MATEMAATILINE MAAILMAPILT

praktikumiülesannete kogu

2019. a. sügissemester

Sisukord

1. Mõiste, definitsioon, teoreem, eeldus ja väide

1. Ahendage ja üldistage järgmisi mõisteid:

a) rööpkülik; b) kolmnurk; c) geomeetria; d) ratsionaalarv; e) juur.

2. Tooge näiteid omadustest, mis iseloomustavad
a) kõiki kolmnurki;
b) ainult mõningaid kolmnurki;
c) mida ei saa omistada ühelegi kolmnurgale.

3. Selgitage, kas definitsioon on täpne. Kui ei ole, siis muutke täpseks.
a) Ruuduks nimetatakse rööpkülikut, mille nurgad on täisnurgad.
b) Ühest suuremat naturaalarvu, mis jagub vaid ühe ja iseendaga, nimetatakse algarvuks.
c) Juurvõrrandiks nimetatakse võrrandit, kus tundmatu esineb juuritavas.
d) Radiaaniks nimetatakse raadiuse pikkusele kaarele toetuvat piirdenurka.
e) Rööptahukaks nimetatakse prismat, mille põhjaks on rööpkülik.
f) Kolmnurga tipust vastasküljeni tõmmatud lõiku nimetatakse kolmnurga kõrguseks.
g) Murdjooneks nimetatakse joont, mis ei lähe otse.
h) Tühjaks hulgaks nimetatakse hulka, mis ei sisalda midagi peale arvu null.
i) Ühtlase liikumise kiiruseks nimetatakse teepikkuse ja aja suhet.
j) Arvu absoluutväärtuseks nimetatakse seda arvu ennast, kui arv on positiivne, ja selle arvu pöördarvu, kui arv on negatiivne.
k) Võrrandit, millele saab anda kuju $ax^2 + bx + c = 0$, nimetatakse ruutvõrrandiks.

4. Millist definitsioonile esitatavat nõuet rikutakse järgmiste definitsioonide juures?
a) Inimene on loom, kes elumaja ehitab.
b) Naeruväärne on see, mille üle naerdakse.
c) Pahe on hüve vastand.
d) Tünn on anum vedelike hoidmiseks.
e) Koer on inimese sõber.
f) Teadmatus on teadmiste puudus.
g) Kaht hulknurka nimetatakse sarnasteks, kui nad on ühesuguse kujuga.
h) Füüsika on teadus, mida õpetab füüsikaõpetaja.
i) Ringi diameeter on selline ringi kõige pikem kõõl, mis läbib ringi keskpunkti.

5. Kas antud liigitus on õige? Kui ei, siis miks ei ole?
a) Inimesed jagunevad meesterahvasteks, naisterahvasteks ja vanuriteks.
b) Täisarvud jagunevad negatiivseteks täisarvudeks, arvuks null ja naturaalarvudeks.
c) Suurused võivad olla võrdsed ja mittevõrdsed.
d) Kaks sirget võivad olla paralleelsed, lõikuvad või kiivsirged.
e) Puud jagunevad lehtpuudeks ja okaspuudeks.
f) Nurgad jagunevad täis-, nüri-, terav-, kõrvu-, kaas- ja tippnurkadeks.

6. Määrake eeldus ja väide.

a) Kui $2x-1=5$, siis $x=3$.
b) Kui siin on suitsu, siis on ka tuld.
c) $\log_2 x = 1$ järeldub et $x=2$.
d) $ab \neq 0$; $ab > 0$.
e) $\sin\alpha = \cos\beta$; $\alpha+\beta = 90^\circ$.
f) $abc = 0$ on $a=b=c=0$ tarvilik tingimus.
g) Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub kaatetite poole korrutisega.
h) Täisnurkse ja võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 45°.

7. Olgu antud võrdkülgne kolmnurk küljepikkustega $a=b=c=1$. Pange tähele, et antud juhul $a^2+b^2 \neq c^2$. Selgitage, miks ei ole siin tegemist Pythagorase teoreemi rikkumisega.

8. Esitage laused kujul *kui ..., siis ....*

a) Ristküliku diagonaalid on võrdsed.
b) $x=-6 \Rightarrow |x| = 6$.
c) $x^2 = 0$ ainult siis, kui $x=0$.
d) Kahe paarisarvu korrutis jagub neljaga.
e) Algarvu ruut ei ole algarv.
f) $a+b=a$ järeldub, et $b=0$.
g) Iga korrapärane hulknurk on võrdkülgne.
h) Täisnurkse kolmnurga pindala võrdub kaatetite poole korrutisega.
i) Võrdhaarse ja täisnurkse kolmnurga alusnurk on 45°.

9. Väga sageli aetakse omavahel segi laused (a) "Kui A, siis B"ning (b) "Kui B, siis A". Leidke ise kaks tingimust A ja B selliselt, et lause (a) oleks tõene ja lause (b) oleks väär.

10. Sõnasta antud lause pöördlause, vastandlause ja pöördvastandlause. Kas need on tõesed?

a) Kui $a=b$ ja $c=d$, siis $a-c=b-d$.
b) Kui nurgad on kaasnurgad, siis nende summa on 180°.
c) Kui $y<5$, siis $y \neq 6$.
d) Kui $x=-5$, siis $x^2=25$.
e) Kui täisarvu ruut on paarisarv, siis täisarv on paarisarv.
f) Rombi diagonaalid on risti.
g) Kui ruutvõrrandi vabaliige on null, siis tema üks lahenditest on null.

11. Kirjutage punktiiri asemele *tarvilik ja piisav* või ainult *tarvilik* või ainult *piisav*?

a) Selleks, et nelinurk oleks ristkülik, on .... et tema diagonaalid on võrdsed.
b) Hulknurga korrapärasus on .... selleks, et läbi tema tippude saaks joonestada ringjoone.
c) Selleks, et naturaalarvude summa $n+m$ jaguks naturaalarvuga k, on ...., et n ja m jaguvad k-ga.
d) Selleks, et nelinurk oleks ristkülik, on ...., et tema kõik nurgad on võrdsed.
e) Selleks, et $\alpha=\beta$, on ...., et $\sin\alpha = \sin\beta$.
f) Selleks, et $a \parallel c$, on ...., et $a \parallel b$ ja $b \parallel c$.

12. Olgu a ja b sellised reaalarvud, et $a<0$ ja $b<0$. Kas järgmised tingimused on tarvilikud, piisavad, tarvilikud ja piisavad või pole tarvilikud ega piisavad selleks, et $a>b$?

a) $b<a$
b) $|a|<|b|$
c) $a<3b$
d) $a^2<b^2$
e) $\sqrt{b^2}>|a|$
f) $\frac{b}{a}>1$
g) $|\frac{a}{b}|>1$
h) $\ln|a|>\ln|b|$

13. Võrrelge kolme teoreemi (jaguvustunnust), kirjutades välja piisavad ja tarvilikud tingimused:

a) kui arvu ristsumma jagub 3ga, siis arv jagub 3ga, vastasel juhul mitte;
b) arv jagub 3ga siis ja ainult siis (või parajasti siis), kui arvu ristsumma jagub 3ga;
c) arv jagub 3ga siis, kui tema ristsumma jagub 3ga.

Millise lause kohta kolmest saate sõnastada pöördlause, vastandlause, pöördlause vastandlause? Kas need kõik on tõesed?

14. Teoreem: Kui nelinurk on rööpkülik, siis tema diagonaalid poolitavad teineteist. Sõnastage pöördteoreem. Milline on piisav (tarvilik) tingimus?

15. Asendage järgmistes lausetes punktiir sidesõnaga *ja* või *või*, nii et tekiks tõene lause (a ja b on reaalarvud).

a) $a>0\ldots b>0$ puhul $ab>0$.
b) $ab=0$, kui $a=0\ldots b=0$.
c) $\frac{a}{b}=0$, kui $a=0\ldots b\neq 0$.
d) $a\neq 0\ldots b\neq 0$ puhul $ab\neq 0$.
e) Kui $ab<0$, siis $(a<0\ldots b>0)\ldots(a>0\ldots b<0)$.
f) Kolmnurga pindala kasvab, kui suurendada kolmnurga alust ... kõrgust.

16. Lugege järgmised laused (x, y, a, b ja α on reaalarvud).

a) $\forall y,\ y^4+4>0$
b) $\forall a, \forall b,\ a\cdot b=b\cdot a$
c) $\forall \alpha,\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$
d) $\exists x,\ \log_a x=0$
e) $\exists \alpha,\ \tan\alpha\neq\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
f) $\forall a, \forall b,\ |a\pm b|\leqslant|a|+|b|$
g) $\exists x,\ e^x=1$

17. Kirjutage järgmised laused sümbolite $\forall$ ja $\exists$ abil.

a) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
b) Leidub selline nurk α, mille koosinus on võrdne arvuga 0,5.
c) Iga taandatud ruutvõrrandi lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.
d) Mistahes kahe arvu korral nende summa ei sõltu liidetavate järjekorrast.
e) Iga nelja vabalt valitud naturaalarvu hulgas leidub kaks arvu, mille vahe jagub kolmega.
f) Iga täisarvu x korral leidub täisarv y nii, et $xy=1$.
g) Ei ole vahet millise täisarvu sa valid, alati leidub teine täisarv, mis on temast suurem.

18. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused kui n ja m on täisarvud.

a) $\forall n,\ n+1>n$.
b) $\exists n,\ 2n=3n$.
c) $\exists n,\ n=-n$.
d) $\forall n,\ 3n\leqslant 4n$.
e) $\forall n,\ n^2\geqslant 0$.
f) $\exists n,\ n^2=2$.
g) $\forall n,\ n^2\geqslant n$.
h) $\exists n,\ n^2<0$.
i) $\forall n,\ \exists m,\ n^2<m$.
j) $\exists n,\ \forall m,\ n<m^2$.
k) $\forall n,\ \exists m,\ n+m=0$.
l) $\exists n,\ \forall m,\ nm=m$.

19. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused kui x ja y on reaalarvud.

a) $\exists x,\ x^3=-1$.
b) $\exists x,\ x^4<x^2$.
c) $\forall x,\ (-x)^2=x^2$.
d) $\forall x,\ 2x>x$.
e) $\exists x,\ x^2=2$.
f) $\exists x,\ x^2=-1$.
g) $\forall x,\ x^2+2\geqslant 1$.
h) $\forall x,\ x^2\neq x$.
i) $\forall x,\ \exists y,\ x^2=y$.
j) $\exists x,\ \forall y,\ xy=0$.

Kvantoreid $\forall$ (iga) ja $\exists$ (leidub) sisaldavates lausetes väite $P(x)$ eitamine (eitustehte $\neg$ kasutamine):
$\neg(\forall x P(x))\equiv\exists x(\neg P(x))$, $\quad\neg(\exists x P(x))\equiv\forall x(\neg P(x))$,
$\neg(\forall x\exists y P(x,y))\equiv\exists x\forall y(\neg P(x,y))$, $\quad\neg(\exists x\forall y P(x,y))\equiv\forall x\exists y(\neg P(x,y))$.

20. Moodustage antud lausete eitused ja määrake nende tõeväärtused.
a) 2015 jagub 3-ga.
b) Iga algarv on paaritu arv.
c) Pole õige, et 2 on algarv.
d) Diameetrile toetuv piirdenurk on sirgnurk.
e) Igal ruutvõrrandil on kaks reaalset lahendit.
f) Leidub positiivne arv, millest ei saa logaritmi võtta.
g) $\exists x,\ x^2+1>0$.
h) $\forall\alpha,\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$.

21. Eitage järgmisi lauseid.
a) Leidub arv, mis on võrdne oma vastandarvuga.
b) Iga kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.
c) Igal kolmnurgal on ümberringjoon.
d) Leidub kolmnurk, mille mediaanid ei lõiku ühes punktis.
e) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
f) Leidub reaalarv x, mille jaoks $y^3\neq x$ kõikide reaalarvude y korral.
g) Leidub reaalarv a, mille jaoks $a+x=x$ iga reaalarvu x korral.

22. Eitage järgmisi lauseid.
a) Kõik naised on emad.
b) Kõikidel koertel on kirbud.
c) Mõned tudengid on lahendanud kõik ülesanded sellest ülesannete kogust.
d) Siin klassis on keegi, kellel ei ole hea suhtumine.

e) Iga tudeng siit klassist on võtnud kursuse kõrgemast matemaatikast.
f) On olemas aus poliitik.
g) Kõik ameeriklased söövad juustuburgereid.

23. Eitage järgmisi lauseid.

a) $\exists x \in \mathbb{R},\ e^x < 0.$
b) $\forall a, b \in \mathbb{N},\ a + b = 1.$
c) $\exists x \in \mathbb{N},\ x = x + 1.$
d) $\forall x \in \mathbb{N},\ x + x = 2x.$
e) $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x > y.$
f) $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x + y = 0.$
g) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x.$
h) $\exists x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 2.$
i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x + y > 0.$
j) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ xy = 1.$
k) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy = y.$
l) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2.$

24*. Kaksküla saarel on täpselt kaks küla – Tõesuu ja Luiskami. Tõesuu külas elavad tõesuud, kes räägivad alati tõtt; Luiskami küla elanikud on aga luiskamid, kes alati valetavad. Kord sattus võõramaalane Kaksküla saarele kuue kohaliku elaniku seltskonda. Suutmata jutuajamise käigus nende päritolu selgitada, esitas võõras igaühele oma kaaslastest küsimuse: „Mitu tõesuud teie hulgas on?“ Esimesed viis vastust olid järgmised: „Kaks meist on tõesuud“, „Ükski meist ei ole tõesuu“, „Kolm meist on tõesuud“, „Ainult üks meist on tõesuu“ ja „Kolm meist on tõesuud“. Nendest vastustest võõras tõesuude tegelikku arvu muidugi veel selgitada ei saanud. Niipea kui ta aga kuulis kuuendat vastust, oli seltskonnas viibivate tõesuude arv otsekohe selge.
Kas kuues vastus oli tõene? Mitu tõesuud viibis selles seltskonnas?

25*. Marek ja Kaido said just sõbraks Kristeliga ja nad tahaksid teada, millal on tema sünnipäev. Kristel annab neile nimekirja kümnest võimalikust kuupäevast: 15. mai, 16. mai, 19. mai, 17. juuni, 18. juuni, 14. juuli, 16. juuli, 14. august, 15. august ja 17. august. Seejärel ütleb Kristel eraldi Marekule, mis kuus on tema sünnipäev ja eraldi Kaidole, mitmendal kuupäeval on tema sünnipäev.
Marek ütleb: „Ma ei tea, millal on Kristeli sünnipäev, kuid ma tean, et Kaido ka ei tea.“
Kaido vastab: „Esialgu ma ei teadnud, millal on Kristeli sünnipäev, aga nüüd ma tean.“
Marek ütleb: „Nüüd ma tean ka, millal on Kristeli sünnipäev.“
Millal on Kristeli sünnipäev?

2. Lausearvutus

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
t	t	v	t	t	t	t
t	v	v	v	t	v	v
v	t	t	v	t	t	v
v	v	t	v	v	t	t

Tehete järjekord: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
Definitsioon. Lausearvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada järgmiste reeglite abil:

a) iga lausemuutuja on lausearvutuse valem;
b) tõeväärtused t ja v on valemid;
c) kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem;
d) kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ ja $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid;
e) kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $(\mathcal{F})$ on lausearvutuse valem.

Definitsioon. Lausearvutuse valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt tõeseks, kui ta on igal väärtustusel tõene. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on igal väärtustusel väär.

Definitsioon. Lausearvutuse valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene. Valemit $\mathcal{F}$ nimetatakse kummutatavaks, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral väär.

26. Kontrollige, kas järgmised laused võivad olla lausearvutuse lauseteks. Kui mõne lause puhul ei õnnestu leida ühest vastust, siis püüdke formuleerida tingimusi või lisandusi, mille rakendamisel võiks lauset lugeda lausearvutuse lauseks.

a) Elu kui kunstiteos.
b) Kõik luiged on valged.
c) Mõisa köis, las lohiseb.
d) Õppida, õppida, õppida.
e) Selle lause kirjapanemiseks on kasutatud vähemalt kümmet sõna.
f) 1000000000 on kõige suurem arv.
g) Kõige suuremat arvu ei leidu.

27. Sõnastage järgmised laused, eeldades, et A tähendab lauset "Mulle meeldib jäätis"ja B tähendab lauset "Sulle meeldib šokolaad".

a) $A \wedge B$
b) $\neg A$
c) $\neg B$
d) $A \vee B$
e) $A \vee \neg B$
f) $\neg(A \wedge B)$
g) $\neg A \vee \neg B$
h) $\neg A \wedge B$
i) $\neg(A \vee B)$

28. Olgu lause A =*"Hiir hüppab"* ja B =*"Kass kargab"*. Kirjutage sümbolkujul järgmised laused.

a) Hiir hüppab või kass kargab.
b) Kass ei karga.
c) Pole tõsi, et "Hiir hüppab või kass kargab"
d) Hiir ei hüppa ja kass ei karga.
e) Pole tõsi, et "Hiir hüppab ja kass kargab".
f) Hiir ei hüppa või kass ei karga.

29. Olgu lause P =*"Hiir hüppab"*, lause Q =*"Kass kargab"* ja lause R =*"Vana karu lööb trummi"*. Loe järgmised laused.

a) $P \Rightarrow Q$
b) $Q \Rightarrow P$
c) $\neg Q \Rightarrow \neg P$
d) $\neg(P \Rightarrow Q)$
e) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$
f) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$
g) $(R \vee Q) \Rightarrow P$
h) $R \vee (Q \Rightarrow P)$
i) $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$

30. Tähistagu suured ladina tähed järgmisi lauseid:
A = „On pühapäev“,
B = „Kristjan läheb teatrisse“,
C = „Kristjan läheb sõbrale külla“,
D = „Kristjan läheb koeraga jalutama“,
E = „Kristjan istub kodus“.
Loe järgmised laused.

a) $A \Rightarrow B$
b) $D \wedge A \Rightarrow \neg B$
c) $\neg A \Rightarrow \neg(B \vee C)$
d) $\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \Rightarrow E$
e) $A \Rightarrow \neg E \wedge (B \vee C \vee D)$
f) $(A \Rightarrow \neg E) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg E)$

31. Pange järgmised väited kirja valemitega, milles võrdused ja võrratused on ühendatud lausearvutuse tehete märkidega. Muutujad a, b ja c tähistavad reaalarve.

a) $a \cdot b = 0.$
b) $a \cdot b \neq 0.$
c) $\frac{a}{b} = 0.$
d) $|a| = 3.$
e) Punkt (a, b) asub koordinaattasandi I veerandis.
f) Punkt (a, b) asub koordinaatteljel.
g) Reaalarvud a, b ja c on mingi kolmnurga külgede pikkused.
h) Reaalarvud a, b ja c on mingi võrdhaarse kolmnurga külgede pikkused.

32. Pange järgmised väited kirja lausearvutuse valemiga. Andke ka teisenduse „võti“, see tähendab, tabel, kust selgub, millised tähed vastavad millistele lihtlausetele. Iga lause puhul hinnake, millised tähendusnüansid lähevad valemiks teisendamisel kaotsi.

a) Toas on kas isa või ema või on nad mõlemad.
b) Anu armastab koeri, kuid Mart kasse.
c) Kui hr. Kask on õnnelik, siis pr. Kask on õnnetu, ja kui hr. Kask on õnnetu, siis pr. Kask on õnnelik.
d) Pole sellel tegelasel ei kaastunnet ega südametunnistust.
e) Kui Kungla rahvas kuldsel aal kord istus maha sööma, siis Vanemuine murumaal läks kandlelugu lööma.

f) Talvel pääsevad laevad sadamast välja ainult siis, kui jäälõhkuja on neile tee rajanud.
g) Kui õnnetusi tuleb, siis tuleb neid uksest ja aknast.
h) Kui ma nüüd vangerdan, siis ma kaotan lipu, kui jätan vangerdamata, siis saan mati.
i) Televiisori vea põhjus on mittekvaliteetne transistor või on kaitse läbi põlenud ja vool ei pääse toiteplokki.
j) Kommunism – see on nõukogude võim pluss kogu maa elektrifitseerimine.

33. Pange järgmised laused kirja lausearvutuse valemiga.
a) Selleks, et päike tõuseks idast, on tarvilik, et ta loojub läänes.
b) Selleks, et päike tõuseks idast, on piisav, et ta loojub läänes.
c) Tarvilik tingimus, et ettevõte oleks edukas, on see, et tema asutajatel on küllaldaselt algkapitali.
d) Teatrite korralikuks töötamiseks piisab riigi toetusest.
e) Ilma riigi toetuseta lakkavad teatrid korralikult töötamast.
f) Tarvilik ja piisav tingimus, et rida koonduks absoluutselt, on see, et rea kõik ümberjärjestused koonduvad samaks summaks.

34. Leidke järgmiste lausete tõeväärtused.
a) Kui 20 jagub 10-ga, siis 20 jagub 5-ga.
b) Kui 20 jagub 5-ga, siis 20 jagub 10-ga.
c) Kui 20 jagub 3-ga, siis 20 jagub 6-ga.
d) Kui 20 jagub 4-ga, siis 20 jagub 8-ga.
e) 20 jagub 5-ga parajasti siis, kui 20 jagub 4-ga.
f) 10 jagub 5-ga parajasti siis, kui 10 jagub 4-ga.

35. Leidke järgmiste väidete tõeväärtused. Esmalt määrake kindlaks komponentide tõeväärtused ja nende järgi arvutage kogu lause tõeväärtus, kasutades lausearvutuse reegeleid.
a) Vesinik on gaas ja kui elavhõbe on gaas, siis ka kuld on gaas.
b) Pole õige, et Kuu ei ole ümmargune.
c) Keskerakond võitis valimised ja ei võitnud ka.
d) Narva asub Eesti loodeosas parajasti siis, kui Pärnu asub Eesti kaguosas.

36. Laual on neli kaarti. Iga kaardi ühele poole on kirjutatud täht ja teisele poole täisarv. Kaardid paistavad nagu joonisel kujutatud:

A K 7 4

Meil on vaja veenduda, kas kehtib väide „Kui kaardi ühel pool on täishäälik, siis teisel pool on paarisarv.“ Millised kaardid tuleb kindlasti ümber pöörata, et teada saada, kas see väide tõepoolest kehtib või ei?

37. Lausete A ja B tõeväärtused a ja b on kas 1 (tõene) või 0 (väär). Leidke muutujaid a ja b kasutavad aritmeetilised avaldised lausete

a) $\neg A$, b) $A \wedge B$, c) $A \vee B$, d) $A \Rightarrow B$, e) $A \Leftrightarrow B$

tõeväärtuste arvutamiseks.

38. Järgmiste lausete kirjapanemiseks vajalikud valemid sisaldavad implikatsiooni või ekvivalentsi. Leidke nende lausete tõeväärtused, kasutades implikatsiooni ja ekvivalentsi tõeväärtuse definitsiooni.

a) Kui $1 = 1$, siis $2 = 2$.
b) Kui $1 = 2$, siis $2 = 3$.
c) Kui $1 = 1$ ja $1 = 2$, siis $1 = 3$.
d) Kui $1 = 2$ või $1 = 3$, siis $1 = 1$.
e) $1 = 2$ parajasti siis, kui $2 = 3$.
f) $1 = 1$ parajasti siis, kui $2 = 2$ ja $3 = 3$.
g) Kui 1 ei võrdu 2-ga, siis $1 = 3$.
h) 1 ei võrdu 3-ga parajasti siis, kui 1 ei võrdu 2-ga või 1 ei võrdu 1-ga.

39. Koostage valemite tõeväärtustabelid.

a) $(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$
b) $\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$
c) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
d) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
e) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$
f) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
g) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

40. Kas järgmised valemid on kehtestatavad? Põhjendage vastust!

a) $\neg(X \Rightarrow \neg X)$
b) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

41. Näidake, et valemid on samaselt tõesed.

a) $X \vee \neg X$
b) $X \Rightarrow (X \vee Y)$
c) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Y))$
d) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

42. Määrake valemi liik (samaselt tõene, samaselt väär, kehtestatav, kummutatav).

a) $P \Rightarrow \neg P$
b) $\neg(P \Rightarrow \neg P)$
c) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
d) $P \Leftrightarrow \neg P$

43. Lausearvutuse valemite kirjapanemiseks on käibel ka *poola kuju*, mille võttis 1928. aastal kasutusele poola loogik Jan Lukasiewicz. Selles ei panda tehtemärk mitte ühendatavate osavalemite vahele, vaid nende ette. Poola kuju iseärasusena pole valemites vaja kasutada sulge. Valemid $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, on poola kujul vastavalt Na, Kab, Aab, Cab, Eab (lausemuutujad kirjutatakse väikese tähega). Keerukamaid valemeid koostatakse analoogiliselt. Näiteks valemile $A \wedge B \vee C$ vastab valem AKabc, valemile $A \wedge (B \vee C)$ aga KaAbc. Alljärgnevatest valemitest teisendage a)–c) poola kujule ning d)–f) tavakujule.

a) $((A \vee B) \wedge (B \vee C)) \wedge (A \vee C)$
b) $\neg A \wedge (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
c) $(A \vee B) \Rightarrow (C \Leftrightarrow D) \wedge A$
d) EcNCbKad
e) AaCKNabc
f) KENA$abcd$

44*. Öeldakse, et kvantoreid sisaldav valem on *prefikskujul*, kui kvantorid koos nendega seotud muutujatega asuvad kõik vasakul ning neile järgneb kvantoritest vaba valem.
Näiteks $\forall x \exists y, x > y$ on prefikskujul, aga $\forall z, z > 0 \Leftrightarrow \exists y, y^2 > 0$ ei ole.
Viige järgmised valemid prefikskujule. Põhjendage tehtavad sammud. (Muutujad x ja y omandavad väärtusi ühest ja samast mittetühjast hulgast. P ja Q on mingid ühe muutuja lausearvutuse valemid.)

a) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$ (siin A on mingi kvantoreid mittesisaldav valem),

b) $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$,

c) $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$.

45*. *Valemi väärtustamine.* Kirjutada programm, mis võtab sisendiks lausearvutuse valemi A ja kolme muutujaga väärtustuse xyz ja väljastab valemi tõeväärtuse antud väärtustusel.

46*. *Tõeväärtustabeli genereerimine.* Kirjutada programm, mis võtab sisendiks lausearvutuse valemi A ja väljastab selle valemi tõeväärtustabeli väärtuste veeru.

47*. *Implikatsiooni ja ekvivalentsi sisaldava valemi väärtustamine.* Kirjutada programm, mis võtab sisendiks lausearvutuse valemi A ja kolme muutujaga väärtustuse xyz ja väljastab valemi tõeväärtuse antud väärtustusel.

3. Valemite teisendamine

Definitsioon. Öeldakse, et valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene.

Teoreem. Valemitest $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ järeldub valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Definitsioon. Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse loogiliselt samaväärseteks, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemeis esinevate muutujate väärtustusel.

Olgu $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ valemid.

1. **Idempotentsuse omadused**:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.
2. **Kommutatiivsuse omadused**:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \wedge \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.
3. **Assotsiatiivsuse omadused**:
   a) $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$,
   b) $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$.
4. **Distributiivsuse omadused**:
   a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$,
   b) $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H}) \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$.
5. **Neelamisomadused**:
   a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$.
6. **De Morgani seadused (duaalsus)**:
   a) $\neg(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$,
   b) $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$.
7. **Kahekordse eituse** omadus: $\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.
8. **Liikmete elimineerimise reeglid**, kus t on suvaline samaselt tõene valem ja v on suvaline samaselt väär valem:
   a) $\mathcal{F} \wedge t \equiv \mathcal{F}$,
   b) $\mathcal{F} \vee t \equiv t$,
   c) $\mathcal{F} \wedge v \equiv v$,
   d) $\mathcal{F} \vee v \equiv \mathcal{F}$.
9. **Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu**:
   a) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$,
   b) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.
10. **Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu**:
   a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$,
   b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.
11. **Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu**:
   a) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$,
   b) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$.

Definitsioon. Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks nimetatakse valemiga $\mathcal{F}$ samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate täielike lihtkonjunktsioonide disjunktsiooni.

48. a) Kas valemitest A ja $\neg B$ järeldub valem $\neg(A \Rightarrow B)$?
b) Kas valemitest $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ ja A järeldub valem C?

49.

a) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järeldada valemi $A \Rightarrow \neg B$ tõesuse kohta?
b) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järeldada valemi $\neg(A \vee B)$ tõesuse kohta?

50. Kolme väite A, B ja C kohta on teada järgmist.

a) Kui A on tõene, siis ka B ja C on tõesed.
b) Kui B on tõene, siis vähemalt üks väidetest A ja C on tõene.
c) Kui C on tõene, siis A on tõene ja B on väär.

Millised väidetest A, B, C on tõesed?

51. Pange järgmine arutlus kirja lausearvutuse valemitega ja tõestage, et see arutlus kehtib, st tõestage, et eeldustele vastavatest valemitest järeldub väitele vastav valem.
Õpilased on rõõmsad siis ja ainult siis, kui ei toimu kontrolltööd. Kui õpilased on rõõmsad, siis on õpetajal hea meel. Ent kui õpetajal on hea meel, siis ta ei taha pidada tundi, ning kui ta ei taha pidada tundi, siis toimub kontrolltöö. Järelikult õpilased pole rõõmsad.

52. On teada järgmised faktid.

a) Kui Mihkel köhib ja on näost valge, siis ta kas on haige või on käinud nurga taga suitsu tegemas.
b) Kui Mihkel pole käinud suitsu tegemas ja ikkagi köhib või on näost valge, siis ta on haige.
c) Kui Mihkel on haige, siis ta köhib, aga pole näost valge.

Pärast vahetundi klassi tulles oli Mihkel näost valge. Kas sellest järeldub, et ta käis nurga taga suitsu tegemas?

53. On teada järgmised faktid.

a) Kui Jüri vaatab korvpalli ja Eesti võidab, siis ta on õnnelik ja joob õlut.
b) Kui Jüri ei vaata korvpalli ja on ikkagi õnnelik, siis ta joob õlut.
c) Kui Eesti võidab, siis Jüri on õnnelik.

Õhtul oli Jüri õnnelik. Kas võib kindlalt väita, et ta jõi õlut? Põhjendage oma vastust.

54. Kui Siimule meeldiks šokolaad, siis ta sööks seda palju. Kui ta šokolaadi palju sööks, siis kaoks tal söögiisu. Kui tal kaoks söögiisu, siis ei meeldiks talle ka šokolaad. Järelikult šokolaad ei meeldi talle.

55. Zen-budismi guru teatas oma õpilastele: „Kui ma olen Buddha, siis ma ei ole Buddha.“ Õpilased olid seda kuuldes hämmastunud. Väljendage väide valemiga, koostage tõeväärtustabel ja selgitage, millise lihtsama väitega on see väide samaväärne.

56. Tõestage, et kui valemid A ja $A \Rightarrow B$ on samaselt tõesed, siis ka valem B on samaselt tõene.

57. Keegi ütles, et tal on niisugused lausearvutuse valemid F ja G, et valemist F järeldub valem G ja valemist F järeldub valem $\neg G$. Kas selline olukord on võimalik?

58. Näidake, et kehtivad samaväärsused.

a) $(X \vee Y) \wedge Z \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z$
b) $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$
c) $X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

59. Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja konjunktsiooni.

a) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$
b) $P \vee Q \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
c) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$
d) $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
e) $(P \Leftrightarrow Q) \vee P$

60. Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja disjunktsiooni.

a) $(P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
b) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$
c) $(P \Rightarrow Q) \wedge P$
d) $(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$
e) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$

61. Leidke loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab võimalikult vähe sümboleid.

a) $\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge B)$
b) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \Rightarrow Q) \wedge P)$
c) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$
d) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$
e) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
f) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$
g) $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)$
h) $\neg(P \wedge Q \wedge (P \Rightarrow \neg Q))$

62. Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugele kui võimalik.

a) Kui a, b ja c on kolmnurga külgede pikkused, siis kehtivad võrratused $a+b>c$, $a+c>b$ ja $b+c>a$.
b) Kui a, b ja c on täisarvud nii, et $a=bc$, siis a jagub arvuga b ja a jagub arvuga c.
c) Kui n on positiivne täisarv, siis n^2+n+41 on algarv;
d) Kõigi täisarvude a ja b korral kehtib väide, et kui $a+b$ on paarisarv, siis a ja b on mõlemad kas paarisarvud või paaritud arvud.

63. Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugele kui võimalik.

a) Iga tudeng selles aines on käinud Soomes või Rootsis.
b) Iga e-mail, mis on suurem kui üks megabait, kompresseeritakse.
c) Kui kasutaja on aktiivne, siis on vähemalt üks võrguühendus saadaval.
d) Leidub siga, mis oskab ujuda ja kalu püüda.
e) Selles aines pole kedagi, kes oskaks prantsuse või vene keelt.

f) Arv x on positiivne, aga arv y ei ole positiivne.
g) Kui x on algarv, siis $\sqrt{x}$ ei ole ratsionaalarv.
h) Kui x on paaritu arv, siis x^2 on paaritu arv.
i) Kui x on ratsionaalarv ja $x \neq 0$, siis $\tan x$ ei ole ratsionaalarv.
j) Kui $\sin x < 0$, siis ei kehti $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
k) $\exists x \exists y\,(x+2y=2 \wedge 2x+4y=5)$.
l) $\forall x \exists y\,(x+y=2 \wedge 2x-y=1)$.
m) $\forall x \forall y\,(((x \geqslant 0) \wedge (y<0)) \Rightarrow (x-y>0))$.
n) $\exists x \exists y\,(((x \leqslant 0)) \wedge (y \leqslant 0) \wedge (x-y>0))$.
o) $\forall x \forall y\,(((x \neq 0)) \wedge (y \neq 0) \Leftrightarrow (xy \neq 0))$.

64. Teisendage järgmised valemid nii, et eituse märk esineks ainult muutujate ees.

a) $\neg(\neg P \vee Q)$
b) $\neg(P \wedge Q \vee \neg R)$
c) $\neg(P \wedge Q \vee R) \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$
d) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge R)$

65. Viige täielikule disjunktiivsele normaalkujule.

a) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
b) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \wedge X))$
c) $\neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg Y)$
d) $(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$
e) $\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$
f) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
g) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
h) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$

66. Konstrueerige valem, mis rahuldab tingimust.
a) Valem on tõene parajasti siis, kui X on tõene ja Y väär.
b) Valem on väär parajasti siis, kui X ja Y on mõlemad tõesed.
c) Valem on tõene parajasti siis, kui vähemalt kaks lausetest X, Y ja Z on tõesed
d) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks lausetest X, Y ja Z on tõesed
e) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt üks lausetest X, Y ja Z on tõesed

67. Leidke kolme muutuja valem, mis on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks muutujat on väärad.

68. Leidke kolme muutuja valem, mis on sama tõeväärtusega kui enamus muutujaid.

69. Komisjon, kuhu kuuluvad liikmed A, B, C ja D, otsustab olulisemaid küsimusi hääletades. Igal liikmel on üks hääl, välja arvatud komisjoni juht A, kelle häälel on kahekordne kaal. Otsus loetakse vastuvõetuks, kui otsuse poolt antakse vähemalt 3 häält. Leidke valem, mis on tõene parajasti siis, kui otsus võetakse vastu.

70. Koostage valem, mis on tõene parajasti siis, kui kahendarvude $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ summa on ülimalt kahekohaline.

71. Leidke iga kahe muutujaga tõeväärtuste veeru jaoks lihtsaim selliste tõeväärtustega valem.

72. Tehke kindlaks, kas lausearvutuses kehtib

a) implikatsiooni assotsiatiivsus;
b) ekvivalentsi assotsiatiivsus;
c) distributiivsus konjunktsiooni ja implikatsiooni vahel.

73. Avaldage ülejäänud tehted

a) eituse ja disjunktsiooni kaudu;
b) eituse ja konjunktsiooni kaudu;
c) eituse ja implikatsiooni kaudu.

74. Avaldage disjunktsioon implikatsiooni kaudu.

75*. Tõestage, et

a) eitust ei saa avaldada konjunktsiooni, disjunktsiooni, implikatsiooni ja ekvivalentsi kaudu;
b) implikatsiooni ei saa avaldada disjunktsiooni ja konjunktsiooni kaudu;
c) konjunktsiooni ei saa avaldada disjunktsiooni ja implikatsiooni kaudu.

76*. *Duaalsusprintsiip.* Olgu F ja G samaväärsed valemid, mis sisaldavad tehtemärkidest ainult eitust, disjunktsiooni ja konjunktsiooni. Tõestage, et kui valemid F' ja G' on saadud valemitest F ja G, asendades nendes iga tehtemärgi $\wedge$ märgiga $\vee$ ja vastupidi ning iga lausemuutuja X tema eitusega $\neg X$, siis valemid F' ja G' on samaväärsed.

77*. Leidke

a) lausearvutuse valem, mida ei saa avaldada eituse ja ekvivalentsi abil;
b) lausearvutuse valem, mida ei saa avaldada konjunktsiooni, disjunktsiooni ja implikatsiooni kaudu;
c) lausearvutuse valem, mida ei saa avaldada konjunktsiooni, disjunktsiooni, implikatsiooni ja ekvivalentsi kaudu.

(Kõigil juhtudel esitage ka tõestus.)

78*. Näidake, et kehtivad järgmised samaväärsused. (Muutujad x ja y omandavad väärtusi ühest ja samast mittetühjast hulgast. P ja Q on mingid ühe muutuja lausearvutuse valemid.)

a) $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Longleftrightarrow \forall x\, \forall y\, (P(x) \wedge Q(y))$,

b) $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \Longleftrightarrow \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$.

79*.

a) Näidake, et lause $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ on samaväärne lausega $\forall x \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$, kus kõik kvantorid on samast mittetühjast hulgast.
b) Näidake, et lause $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ on samaväärne lausega $\forall x \exists y\, (P(x) \vee Q(y))$, kus kõik kvantorid on samast mittetühjast hulgast.

4. Hulga mõiste

Hulga all mõistetakse üksteisest erinevate objektide kogumit, mida vaadeldakse ühe tervikuna ja kus iga objekti korral on võimalik üheselt kindlaks määrata, kas ta kuulub antud hulka.

Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega $A, B, C, \ldots$, hulga elemente väikeste ladina tähtedega $a, b, c, \ldots$. Tühi hulk $\varnothing = \{\}$ ei sisalda ühtki elementi. Tähtsamad arvuhulgad on

- naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;
- ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$;
- reaalarvude hulk $\mathbb{R}$;
- kompleksarvude hulk $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$.

Intervallid on

- lõik $[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
- vahemik $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
- poollõik $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$;
- poollõik $(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

Kahte hulka loetakse võrdseteks, kui nad koosnevad samadest elementidest.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B osahulgaks, kui kõik hulga A elemendid on hulga B elementideks (ehk hulga A iga element kuulub hulka B). Sel juhul tähistatakse $A \subset B$ või $B \supset A$.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B pärisosahulgaks ja kirjutatakse $A \subsetneq B$, kui hulk A on hulga B osahulk ja $A \neq B$.

Hulga A kõigi osahulkade hulka tähistatakse tavaliselt $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

80. Esitage hulk A kujul $\{x \mid P(x)\}$:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

b) $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right\}$;

c) $A = \{0.5, 1, 1.5, 2\}$;

d) $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$;

e) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$;

f) $A = \{\frac{1}{3\cdot 6}, \frac{1}{6\cdot 9}, \frac{1}{9\cdot 12}, \frac{1}{12\cdot 15}, \dots\}$;

g) $A = \{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\}$;

h) $A = [a, b)$;

i) A on paarisarvude hulk.

81. Esitage elementide loetelu abil järgnevad hulgad:

a) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

b) $\{n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$;

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 13n + 30 \leqslant 0\}$;

d) $\{\cos n\pi : n \in \mathbb{N}\}$;

e) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land 7x^2 - 8x = 0\}$;

f) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \land x^2 + y^2 = 1 \land y - x = 1\}$;

g) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x^2 + 4 = 0\}$;

h) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

82. Kirjutage välja antud hulkade kõik elemendid ja kõik osahulgad:

a) $\{a, b\}$;

b) $\{1, \{1\}\}$;

c) $\{a, b, c\}$.

83. Otsustage, kas antud väited on tõesed:

a) $3 \in \{1, 2, 3\}$;

b) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$;

c) $\{a, b, c\} = \{a, c, b\}$;

d) $x \in \{x\}$;

e) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$;

f) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

g) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{3\}\}$;

h) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$;

i) $\{\{3\}\} \subset \{2, 3, \{3\}\}$;

j) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$;

k) $3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

l) $\{\varnothing\} \in \varnothing$;

m) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

n) $\varnothing \subset \varnothing$;

o) $\{\varnothing\} = \varnothing$.

84. Kirjutage välja $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$ ja $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

85. Kujutage antud hulgad arvsirgel:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land 3 < x \leqslant 7\}$;

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land |x| < c\}$;

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \land |x - a| < \varepsilon\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 9x + 7 \geqslant 0\}$;

e) $\{2x^2-9x+7 \mid x \in \mathbb{R}\}$;

f) $\{x^2+2x+1 \mid x \in (-2,\infty)\}$;

g) $\{x^2+2|x|+1 \mid x \in (-1,1)\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|1-2x|} \geqslant 1+x\}$;

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|0.25-x|} \geqslant x+0.5\}$;

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x|+2x \geqslant 1\}$;

k) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x^2-9x+6| = 2x^2-9x+6\}$;

l) $\{1-|x| \mid x \in [-2,1]\}$;

m) $\{|1+x|+1 \mid x \in [1,2]\}$;

n) $\{y \in \mathbb{R} \mid y=-x^2+6x-2 \wedge x \in (0,\infty)\}$;

o) $\{y \in \mathbb{R} \mid y=x^2-4x+3 \wedge x \in (0,\infty)\}$.

86. Kujutage antud punktihulgad koordinaattasandil:

a) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leqslant 5\}$;

b) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge a < x \leqslant b \wedge c < y \leqslant d\}$;

c) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2+y^2 \leqslant 4\}$;

d) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge y \geqslant x^2\}$;

e) $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge |x|+|y| = 1\}$;

87. Kirjutage välja kõik antud hulga elemendid:

a) $\{A \mid \{1\} \subset A \subset \{1,2,3\}\}$;

b) $\{A \mid \{a,b\} \subset A \subset \{a,b,c,d\}\}$;

c) $\{A \mid A \subset \{a,b,c\} \wedge a \notin A \wedge b \in A\}$.

88. (Lewis Carroll'i ülesanne) Vanal ajal toimunud lahingus sai palju sõdalasi kannatada. Lahingust osavõtjatest 70% kaotas silma, 75% - kõrva, 80% - käe ja 85% - jala. Kui palju sõdalastest (minimaalselt ja maksimaalselt) jäid ilma nii silmast, kõrvast, käest kui ka jalast?

89. Tõestage, et kui hulgas on n elementi, siis sellel hulgal on 2^n osahulka.

90. Olgu $A_1, A_2, \dots, A_n$ hulgad. Tõestage, et $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

91*. Iga positiivse täisarvu n korral leidke hulk A_n nii, et A_n elementide arv oleks n ning iga $a, b \in A_n$, $a \neq b$, korral kehtiks $a \in b$ või $b \in a$.

5. Tehted hulkadega

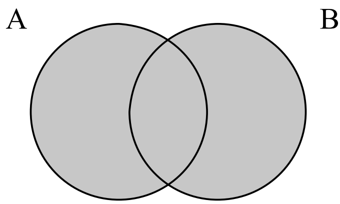
ühend $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee \text{(või) } x \in B\}$	$\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid \exists \text{ (leidub) } \alpha \text{ nii, et } x \in A_\alpha\}$
ühisosa $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge \text{(ja) } x \in B\}$	$\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha = \{x \mid \forall \text{ (iga) } \alpha \text{ korral } x \in A_\alpha\}$
vahe $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	sümmeetriline vahe $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ühendi ja ühisosa omadused.

- idempotentsus: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- kommutatiivsus: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- assotsiatiivsus: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributiivsus: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- neelduvus: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

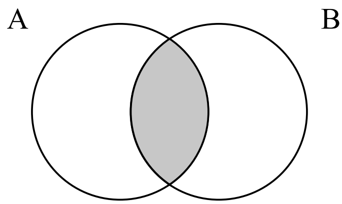
Venni diagrammid.

ühend



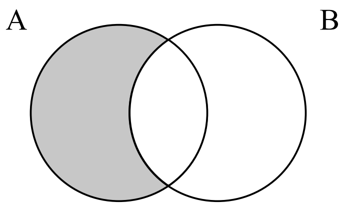
A ∪ B

ühisosa



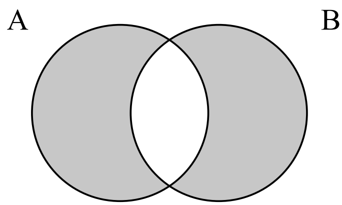
A ∩ B

vahe



A \ B

sümmeetriline vahe



A Δ B

Sümmeetrilise vahe omadusi.

- kommutatiivsus: $A \triangle B = B \triangle A$
- assotsiatiivsus: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- distributiivsus ühisosaga: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Tihti on käsitluses fikseeritud teatav hulk U ja kõik vaadeldavad hulgad on selle hulga alamhulgad. Sellisel juhul nimetatakse hulka U universaalseks. Olgu fikseeritud teatav universaalne hulk U.

Definitsioon. Hulga A täiendiks A' nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik need universaalse hulga U elemendid, mis ei kuulu hulka A, s.t

$$A' = \{x \in U : x \notin A\} = U \setminus A.$$

De Morgani seadused: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Kahekordse täiendi seadus: $A'' = A$.

92. Olgu A suvaline hulk. Kirjeldage hulki

a) $A \cup \varnothing$;
b) $A \cap \varnothing$;
c) $A \setminus \varnothing$;
d) $A \triangle \varnothing$;
e) $A \setminus A$;
f) $\varnothing \setminus A$;
g) $A \cup A'$;
h) $A \cap A'$;
i) $\varnothing'$.

93. Leidke hulgad $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, kui

a) $A = \{-1, 0, 3, 4\}$, $B = \{0, 4, 6\}$;
b) $A = [0, 2]$, $B = [1, 5]$;
c) $A = [0, 2]$, $B = \{0, 4, 6\}$;
d) $A = (-\infty, 7]$, $B = [2, 4]$;
e) $A = \varnothing$, $B = \{1\}$;
f) $A = \{\varnothing\}$, $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

94. Leidke hulgad A ja B, kui $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$.

95. Kujutage antud hulgad arvsirgel:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leqslant x < 1\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 3\}$;
b) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -1\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 3\}$;
c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leqslant 5\}$;
d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x \leqslant 5\} \triangle \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$.

96. Leidke hulga A täiend A' universaalse hulga X suhtes:

a) $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{2,5,7\}$; b) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

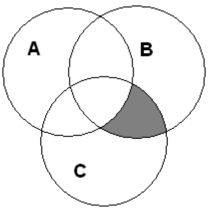
97. Millist tingimust peavad rahuldama hulgad A ja B, et kehtiks võrdus:

a) $A \cup B = A$;
b) $A \cap B = A$;
c) $A \cup B = A \cap B$;
d) $A \setminus B = A$;
e) $A \setminus B = B$;
f) $A \triangle B = A$;
g) $A \triangle B = \varnothing$.

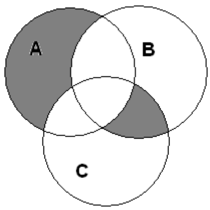
98. Kujutage Venni diagrammil järgmised hulgad:

a) $A \setminus (B \cup C)$;
b) $A \setminus (B \cap C)$;
c) $(A \setminus (B \cap C)) \cap B$;
d) $A \cap (B \setminus C)$;
e) $(A \triangle B) \triangle C$;
f) $(A \cup B) \cap C$;
g) $(A \setminus B) \triangle C$;
h) $(A \cap B) \cap (A \triangle B)$;
i) $(A \cap C) \cup (B \setminus (A \cup C))$.

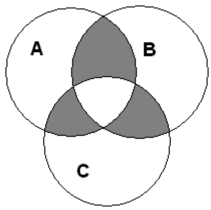
99. Kirjutage hulgateoreetiliste tehete abil järgmised Venni diagrammidel kujutatud hulgad:



a)



b)



c)

100. Klassi 30 õpilasest igaüks tegeleb vähemalt ühe hobiga. Õpilased saavad valida kolme hobi vahel: male, näitering, skautlus. Kuus õpilast tegelevad ainult skautlusega. Viis õpilast jõuavad igale poole. Kaks maletavad ja tegelevad skautlusega, aga ei näitle. Viisteist on skaudid. Kaks last tegelevad üksnes malega. Kolm last käib üksnes näitetrupis. Mitu last tegeleb male ja näitemänguga, aga ei ole skaudid? Mitu last kuulub maleringi?

101. Ühe instituudi 100 üliõpilase küsitlemisel selgus, et neist 28 õpivad inglise keelt, 30 saksa keelt, 42 prantsuse keelt, 8 inglise ja saksa keelt, 10 inglise ja prantsuse keelt, 5 saksa ja prantsuse keelt, 3 aga kõiki kolme keelt. Mitu üliõpilast ei õpi nimetatud keeli? Mitu üliõpilast õpib ainult prantsuse keelt, ainult inglise keelt, ainult saksa keelt?

102. Ühes sõjaväeosas mängivad 100-st sõdurist 80 jalgpalli, 60 võrkpalli ja 40 korvpalli. On teada, et 40 neist oskavad mängida nii jalgpalli kui ka võrkpalli, 30 jalgpalli ja korvpalli, 20 võrkpalli ja korvpalli. Kui palju neist 100-st sõdurist oskavad mängida kõiki kolme mängu, kui iga sõdur oskab mängida vähemalt ühte mängu?

103. Leidke $(\{\{\varnothing\}\} \mathbin{\triangle} \{\varnothing\}) \setminus (\{\varnothing\} \mathbin{\triangle} \varnothing)$.

104. Hulgad A, B ja $A \cup B$ sisaldavad vastavalt m, n ja p elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $A \cap B$, $A \setminus B$ ja $A \mathbin{\triangle} B$?

105. Tõestage järgmised võrdused.

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

d) $A \cup (A \cap B) = A$

e) $A \cap (A \cup B) = A$

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

i) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

j) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

k) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

l) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

m) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

n) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

o) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

p) $A \setminus B = A \mathbin{\triangle} (A \cap B)$

q) $(A \mathbin{\triangle} B) \cap C = (A \cap C) \mathbin{\triangle} (B \cap C)$

r) $A \mathbin{\triangle} (A \mathbin{\triangle} B) = B$

s) $A \mathbin{\triangle} \varnothing = A$

t) $A \mathbin{\triangle} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

106. Tõestage järgmised võrdused.

a) $(A')' = A$

b) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

d) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

107. Leidke hulgad.

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$

b) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$

c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1+2^{-n}]$

d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1+2^{n}]$

e) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 1]$

f) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1+2^{-n})$

g) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1+2^{n}]$

h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-1, n^{-1}]$

i) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-2^{n}, 2^{n})$

j) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-2^{-n}, 2^{-n}]$

k) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$

l) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$

m) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[2^n, \infty)$

n) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[2^{-n}, \infty)$

o) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, \infty)$

p) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n, \infty$

q) $\bigcup_{n\in N}\{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$

r) $\bigcap_{n\in N}\{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$

s) $\bigcup_{n\in N}\{-n, n\}$

t) $\bigcap_{n\in N}\{-n, n\}$

u) $\bigcup_{j=k}^{n}[2j, 2j+3]$

v) $\bigcup_{j=k}^{n}\{-j, j\}$

w) $\bigcap_{j=k}^{n}\{-j, j\}$

x) $\bigcap_{n\in N}\{-2n, 0, 2n\}$

108. Tõestage, et $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$.

109. Tõestage, et kui $A \subset B$, siis suvalise hulga C korral kehtivad sisalduvused:

a) $A \cup C \subset B \cup C$;
b) $A \cap C \subset B \cap C$;
c) $(A \setminus C) \subset (B \setminus C)$;
d) $(C \setminus B) \subset (C \setminus A)$;
e) $B' \subset A'$.

110. Näidake, et kehtib:

a) $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset C$;
b) $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A \wedge C \subset B$;
c) $C \subset A \vee C \subset B \Rightarrow C \subset A \cup B$.

111. Avaldage

a) $A \cup B$ tehete $\cap$ ja $\triangle$ abil;

b) $A \setminus B$ tehete $\cap$ ja $\triangle$ abil;

c) $A \cap B$ tehete $\cup$ ja $\triangle$ abil;

d) $A \setminus B$ tehete $\cup$ ja $\triangle$ abil;

e) $A \cup B$ tehete $\setminus$ ja $\triangle$ abil;

f) $A \cap B$ tehte $\setminus$ abil.

112. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ jada, kusjuures $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühendit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

113. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ jada, kusjuures $A_1 \supseteq A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühisosa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definitsioon. Hulkade A ja B otsekorrutiseks nimetatakse kõikide paaride (a, b) hulka, kus $a \in A$ ja $b \in B$, seejuures elementide järjekord on oluline.

$$\boxed{\begin{gathered} A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\} \\ \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n} = A^n \end{gathered}}$$

Otsekorrutise omadusi:

- otsekorrutis tühja hulgaga: $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$;
- distributiivsus: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

114. Leidke antud hulkade otsekorrutis $A \times B$:

a) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$;

b) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$;

c) $A = \{3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$;

d) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$;

e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 5\}$,
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leqslant 3\}$.

115. Olgu antud hulgad $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 4\}$ ja $C = \{y \in \mathbb{N} : 1 \leqslant y \leqslant 5\}$. Kujutage koordinaattasandil

a) $A \times (B \cup C)$, b) $(A \triangle B) \times C$, c) $C \times (A \cup B)$, d) $C \times (B \triangle A)$, e) $(A \cup C) \times B$, f) $C \times (B \setminus A)$, g) $(B \cap A) \times C$, h) $B \times (C \cup A)$, i) $(C \setminus A) \times B$, j) $A \times (B \cap C)$.

116. Hulgad A ja B sisaldavad vastavalt m ja n elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $\mathcal{P}(A)$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ja $\mathcal{P}(A \times B)$? Leidke need hulgad, kui

a) $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$; b) $A = B = \{0,1\}$; c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \varnothing$.

117. Tõestage võrdused.

a) $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$

b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

d) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

118. Näidake, et $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

119. Tõestage, et kui $A \neq \varnothing$ ja $B \neq \varnothing$, siis $A \times B = B \times A$ parajasti siis, kui $A = B$.

120. Tõestage, et kui $A_i \neq \varnothing, B_i \neq \varnothing, i = 1, \ldots, n$, siis

a) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subset B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2, \ldots, A_n \subset B_n$;

b) $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \ldots, A_n = B_n$.

121*. Tõestage, et

a) $A \cup B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cap$ ja $\setminus$ abil;

b) $A \setminus B$ ei ole võimalik avaldada tehete $\cap$ ja $\cup$ abil.

122*. Kas leiduvad hulgad $A, B \subset \mathbb{N}$ nii, et $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = \mathbb{N}$ ning

$$\begin{cases} \forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow x + y \in B, \\ \forall x, y \in B \quad x \neq y \Rightarrow x + y \in A? \end{cases}$$

123*. Sümbolid A, B, C, D ja X tähistagu mingi universaalhulga alamhulki. Tõestage, et võrrand

$$(A \cap X) \cup (B \cap X') = (C \cap X) \cup (D \cap X')$$

on (X suhtes) lahenduv parajasti siis, kui $B \triangle D \subset (A \triangle C)'$. Sel juhul leidke kõik lahendid X.

124*. Tõestage, et antud hulgast ja tema n osahulgast saab tehete $\cup$, $\cap$, $\smallsetminus$ abil moodustada maksimaalselt 2^{2^n} erinevat hulka. (See tähendab, tõestage, et rohkem ei saa, kui 2^{2^n}, ja iga n korral tooge konkreetne näide, kuidas 2^{2^n} realiseerub.)

125*. Olgu A, B, C, D hulgad, kusjuures $A \neq \varnothing$ ja $B \neq \varnothing$. Kehtigu $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Tõestage, et $A = B = C = D$.

126*. *Venni diagrammi joonistamine lihtsama avaldise jaoks.* Kirjutada programm, mis võtab sisendiks kahe tehtega ja kahe muutujaga hulgaavaldise ja joonistab sellele vastava Venni diagrammi.

127*. *Venni diagrammi joonistamine keerulisema avaldise jaoks.* Kirjutada programm, mis võtab sisendiks suvalise keerukusega kolme muutujaga hulgaavaldise ja joonistab sellele vastava Venni diagrammi.

128*. *Hulgaavaldiste ekvivalentsuse kontrollimine.* Kirjutada funktsioon ekvivalentsed, mis võtab argumentideks kaks hulgaavaldist X ja Y (sõnedena) ning tagastab tõeväärtuse vastavalt sellele, kas need hulgaavaldised on ekvivalentsed (kõikvõimalike hulkade puhul).

6. Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon

Definitsioon. Öeldakse, et täisarv a jagab täisarvu b (ja tähistatakse $a \mid b$), kui leidub selline täisarv c, et $ac = b$. Fakti, et $a \mid b$ võib tähistada ka kujul $b \,\vdots\, a$ ehk arv b jagub arvuga a.

Teoreem. Olgu a täisarv ja b naturaalarv. Siis leiduvad üheselt määratud täisarvud q (jagatis) ja r (jääk) nii, et

$$a = bq + r \quad \text{ja} \quad 0 \leqslant r < b.$$

Definitsioon. Algarvuks nimetatakse naturaalarvu $p > 1$, mille ainsad naturaalarvulised jagajad on 1 ja p. Naturaalarvu, mis on suurem kui 1 ja mis pole algarv, nimetatakse kordarvuks.

Definitsioon. Täisruuduks nimetatakse naturaalarvu, mis võrdub mingi täisarvu ruuduga.

129. Olgu a, b, c ja d täisarvud. Tõestage järgmised omadused:

a) $a \mid a$ (refleksiivsus);
b) $1 \mid a$;
c) $0 \mid a$ parajasti siis, kui $a = 0$;
d) kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$ (transitiivsus);
e) kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $|a| \leq |b|$;
f) kui $a \mid b$ ja $a \mid c$, siis $a \mid xb + yc$ suvaliste täisarvude x ja y korral;
g) kui $a \mid b$ ja $a \mid (b \pm c)$, siis $a \mid c$;
h) kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $|a| = |b|$;
i) kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $(b/a) \mid b$;
j) kui $c \neq 0$, siis $a \mid b$ parajasti siis, kui $ac \mid bc$.
k) kui $a \mid b$, siis $a \mid be$ suvalise täisarvu e korral.
l) kui $a \mid b$ ja $c \mid d$, siis $ac \mid bd$;

130. Näidake, et kolmekohaline arv, mis on kirjutatud ühesuguste numbritega, jagub alati kolmega.

131. Tõestage, et suvaliste täisarvude a ja b korral vähemalt üks arvudest a, b, $a + b$ ja $a - b$ jagub kolmega.

132. Viis täisarvu a, b, c, d, j rahuldavad järgmisi tingimusi:

a) $j \mid (ad - bc)$;
b) $j \mid (a - b)$, ning
c) arvude b ja j ühised jagajad on ± 1.

Tõestage, et $j \mid (c - d)$.

133. Tõestage, et arvust 3 suuremate algarvude p ja q korral $p^2 - q^2$ jagub arvuga 24.

134. Põhjendage, et täisarvu ruut ei saa lõppeda numbritega $2, 3, 7$ või 8.

135. Näidake, et kolme järjestikuse naturaalarvu ruutude summa ei jagu kolmega.

136. Tõestage, et

a) Kolmest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 3;
b) Kahest järjestikusest paarisarvust täpselt üks jagub arvuga 4;
c) Viiest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 5.

137. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

138. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n^2-1)$.

139. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

140. Näidake, et kui n on naturaalarv, siis n^2+1 ei jagu 11-ga.

141. Tõestage, et kui $(mn+pq) \vdots (m-p)$, siis $(mq+np) \vdots (m-p)$.

142. Avaldis $a+b+c$, kus a, b ja c on täisarvud, jagub arvuga 6. Näidake, et siis ka $a^3+b^3+c^3$ jagub arvuga 6.

143. Tõestage, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel

a) arvuga 3 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
b) arvuga 4 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
c) arvuga 8 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1 või 4;
d) arvuga 7 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1, 2 või 4.

144. Naturaalarvu a jagamisel arvuga 8 tekkis jääk 7. Milline jääk tekib arvu a^3 jagamisel arvuga 8?

145. Naturaalarvu a jagamisel arvuga 5 tekkis jääk 4. Tõestage, et a^2+a^3 jagub arvuga 5.

146. Tõestage, et suvalise naturaalarvu n korral arv n^3+3n^2+2n jagub 6-ga.

147. Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geqslant 5$ jagamisel arvuga 6 tekkiv jääk saab olla vaid 1 või 5.

148. Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geqslant 5$ ruudu jagamisel arvuga 24 tekkiv jääk saab olla vaid 1.

149. Tõestage, et mis tahes 12 naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga 11.

150. Tõestage, et kui p, $p+2$ ja $p+4$ on kõik algarvud, siis $p=3$.
Näpunäide. Vaadelda eraldi juhtusid arvu p jagamisel arvuga 3 tekkiva jäägi 0, 1 või 2 korral.

Matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

1. **Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;

2. **Induktsiooni samm.** $S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et suvaline väide S_k on tõene, järeldub, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tugeva matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

1. **Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;

2. **Induktsiooni samm.** $S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et kõik eelnevad väited $S_1, \ldots, S_k$ on tõesed, järeldub, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tähtis! Tugeva induktsiooni baasi kehtivuse kontrollimisel on mõnikord vaja tõestada lisaks esimesele väitele veel mõned järgnevad väited.

151. Tõestage võrdused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3i^2 - i - 2) = (n-1)n(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

g) $\displaystyle\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

h) $\displaystyle\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

i) $\displaystyle 1 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

j) $\displaystyle 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \geqslant 2$

k) $\displaystyle 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

l) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

152. Tõestage võrratused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

a) $n^2 \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$

b) $2^n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $n^n \geq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) $(n+1)! \geq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$

e) $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f) $\displaystyle 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

g) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

h) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} \quad \forall n \geqslant 2$

i) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

j) $n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$

k) $\frac{n}{2} + 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

l) $\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{l}} \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

153. Tõestage, et kui $n \in \mathbb{N}$, siis $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, kus $x > -1$.

154. Geomeetrilise jada n esimese elemendi summa valem. Tõestage matemaatilise induktsiooni abil, et kehtib $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, kus $n \geqslant 0$ ja $x \neq 1$.

155. Tõestage matemaatilise induktsiooniga, et kumera n-nurga sisenurkade summa S_n avaldub valemiga $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

156. Olgu x reaalarv, mille korral $x + \frac{1}{x}$ on täisarv. Tõestage, et siis ka $x^n + \frac{1}{x^n}$ on täisarv iga naturaalarvu n korral. *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induktsiooni.*

157. Korvpalliliigas on n meeskonda ($n \geq 2$). Kõik meeskonnad kohtuvad omavahel parajasti ühe korra, kusjuures viigid ei ole lubatud (igas mängus selgitatakse võitja ja kaotaja). Tõestage, et pärast liigahooaja lõppu on võimalik meeskondi sedasi vasakult paremale rivistada, et kahe kõrvuti paikneva meeskonna korral paikneb omavahelise duelli võitja kaotajast vasakul.

158. Ringmaanteel, mille pikkus on 100 km, seisab n ühesugust autot. Neil on ühtekokku nii palju kütust, et katta 101 km. Tõestage, et leidub üks auto, mis, alustades oma kütusega ja kogudes teel kütust ülejäänud autodelt, võib läbida täisringi. (Kütust tohib võtta ainult siis, kui autod on kõrvuti; autot lükata ei tohi)

159. Peol, kus viibib $2n$ inimest, tervitavad varasemalt tuttavad teineteist käepigistusega. On teada, et peol ei leidu ühtegi kolmeliikmelist alamseltskonda, mille kõik liikmed oleksid omavahel enne pidu tuttavad. Tõestage, et tervitavate käepigistuste koguarv peol on ülimalt n^2.

160. Linnas elab n latatara, kusjuures $n \geqslant 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada mingi uudise. Tõestage, et on võimalik korraldada telefonikõned niiviisi, et pärast $2n - 4$ kõnet teab iga latatara iga ülejäänu uudist.

161. Malelaual, mõõtmetega $2^n \times 2^n$ ruutu, värvitakse üks vabalt valitud ruut punaseks. Tõestage, et malelaua saab katta kolmeruuduliste L-kujuliste tükkidega nii, et nähtavale jääb ainult punane ruut.

162. Tõestage jaguvused ($n \in \mathbb{N}$).

a) $3 \mid n^3 + 2n$
b) $5 \mid n^5 - n$
c) $7 \mid n^7 - n$
d) $12 \mid 5 \cdot 9^n + 3$
e) $8 \mid 3^{2n} - 1$
f) $64 \mid 3^{2n} - 8n - 1$
g) $6 \mid n(n+1)(n+2)$
h) $6 \mid n(n^2-1)$
i) $30 \mid (n^5 - n)$
j) $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$
k) $30 \mid mn(m^4 - n^4)$

163. Tõestage, et summa $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ on täisarv iga täisarvu a korral.

164. Tõestage, et $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$. ($a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)
Vihje: esmalt veenduge, et $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$.

165. Olgu meil jada $a_0, a_1, a_2, \ldots$ elemendid defineeritud järgmiselt: $a_0 = \frac{1}{4}$ ja $a_{n+1} = 2 \cdot a_n(1 - a_n)$, kus $n \geqslant 0$. Näidake, et kõikide $n \geqslant 0$ korral selle jada üldliige on esitatav valemiga $a_n = \frac{1 - 0,5^{2^n}}{2}$.

166. Rekurrentne jada on defineeritud kujul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $n \geqslant 2$ korral $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. Leidke a_{300}. *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induktsiooni.*

Definitsioon. Arve $F_0, F_1, F_2, \ldots$, kus $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ ning iga naturaalarvu n korral $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ nimetatakse Fibonacci arvudeks.

167. Tõestage Fibonacci jada jaoks järgmised väited.
a) Iga $n \geqslant 0$ korral F_{3n} on paarisarv.
b) Iga $n \geqslant 0$ korral $\sum_{i=0}^{n} (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.
c) Iga $n \geqslant 1$ korral $\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$.
d) Iga $n \geqslant 1$ korral $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
e) Iga $n \geqslant 0$ ja $m \geqslant 1$ korral $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
f) Iga $n \geqslant 1$ korral $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \cdots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.
g) Iga $n \geqslant 1$ korral $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
h) Iga $n \geqslant 0$ korral $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

168. Leidke viga väite „Kõik linnud on ühte värvi“ tõestuses.
Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k+1$ lindu $L_1, \ldots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \ldots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \ldots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \ldots, L_k$, seega on kõik $k+1$ lindu ühte värvi.

169. Leidke viga väite „Kõik positiivsed täisarvud on omavahel võrdsed“ tõestuses. Märkigu tähis $\max(x, y)$ arvude x ja y seast suurimat. Tõestame väite induktsiooniga arvu $\max(x, y)$ väärtuse järgi.
Baas. Kui $\max(x, y) = 1$, siis peab olema $x = y = 1$, sest tegemist on positiivsete täisarvudega.
Samm. Eeldame, et väide kehtib arvude puhul, mille maksimum on k. Olgu nüüd arvud x ja y sellised, et $\max(x, y) = k+1$. Viimane võrdus on samaväärne võrdusega $\max(x-1, y-1) = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $x-1 = y-1$, millest $x = y$.

170. Olgu x_1 ja x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px - 1 = 0$ lahendid, kus p on paaritu täisarv, ning tähistagu $y_n = x_1^n + x_2^n$ iga $n = 0, 1, 2, \ldots$ korral. Tõestage, et siis iga n korral y_n ja y_{n+1} on ühistegurita täisarvud.

171. Puslet pannakse kokku sammhaaval. Sammuks on kas tüki ühendamine olemasoleva plokiga, või kahe ploki ühendamine. Tõestage tugeva induktsiooni meetodil, et kuidas tahes sammusid läbi viia, on n-tükilise pusle kokkupanekuks tarvis $n-1$ sammu.

172*. Tõestage, et arvude $1^p, 2^p, 3^p, \ldots, (p-1)^p$ jagamisel arvuga p^2 tekkinud jääkide summa on $\dfrac{p^3 - p^2}{2}$, kui p on kahest suurem algarv.
Näpunäide: Kasutada binoomvalemit.

173*. Tõestage, et kui n positiivse reaalarvu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ korral $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, siis $(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

174*. Olgu $S_j = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{j}$, kus $j \in \mathbb{N}$. Tõestage, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $1 + \dfrac{n}{2} \leqslant S_{2^n} \leqslant 1 + n$.

175*. Tõestage, et iga naturaalarvu $m \geqslant 2$ ja iga naturaalarvu $N \geqslant m$ jaoks kehtib võrratus

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{N}}}} < m+1.$$

7. Tõestamise erinevad meetodid

Otsene tõestus

Definitsioon. Täisarvu n nimetatakse paaris täisarvuks, kui ta jagub kahega ehk on kirjutatav kujul $n = 2k$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

Definitsioon. Täisarvu n nimetatakse paarituks täisarvuks, kui ta ei jagu kahega ehk on kirjutatav kujul $n = 2k + 1$, kus $k \in \mathbb{Z}$.

176. Kolmekohalise arvu numbrid on järjestikused naturaalarvud. Moodustatakse uus kolmekohaline arv, kirjutades esialgse arvu numbrid vastupidises järjekorras. Tõestage, et suurema ja väiksema arvu vahe on 198.

177. Tõestage, et kahe paarisarvu summa on paarisarv.

178. Tõestage, et kahe ratsionaalarvu summa on ratsionaalarv.

179. Tõestage, et kui n on paaritu täisarv, siis n^2 on paaritu arv.

180. Tõestage, et kui m ja n on mõlemad täisruudud, siis mn on täisruut.

181. Tõestage, et kui kahe naturaalarvu korrutis on paaritu arv, siis nende summa on paarisarv.

182. Tõestage, et kahe järjestikuse naturaalarvu ruutude summa on paaritu arv.

183. Kolmekohalise arvu numbrid on järjestikused naturaalarvud. Moodustatakse uus kolmekohaline arv, kirjutades esialgse arvu numbrid vastupidises järjekorras. Tõestage, et suurema ja väiksema arvu vahe on 198.

184. Tõestage, et kui kaks lõiku jaotavad lõikumisel teineteist pooleks, siis nende lõikude otspunktidevahelised kaugused on paarikaupa võrdsed.

185. Tõestage, et kui täisarvude x ja y korral on xy ja $x + y$ mõlemad paarisarvud, siis x ja y on mõlemad paarisarvud.
Näpunäide. Tõestage antud impliatsiooni $A \implies B$ korral implikatsioon $\neg B \implies \neg A$. Eeldage, et x ja y ei ole korraga paarisarvud. Näidake, et xy ja $x + y$ ei ole korraga paarisarvud. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et x on paaritu arv. Vaadelge eraldi juhtusid, kus y on paaritu arv ja y on paarisarv.

186. Tõestage, et murd $\frac{12n+1}{30n+2}$ on taandumatu mistahes positiivse täisarvu n korral.

187. Tõestage, et kui $a^2+b^2=1$ ja $c^2+d^2=1$, siis $|ac+bd| \leqslant 1$. Tõestamisel kasutage trigonomeetrilist asendust.

188. Tõestage, et kui kolmnurga sisenurgad on α, β ja γ ja $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 4:5:6$, siis $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 12:9:2$.

189. Tõestage, et kui kolmnurga külgedele a ja b tõmmatud mediaanid on risti, siis kehtib kolmnurga külgede vahel seos: $a^2+b^2=5c^2$.

Vastuväiteline tõestus

190. Tõestage vastuväiteliselt, et kui kahe arvu korrutis on paaritu arv, siis nende summa on paarisarv.

191. Tõestage, et kui n on täisarv ja n^2 on paaritu arv, siis n on paaritu arv.

192. Näidake, et 22-st järjestikusest päevast vähemalt neli peab langema samale nädalapäevale.

193. Tõestage, et 64 vabalt valitud päeva seas on vähemalt kümme sellist, mille nädalapäeva nimetus on sama. (Saab kasutada Dirichlet' printsiipi.)

194. Tõestage, et 25 vabalt valitud päeva seas on vähemalt 3 sellist, mille kuu nimetus on sama.

195. Tõestage, et peol, kus on $n \geq 2$ inimest, vähemalt kahel inimesel peab sellel peol olevate inimeste hulgast sama palju sõpru olema.

196. Tõestage, et kui n on naturaalarv ja $3n+2$ on paaritu arv, siis n on paaritu arv.

197. Tõestage, et kui x on paaritu arv, siis $\sqrt{2x}$ ei ole täisarv.

198. Näidake, et kui c on paaritu arv, siis võrrandil $x^2+x-c=0$ ei ole täisarvulisi lahendeid.

199. Tõestage, et algarvude hulk on lõpmatu.

200. Tõestage, et kui n on kordarv (mittealgarv), siis ta jagub algarvuga, mis on väiksem või võrdne $\sqrt{n}$.

201. Tõestage, et ühikruudu diagonaali pikkus ei esitu ratsionaalarvuna.

202. Tõestage, et kui reaalarvu x korral on x^3 irratsionaalarv, siis ka x on irratsionaalarv.

203. Tõestage, et kui positiivse reaalarvu x korral on x irratsionaalarv, siis ka $\sqrt{x}$ on irratsionaalarv.

204. Tõestada, et ei leidu sellist ratsionaalarvu r, et $r^3 + r + 1 = 0$. Näpunäide. Vastuväiteliselt. Kui $r = a/b$ ja a ja b on täisarvud, mille suurim ühistegur on 1, siis asendage $r = a/b$ seosesse $r^3 + r + 1 = 0$, korrutage selle võrduse mõlemad pooled läbi arvuga b^3 ja analüüsige saadud võrduse põhjal, kas a ja b kumbki saab olla paarisarv või paaritu arv.

205. Tahvlil on arvud $1, 2, \ldots, 2000$. Tahvlilt kustutatakse samm-sammult kaks arvu ja kummagi asemel kirjutatakse nende arvude aritmeetiline keskmine. Tõestage, et ühelgi hetkel pole tahvlil ainult arvud $1000, 1000, \ldots, 1000$.

206. Nummerdame korrapärase viisnurga küljed ja diagonaalid arvudega $1, 2, \ldots, 10$ ja vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tippudeks on esialgse viisnurga tipud. Tõestage, et pole võimalik, et selliste kolmnurkade külgede arvude summad osutuvad võrdseks.

207. Tõestage, et igal peol leidub kaks pidulist, kes on tuttav sama arvu teiste pidulistega. (Tutvuse seos on sümmeetriline: kui A on tuttav B-ga, siis B on ka tuttav A-ga.)

208. Tõestage, et 51 pidulisega peol leidub alati inimene, kes tunneb paarisarvu teisi pidulisi.

209. Tõestage kahel erineval moel, et arv $n^5 - n$ jagub arvuga 5 iga naturaalarvu n korral.

Kontranäited

210. Lükake järgmised väited kontranäidete abil ümber.

a) Olgu a ja b täisarvud. Kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $a = b$.
b) Kui a, b ja c on täisarvud nii, et $a \mid (bc)$, siis $a \mid b$ või $a \mid c$.
c) Kui n on positiivne täisarv, siis $n^2 + n + 41$ on algarv.
d) Iga reaalarvu x korral, $x^3 \geq x^2$.
e) Iga positiivse reaalarvu x korral, $2x^2 > x$.
f) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
g) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \neq x$.
h) $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| > 0$.
i) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ [x^2 = y^2 \implies x = y]$.
j) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}, \ y^2 = x$.

211. Võrrelge kolme väidet ja tõestage või lükake kontranäitega ümber:

a) arv $2^n + 1$ on algarv vaid siis, kui n on algarv;
b) arv $2^n - 1$ on algarv vaid siis, kui n on algarv;
c) arv $2^n + 1$ on algarv vaid siis, kui n on arvu 2 aste.

Samaväärsete tingimuste tõestamine (Ekvivalentsi tõestus)

212. Olgu $x, y \in \mathbb{Z}$. Tõestage, et $4 \mid (x^2 - y^2)$ siis ja ainult siis, kui mõlemad x ja y on paarisarvud või mõlemad x ja y on paaritud arvud.

213. Tõestage, et $3 \mid (2n^2 + 1)$ siis ja ainult siis kui $3 \nmid n$.

214. Tõestage, et neljakohaline arv $\overline{abcd}$ jagub 101-ga siis ja ainult siis, kui $\overline{ab} - \overline{cd} = 0$.

Olemasolu konstruktiivne tõestus

215. Tõestage, et leidub sada järjestikust naturaalarvu, millest ükski ei ole täisruut.
Näpunäide. Selgitage, mitu täisarvu on täisarvu n korral n^2 ja $(n+1)^2$ vahel.

216. Tõestage, et kahe järjestikuse algarvu vahe võib olla kui tahes suur (ehk iga naturaalarvu n korral leidub n järjestikust täisarvu, millest ükski ei ole algarv).

Olemasolu ja ühesus

217. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral leidub täpselt üks naturaalarv m, mille korral $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$.

218. Tõestage, et kui a ja b on reaalarvud ja $a \neq 0$, siis võrrandil $ax + b = c$ leidub parajasti üks reaalarvuline lahend.

219. Olgu a ja b on paaritud täisarvud, kusjuures $a \neq b$. Tõestage. et leidub täpselt üks selline täisarv c, et $|a - c| = |b - c|$.

220. Tõestage, et kui a on irratsionaalarv, siis leidub üheselt täisarv m nii, et $|a - m| < 1/2$.

221. Tõestage, et kui n on paaritu täisarv, siis leidub täpselt üks selline täisarv k nii, et n on arvude $k - 2$ ja $k + 3$ summa.

222. Tõestage, et kui r on reaalarv, siis leiduvad üheselt täisarv n ja reaalarv ε nii, et $0 \leqslant \varepsilon < 1$ ja $r = n + \varepsilon$.

Leidke tõestuses olev viga.

223. Juku arutleb: $-1 = 1$, sest $(-1)^2 = 1^2$. Kus on viga?

224. Olgu m ja n suvalised arvud ning vaatleme kehtivat võrdust

$$m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2mn + m^2 \text{ ehk } (m-n)^2 = (n-m)^2.$$

Viimasest võrdusest järeldame, et $m - n = n - m$ ehk $2m = 2n$, millest $m = n$. Seega, iga kaks arvu on võrdsed! Kus on viga?

225. Vaatleme võrdust $a^2-a^2=a^2-a^2$ ehk $a(a-a)=(a-a)(a+a)$. Jagame viimase võrduse mõlemaid pooli teguriga $a-a$ ja me saame, et $a=a+a$ ehk $a=2a$. Seega, iga arv on võrdne oma kahekordsega! Kus on viga?

Piisavus ja tarvilikkus

226. Tõestage, et neljakohaline arv $\overline{abcd}$ jagub 101-ga siis ja ainult siis, kui $\overline{ab}-\overline{cd}=0$.

227. Selleks, et kolmnurga ABC üks nurk oleks 60° on tarvilik ja piisav, et kehtiks võrdus

$$\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0.$$

(Õpikus leidus järgmine tõestus.) Tarvilikkus. Eeldame, et $\alpha=60^\circ$, siis $\beta+\gamma=120^\circ$ ja

$$\sin 3\beta=\sin\left(360^\circ-3\gamma\right)=-\sin 3\gamma.$$

Seega $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$.
Piisavus. Eeldame, et $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$. Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma&=2\sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cdot\left[\cos\frac{3(\alpha-\beta)}{2}+\cos\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\right]\\&=4\sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}.\end{aligned}$$

Korrutis on 0, kui vähemalt üks tegureist on 0: $\sin\frac{3(\alpha+\beta)}{2}=0$, $\alpha+\beta=120^\circ$ ja $\gamma=60^\circ$ või $\cos\frac{3\alpha}{2}=0, \alpha=60^\circ$ või $\cos\frac{3\beta}{2}=0, \beta=60^\circ$.
Uurige tõestust. Millised on tõestuse etapid? Kas kõik on arusaadav?

228. Tõestage väide, selleks, et kolmnurga üks nurkadest oleks 36° või 108°, on tarvilik ja piisav, et

$$\sin 5\alpha+\sin 5\beta+\sin 5\gamma=0.$$

229*. Seitseteist matemaatikut erinevatest riikidest on kõik omavahel kirjavahetuses. Iga kaks matemaatikut kirjutavad omavahel ühes kolmest keelest: inglise, prantsuse või vene. Tõestage, et leiduvad kolm, kes kirjutavad omavahel ühes ja sellessamas keeles.

230*. Lõpmatul malelaual paiknevad 5102 maleratsut. Tõestage, et nende hulgast on võimalik välja valida 2015 sellist, millest ükski pole teise tule all.

231*. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades

a) kahte
b) kolme

värvi. Tõestage, et alati leidub kaks sama värvi punkti, mille vaheline kaugus on 1 ühik.

8. Funktsioonid

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Kui on antud eeskiri, mis seab hulga X igale elemendile vastavusse täpselt ühe hulga Y elemendi, siis öeldakse, et on defineeritud funktsioon f, ja kirjutatakse $f\colon X \to Y$. Kui elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse $y \in Y$, siis kasutatakse kirjutist $y = f(x)$ või $y = fx$ või $f\colon x \mapsto y$.

Definitsioon. Funktsioone $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Z \to W$ nimetatakse võrdseteks, kui $X = Z$, $Y = W$ ja $f(x) = g(x)$ iga $x \in X(= Z)$ korral.

Definitsioon. Vaatleme funktsiooni $f\colon X \to Y$. Hulka $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f graafikuks.

Funktsiooni $I_X : X \to X$ eeskirjaga $I_X(x) = x \quad \forall x \in X$ nimetatakse samasusteisenduseks.

232. Skitseerige antud funktsioonide graafikud ($x \in \mathbb{R}$):

a) $f(x) = 1 - |x|$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{kui } x \leqslant 0, \\ 1/x, & \text{kui } 0 < x < 2, \\ 1/2, & \text{kui } x \geqslant 2. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 0, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$

233. Olgu $f_1 : X \to Y$ ja $f_2 : X \to Y$. Tõestage, et $f_1 = f_2$ parajasti siis, kui $G(f_1) = G(f_2)$.

234. Olgu $f_1 : X \to Y$ ja $f_2 : X \to Y$. Näidake, et $G(f_1) \cup G(f_2)$ (samuti $G(f_1) \cap G(f_2)$) on mingi hulgal X määratud funktsiooni graafik parajasti siis, kui $f_1 = f_2$.

Olgu X universaalne hulk.

Definitsioon. Hulga $A \subset X$ karakteristlikuks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, kus

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } x \in A, \\ 0, \text{ kui } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

235. Tõestage seosed:

a) $\chi_\varnothing(x) \equiv 0$, $\chi_X(x) \equiv 1$;

b) $\chi_A(x)\chi_A(x) \equiv \chi_A(x)$;

c) $\chi_{A\cap B}(x) \equiv \chi_A(x)\chi_B(x)$;

d) $\chi_{A\cup B}(x) \equiv \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

e) $\chi_{A\setminus B}(x) \equiv \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;

f) $\chi_{A'}(x) \equiv 1 - \chi_A(x)$;

g) $\chi_{A\times B}((x, y)) \equiv \chi_A(x)\chi_B(y)$.

236. Näidata, et $\chi_{\cup_{i\in I} A_i}(x) = \max\limits_{i\in I} \chi_{A_i}(x)$, $\qquad \chi_{\cap_{i\in I} A_i}(x) = \min\limits_{i\in I} \chi_{A_i}(x)$.

237. Avaldage $\chi_{A\triangle B}$ funktsioonide χ_A ja χ_B kaudu.

238. Hulga karakteristliku funktsiooni abil tõestage, et kehtivad võrdused:

a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$;
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
e) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
f) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

239. Tõestage, et $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Definitsioon. Olgu antud funktsioon $f : X \to Y$ ja olgu $x \in X$ ning $y \in Y$. Kui $y = f(x)$, siis elementi y nimetatakse elemendi x kujutiseks ja elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks.

Definitsioon. Kui $A \subset X$, siis hulka

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{leidub } x \in A \text{ nii, et } y = f(x)\} = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

nimetatakse hulga A kujutiseks.

Definitsioon. Kui $B \subset Y$, siis hulka

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

nimetatakse hulga B originaaliks.

240. Olgu antud funktsioon f ja element x_0. Leidke elemendi x_0 kujutis $f(x_0)$.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2 + x + 1,\ x_0 = 3$

b) $f : \{\text{Riigid}\} \to \{\text{Inimesed}\},\ f(x) = \text{riigi } x \text{ riigipea},\ x_0 = \text{Eesti}$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \text{arvu } x \text{ erinevate algtegurite arv},\ x_0 = 360$

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \dfrac{x^2}{4}$, kui x on paaris, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4}$, kui x on paaritu, $x_0 = -5$

241. On antud funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja element $y_0 \in \mathbb{R}$. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid:

a) $f(x) = 4 - x^2$, $i)$ $y_0 = 0$; $ii)$ $y_0 = 4$; $iii)$ $y_0 = 2$;

b) $f(x) = 3^x$, $i)$ $y_0 = 3$; $ii)$ $y_0 = 1$; $iii)$ $y_0 = 5$.

242. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid funktsiooniga f.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = |x|,\ y_0 = 2$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x(x-1),\ y_0 = 6$

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x \mod 5$ (s.t. $f(x)$ on jääk x jagamisel arvuga 5), $y_0 = 3$

d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f((r,s)) = (r+2)^2 + (s-3)^2,\ y_0 = 4$

243. On antud funktsioon f ja hulk A. Leidke hulga A kujutis $f(A)$:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x,\ A=[1,2]$;

b) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^x,\ A=\{2\}$;

c) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^x,\ A=\{2,4,6,8,\dots\}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x,\ A=[0,3]$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|,\ A=[0,3]$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-2)^2,\ A=[1,4]$;

244. Vaatleme funktsiooni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x+2$. Leidke järgmised hulgad.

a) $f(\{-1,0,1\})$

b) $f([-1,1])$

c) $f([-2,2])$

d) $f([-5,-3]\cup[0,3])$

e) $f((-\infty,0])$

f) $f(\mathbb{R})$

245. On antud funktsioon f ja hulk B. Leidke hulga B originaal $f^{-1}(B)$:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x,\ B=\{0\}$;

b) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^x,\ B=\{1\}$;

c) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(x)=(-1)^x,\ B=(0,\infty)$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x,\ B=[0,3]$.

246. Vaatleme funktsiooni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x+2$. Leidke järgmised hulgad.

a) $f^{-1}(\{-1,0,1\})$ b) $f^{-1}([-2,2])$ c) $f^{-1}([10,50])$ d) $f^{-1}((-\infty,0])$ e) $f^{-1}(\mathbb{R})$

247. Olgu $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lfloor x\rfloor := \max\{m\in\mathbb{Z}|m\leqslant x\}$. $g(x)=\lceil x\rceil := \min\{m\in\mathbb{Z}|m\geqslant x\}$. Leidke järgmised hulgad.

a) $f^{-1}(\{0\}),\quad g^{-1}(\{0\})$

b) $f^{-1}(\{-1,0,1\}),\quad g^{-1}(\{-1,0,1\})$

c) $f^{-1}(\{x\,|\,0<x<1\}),\quad g^{-1}(\{x\,|\,0<x<1\})$

248. Olgu $m,k\in\mathbb{Z}$. Leidke $f^{-1}(\{m\}), f^{-1}(\{m,m+1\}), f([k,k+1]), f([k,k+2])$ järgmiste funktsioonide $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jaoks:

a) $f(x)=\lceil\lfloor x-\frac{1}{2}\rfloor+\frac{1}{2}\rceil$

b) $f(x)=\lfloor\frac{1}{2}-\lceil x+\frac{1}{2}\rceil\rfloor$

c) $f(x)=\lceil\frac{1}{2}-2\lfloor\frac{x}{2}\rfloor\rceil$

d) $f(x)=\lfloor 2\lceil\frac{x}{2}\rceil+\frac{1}{2}\rfloor$

249. Olgu $f: X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Tõestage, et kehtivad järgmised väited:

a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

c) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

250. Tõestage järgnevad võrdused:

a) $f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$; b) $f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$; c) $f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

251. Olgu $f: X \to Y, B \subset Y$. Tõestage, et $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

252. Olgu $f: X \to Y, A \subset X$. Leidke näide, kus $f(X \setminus A) \not\subset \not\supset Y \setminus f(A)$.

253. Olgu $f: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$. Tõestage järgnevad sisalduvused ja tooge näiteid, kus need sisalduvused ei ole võrdused.

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

254. Olgu $f: X \to Y, A \subset X, B \subset Y$. Tõestage, et $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f: X \to Y$ nimetatakse injektiivseks ehk üksüheseks, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f: X \to Y$ nimetatakse sürjektiivseks ehk pealekujutuseks, kui $f(X) = Y$.

Definitsioon. Funktsiooni nimetatakse bijektiivseks, kui ta on injektiivne ja sürjektiivne.

Definitsioon. Funktsioonide $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$ korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $gf: X \to Z$, mis määratakse võrdusega

$$(gf)(x) = g(f(x)),\ x \in X.$$

Definitsioon. Substitutsiooniks hulgal $M \neq \varnothing$ nimetatakse mistahes bijektiivset kujutust $f: M \to M$.

Kui funktsioon $f: X \to Y$ on bijektiivne, siis saab defineerida pöördfunktsiooni $f^{-1}: Y \to X$, mis igale elemendile $y \in Y$ seab vastavusse tema originaali $x \in X$ funktsiooniga f teisendamisel, st

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

255. Otsustage, kas järgmised funktsioonid on sürjektiivsed.

a) $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ q(x) = x+2$

b) $p: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ p(x) = x+2$

256. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage (tähistame $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$):

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x-2;$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x;$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^2;$

d) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^2;$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3;$

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x;$

g) $f: \mathbb{R} \to [-1,1],\ f(x) = \sin x;$

h) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1],\ f(x) = \sin x;$

i) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x;$

j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x;$

k) $f: (0,\pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x;$

257. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage.

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(n) = 1+n+3|n|;$

b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(n) = (-1)^n n.$

c) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = (-1)^x x$

d) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 1 + \dfrac{x+3|x|}{2}$

258. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus. Põhjendage.

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y, x-y)$

b) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(m,n) = m^2 - n$

c) $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ g(m,n) = (2m, m-n)$

259. Tähistame tähega E paarisarvude hulga. Iga järgmise funktsiooni $f: \mathbb{Z} \to E$ korral otsustage, kas f on injektiivne või sürjektiivne. Põhjendage oma vastust

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 4-x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4-2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 2x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

260. Olgu funktsioon $f: [0,1] \times \{1,2,3\} \to [1,4]$ antud kujul $f(x,y) = x+y$. Näidake, et f on sürjektiivne, aga ei ole injektiivne.

261. Olgu funktsioon $g:\ [1,4] \to [0,1]$ antud kujul $g(x) = \frac{x}{4}$. Näidake, et g on injektiivne, aga ei ole sürjektiivne.

262. Olgu $X = \mathbb{N} \cup \{-1, 3.5\}$ ja $Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Leidke funktsioon $f:\ X \to Y$, mis on injektiivne ja sürjektiivne ning $f(2) = 3$.

263. Olgu antud kahe muutuja funktsioon $g:\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nii, et $g(m,n) = m^2 - n$.

a) Kas funktsioon g on üksühene? Kas funktsioon g on pealekujutus?

b) Arvuta funktsiooni väärtused $g(0,3)$, $g(3,-2)$, $g(-3,-2)$ ja $g(7,-1)$.

c) Leia funktsiooni g väärtusele 0 vastav originaalide hulk. (Kasuta hulgasümboolikat!)

d) Leia funktsiooni g väärtusele 5 vastav originaalide hulk.

264. Olgu φ: $A \to B$ bijektsioon. Tõestage, et
a) φ^{-1} on bijektsioon,
b) $\varphi^{-1}\varphi = I_A$,
c) $\varphi\varphi^{-1} = I_B$.

265. Tõestage, et funktsioon $f : X \to Y$ rahuldab tingimust

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$$

ning võrdus $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ kehtib parajasti siis, kui f on injektiivne.

266. Tõestage, et $f(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha} f(A_\alpha)$. Tooge näide funktsioonist f ja hulkadest A_α, kus $f(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) \neq \bigcap\limits_{\alpha} f(A_\alpha)$. Näpunäide: vaadelda projekteerimisteisendust.

267. Hulga X iga osahulga A korral tõestage, et $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ parajasti siis, kui f on injektsioon.

268. Hulga X iga osahulga A korral tõestage, et $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A)$ parajasti siis, kui f on sürjektsioon.

269. Tooge näide funktsioonist f täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, mis

a) On injektiivne, aga ei ole sürjektiivne.

b) On sürjektiivne, aga ei ole injektiivne.

c) On injektiivne ja sürjektiivne.

d) Ei ole injektiivne ega sürjektiivne.

270. Hinnake järgmist tõestust hindega A, C või F, kus hinne A antakse korrektse tõestuse eest, hinde C saab osaliselt õige tõestuse eest ja hinne F tähendab, et tõestus on vale. Põhjendage oma hinde panemist.

Väide: Funktsioon $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kujul $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{kui } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 2x^2-\sqrt{2}, & \text{kui } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ on injektiivne.

Tõestus: Olgu $x\neq y$. Siis $2x^2-\sqrt{2}\neq 2y^2-\sqrt{2}$ ja $-x\neq -y$. Seega $f(x)\neq f(y)$, mis tõestab, et f on injektiivne.

271. Olgu A ja B mittetühjad hulgad. Defineerime funktsiooni

$$p_1:\ A\times B\to A,\ p_1(a,b)=a,$$

iga $(a,b)\in A\times B$ korral. See on **esimene projektsiooni funktsioon**.

a) Kas funktsioon p_1 on sürjektsioon? Põhjendage oma vastust.

b) Kui $B=\{b\}$, kas funktsioon p_1 on siis injektsioon? Põhjendage oma vastust.

c) Millis(t)e tingimus(t)e korral ei ole funktsioon p_1 injektsioon? Koostage vastav väide ja tõestage see.

272. Olgu C kõikide lõigus $[0,1]$ pidevate funktsioonide hulk. Defineerime funktsiooni $A:C\to\mathbb{R}$ järgnevalt: iga $f\in C$ korral

$$A(f)=\int_0^1 f(x)dx.$$

Kas funktsioon A on injektsioon? On see sürjektsioon? Põhjendage oma vastuseid.

273. Olgu $A=\{(m,n)\mid m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z} \text{ ja } n\neq 0\}$. Defineerime funktsiooni $f:\ A\to\mathbb{Q}$ järgnevalt:

$$\text{iga } (m,n)\in A \text{ korral } f(m,n)=\frac{m+n}{n}.$$

a) Kas funktsioon f on injektsioon? Põhjendage oma vastust.

b) Kas funktsioon f on sürjektsioon? Põhjendage oma vastust.

Tähistame $A^B=\{f:B\to A\mid f \text{ on funktsioon}\}$.

274. Olgu hulkade A ja A_1 vahel ning B ja B_1 vahel üksühesed vastavused (e. bijektsioonid). Tõestage, et siis on üksüheses vastavuses ka hulgad
a) $A\times B$ ja $A_1\times B_1$,
b) A^B ja $A_1^{B_1}$,
c) $A\cup B$ ja $A_1\cup B_1$, kui $A\cap B=\varnothing$ ja $A_1\cap B_1=\varnothing$.

275. Korraldage üksühene vastavus järgmiste hulkade vahel:
a) $A \times B$ ja $B \times A$,
b) $A \times (B \times C)$ ja $(A \times B) \times C$,
c) $(A \times B)^C$ ja $A^C \times B^C$,
d) $(A^B)^C$ ja $A^{B \times C}$,
e) $A^{B \cup C}$ ja $A^B \times A^C$, kui $B \cap C = \varnothing$.

276. Olgu A ja B hulgad, $B \neq \varnothing$. Defineerime funktsioonid $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$, $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ valemitega $f(X) = X \cup A$ ja $g(X) = X \cap A$. Mis tingimusel on f või g injektiivne funktsioon? Mis tingimusel on f või g sürjektiivne funktsioon?

277. Olgu $C \neq \varnothing$ ja $A, B \subset C$ ning $f, g : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(C)$ funktsioonid, kus $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$, $g(X) = (X \cap A, X \cap B)$ iga $X \in \mathcal{P}(C)$. Mis tingimustel on f või g injektiivne funktsioon?

278. Olgu $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ ja $h(x) = x^2 + 2$. Leidke

a) $(fg)(3)$; c) $(gf)(x)$; e) $(fh)(x)$; g) $(gh)(x)$;
b) $(fg)(-6)$; d) $(fh)(2)$; f) $(hf)(x)$; h) $(hg)(x)$.

279. Olgu $f(x) = x^2 - 1$ ning $g(x) = 3 - x$. Leidke

a) $(gf)(1)$; b) $(fg)(-4)$; c) $(fg)(x+1)$; d) $(fg)(x+2)$.

280. Olgu $f(x) = x^3 + 3$ ning $g(x) = x - 4$. Leidke $(fg)(x)$ ja $(gf)(x)$ ning lahendage võrrand $(fg)(x) = (gf)(x)$.

281. Leidke gf, fg, g^2, f^3, kui

a) $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = 3x - 1$; b) $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$.

282. Leidke f^{-1}, kui

a) $f(x) = 3x - 1$; c) $f(x) = \frac{1}{4}x + 5$; e) $f(x) = 2x^3 + 3$;
b) $f(x) = x^3 - 3$; d) $f(x) = \sqrt{3x - 3}$; f) $f(x) = \frac{2x}{5 - x}$, $x \neq 5$.

283. Leidke gf, fg, g^5, f^6, kui f ja g on substitutsioonid hulgal X:

a) $X = \{1,2,3,4,5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

284. Leidke f^{-1}, g^{-1}, $g^{-2}f^3$, f^3g^2, kui f ja g on substitutsioonid hulgal X:

a) $X=\{1,2,3,4\}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$;

b) $X=\{1,2,3,4,5\}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$;

c) $X=\{1,2,3,4,5\}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$;

285. Tõestage, et kui $f: X \to Y$ ja $g: Y \to X$ korral $gf = I_X$, siis f on injektiivne ja g on sürjektiivne.

286. Tõestage, et kui $f_1: X \to Y$, $f_2: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $gf_1 = gf_2$ ja g on injektiivne, siis $f_1 = f_2$.

287. Tõestage, et kui $f: X \to Y$, $g_1: Y \to Z$, $g_2: Y \to Z$, $g_1 f = g_2 f$ ja f on sürjektiivne, siis $g_1 = g_2$.

288. Olgu $f: X \to Y$ ja $g: Y \to Z$. Olgu $h = gf$. Tõestage või lükake ümber järgmised väited.

a) Kui f ja g on injektiivsed, siis ka h on injektiivne.
b) Kui f ja g on sürjektiivsed, siis ka h on sürjektiivne.
c) Kui f ja g on bijektiivsed, siis ka h on bijektiivne.
d) Kui h on injektiivne, siis ka f on injektiivne.
e) Kui h on injektiivne, siis ka g on injektiivne.
f) Kui h on sürjektiivne, siis ka f on sürjektiivne.
g) Kui h on sürjektiivne, siis ka g on sürjektiivne.

289. Olgu X, Y ja Z mittetühjad hulgad ja $f: X \to Y$ ning $g: Y \to Z$ funktsioonid. Tõestada väited:

a) Kui f on sürjektiivne ja gf on injektiivne, siis g on injektiivne.
b) Kui g on injektiivne ja gf on sürjektiivne, siis f on sürjektiivne.

290*. Leidke kõik sellised funktsioonid $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad iga reaalarvu x korral tingimust $f(2015x + f(0)) = 2015x^2$.

291*. Leidke kõik funktsioonid $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral rahuldaksid tingimust

$$f(x \cdot f(y)) = x \cdot y.$$

292*. Olgu a selline reaalarv, et $|a| \neq 1$. Leidke kõik funktsioonid $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, mis iga $x \in (0, \infty)$ korral rahuldaksid tingimust

$$ax^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

293*. 1) Leidke kõik sürjektiivsed funktsioonid $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y\in\mathbb{R}$ puhul

$$f(x+f(y)) = f(x+y)+1.$$

2) Leidke kõik injektiivsed funktsioonid $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mille korral mistahes $x, y\in\mathbb{R}$ puhul

$$f(x+f(y)) = f(x+y)+1.$$

294*. Olgu $\mathfrak{K}$ kõigi järjestamata reaalarvukolmikute hulk, kus arvud on mingi kolmnurga küljepikkusteks. Olgu kujutus $T\colon\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$ defineeritud järgnevalt:
kolmnurgale küljepikkustega a, b, c seab T vastavusse kolmnurga küljepikkustega $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$.
Otsustage, kas T on korrektselt defineeritud, see tähendab 1) kas kolmikule $\{a,b,c\}$ ja tema mingile permutatsioonile seatakse vastavusse sama kolmik, 2) kas iga kolmnurga $K\in\mathfrak{K}$ korral $T(K)$ on kolmnurk.
Otsustage, kas T on injektiivne.
Otsustage, kas T on sürjektiivne.
Leidke kõik kolmnurgad $K\in\mathfrak{K}$ nii, et $T(K)=K$.
Näpunäide: Mingid kolm reaalarvu on kolmnurga külgede pikkused parajasti siis, kui neist iga kahe arvu summa on suurem kui kolmas arv.

295*. Olgu $\mathcal{S}_n = \{f\colon\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\} \,:\, f \text{ on bijektsioon}\}$. Elemendi $f\in\mathcal{S}_n$ *järguks* nimetame vähimat naturaalarvu n nii, et $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ tegurit}} = e$, kus e on samasusteisendus. (Kui sellist naturaalarvu n ei leidu, ütleme, et antud element f on *lõpmatut järku.*)
Leidke kõik võimalused, millist järku elemente on substitutsioonide hulgas $\mathcal{S}_7$.

296*. Tõestage, et iga $f\colon X\to Y$ korral leidub hulk Z, injektiivne kujutus $g\colon X\to Z$ ja sürjektiivne kujutus $h\colon Z\to Y$ nii, et $f=h\circ g$.

297*. *Funktsioonide komponeerimine.* Kirjutada Pythoni funktsioon nimega kompositsioon, mis võtab argumendiks suvalise arvu Pythoni funktsiooniobjekte $f_1, f_2, \dots, f_n$ ning tagastab nende kompositsiooni g.

9. Hulga võimsus

Definitsioon.

1. Öeldakse et hulgad X ja Y on sama võimsusega ehk ekvivalentsed ja kirjutatakse $|X| = |Y|$ või $X \sim Y$, kui leidub bijektiivne kujutus $f : X \to Y$. Kui hulgad X ja Y ei ole sama võimsusega, siis kirjutatakse $|X| \neq |Y|$ või $X \nsim Y$.
2. Öeldakse, et hulga X võimsus ei ületa hulga Y võimsust ja kirjutatakse $|X| \leqslant |Y|$, kui leidub injektiivne kujutus hulgast X hulka Y.
3. Öeldakse, et hulga X võimsus on väiksem kui hulga Y võimsus ja kirjutatakse $|X| < |Y|$, kui $|X| \leqslant |Y|$ ja $|X| \neq |Y|$.

Definitsioon.

1. Öeldakse, et hulk X on lõplik, kui $X = \varnothing$ või leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $|X| = |\{1, \ldots, n\}|$.
2. Öeldakse, et hulk X on lõpmatu, kui ta ei ole lõplik.
3. Öeldakse, et hulk X on loenduv, kui $X \sim \mathbb{N}$.
4. Öeldakse, et hulk X on ülimalt loenduv, kui $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.
5. Öeldakse, et hulk X on kontiinumi võimsusega, kui $|X| = |\mathbb{R}|$.

Teoreem. Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ja hulga B võimsus ei ületa hulga A võimsust, siis hulgad A ja B on sama võimsusega.

298. Otsustage, kas hulk on lõplik või lõpmatu. Kui hulk on lõpmatu, otsustage kas on loenduv või mitte. Põhjendage.

a) $X = \{-10, -9, -8, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 5, 6\}$;
b) $X = \{10^x : x \in \mathbb{N}\}$;
c) $X = \varnothing$;
d) $X = (1, 2)$.

299. Esitage bijektsioonid $f : \mathbb{N} \to M$ ja $g : M \to \mathbb{N}$ järgmiste hulkade M korral (siin $k \in \mathbb{N}$)

a) $M = \mathbb{Z}$;
b) M on paarisarvude hulk;
c) M on paaritute arvude hulk;
d) $M = \mathbb{N} \cup \{-k, 1-k, \ldots, 0\}$;
e) $M = \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$;
f) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

300. Hilberti hotellis on loenduv arv tube, kõigis külalised. Kuidas paigutada uued külalised, kui:

a) saabub rong miljoni külalisega;
b) saabub rong loenduva arvu külalistega;
c) saabub loenduv arv ronge, igas rongis loenduv arv külalisi.

301. Kas hulk $\mathbb{N}$ on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga?

302. Tõestage, et iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva alamhulga.

303. Tõestage, et hulk on lõpmatu parajasti siis, kui ta on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga.

304. Olgu A ja B loenduvad hulgad. Tõestage, et $A \cup B$ on loenduv.

305. Olgu A loenduv hulk ja B lõplik hulk. Tõestage, et $A \cup B$ ja $A \setminus B$ on loenduvad ja $A \cap B$ on lõplik.

306. Tõestage, et naturaalarvude hulga kõigi lõplike alamhulkade hulk on loenduv.

307. Esitage kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ kujul $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, kus hulgad $A_1, A_2, \ldots$ on lõpmatud ja paarikaupa lõikumatud.

308. Olgu A mittetühi lõplik hulk. Nimetame teda tähestikuks, tema elemente tähtedeks ja iga lõplikku tähtede järjestikust kirjutist sõnaks. Kui $a, b, c \in A$, siis sõnad on näiteks a ja $bacaa$. Tõestage, et kõigi sõnade hulk on loenduv.

309. Tõestage, et kõigi lõplike binaarjärjendite hulk on loenduv. Tõestage, et kõigi binaarjadade hulk on kontiinumi võimsusega.

310. Tõestage, et kõikide ratsionaalarvuliste otspunktidega reaalarvude vahemike hulk on loenduv.

311. Tõestage, et hulkade A, B ja C korral kehtib: kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$.

312. Olgu A ja B hulgad. Tõestage, et kui $A \setminus B \sim B \setminus A$, siis $A \sim B$. Tuua näide hulkadest A ja B, mille korral vastupidine implikatsioon ei kehti.

313. Tooge näide hulkadest A, B, C ja D, mille korral $A \sim C$ ja $B \sim D$, kuid $A \cup B \nsim C \cup D$ ja $A \cap B \nsim C \cap D$.

314. Olgu A, B, C ja D hulgad. Tõestage, et kui $A \sim C$ ja $B \sim D$, siis $A \times B \sim C \times D$.

315. Olgu X ja Y hulgad.

a) Tõestage, et kui $X \subset Y$, siis $|X| \leqslant |Y|$.

b) Tõestage, et kui $X \subsetneqq Y$ ja Y on lõplik hulk, siis $|X| < |Y|$.

316. Olgu X, Y ja Z hulgad. Tõestage, et kui $|X| \leqslant |Y|$ ja $|Y| \leqslant |Z|$, siis $|X| \leqslant |Z|$.

317. Olgu A ja B lõplikud hulgad. Tõestage, et kui $|B| < |A|$, siis ükski kujutus $A \to B$ ei ole injektiivne.

318. Tõestage, et reaalarvude vahemik $(0,1)$ ei ole loenduv.

319. Esitage konkreetsed bijektiivsed kujutused $f: A \to B$, $g: B \to A$ hulkade A ja B vahel (siin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$):

a) $A = (a,b),\ B = (c,d)$

b) $A = (a,b),\ B = (-\infty,d)$

c) $A = (a,b),\ B = (c,\infty)$

d) $A = (a,b),\ B = \mathbb{R}$

e) $A = (-\infty,b),\ B = (c,\infty)$

f) $A = (-\infty,b),\ B = \mathbb{R}$

g) $A = (a,\infty),\ B = \mathbb{R}$

h) $A = [a,b),\ B = (c,d)$

i) $A = [a,b],\ B = [c,d)$

j) $A = [a,b],\ B = (c,d)$

k) $A = [a,\infty),\ B = (c,\infty)$.

320. Olgu X lõpmatu hulk ja Y ülimalt loenduv hulk.

a) Tõestage, et $X \cup Y \sim X$.

b) Tõestage, et kui hulk $X \setminus Y$ on lõpmatu, siis $X \setminus Y \sim X$.

321. Mis on kõigi irratsionaalarvude hulga võimsus?

322. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega jadade hulga võimsus.

323. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega kasvavate jadade hulga võimsus.

324. Olgu X kõigi selliste reaalarvude hulk, mis kuuluvad vahemikku $(0,1)$ ja mille kümnendesituses leidub number viis. Tõestage, et $X \sim (0,1)$. Tõestage veel, et iga vahemiku $(a,b) \subset (0,1)$ korral leidub vahemik $(c,d) \subset (a,b)$ nii, et $(c,d) \subset X$. Näidake, et täiendhulk $(0,1) \setminus X$ on lõpmatu.

325. Olgu A_n, $n = 1,2,\ldots$, hulgad. Tõestage, et kui iga hulk A_n, $n = 1,2,\ldots$, on kontiinumi võimsusega, siis ka hulk $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ on kontiinumi võimsusega.

326. Tuua näide kontiinumi võimsusega hulkadest A ja B nii, et a) $A \cap B$ on (i) lõplik, (ii) loenduv, (iii) kontiinumi võimsusega. Ülesanne b) sisaldab samu alamülesandeid (i)-(iii) nagu a), kuid hulga $A \cap B$ asemel on hulk $A \setminus B$.

327*. Olgu X reaalarvude hulga mingi loenduv alamhulk. Kas leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et

$$\{x + a : x \in X\} \cap X = \varnothing?$$

328*. Tõestada, et leidub $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nii, et $|X| = c$, aga iga $A, B \in X$ korral on hulk $A \cap B$ lõplik.

10. Seosed

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seoseks ehk relatsiooniks hulkade X ja Y vahel nimetatakse otsekorrutise $X \times Y$ mis tahes osahulka.

Kui $R \subset X \times X$, siis räägitakse seosest hulgas X. Paari $(x, y) \in R$ korral öeldakse, et elemendid x ja y on seoses R ning tähistatakse ka xRy.

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seost $R \subset X \times Y$ nimetatakse funktsiooniks, kui

a) iga $x \in X$ korral leidub $y \in Y$ nii, et $(x, y) \in R$

b) kui $x \in X$ ja $y, z \in Y$ on sellised, et $(x, y) \in R$ ja $(x, z) \in R$, siis $y = z$.

329. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid järjestatud paare sisaldab seos $R = \{(a, b) : a|b\}$, mis on määratud hulgal A?

330. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esitage nooldiagrammi abil järgmine seos

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ on paarisarv } \}.$$

331. Esitage järgmised hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$ määratud seosed maatrikskujul ja graafina.

a) $R = \{(1,3), (2,1), (2,4), (3,2), (4,1)\}$;

b) $R = \varnothing$;

c) $R = \{(x, y) \mid x > y\}$;

d) $R = \{(x, y) \mid \neg(x = y)\}$.

332. Esitage järgmiste maatriksitega antud seosed paaride loeteluna hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

333. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $Y = \{a, b, c\}$. Esitage seos R hulga $X \times Y$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

334. Esitage antud seosed visuaalselt tasandi punktipaaride hulgana. Eeldame, et $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

a) $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$;
b) $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$;
c) $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$;
d) $R = \{(x,y) \mid 4x^2+y^2 = 16\}$;
e) $R = \{(x,y) \mid |x| = |y|\}$;
f) $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| = 1\}$.

335. Tehke kindlaks, kas antud seos kehtib antud elementide vahel. Põhjendage iga vastust.

a) Hulgal $\mathbb{Z}$ on antud seos $R = \{(m,n) \mid m$ ja n jaguvad sama algarvuga$\}$. Kas kehtib 22 R 45?
b) Hulgal $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$ (st hulga $\{1,2,3,4,5\}$ kõigi alamhulkade hulk) on antud seos $R = \{(A,B) \mid A$ ja B elementide arv on sama$\}$. Kas kehtib $\{2,3,4\}$ R $\{3,4,5\}$?
c) Hulgal $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ on antud seos $R = \{((a,b),(c,d)) \mid$ sirge läbi punktide (a,b) ja (c,d) läbib koordinaatide alguspunkti$\}$. Kas kehtib $(-6,9)$ R $(8,-12)$?
d) Kõigi tähtedest a ja b moodustatud lõplike sõnade hulgal on antud seos $R = \{(s,t) \mid s$ ja t algavad või lõpevad sama tähega$\}$. Kas kehtib $abbab$ R $bbaba$?
e) Kõigi lausearvutusvalemite hulgal on antud seos $R = \{(F,G) \mid F$ ja G on mingil samal väärtustusel tõesed$\}$. Kas kehtib $\neg C \wedge (B \Rightarrow A)$ R $B \vee C \Rightarrow \neg A \wedge B$?

336. Olgu $R = \{(a,b) \mid |a-b| \leqslant 2\}$ seos täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$.

a) Too näiteid elementide paaridest, mis kuuluvad seosesse R.
b) Leia kõik täisarvud x nii, et $xR5$ ja leia kõik täisarvud x nii, et $5Rx$.
c) Kui võimalik, leia arvud x ja y nii, et $xR8$ ja $8Ry$, aga arv x ei ole seoses R arvuga y.
d) Kui $a \in \mathbb{Z}$, leia kõik täisarvud x nii, et xRa.

337. Leidke arvupaarid, mis kuuluvad seosesse

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x+y = xy\}$;
b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid \dfrac{y}{x} + 2x = 0\}$.

338. Kujutage graafiliselt seost $\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x alumist täisosa, s.t. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ nii, et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

339. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \{1,2,3,4,5\}\times\mathbb{N}$ on funktsioonid:
a) $R = \{(1,1),(3,2),(5,3),(3,4),(1,5)\}$,
b) $R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1)\}$,
c) $R = \{(3,4),(5,9),(1,9),(2,3)\}$,
d) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(4,1)\}$.

340. Otsustage, kas järgmised maatriksiga antud seosed R on funktsioonid:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

341. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on funktsioonid:

a) $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
b) $R = \mathbb{R} \times [0, \infty)$,
c) $R = \mathbb{R} \times \{1\}$,
d) $R = \{1\} \times \mathbb{R}$,
e) $R = \{(t^3, t) : t \in \mathbb{R}\}$,
f) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t \leqslant 0\}$,
g) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t < 0\}$,
h) $R = \left\{(\tan t, t), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$.

Definitsioon. Seost $R \subset X \times X$ nimetatakse

- refleksiivseks, kui $xRx \ \forall x \in X$;
- irrefleksiivseks, kui $x \not R x \ \forall x \in X$;
- sümmeetriliseks, kui $xRy \Rightarrow yRx \ \forall x, y \in X$;
- antisümmeetriliseks, kui $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in X$;
- transitiivseks, kui $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \ \forall x, y, z \in X$.

Definitsioon. Seose $R \subset A \times B$ pöördseoseks nimetatakse seost $R^{-1} \subset B \times A$, mis määratakse samaväärsusega $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$ ehk $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

Definitsioon. Seost $\triangle X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ nimetatakse diagonaaliks hulgas X.

342. Leidke kõik seosed hulgas $\{a, b\}$, mis on:

a) refleksiivsed; b) sümmeetrilised; c) transitiivsed; d) antisümmeetrilised.

343. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, irrefleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldab seos $R = \{(a, b) : a | b\}$ hulgal A?

344. Olgu $A = \{1, 2, 3\}$ ja vaatame kolme seost hulgal A.
a) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$;
b) $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,2)\}$;
c) $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.

Milliseid omadusi rahuldavad need seosed?

345. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tooge näide seosest R hulgal A, mis
a) on refleksiivne, aga ei ole antisümmeetriline ega transitiivne;

b) ei ole refleksiivne sümmeetriline ega transitiivne;
c) on sümmeetriline ja transitiivne;
d) ei ole sümmeetriline ega antisümmeetriline;
e) on nii sümmeetriline kui ka antisümmeetriline.

346. Olgu $X = \{1,2,3,4\}$. Selgitage, kas seos R hulgal X on refleksiivne, sümmeetriline või antisümmeetriline ning esitage R hulga $X \times X$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

347. Selgitage, kas seos on transitiivne, kui tema maatriksesitus on

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

348. Kas reaalarvude hulgal antud seos $xRy \Leftrightarrow x + y = 0$ on refleksiivne? Irrefleksiivne?

349. Uurige, milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{Z}$:

a) $xRy \Leftrightarrow x = y$;
b) $xRy \Leftrightarrow x < y$;
c) $xRy \Leftrightarrow x \le y$;
d) $xRy \Leftrightarrow |x - y| > 1$;
e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$;
f) $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

350. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus, antisümmeetrilisus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{R}$:

a) $xRy \Leftrightarrow x = y^2$;
b) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$;
c) $xRy \Leftrightarrow |x - y| \geqslant 2$;
d) $xRy \Leftrightarrow x = -y$;
e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$;
f) $xRy \Leftrightarrow y \leqslant x^2$.

351. Olgu $X \neq \varnothing$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) omavad jägmised seosed hulga X kõigi osahulkade hulgas $P(X)$:

a) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulgad A ja B on lõplikud ning neil on ühepalju elemente;
b) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
c) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$;
d) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulkadel A ja B on täpselt kaks ühist elementi.

352. Olgu $X \neq \varnothing$. Vaatleme seost $\subset$ hulga X kõikide alamhulkade hulgas $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$. Milliseid omadusi rahuldab seos $\subset$ hulgas $\mathcal{P}(X)$?

353. Vaatleme seost $R = \{(a,d),(b,b),(d,a),(d,c)\}$ hulgal $A = \{a,b,c,d\}$. Leidke vähim seos, mis sisaldab seost R ja on

a) refleksiivne ja sümmeetriline;
b) sümmeetriline ja transitiivne;
c) refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

354. Selgitage, millised omadused (refleksiivus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) on seostel R hulgas $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

a) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow (m \leqslant k \wedge n \leqslant l)$;
b) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow (m \leqslant k \vee n \leqslant l)$;
c) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow m \leqslant k$;
d) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow m+n \geqslant k+l$;
e) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow m+l = n+k$.

355. Tõestage, et kui seos on sümmeetriline ja antisümmeetriline, siis on ta ka transitiivne.

356. Tõestage, et seos on refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline parajasti siis, kui ta on diagonaal mingis hulgas X.

357. Leidke R^{-1} ning uurige seose ja tema pöördseose omadusi, kui

a) $R = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$;
b) $R = \{(5,4),(1,2),(3,1),(2,1),(4,3)\}$;
c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x = -y\}$;
d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid y - x = 2\}$.

358. Olgu $R \subset X \times X$ seos. Tõestage, et

a) R on refleksiivne parajasti siis, kui $\triangle X \subset R$;
b) R on sümmeetriline parajasti siis, kui $R = R^{-1}$.

359. Leidke järgmiste seoste pöördseosed.

a) $(\{0,1,2\},\leqslant)$
b) $(\mathbb{N},|)$
c) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}),\subset)$

Definitsioon. Seost nimetatakse ekvivalentsusseoseks, kui ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

360. Millised järgmistest seostest on ekvivalentsusseosed?

a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid a+b \text{ on paarisarv }\}$
b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x| = |y|\}$
c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid |x-y| \geqslant 2\}$
d) Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow (m \leqslant k) \wedge (n \leqslant l)$.

e) Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow (m \leqslant k) \vee (n \leqslant l)$.
f) Hulk on $\mathbb{R}^2$ ja $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow |m-l| = |k-n|$.
g) X on Tartu elanike hulk ja xRy tähendab, et inimesed on omavahel tuttavad.

361. Millised järgnevatest seostest R hulgas $\mathbb{R}$ on ekvivalentsusseosed?

a) $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$

b) $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$

362. Millised järgnevatest seostest R hulgas $\mathbb{R}^2$ on ekvivalentsusseosed?

a) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow m \leqslant k$

b) $(m,n)R(k,l) \Leftrightarrow m+l = n+k$

363. Selgitage, millised järgmistest seostest R hulgas X on ekvivalentsusseosed:

a) X on ruumi kõigi tasandite hulk ja xRy tähendab, et tasandid x ja y on paralleelsed või ühtivad;
b) X on ruumi kõigi tasandite hulk ja xRy tähendab, et tasandid x ja y on risti;
c) $X = \mathbb{R}$ ja $xRy \Leftrightarrow xy \geqslant 0$;
d) X on Tallinna elanike hulk ja xRy tähendab, et inimesed on omavahel tuttavad.

364. Tõestage, et R on ekvivalentsusseos parajasti siis, kui R^{-1} on ekvivalentsusseos.

365. Leidke näide seosest, mis on refleksiivne ja sümmeetriline, aga ei ole transitiivne.

366. Tõestage, et lausearvutuse valemite samaväärsus on ekvivalentsusseos, st refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon. Klassijaotuseks mittetühjas hulgas X nimetatakse hulkade süsteemi $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- iga $\alpha \in A$ korral $X_\alpha \neq \varnothing$;
- $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = X$;
- $X_\alpha \neq X_\beta \Rightarrow X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing$.

Kui R on ekvivalentsusseos hulgas X, siis hulki $X_x = \{y \in X \mid (y,x) \in R\}$, $x \in X$, nimetatakse ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon. Hulga X faktorhulgaks temas antud ekvivalentsusseose R järgi nimetatakse kõigi ekvivalentsiklasside hulka $X/R = \{X_x \mid x \in X\}$.

367. Pange kirja kõikvõimalikud klassijaotused hulgal $A = \{a,b,c\}$.

368. Antud hulkadest $A_1, \dots, A_8$ moodustada sellised hulkade süsteemid, mis moodustaksid klassijaotusi hulgal $\mathbb{Z}$ kui $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{1,2,3,\dots\}$, $A_4 = \{-1,-2,-3,\dots\}$, $A_5 =$

$\{2,4,6,\dots\}$, $A_6 = \{1,3,5,7,\dots\}$, A_7 on kõigi algarvude hulk ja A_8 on kõigi naturaalarvuliste kordarvude hulk.

369. Kas poollõikude süsteem $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, on klassijaotus arvsirgel $\mathbb{R}$?

370. Leidke hulga $\mathbb{R}$ klassijaotusele $\{[k, k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ loomulikult vastav ekvivalentsusseos.

371. Leidke hulgal $X = \{1,2,3,4,5\}$ määratud ekvivalentsusseose R ekvivalentsiklassid, kui $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(3,5),(5,3),(1,5),(5,1)\}$.

372. Leidke ekvivalentsusseos R hulgas $X = \{1,2,3\}$, kui vastavad ekvivalentsiklassid on $\{1,3\}$ ja $\{2\}$.

373. Leidke ekvivalentsusseos R hulgal $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, kui ekvivalentsiklassid on $\{1\}$, $\{2,3\}$ ja $\{4,5,6\}$.

374. Olgu $A = \{a,b,c,d,e\}$. Olgu R ekvivalentsusseos hulgal A. Eeldame, et seosel R on kaks ekvivalentsiklassi. On teada, et aRd, bRc ja eRd. Kirjutage seos R hulgana.

375. Olgu R seos hulgal $\mathbb{N}$, mis on defineeritud nii, et mRn parajasti siis, kui m ja n annavad ühe ja sama jäägi jagamisel arvuga 3. Leidke faktorhulk $\mathbb{N}/R$.

376. Olgu hulgas $X = \{a,b,c,d\}$ antud seos $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\}$. Veenduge, et R on ekvivalentsusseos ja leidke X/R.

377. Leidke $\mathbb{R}/R$, kui hulgas $\mathbb{R}$ on defineeritud seos R järgnevalt:

a) $(x,y) \in R \Leftrightarrow |x| = |y|$;

b) $(x,y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Definitsioon. Seost nimetatakse osalise järjestuse seoseks, kui ta on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon. Hulka, millel on antud osalise järjestuse seos, nimetatakse osaliselt järjestatud hulgaks.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulka nimetatakse lineaarselt järjestatud hulgaks, kui iga elementide paari a ja b korral $a \leqslant b$ või $b \leqslant a$, s.t kaks suvalist elementi on omavahel võrreldavad.

378. Vaatleme seost R hulgas $\mathbb{N}$, kus suvaliste $a, b \in \mathbb{N}$ korral $aRb \Leftrightarrow a \mid b$ (see tähendab, et aRb parajasti siis kui a jagab arvu b). Milliseid omadusi rahuldab seos R hulgas $\mathbb{N}$? Kas tegu on osalise järjestuse seosega hulgas $\mathbb{N}$?

379. Millised järgmistest seostest hulgal $\{0,1,2,3\}$ on osalise järjestuse seosed?

a) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

b) $\{(0,0),(1,1),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
c) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$
d) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
e) $\{(0,0),(2,2),(3,3)\}$
f) $\{(0,0),(1,1),(2,0),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
g) $\{(0,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,2),(2,3),(3,0),(3,3)\}$

380. Kas hulk (H,R) on osaliselt järjestatud hulk, kui H on kõigi Maal elavate inimeste hulk ning inimesed a ja b on seoses R, kui

a) a on pikem kui b;
b) a ei ole pikem kui b;
c) a ei ole lühem, kui b;
d) inimestel a ja b on ühine sõber;
e) inimestel a ja b ei ole ühist sõpra;
f) a kaalub rohkem kui b;
g) $a=b$ või a on b vanem;
h) $a=b$ või a on b järglane.

381. Millised järgmistest on osaliselt järjestatud hulgad?

a) $(\mathbb{Z},=)$; b) $(\mathbb{Z},\neq)$; c) $(\mathbb{Z},\geqslant)$; d) $(\mathbb{Z},\nmid)$; e) $(\mathbb{R},<)$; f) $(\mathbb{R},\leqslant)$.

382. Otsustage, millised maatriksiga antud seosed on osalisele järjestuse seosed:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

383. Tooge näiteid võrreldavatest ja mitte võrreldavatest elementidest osaliselt järjestatud hulgas $(\mathbb{N},|)$.

384. Leidke kaks mitte võrreldavat elementi järgmistes osaliselt järjestatud hulkades:

a) $(\mathcal{P}(\{0,1,2\}),\subset)$;
b) $(\{1,2,4,6,8\},|)$.

385. Olgu $\prec^X$ ja $\prec^Y$ osalise järjestuse seosed vastavalt hulkades X ja Y. Defineerime seose $\prec$ hulgas $X\times Y$ selliselt, et $(x_1,y_1)\prec(x_2,y_2)\Leftrightarrow x_1\prec^X x_2 \wedge y_1\prec^Y y_2$. Tõestage, et seos $\prec$ on osalise järjestuse seos hulgas $X\times Y$.

386. Tõestage, et kui R on osalise järjestuse seos, siis $xRy\wedge yRx\Leftrightarrow x=y$.

387. Tõestage, et seos $(m,n)\in R\Leftrightarrow \dfrac{m}{n}\in\mathbb{N}$ on osalise järjestuse seos hulgal $\mathbb{N}$.

388. Tõestage, et R on osalise järjestuse seos parajasti siis, kui R^{-1} on osalise järjestuse seos.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse vähimaks, kui $x_0 \leqslant x$ iga $x \in X$ korral. Analoogiliselt, elementi $x_0 \in X$ nimetatakse suurimaks, kui $x \leqslant x_0$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga X elementi x_0 nimetatakse minimaalseks, kui sellest, et $x \leqslant x_0$ ja $x \in X$ korral järeldub, et $x = x_0$. Analoogiliselt, elementi x_0 nimetatakse maksimaalseks, kui sellest, et $x_0 \leqslant x$ ja $x \in X$ korral järeldub, et $x = x_0$.

389. Olgu $H = \{1,2,3,4\}$ ja vaatleme leksikograafilist järjestust selles hulgas. Leida

a) kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on väiksemad kui $(2,3)$;
b) kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on suuremad kui $(3,1)$.

390. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{3,5,9,15,24,45\},|)$

a) kõik minimaalsed elemendid;
b) kõik maksimaalsed elemendid;
c) vähim element, kui see on olemas;
d) suurim element, kui see on olemas.

391. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{2,4,6,9,12,18,27,36,48,60,72\},|)$

a) kõik minimaalsed elemendid;
b) kõik maksimaalsed elemendid;
c) vähim element, kui see on olemas;
d) suurim element, kui see on olemas.

392. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{1\},\{2\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},\subset)$

a) kõik minimaalsed elemendid;
b) kõik maksimaalsed elemendid;
c) vähim element, kui see on olemas;
d) suurim element, kui see on olemas.

393. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{a,b\},\{a,b,c\},\{c,b,d,a\},\{b,d,e\}\},\subset)$

a) kõik minimaalsed elemendid;
b) kõik maksimaalsed elemendid;
c) vähim element, kui see on olemas;
d) suurim element, kui see on olemas.

394. Tooge näide osaliselt järjestatud hulgast, millel

a) on minimaalne element, kuid maksimaalset elementi pole;
b) on maksimaalne element, kuid minimaalset elementi pole;
c) ei ole minimaalset ega ka maksimaalset elementi.

395*. Olgu $p(n)$ erinevate ekvivalentsusseoste (ehk siis ka klassijaotuste) arv n-elemendilisel hulgal. Tõestage, et
$$p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p(n-j-1).$$

396*. Olgu hulgal A antud osalise järjestuse seos $\preccurlyeq$. (Siin tähistame $x \prec y$, kui $x \preccurlyeq y$ ja $x \neq y$.) ütleme, et hulk A rahuldab
(1) *minimaalsuse tingimust*, kui igas mittetühjas alamhulgas $M \subset A$ leidub vähemalt üks element $x_0 \in M$ omadusega $\forall x \in M\,(x \preccurlyeq x_0 \Rightarrow x = x_0)$;
(2) *rangelt kahanevate jadade lõplikkuse tingimust*, kui iga rangelt kahanev jada $x_0 \succ x_1 \succ \ldots$ sisaldab lõpliku arvu elemente;
(3) *induktiivsuse tingimust*, kui suvalise omaduse T korral kehtib tingimus
$$\Big(\forall x \in A \quad \big(\forall y \prec x \quad \text{elemendil } y \text{ on } T\big) \quad \Rightarrow \quad \text{elemendil } x \text{ on } T\Big) \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \forall x \in A \quad \text{elemendil } x \text{ on } T.$$

Tõestage, et (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

397*. Tõestada, et kui R on osalise järjestuse seos hulgas X, siis leidub lineaarne järjestus L hulgas X nii, et $R \subset L$.

398*. *Seose omaduste kontrollija.* Kirjutada ja esitada neli Pythoni funktsiooni, mis kontrollivad argumendiks antud maatriksina esitatud seose omadusi.