piiratud kujundi pindala.

Ülesanne 16.3. Leidke kardioidi $r = 2(1 + \cos\varphi)$, $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$ pindala.



Ülesanne 16.4. Leidke kahe ühikringi $r = 2\sin\theta$ ja $r = 2\cos\theta$ poolt piiratud kujundi pindala S.



Ülesanne 16.5. Leidke kolmelehelise roosi $r = 2\sin 3\varphi$ pindala. Nurk $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ joonistab välja ühe õie. Kas sama tulemuse saaksime, kui võrrandiks oleks $r = 2|\sin 3\varphi|$?

Ülesanne 16.6. Pindala, mis jääb kardioidi $r = \cos\theta + 1$ sisse, kuid ringist $r = \cos\theta$ välja, ei võrdu avaldisega

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta\right) d\theta = \pi.$$

Miks? Põhjendage oma vastust. Leidke tegelik pindala.

16.3 Joone kaare pikkus

Valem 16.1

Ilmutatud kujul

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Valem 16.2

Parameetrilisel kujul

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Ülesanne 16.7. Leidke järgmiste joonte märgitud kaarte pikkused.

(a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 1$, $x \in [0, 2]$

(b) $x = y^{3/2}$, $0 \le y \le 4$

(c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, $1 \le x \le 2$

(d) $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$, $2 \le y \le 3$

(e) $y = \ln(\sin(x))$, $0 < a \le x \le \frac{\pi}{2}$

Ülesanne 16.8. Kasutage sirglõigu $y = 3 - 2x$, $0 \le x \le 2$, pikkuse leidmiseks kaare pikkuse valemit. Kontrollige oma vastust, leides sirglõigu pikkuse kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkuse.

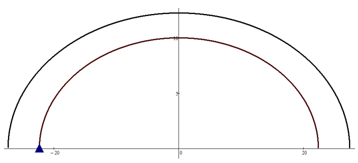
Ülesanne 16.9. Leidke ringjoone $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, $t \in [-5/4\pi, -9/4\pi]$ kaare pikkus.

Ülesanne 16.10. Leidke astroidi $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ pikkus.

Ülesanne 16.11. $< * >$ Staadionil on kaks jooksurada (märgitud joontega), mis on planeeritud võrranditega

$$f_1(x) = \sqrt{100 - 0.2\,x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{150 - 0.2\,x^2}.$$

Sisemise rea start algab punktist $(-\sqrt{500}, 0)$. Millisesse punkti tuleb stardijoon paigutada välisel rajal, kui finiš asub x-teljel, jookstakse kellaosuti liikumise suunas ja läbitud distantsid peavad olema mõlemal rajal võrdsed? (Integreerimisel võib vaja minna arvuti abi.)

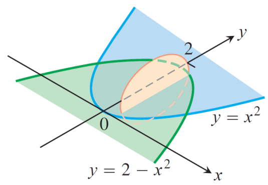


16.4 Keha ruumala ristlõigete kaudu

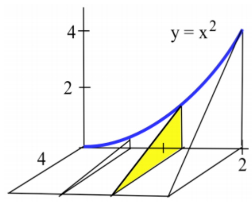
Ruumala ristlõigete pindalade $S(x)$, $S(y)$, $S(z)$ kaudu:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx, \quad V = \int_{y_1}^{y_2} S(y)\,dy, \quad V = \int_{z_1}^{z_2} S(z)\,dz.$$

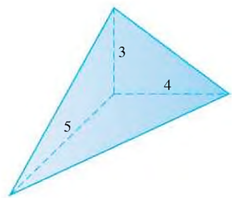
Ülesanne 16.12. Keha asetseb x-teljega ristuvate tasandite $x = -1$ ja $x = 1$ vahel. Ristlõiked on risti x-teljega ning moodustavad ringid, mille diameetrite otspunktid asuvad paraboolidel $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$. Leidke keha ruumala.



Ülesanne 16.13. Leidke ruumala kujundile, millel on kolmnurksed ristlõiked ja mille kõrgus jälgib joone $y = x^2$ kuju. Kolmnurkade alused on pikkusega 4 ja vaatleme lõiku $x \in [0, 2]$.



Ülesanne 16.14. Joonisel on kujutatud kolmnurksete külgedega püramiid, mille kolm külge on omavahel risti ning mille servade pikkused on 3, 4 ja 5. Leidke püramiidi ruumala.



Ülesanne 16.15. Kaks võrdse raadiusega silindertoru ristuvad. Leidke silindrite lõikumisel tekkiva kujundi (mõlema silindri ühisosa) ruumala.

Ülesanne 16.16. **(F)** Kirjeldage mõnda praktilist viisi, kuidas mõõta teie käe ruumala (sõrmedest küünarnukini).

16.5 Pöördkeha ruumala

Pöördkeha ruumala vastavalt pöörlemisele ümber x- ja ümber y-telje:

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx, \quad V = \pi \int_{y_1}^{y_2} f^2(y)\,dy.$$

Ülesanne 16.17. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x-telje.

(a) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 3$

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 2$

(c) $y = x^2 + 1$, $y = x + 1$

(d) $y = x^4$, $x = 0$, $y = 1$

(e) $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, $y = 0$

(f) $xy = 2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Ülesanne 16.18. Leidke pöördkoonuse ruumala. Koonus tekib sirge $y = a\,x$ $(a > 0)$ pöörlemisel ümber x-telje ja on kõrgusega $h > 0$.

Ülesanne 16.19. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y-telje.

(a) $y = 2x^{1/3}$, $x = 0$, $y = 2$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = 0$, $x = 3$

(c) $y = 3\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 3$

(d) $y^2 = x$, $y = 5$, $x = 0$

(e) $y = \sqrt{4 - x^2}$, I veerand

(f) $y = 8 - x^3$, $x = 0$, $y = 0$

Ülesanne 16.20. Kerakujulisest kõrvitsast raadiusega 22 cm valmistati kaanega anum, lõigates ära poole raadiuse kõrgune osa ning uuristades ülejäänu tühjaks. Mitu liitrit vedelikku mahub saadud anumasse, kui kõrvitsa koore paksus oli 2 cm?

Ülesanne 16.21. Portselanist vaas tehakse selliselt, et parabooli $y = 2x^2$ ja sirge $y = x + 1$ vahele jääv pind pöörleb ümber x-telje ($x > 0$). Arvutage vajaminev portselani kogus.

Ülesanne 16.22. Poolkerakujuline kauss raadiusega R täidetakse veega kõrguseni h. Leidke kausis oleva vee ruumala.

Ülesanne 16.23. $< * >$ Olgu kaks ringsilindrit põhjaraadiustega a ja b ($a > b > 0$). Lõigaku need kaks silindrit üksteist täisnurga all (teljed lõikuvad). Näidake, et siis mõlema silindri ühise osa ruumala avaldub valemiga

$$V = 8 \int_0^b \sqrt{b^2 - z^2}\sqrt{a^2 - z^2}\, dz.$$

Leidke konkreetne ruumala, kui 4 cm raadiusega silindrist puuritakse risti välja 2 cm raadiusega auk (integreerimine ise võib vajada arvuti abi).

16.6 Määratud integraali rakendusi füüsikas*

16.6.1 Teepikkus

Valem 16.3

Olgu s sirgjooneliselt liikuva keha poolt läbitud teepikkus ja Δs nihe (kaugus algpunktist). Siis

$$\mathbf{s} = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(\mathbf{t})|\, \mathbf{dt}, \quad \mathbf{\Delta s} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{t})\, \mathbf{dt}. \tag{16.1}$$

Ülesanne 16.24. Lennuk lendab tugevnevas vastutuules kiirusega $v = 50(12 - t)$ km/h. Kui kaugele jõuab lennuk oma algpunktist kahe tunniga?

Ülesanne 16.25. Rongi kiirus v (m/s) alates pidurdamise algusest on antud valemiga

$$v(t) = \sqrt{400 - 20t}.$$

Leidke rongi pidurdusteekond (pidurdamise algusest seiskumiseni).

Ülesanne 16.26. Ralliauto kiiruslegend ütleb, et kõigepealt tuleb liikuda 6 minutit kiirusega $v(t) = 2000t - 1000t^2$ km/h, seejärel hoida saavutatud kiirust 12 minutit ning siis aeglustada kiirusega $190 - 900t$ km/h (siin aega on hakatud lugema pidurduse algusest). Kui kaugele on ralliauto esimese 24 minutiga jõudnud?

Ülesanne 16.27. Eelmisel õhtul jõulupeolt tulnud tudeng näeb jõuluvana, kes liigub sirgel rajal kiirusega $v(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ m/s 40 meetri kaugusel oleva postkasti poole. Kui pika vahemaa läbib jõuluvana 6 sekundi jooksul? Kas ta jõuab selle ajaga postkastini?

Ülesanne 16.28. Postiljon seisab postkasti juures ning märkab suurt koera, mille peale hakkab ta jooksma kiirusega

$$\begin{cases} v = at + v_0, & 0 \le t \le 4, \\ v = const, & 4 < t \le 10. \end{cases}$$

(a) Avaldage postiljoni poolt läbitud teepikkus s ja kiirus v esimese nelja sekundi jaoks kiirenduse a kaudu.

(b) Leidke kiirendus a kui on teada, et 10 sekundi jooksul läbis postiljon 56 meetrit.

Ülesanne 16.29. Langevarjurid A ja B asuvad 1950 m kõrgusel lendavas helikopteris. Langevarjur A hüppab esimesena, avades langevarju 4 sekundit pärast hüpet. Seejärel tõuseb helikopter 2130 m kõrguseni. Langevarjur B hüppab 45 sekundit A-st hiljem, avades langevarju 13 sekundit pärast hüpet. Mõlemad hüppajad langevad avatud langevarjudega ühtlasel kiirusel 5 m/s. Jätame lihtsuse mõttes õhutakistuse arvestamata.

(a) Millisel kõrgusel avaneb A langevari?

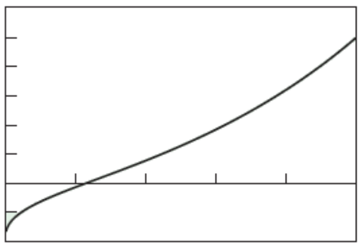
(b) Millisel kõrgusel avaneb B langevari?

(c) Kumb langevarjur maandub esimesena?

Ülesanne 16.30. Osake alustab liikumist punktist $s(0) = 9$ ja liigub kiirusega

$$v(t) = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}, \quad 0 \le t \le 5.$$

Leidke läbitud teepikkus ja kui kaugele algpunktist osake liikus.



16.6.2 Kiirus ja kiirendus

Ülesanne 16.31. Võõrkeha sattumisel verre luuakse konkreetses mudelis organismi kaitseks antikehi kiirusega $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$ tuhat antikeha minutis. Leidke antikehade arv 5 minutit pärast võõrkeha sattumist verre, kui alghetkel antikehi ei ole.

Ülesanne 16.32. (F) Õhupall tõuseb õhku kiirusega 4 m/s.

Leidke õhupallilt alla visatud liivakoti kiirus 1.5 sekundi pärast selle lahti laskmist.

Ülesanne 16.33. Suusataja - ilmselt mitte meie oma - laskub mäest kiirendusega

$$a = \frac{600t}{(60 + 0.5t^2)^2} \quad \text{m/s}^2.$$

Leidke suusataja kiirus v aja t funktsioonina, kui $v(0) = 0$.

Ülesanne 16.34. Auto (aeglustav) kiirendus avarii korral on 250 m/s^2 (maksimaalne lubatud kiirendus, et inimene võiks ellu jääda). Kui auto sõidab kiirusega 96 km/h, siis millise vahemaa vältel peab avanema õhkpadi, et viimasest midagi ka kasu oleks?

Ülesanne 16.35. Maantee ehitamiseks tuleb planeerida kõrvalteelt peateele sõitmiseks kiirendusrada. Leidke minimaalne kiirendusraja pikkus, kui kiirendusrajale sõidetakse kiirusega 25 km/h ja 12 sekundiga tuleb raja lõpus saavutada kiirus 95 km/h.

Ülesanne 16.36. **(F)** Vooluahelat läbib vool tugevusega

$$i = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{A}.$$

Ahel sisaldab veel laadimata kondensaatorit mahtuvusega 2.0 μF. Kui palju võtab aega, et pinge kondensaatoris

$$V = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

jõuaks 120 voldini? Siin C on kondensaatori mahtuvus faradites.

Ülesanne 16.37. Lennuki katapult võib lendurile anda kahe sekundiga kiiruseks 260 km/h. Leidke, mitu $g = 9.8$ m/s^2 väärtust on sel juhul lenduri keskmine kiirendus.

Ülesanne 16.38. **(IT)** Arvuti riistvara usaldatavuse R (protsentides) muutumise kiirus avaldub valemiga

$$\frac{dR}{dt} = -2.5(0.05t+1)^{-1.5},$$

kus t on aeg tundides. Leidke R kahe ööpäeva jaoks, kui $R(0) = 100$.

Ülesanne 16.39. **(Maj)** Kui eeldada, et $K(t)$ tähistab firma kapitali ning $I(t)$ investeeringute muutumise kiirust, siis kehtib valem

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt.$$

Leidke firma kapitali muut ΔK ajaperioodil $1 \le t \le 8$, teades et, investeeringute muutumise kiirus allub seaduspärasusele $I(t) = 1 + 3\sqrt[3]{t^2}$.

Ülesanne 16.40. Raudteejaamast väljuv elektrirong liigub esimese tunni jooksul kiirusega $v(t) = 90t^2 - 20t^3$ km/h, kus t on rongi liikumise aeg tundides. Arvutage elektrienergia kulu W (kWh) esimese sõidutunni jooksul, kui

$$W(T) = \int_0^T (a(t)+2)v(t)\,dt.$$

16.6.3 Töö

Valem 16.4

Mööda x-telge punktist $x = a$ punkti $x = b$ liikumissuunas muutuva jõu $F(x)$ poolt tehtav töö avaldub valemiga

$$W = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{16.2}$$

Hooke'i seadus ütleb, et vedru normaalpikkusest x ühikut välja venitatud või kokkusurutud asendis hoidmiseks vajaminev jõud on võrdeline pikkusega x:

$$F = k \cdot x.$$

Parameeter k on vedru karakteristik, mida mõõdetakse jõuühikutes pikkusühiku kohta ja mida nimetatakse ka vedrukonstandiks.

Ülesanne 16.41. **(F)** Kui palju tehakse tööd vedru kokku surumisel 0.25 m võrra, kui konstant $k = 16$ N/m?

Ülesanne 16.42. **(F)** *New York City Transit Authority* metroovaguni spiraalvedrustuse kokkusurumiseks, normaalkõrgusest 20 cm kuni täielikult kokkusurutud kõrguseni 12 cm, on vaja jõudu 96 584 N.

(a) Leidke vedrukonstant.

(b) Kui palju tööd kulub vedrustuse kokkusurumiseks teise sentimeetrini (siis vedru on 14 cm pikk)? kolmanda sentimeetrini? Ümardage vastus lähima (N·cm)-ni.

Ülesanne 16.43. **(F)** Elektronil on negatiivne laeng 1.6×10^{-19} C. Kui palju tehakse tööd kahe elektroni eraldamisel 10^{-12} meetrilt 4×10^{-12} meetrini? Kahe elektroni vahel mõjuv jõud avaldub valemiga $F(x) = k\dfrac{q_1 q_2}{x^2}$, kus $k = 9 \times 10^9$, q_1 ja q_2 on osakeste laengud ja x nende vaheline kaugus.

Ülesanne 16.44. **(F)** Kui osake massiga m asub punktis $(x, 0)$, tõmmatakse teda nullpunkti poole jõuga, mille moodul on k/x^2. Kui osake alustab asendist $x = b$ ja talle ei mõju ükski teine jõud, siis leidke tehtud töö hetkel, mil osake jõuab asendisse $x = a$, $0 < a < b$.

Ülesanne 16.45. **(F)** Mägironija sikutab üles 50 m pikkust rippuvat köit. Kui palju tööd selleks kulub, kui köis kaalub 0.624 N/m?

Ülesanne 16.46. **(F)** Lift massiga 680 kg on kinnitatud trosside otsa, mille mass ühe meetri kohta on 18 kg. Leidke, kui palju tehakse tööd, tõstes lifti keldrikorruselt teisele korrusele (kokku 7 m).

Ülesanne 16.47. **(F)** Liivakotti, mis algselt kaalus 640 N, tõsteti üles ühtlasel kiirusel. Tõstmise käigus pudenes liiv kotist välja samuti ühtlasel kiirusel. Hetkel, mil kott tõsteti 5 m kõrgusele, oli kotist kadunud pool liivakogust. Kui palju tööd tehti liivakoti tõstmiseks sellisele kõrgusele? (Jätke arvestamata koti enda ning tõstmisvarustuse kaal.)

Ülesanne 16.48. **(K)** Ideaalse gaasi kokku surumisel või paisumisel tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV,$$

kus $P = \dfrac{nRT}{V}$ on rõhk ja V on gaasi ruumala. Liikuva kolviga silindri läbimõõt on 20 cm ja pikkus 80 cm. Silindris on gaas 10 000 g/cm^2 rõhu all. Arvutage töö, mis kulub konstantsel temperatuuril T selle gaasi kokkusurumiseks kuni ruumala kahekordse vähenemiseni. Siin n ja R on konstandid.

16.6.4 Massikese

Olgu R tasandiline kujund, mis jääb kahe funktsiooni f ja g graafiku vahele, kus $f(x) \geq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Sel juhul homogeense pinna R massikese asub punktis $(\overline{x}, \overline{y})$, kus

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx, \quad \overline{y} = \frac{1}{S}\int_a^b \frac{1}{2}\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx, \tag{16.3}$$

kus S on pinna R pindala $S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Ülesanne 16.49. Veetammi värav on võrdhaarse trapetsi kujuline, kus pikim alus on 20 m, lühim alus 12 m ja kõrgus on 6 m. Leidke värava massikeskme koordinaadid.

Ülesanne 16.50. Arvutage järgmiste joontega piiratud kujundite massikeskmed.

(a) $y = 4 - x,\ x = 0,\ y = 0$

(b) $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$

(c) $y = 4x^2,\ y = 2x^3$

(d) $y^2 = x,\ y = 2,\ x = 0$

(e) $y = 2(x+1),\ y = 3x+2,\ y = 8$

(f) $y = x^{2/3},\ x = 8,\ y = 0$

(g) $y = 4 - 2x,\ x = 2,\ y = 4$

(h) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 9$

(i) $x^2 = 4py,\ y = a$, kus $p > 0$ ja $a > 0$

Ülesanne 16.51. (F) Leidke poolkera massikese, kui poolkera raadius on R. Arvestades seda, arvutage Maa põhjapoolkera massikese, kui $R = 6370$ km.

Ülesanne 16.52. (F) Ellipsoidist tehtud lääts on keskelt xy-tasandiga läbi lõigatud. Leidke läätse massikeskme koordinaadid, kui poolellipsoidi alus on ring raadiusega 5 cm ja kõrgus nullpunktis on 1 cm (s.t. ellipsoidi poolteljed on 5, 5 ja 1).

Ülesanne 16.53. $< * >$ Õhukesele metallplaadile pindalaga S ja konstantse tihedusega ρ vastab xy-tasandil piirkond R. Olgu M_y plaadi moment y-telje suhtes.

(a) Näidake, et plaadi moment sirge $x = b$ suhtes on $M_y - b\rho S$, kui plaat asub sirgest paremal.

(b) Näidake, et plaadi moment sirge $x = b$ suhtes on $b\rho S - M_y$, kui plaat asub sirgest vasakul.

Praktikum 17

Päratud integraalid

17.1 Lõpmatute rajadega integraalid

Definitsioon 17.1

Eksisteerigu $\int_a^M f(x)\,dx$ *iga* $M \in [a,\infty)$ *korral.*

Päratu integraal piirkonnas $[a,\infty)$ *defineeritakse seosega*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx. \tag{17.1}$$

Definitsioon 17.2

Eksisteerigu $\int_M^b f(x)\,dx,$ *iga* $M \in (-\infty,b]$ *korral.*

Päratu integraal piirkonnas $(-\infty,b]$ *defineeritakse seosega*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^b f(x)\,dx. \tag{17.2}$$

Definitsioon 17.3

Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx, \quad \textit{kus } c \in \mathbb{R} \textit{ on vabalt valitav.}$$

Ülesanne 17.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\int_0^\infty (x^2+1)\,dx$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$

(e) $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^5}\,dx$

(f) $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+4)^{3/2}}$

(h) $\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx$

(i) $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx$

(j) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

(k) $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x\,dx$

(l) $\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$

(m) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^n x},\ n \in \mathbb{N}$

(n) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$

(o) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{x^2+1}$

(p) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(q) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$

(r) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

Praktikum 18

Päratud integraalid

18.1 Integraalid tõkestamata funktsioonist

Definitsioon 18.1

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_a^M f(x)\,dx$$

iga $M \in [a,b)$ korral. Päratu integraal lõigus $[a,b]$ defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to b-} \int_a^M f(x)\,dx. \qquad (18.1)$$

Definitsioon 18.2

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses ja eksisteerigu

$$\int_M^b f(x)\,dx,$$

iga $M \in (a,b]$ korral. Päratu integraal lõigus $[a,b]$ defineeritakse seosega

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{M\to a+} \int_M^b f(x)\,dx. \qquad (18.2)$$

Definitsioon 18.3

Kui funktsioon f on tõkestamata punktis $c \in (a,b)$, kuid pidev piirkonnas $[a,c) \cup (c,b]$, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ülesanne 18.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$

(d) $\displaystyle\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{2-x}}$

(f) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

(g) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^2+1}{x^3-8}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/5}}$

(i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n x}{x}\,dx,\ n\in\mathbb{N}$

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\ln^n x},\ n\in\mathbb{N}$

(o) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

(r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

(s) $\displaystyle\int_0^\pi \tan x\,dx$

(t) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

18.2 Päratute integraalide rakendusi

Definitsioon 18.4

*Kui x on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et x asub arvude a ja b vahel, defineeritakse integraaliga*

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b p(x)\,dx, \qquad (18.3)$$

kus funktsioon p on pideva juhusliku suuruse x tihedusfunktsioon või ka lihtsalt tihedus.

Definitsioon 18.5

*Pideva juhusliku suuruse **keskväärtuseks** ja **dispersiooniks** nimetatakse suurusi*

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx \qquad (18.4)$$

ja

$$\sigma(x) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 \cdot p(x)\,dx}. \qquad (18.5)$$

Ülesanne 18.2. (F) Signaalitöötluses kasutatakse ajast sõltuva signaali $f(t)$ jaoks Fourier' teisendust

$$F(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i2\pi\sigma t}\,dt,$$

kus σ on sagedus hertsides. Niimoodi seatakse signaalile f vastavusse tema spekter, kus iga sageduse σ Hz jaoks vastab võnkumise amplituud $|F(\sigma)|$ ja faas $arg(F(\sigma))$. Olgu signaaliks

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & \text{, kui } t \in [0,\infty) \\ 0 & \text{, kui } t \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Leidke selle signaali Fourier' teisendus $F(\sigma)$ suvalise reaalarvulise sageduse σ jaoks.

Ülesanne 18.3. (F) Füüsikas kasutatakse diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks Laplace'i teisendust

$$L(x) = \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-xt}\,dt.$$

Leidke funktsioonide $f(t) = \sin t$ ja $f(t) = \cos t$ Laplace'i teisendused.

Ülesanne 18.4. (F) Lambi eluiga on eksponentsiaalse jaotusega, keskmise elueaga 1000 töötundi:

$$p(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000}, \quad t \ge 0.$$

Milline on tõenäosus, et lambi eluiga on suurem kui 2000 töötundi?

Ülesanne 18.5. (IT) Juhuslikult lõigust $[-1,1]$ arvu valimisele vastab ühtlane jaotus

$$p(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-1,1], \\ 0, & t \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Leida ühtlase jaotuse keskväärtus ja tõenäosus, et valides $n \in \{10, 15, 20\}$ juhuslikku arvu lõigust $[-1,1]$, nende arvude keskväärtus $\bar{x}$ kuulub lõiku $[-0.5, 0.5]$? Vihje: keskväärtuse tõenäosus jaotub normaaljaotusega, mille keskväärtus on leitud μ ning standardhälve on $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{n}$:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-\mu)^2/\sigma_0^2}.$$

Ülesanne 18.6. IQ testide tulemused on tavaliselt jaotunud normaaljaotusega

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus keskväärtus $\mu = 100$ ja standardhälve $\sigma = 15$. Leidke (arvuti abiga), mitmel protsendil elanikkonnast on mudeli järgi IQ vahemikus 85 kuni 115. Mitmel % elanikkonnast on IQ suurem kui 140?

Praktikum 19

Vektorid

19.1 Vektorite skalaarkorrutis

Definitsioon 19.1

Olgu $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$ ja $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vaheline nurk. Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ***skalaarkorrutiseks*** *nimetatakse arvu*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Vektori $\vec{x}$ **pikkus**:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Ülesanne 19.1. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

(a) $|\vec{a}| = 8,\ |\vec{b}| = 6, \varphi = 2\pi/3$

(b) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$

(c) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 12, |\vec{a} - \vec{b}| = 10$

(d) $|\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$

(e) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

(f) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

Ülesanne 19.2. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

(a) $\vec{a} = (2; -3),\ \vec{b} = (4; 2)$

(b) $\vec{a} = (2; -3; 1),\ \vec{b} = (4; 2; -5)$

(c) $\vec{a} = (7; -4; 2),\ \vec{b} = (3; 1; 0)$

(d) $\vec{a} = (0; 0; 0),\ \vec{b} = (-2; 6; 0)$

Ülesanne 19.3. Arvutage skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(a) $\vec{a} = (\alpha - 1; \beta - 1; \gamma - 1),\ \vec{b} = (\beta + 1; \gamma + 1; \alpha + 1),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(b) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, kus $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid

Ülesanne 19.4. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad 60°. Leidke vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.

Ülesanne 19.5. Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $A(1; 1)$ ja $B(3; 7)$ võrdsel kaugusel.

Ülesanne 19.6. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x; y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest $A(7; -3)$ ja $B(-2; 1)$?

Ülesanne 19.7. Näidake, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = \sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ sobivad mingi ruudu külgedeks, kui $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 19.8. (F) Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$, mis mõjuvad 120° nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\vec{R}$ arvväärtus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}| = 7$ ja $|\vec{Q}| = 4$.

19.2 Vektorite vaheline nurk

Vektorite vahelise nurga koosinus avaldub skalaarkorrutise valemi kaudu:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Vektori $\vec{a}$ projektsioon vektorile $\vec{b}$ on

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Ülesanne 19.9. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke vektorite $\vec{CA}$ ja $\vec{CB}$ vaheline nurk.

(a) $A(5;3),\ B(4;8),\ C(2;4)$

(b) $A(-2;6;7),\ B(-4;5;5),\ C(-3;0;2)$

(c) $A(2;-1;4),\ B(1;-6;8),\ C(0;-2;6)$

(d) $A(0;4;-3),\ B(2;5;3),\ C(5;1;1)$

Ülesanne 19.10. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke, millised kahest antud vektorist on risti, kollineaarsed, moodustavad teravnurga või nürinurga.

(a) $\vec{a} = (2;-7);\ \vec{b} = (5;2)$

(b) $\vec{a} = (4;16;-12);\ \vec{b} = (-6;-24;18)$

(c) $\vec{a} = (2;1;-8);\ \vec{b} = (7;2;2)$

(d) $\vec{a} = (5;-3;2);\ \vec{b} = (1;3;4)$

Ülesanne 19.11. Arvutage vektori $\vec{a}$ projektsioon vektorile $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = (2;-5);\ \vec{b} = (3;4)$

(b) $\vec{a} = (4;-5;7);\ \vec{b} = (-3;-2;4)$

(c) $\vec{a} = (2;1;-3);\ \vec{b} = (7;-2;4)$

(d) $\vec{a} = (2;-3;2);\ \vec{b} = (4;3;2)$

Ülesanne 19.12. Milline on ühikvektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ on risti?

Ülesanne 19.13. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ ja $C(3;-2;1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

Ülesanne 19.14. Leidke kuubi diagonaali ja kuubi ühe külje diagonaali vaheline nurk.

Ülesanne 19.15. $<*>$ Tõestage, et suvalise kahe vektori $\vec{x},\vec{y}\in E_3$ jaoks kehtib samasus

$$(\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) + (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = 2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2).$$

Mis on selle samasuse geomeetriline tähendus?

19.3 Vektorite vektorkorrutis

Definitsioon 19.2

*Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{x} \times \vec{y} \in E_3$, mis on määratud tingimustega:*

$$1)\ |\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$2)\ (\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x},\ (\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y},$$

3) *kolmik $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ on parema käe kolmik.*

Vektorkorrutise arvutamine koordinaatkujul

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

kus $\vec{x} = (x_1; y_1; z_1), \vec{y} = (x_2; y_2; z_2)$.
Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud **rööpküliku pindala on** $S_{\vec{x},\vec{y}} = |\vec{x} \times \vec{y}|$.

Ülesanne 19.16. Arvutage $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

(a) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

(b) $|\vec{a}| = 7,\ |\vec{b}| = 5,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -21$

(c) $|\vec{a}| = 3,\ \vec{b} = -2\vec{a}$

(d) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Ülesanne 19.17. Olgu $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (5; 1; -2)$, $\vec{c} = (0; 0; 0)$. Leidke vektorid $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$, $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 5\vec{b})$.

Ülesanne 19.18. Millisel arvu α väärtusel on vektorid $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ja $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?

Kolmnurga ABC **pindala** on võrdne poolega küljevektorite vektorkorrutise pikkusest

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2},$$

kus $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$.

Ülesanne 19.19. Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala.

(a) $A(4; 1; -4), B(6; 3; 7), C(2; 3; 1)$

(b) $A(0; 5; -1), B(1; 2; 1), C(-3; 4; -5)$

(c) $A(2; 3; 1), B(4; 5; 1), C(3; 4; 1)$

(d) $A(-1; 2), B(2; -1;), C(-3; 1)$

Ülesanne 19.20. Leidke vektoreile $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ ehitatud kolmnurga pindala, kui $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.

Ülesanne 19.21. Näidake, et vektorid $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor, kui $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ on ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 19.22. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{a} = (2; 3; -1)$ ja $\vec{b} = (1; -1; 3)$ ning moodustab esimese baasivektoriga $\vec{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\vec{x}$ koordinaadid teades, et $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.

Ülesanne 19.23. On antud vektorid $\vec{a} = (11; 10; 2)$ ja $\vec{b} = (4; 0; 3)$. Leidke ühikvektor $\vec{c}$, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik.

Ülesanne 19.24. < * > Näidata, et et suvalise kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ korral

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} - (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y}.$$

19.4 Kolme vektori segakorrutis

Definitsioon 19.3

*Vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ **segakorrutiseks** $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ nimetatakse arvu $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.*

Vektorite $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3), \vec{y} = (y_1; y_2; y_3), \vec{z} = (z_1; z_2; z_3)$ segakorrutise arvutamise valem

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud **rööptahuka ja tetraeedri ruumalad** avalduvad vastavalt valemitega

$$V_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|, \quad V_{tetr(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{6}|\vec{x}\vec{y}\vec{z}|.$$

Ülesanne 19.25. Vektorite kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik. Arvutage $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

(a) $\vec{a} = (-3; 4; -7), \vec{b} = (1; 2; 5), \vec{c} = (1; -4; 5)$

(b) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 3,\ |\vec{c}| = 5,\ \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$

(c) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ |\vec{c}| = 3$ ning vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on paarikaupa risti

Ülesanne 19.26. Tetraeedri tipud on $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ ja $D(4; 1; 3)$. Leidke selle tetraeedri ruumala ja tipust D tõmmatud kõrgus.

Ülesanne 19.27. Tetraeedri ruumala $V = 5$ ja kolm tippu on $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$ ja $C(2; -1; 3)$. Leidke y-teljel asuva neljanda tipu D koordinaadid.

Ülesanne 19.28. Tõestage, et punktid $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ ja $D(2; 1; 3)$ asetsevad samal tasandil.

Ülesanne 19.29. < * > Tõestage, et suvalise kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ korral

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Praktikum 20

Sirge ja tasandi võrrandid

20.1 Tasandi võrrand

Definitsioon 20.1

Tasandi π üldvõrrandiks *nimetatakse tasandi võrrandit kujul*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}),$$

kui $\vec{n} = (A; B; C)$ on selle tasandi normaalvektor.

Tasandite π_1 ja π_2 vaheline nurk:

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

kus $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ on vastavalt tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorid.

Tasandi normaalvektor

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v},$$

kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on tasandil asuvad mittekollineaarsed vektorid.

Punkti $P(p_1; p_2; p_3)$ **kaugus tasandist** π:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ülesanne 20.1. Koostage tasandi π võrrand.

(a) tasand π on paralleelne x-teljega ning läbib punkte $A(3; -1; 1)$ ja $B(4; -6; -1)$

(b) tasand π on paralleelne y-teljega ning läbib punkte $C(3; 4; 0)$ ja $D(7; 5; -3)$

(c) tasand π on paralleelne z-teljega ning läbib punkte $E(-1; -2; -3)$ ja $F(1; 3; 4)$

Ülesanne 20.2. Koostage punkte A, B, ja C läbiva tasandi võrrand.

(a) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 4; 0)$, $C(3; -2; 1)$

(b) $A(-3; 6; -7)$, $B(-1; 7; -6)$, $C(-7; 3; -8)$

(c) $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$

Ülesanne 20.3. Koostage tasandi π võrrand.

(a) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (2; 3; -5)$ ning tema aplikaatlõik on 6

(b) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (-1; 4; 7)$ ning tema ordinaatlõik on 3

(c) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (4; -1; -3)$ ning tema abstsisslõik on -5

Ülesanne 20.4. Kontrollige, kas tasanditel $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$ ja $3x + 4y + 5z - 3 = 0$ on ühiseid punkte.

Ülesanne 20.5. Leidke tasand, mis on paralleelne tasandiga $x - 2y + 3z - 7 = 0$ ning läbib punkti $A(1; -2; 1)$.

Ülesanne 20.6. Leidke tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ ja koordinaattasandite vahelised nurgad.

Ülesanne 20.7. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad.

(a) π_1: $-2x + 4y - z + 5 = 0$ ja π_2: $7x + 3y - 2z + 1 = 0$

(b) xz-tasand ja π: $3y - 3z + 5 = 0$

(c) π_1: $6x - 3y + 12z - 23 = 0$ ja π_2: $10x - 5y + 20z - 1 = 0$

Ülesanne 20.8. Leidke tasand, mis läbib tasandite $3x - 2y + z - 3 = 0$ ja $x - 2z = 0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x - 2y + z + 5 = 0$.

Ülesanne 20.9. Leidke tasand, mis läbib tasandite $x + 5y + z = 0$ ja $x - z + 4 = 0$ lõikesirget ning moodustab tasandiga $x - 4y - 8z + 12 = 0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

Ülesanne 20.10. Arvutage punkti P kaugus tasandist π.

(a) $P(1; 2; 1)$ ja π: $x + 2y + 2z - 10 = 0$

(b) P on koordinaatide alguspunkt ja π: $15x - 10y + 6z - 190 = 0$

(c) $P(2; 8; 5)$ ja π: $x - 2y - 2z = 1$

Ülesanne 20.11. $< * >$ Leidke tasand, mis koosneb sellistest punktidest, mis on punktidest $A(1; 1; 0)$ ja $B(0; 1; 1)$ ühekaugusel.

Ülesanne 20.12. $< * >$ Kontrollige, kas tasandid $z = x + 2y + 1$ ja $3x + 6y - 3z = 4$ on paralleelsed. Leidke nende tasandite vaheline kaugus.

20.2 Sirge võrrand ruumis

Definitsioon 20.2

Sirge kanoonilisteks võrranditeks *nimetatakse sirge s võrrandeid kujul*

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3},$$

kus sirge s läbib punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ ja sirge sihivektor on $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Sirge s ja tasandi π vaheline nurk:

$$\sin \angle(s, \pi) = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|},$$

kus $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ on vastavalt sirge s sihivektor ja tasandi π normaalvektor.

Kahe mitteparalleelse tasandi π_1 ja π_2 ühisosaks on sirge

$$\begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Ülesanne 20.13. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(2; 1; 3), B(2; 4; -5), C(0; 4; -5)$. Koostage selle kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

Ülesanne 20.14. Koostage punkti $P(-3; 4; -7)$ läbiva sirge s kanoonilised võrrandid.

(a) sirge s on paralleelne x-teljega

(b) sirge s sihivektor on $\vec{s} = (3; -2; 4)$

(c) sirge s on paralleelne z-teljega

(d) sirge s on paralleelne sirgega t: $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{8}$

Ülesanne 20.15. Koostage sirge s kanoonilised võrrandid, kui sirge s läbib punkti $P(2;3;4)$ ja on paralleelne sirgega t: $\begin{cases} 3x + 7y - 2z + 4 = 0 \\ 2x - 6y + 7z - 13 = 0 \end{cases}$.

Ülesanne 20.16. Leidke tasandi $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ ja xz-tasandi lõikesirgel kõik need punktid, mis asuvad tasandist $2x + y - z + 3 = 0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

Ülesanne 20.17. Leidke sirge ja tasandi vaheline nurk. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke nende lõikepunkt.

(a) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $3x + 5y - z - 2 = 0$

(b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $3x - 3y + 2z - 5 = 0$

(c) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$, $5x - z - 4 = 0$

Ülesanne 20.18. < ∗ > Koostage sirgeid s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ ja t: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-6}$ läbiva tasandi võrrand.

Ülesanne 20.19. < ∗ > Leidke punkti $P(1;2;3)$ kaugus sirgest s: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{5}$.

Praktikum 21

Kontrolltöö nr. 3

1. Määratud integraal

1. Newton'i-Leibniz'i valem.
2. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
3. Sümmeetrilised rajad.
4. Ositi integreerimine ja muutuja vahetuse võte.

2. Määratud integraali rakendused

1. Tasandilise kujundi pindala leidmine (kõvertrapets, kõversektor).
2. Joone kaare pikkuse arvutamine lihtsamal juhul.
3. Keha ruumala leidmine ristlõigete pindalade kaudu, pöördkeha ruumala.
4. Läbitud teepikkus ja nihe (sirgjoonelisel liikumisel).

Kõversektor tuleb koos joonisega. Töösse ei tule füüsikalisi rakendusi (töö, jõud vedelikes, massikeskmed), kus integraali peaks ise kokku hakkama panema.

3. Päratud integraalid

1. Päratud integraalid lõpmatute rajade korral.
2. Päratud integraalid lõigus katkeva funktsiooni korral.

4. Geomeetria

1. Vekorite skalaarkorrutis, nurk kahe vektori vahel.
2. Vektorkorrutis, segakorrutis.
3. Tasandi ja sirge võrrandite koostamine ruumis.
4. Tasandite ja sirgete vastastikused asendid (nurgad nende vahel). Punkti kaugus kaugus tasandist.

Praktikum 22

Kompleksarvu erinevad esitusviisid

22.1 Kompleksarvu algebraline kuju

Kompleksarvu algebraline kuju: $z = a + b\,i$.

Kaaskompleksarv: $\overline{z} = a - bi$.

Moodul: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ülesanne 22.1. Kujutage komplekstasandil järgmised kompleksarvud.

(a) $3 - 2\,i$ (b) $1 + i$ (c) $-1 - i$ (d) $-3 + 4i$ (e) $-7j$, $j^2 = -1$ (f) $|3 + \sqrt{6}\,i|$ (g) $\overline{|3 + \sqrt{6}\,i|}$ (h) $1 - i\sqrt{3}$

Ülesanne 22.2. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y, mille korral

(a) $2ix + 3 = y - i$ (b) $x^2 - y^2 + ixy = 1 + ix$

Ülesanne 22.3. Leidke kompleksarvu moodul.

(a) -42 (b) $i + 1$ (c) $2i + 2$ (d) $1 + i\sqrt{3}$ (e) $4 + 3i$ (f) $-1 - i\sqrt{3}$ (g) $6\sqrt{3} - 6i$ (h) $1 - i\sqrt{3}$

Ülesanne 22.4. Kujutage komplekstasandil kõik kompleksarvud, mis rahuldavad antud tingimusi.

(a) $|z| = 3$ (b) $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 3$ (c) $|z - 1| = 1$ (d) $\mathrm{Re}\,(z^2) = 4$

Ülesanne 22.5. Kirjutage algebralisel kujul $z = a + b\,i$

(a) $z = i^{20}$

(b) $z = i^5 + i + 1$

(c) $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

(d) $z = i^{43} + (-1)^7 - (-i)^{77}$

(e) $z = i^{2017} - i$

(f) $z = (2 + 2\,i)^8$

(g) $z = \dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{3-i}{1+i} + 3i$

(h) $z = \dfrac{(2 - i^3)^4}{(i^8 - i^6)^3} + i$

22.2 Tehted kompleksarvudega.

22.2.1 Tehted algebralisel kujul.

Liitmine ja lahutamine. Olgu $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Siis

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i; \quad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\,i.$$

Korrutamine. Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a + bi$ ja $z_2 = c + di$. Siis

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i.$$

Jagamine. Olgu antud kompleksarvud z_1 ja z_2. Siis

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Ülesanne 22.6. Leidke arvude z_1 ja z_2 summa, vahe, korrutis, jagatis, moodulid ja kaaskompleksid.

(a) $z_1 = 3,\ z_2 = -4\,i$

(b) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i$

(c) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -3 + 2\,i$

(d) $z_1 = 2 - 5\,i,\ z_2 = 3 + i$

(e) $z_1 = 2 - 7\,i,\ z_2 = 3 + 4\,i$

(f) $z_1 = -4 - i,\ z_2 = -7 - 4\,i$

(g) $z_1 = 1 + 3\,i,\ z_2 = \frac{1}{1+3\,i}$

(h) $z_1 = \frac{1+i}{1-i},\ z_2 = i$

22.2.2 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

Definitsioon 22.1

Avaldist

$$z = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{22.1}$$

nimetatakse kompleksarvu z trigonomeetriliseks kujuks. Reaalarv r on kompleksarvu z moodul $|z|$. Reaalarvu φ nimetatakse ka kompleksarvu z argumendiks ja tähistatakse $\varphi = \arg(z)$.

Definitsioon 22.2

Olgu $z = a + b\,i$, $\theta = \arctan\left|\frac{b}{a}\right|$. Siis kompleksarvu z argument φ leitakse järgmiselt:

$\boldsymbol{\varphi = 180^\circ - \theta}$ $a < 0,\ b > 0$	$\boldsymbol{\varphi = \theta}$ $a > 0,\ b > 0$
$a < 0,\ b < 0$ $\boldsymbol{\varphi = 180^\circ + \theta}$	$a > 0,\ b < 0$ $\boldsymbol{\varphi = -\theta}$

Valem 22.1

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob Euler'i valem

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi. \tag{22.2}$$

Definitsioon 22.3

Kompleksarvu z eksponentkujuks nimetatakse järgmist esitust:

$$z = r\,e^{i\,\varphi}, \tag{22.3}$$

kus r on kompleksarvu moodul ja φ on argument radiaanides.

Ülesanne 22.7. Teisendage kompleksarv z algebralisele kujule $z = a + b\,i$ ning eksponentkujule.

(a) $z = \cos 16\pi + i\sin 16\pi$

(b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $z = 8\left(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ\right)$

(d) $z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{2} - i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$

Ülesanne 22.8. Kirjutage nii trigonomeetrilisel kui ka algebralisel kujul $a + b\,i$.

(a) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(b) $64\,e^{i\,0}$

(c) e^{-i}

(d) $2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

(e) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(f) $\dfrac{2\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

(g) $e^{(i+1)i}$

(h) $\frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}}$

Ülesanne 22.9. Esitage ülesandes 22.6, a)-d) antud ja saadud kompleksarvud nii trigonomeetrilisel kui ka eksponentkujul.

22.2.3 Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul

Omadus 22.1

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul ning eksponentkujul

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right); \qquad z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}.$$

Siis korrutamisel moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse:

$$z_1\cdot z_2 = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]; \qquad z_1\cdot z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]; \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}; \quad r_2 \neq 0.$$

Ülesanne 22.10. Leidke $z_1\cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$ kõigil kolmel erineval esitusviisil.

(a) $\begin{cases} z_1 = 4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \\ z_2 = 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z_1 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ z_2 = 3\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \end{cases}$

Ülesanne 22.11. Arvutage järgmised avaldised.

(a) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

(b) $\frac{(5+3\,i)(5-3\,i)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$

(c) $\frac{(1+i)^2}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

(d) $\frac{\cos 69.5^\circ + i\sin 69.5^\circ}{\cos(-17.5^\circ) + i\sin(-17.5^\circ)}$

Ülesanne 22.12. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y, mille korral $z^2 = \bar{z}^2$, $z = x + i\,y$.

Ülesanne 22.13. Millise reaalsete kordajatega ruutvõrrandi lahenditeks on kompleksarvud $z_1 = 2 + i$ ja $z_2 = 2 - i$?

Ülesanne 22.14. Näidake, et kompleksarv $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ on ruutvõrrandi $x^2 + 4 = 2x$ lahend.

Ülesanne 22.15. Tõestage järgmised väited.

(a) $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ ja $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

(b) Kui $|z| = 1$, siis $\bar{z} = z^{-1}$

(c) $z\,\bar{z} = |z|^2$

(d) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ iga $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ korral

Ülesanne 22.16. (F) Kaks köit hoiavad sadamas paati nii, et pingejõud on vastavalt $80 + 20i$ kg ja $100 - 50i$ kg. Arvutage kogupinge.

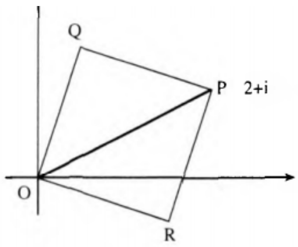
22.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 22.17. **(F)** Vahelduvvoolu ahelas leitakse kahe paralleelühenduses oleva elemendi näivtakistus (vt. lähemalt konspekti lisas) valemiga

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Arvutage näivtakistus Z, kui $Z_1 = 3 + 5i\ \Omega$ ja $Z_2 = 5 - 6i\ \Omega$.

Ülesanne 22.18. Ruudu diagonaal asub punktide 0 ja $2 + i$ vahel. Leidke ruudu kaks ülejäänud tippu Q ja R. NB! Lahenduse saab läbi viia puhtalt kompleksarve kasutades ja ilma kooli geomeetriata.



Ülesanne 22.19. **(F)** Kahe vedruga varustatud süsteem vajub raskuse mõjul

$$d = 6.03(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^circ) + 3.26(\cos 76.0^\circ + i \sin 76.0^\circ)\ \text{ cm.}$$

Teostage liitmine ning esitage vastus trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 22.20. **(F)** Teatud induktsioonipoolis on pinge

$$V = 8.66(\cos 90.0^\circ + i \sin 90.0^\circ) \cdot 50.0(\cos 135.0^\circ + i \sin 135.0^\circ)/(10.0(\cos 60.0^\circ + i \sin 60.0^\circ) \quad \text{volti.}$$

Lihtsustage avaldis ning leidke pinge moodul.

Ülesanne 22.21. **(F)** Kaks kaablit tõstavad portselani täis kasti. Pingejõude kaablites saab esitada avaldistega $2100 - 1200\,i$ N ja $1200 + 5600\,i$ N. Esitage kogupinge trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 22.22. Kasutades eksponentkuju, tuletage trigonomeetrilised valemid $\cos(\alpha \pm \beta)$ ja $\sin(\alpha \pm \beta)$ kohta.

Ülesanne 22.23. **(F)** Radari mikrolaine signaali intensiivsus on $37(\cos 65.3^\circ - i \sin 65.3^\circ)$ V/m. Esitage see eksponentkujul.

Ülesanne 22.24. **(F)** Lainete liitumisel on kasutusel avaldis

$$E_1 E_2 (e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}).$$

Näidake, et see võrdub lihtsama avaldisega $2E_1E_2 \cos(\alpha - \beta)$.

Praktikum 23

Kompleksarvu astendamine ja juurimine

23.1 Kompleksarvu astendamine ja juurimine

Valem 23.1

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib ***de Moivre'i valem***

$$z^k = r^k\,(\cos(k\,\varphi) + i\,\sin(k\,\varphi))\,, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23.1}$$

Valem 23.2

Igal nullist erineval kompleksarvul on n erinevat n-astme juurt, mis leitakse valemiga

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + k\,360°}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi + k\,360°}{n}\right)\right),\\ k = 0, 1, \ldots, n-1.\end{aligned} \tag{23.2}$$

Märkus. *Sümbol $\sqrt[n]{r}$ tähistab siin kompleksarvu z kõigi n-astme juurte hulka ning sümbol $\sqrt[n]{r}$ sellist positiivset reaalarvu, mille n-s aste on r.*

Ülesanne 23.1. Kasutades de Moivre'i valemit, astendage kompleksarvud.

(a) $(\sqrt{3} - i)^{-12}$

(b) $(3 + \sqrt{3}\,i)^5$

(c) $[2(\cos 9° + i \sin 9°)]^5$

(d) $[\sqrt{2}(\cos 15° + i \sin 15°)]^{10}$

(e) $2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right)^{36}$

(f) $[3(\cos 120° + i \sin 120°)]^4$

(g) $[0.2(\cos 35° + i \sin 35°)]^3$

(h) $(6e^{\frac{137\pi}{180}i})^2$

(i) $(2e^{\frac{3\pi}{4}i})^8$

(j) $(e^{\frac{71\pi}{90}i})^{10}$

(k) z^{273}, $z = \cos\frac{2\pi}{9} + i\,\sin\frac{2\pi}{9}$

(l) z^{614}, $z = e^{\frac{3i\pi}{307}}$

Ülesanne 23.2. Leidke arvu -1 seitsmenda juure $\sqrt[7]{-1}$ kõik väärtused.

Ülesanne 23.3. Leidke arvu $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$ kõik väärtused.

Ülesanne 23.4. Leidke ja kujutage komplekstasandil arvu $\sqrt[4]{-64}$ kõik väärtused.

Ülesanne 23.5. Leidke $\sqrt[5]{z}$, kui $z = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ja kujutage tulemus komplekstasandil.

Praktikum 24

Kompleksarv. Algebraliste võrrandite lahendamine *

24.1 Kordamine

Ülesanne 24.1. Kirjutage eksponentkujul ja algebralisel kujul. Leidke erinevatel viisidel esitatud kompleksarvude z_1 ja z_4 korral nende summa, korrutis ja jagatis.

(a) $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(b) $z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $z_3 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Ülesanne 24.2. Olgu $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -1 - i$, $w_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ja $w_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. Arvutage järgmised avaldised.

(a) $z_1^5 + w_2^8$

(b) $z_1^6 z_2$

(c) $(z_2 w_1)^5$

(d) $\sqrt[3]{z_1 + w_1^2}$ kõik väärtused

(e) $\frac{z_1 + w_2}{w_1}$

(f) $\frac{\sqrt[4]{w_1}}{w_2}$ kõik väärtused

(g) $\overline{w_1 + w_2}$

(h) $|z_1^3 + z_2^2|$

(i) $|\frac{w_1}{w_2}|$

24.2 Algebraliste võrrandite lahendamine *

Ülesanne 24.3. Lahendage võrrandid.

(a) $z^4 - 1 = 0$

(b) $z^2 - 1 - i = 0$

(c) $z^2 - i = 0$

(d) $z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0$

(e) $z^2 + 2(1 + \sqrt{3}i) = 0$

(f) $z^3 + i = 0$

(g) $z^3 + 27 = 0$

(h) $z^4 - i = 0$

(i) $z^4 - \sqrt{3} - i = 0$

(j) $z^4 = -4\,i$

(k) $x^2 - 6x + 10 = 0$

(l) $x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0$

(m) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

(n) $x^6 - 2x^3 + 5 = 0$

(o) $(x+1)^8 = 256\,(x-1)^8$

(p) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$

(q) $(x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 8) = 0$

Ülesanne 24.4. Lahendage w suhtes järgmine võrrand: $w^{\frac{4}{3}} + 2i = 0$.

Ülesanne 24.5. **(IT)** Programmeerijal tuleb oma programmis leida reaalarvu a jaoks n erinevat n-astme juurt. Programmi ühe osana tuleb välja selgitada, mitu nendest on reaalarvud ja mitu kompleksarvud. Selgitage, kuidas seda kindlaks teha ilma juuri endid leidmata.