Kompleksarvud

Ülesanne 1 *Arvutage a)* $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$, *b)* $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$, *c)* $(2+i)^3+(2-i)^3$.

a)

$$\begin{aligned}\frac{(2+i)(4+i)}{1+i} &= \frac{8+2i+4i+i^2}{1+i} = \frac{8+6i-1}{1+i} = \frac{7+6i}{1+i} = \frac{(7+6i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{7-7i+6i+6}{1+1} = \frac{13-i}{2} = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Ülesanne 2 *Tõestage, et iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral* $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$(1+i)^{8n} = \left((1+i)^2\right)^{4n} = (1+2i-1)^{4n} = (2i)^{4n} = 2^{4n}i^{4n} = 2^{4n}1^n = 2^{4n}.$$

Ülesanne 3 *Leidke võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} iz + (1+i)w = 2+2i \\ 2iz + (3+2i)w = 5+3i \end{cases}$$

kõik kompleksarvulised lahendid z, w.

Vaatleme selle võrrandisüsteemi maatriksi determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3+2i \end{vmatrix} = i(3+2i) - 2i(1+i) = 3i - 2 - 2i + 2 = i.$$

Kuna determinant on nullist erinev, siis on see võrrandisüsteem üheselt lahenduv, kusjuures tema lahendid võib leida determinantide abil:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{i}\begin{vmatrix} 2+2i & 1+i \\ 5+3i & 3+2i \end{vmatrix} = \frac{1}{i}((2+2i)(3+2i) - (5+3i)(1+i)) \\ &= \frac{1}{i}(6+4i+6i-4-(5+5i+3i-3)) = \frac{1}{i}2i = 2, \\ w &= \frac{\Delta_w}{\Delta} = \frac{1}{i}\begin{vmatrix} i & 2+2i \\ 2i & 5+3i \end{vmatrix} = \frac{1}{i}(i(5+3i) - 2i(2+2i)) = \\ &= \frac{1}{i}(5i-3-4i+4) = \frac{1}{i}(i+1) = 1 + \frac{1}{i} = 1 + \frac{i}{-1} = 1 - i. \end{aligned}$$

Kontroll:

$$\begin{aligned} i \cdot 2 + (1+i)(1-i) &= 2i + 1 + 1 = 2 + 2i, \\ 2i \cdot 2 + (3+2i)(1-i) &= 4i + 3 - 3i + 2i + 2 = 5 + 3i. \end{aligned}$$

Vastus: võrrandisüsteemil on täpselt üks lahend $z = 2, w = 1 - i$.

Ülesanne 4 *Leidke võrrandi* $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$ *kõik reaalarvulised lahendid* x, y.

Teisendame vaadeldava võrrandi vasakut poolt:

$$\begin{aligned} 2x + ix + y + 2iy &= 1 - 4i, \\ (2x+y) + (x+2y)i &= 1 - 4i. \end{aligned}$$

Kaks kompleksarvu on võrdsed parajasti siis, kui nende reaalosad ja imaginaarosad on võrdsed. Seega

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ x + 2y &= -4, \end{aligned}$$

kust saame, et $x = 2$ ja $y = -3$.

Kontroll:

$$(2+i)2 + (1+2i)(-3) = 4 + 2i - 3 - 6i = 1 - 4i.$$

Vastus: $x = 2$ ja $y = -3$.

Ülesanne 5 *Tõestage, et kahe nullist erineva kompleksarvu korrutis on reaalarv parajasti siis, kui üks neist erineb teise kaaskompleksist mingi reaalarvulise kordaja võrra.*

Tarvilikkus. Oletame, et $(a+bi)(c+di) = r \in \mathbb{R}$, kus $a+bi$ ja $c+di$ on kompleksarvud algebralisel kujul, s.t. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Seega

$$a + bi = \frac{r}{c+di} = \frac{r(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{r}{c^2+d^2}(c-di) = \frac{r}{c^2+d^2}\overline{c+di},$$

kus $\frac{r}{c^2+d^2}$ on reaalarv.

Piisavus. Oletame, et $a + bi = r(c - di)$, kus $r \in \mathbb{R}$. Siis

$$(a+bi)(c+di) = r(c-di)(c+di) = r(c^2+d^2) \in \mathbb{R}.$$

Ülesanne 6 *Lahendage võrrand $z^2 = 3 - 4i$.*

See võrrand on kindlasti lahenduv, sest igal nullist erineval kompleksarvul on olemas täpselt kaks kompleksarvulist ruutjuurt. Üks võimalus nende leidmiseks on kasutada juurimise valemit. Teine võimalus on tähistada otsitav kompleksarv $z = a + bi$, kus $a, b \in \mathbb{R}$. Siis

$$3 - 4i = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$

Kuna reaalosad ja imaginaarosad peavad võrdsed olema, saame a ja b leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \\ 2ab &= -4. \end{cases}$$

Kuna reaalarvu ruut ei saa olla $3 - 4i$, siis $b \neq 0$. Seega teisest võrrandist saame, et $a = -\frac{2}{b}$. Asendades esimesse võrrandisse saame biruutvõrrandi $b^4 + 3b^2 - 4 = 0$, kust

$$b^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}.$$

Kuna b on reaalarv, siis võimalus $b^2 = -4$ langeb ära. Seega $b^2 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = -2$.

Vastus: võrrandi lahendid on $2 - i$ ja $-2 + i$.

Ülesanne 7 *Leidke arvu $\sqrt{3}-i$ trigonomeetriline kuju.*

Arvu $\sqrt{3}-i$ moodul on $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$. Kuna selle arvu reaalosa on positiivne ja imaginaarosa negatiivne, siis see arv asub komplekstasandi neljandas veerandis. Seega tema argument φ on neljanda veerandi nurk, mille tangens on $\tan\varphi=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ainus selline neljanda veerandi nurk on $330°$, seega $\varphi=330°$.

Vastus: arvu $\sqrt{3}-i$ trigonomeetriline kuju on $2(\cos 330°+i\sin 330°)$.

Märkus. Kuna $\tan\varphi=\tan(\varphi-360°)$, siis võiksime ka kirjutada $\sqrt{3}-i=2(\cos(-30°)+i\sin(-30°))$.

Ülesanne 8 *Arvutage $(1+i\sqrt{3})^{2002}$.*

Leiame arvu $1+i\sqrt{3}$ trigonomeetrilise kuju. Moodul $r=\sqrt{1+3}=2$. Kui argument on φ, siis $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$. Kuna tegemist on esimese veerandi nurgaga, siis $\varphi=60°$. Seega

$$1+i\sqrt{3}=2(\cos 60°+i\sin 60°).$$

Astendamiseks kasutame Moivre'i valemit:

$$(1+i\sqrt{3})^{2002}=2^{2002}(\cos 2002\cdot 60°+i\sin 2002\cdot 60°).$$

Kuna $2002\cdot 60=120120=360\cdot 333+240$, siis

$$(1+i\sqrt{3})^{2002}=2^{2002}(\cos 240°+i\sin 240°)=2^{2002}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2^{2001}(-1+\sqrt{3}i).$$

Vastus: $(1+i\sqrt{3})^{2002}=2^{2001}(-1+\sqrt{3}i)$.

Ülesanne 9 *Leidke kõik juured a) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$, b) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$.*

a) Nagu nägime ülesandes 9, $1+i\sqrt{3}=2(\cos 60°+i\sin 60°)$. Juurimise valemi põhjal

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}} &= \left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{60°+2k\cdot 180°}{6}+i\sin\frac{60°+2k\cdot 180°}{6}\right) \mid k=0,1,2,3,4,5\right\} \\
&= \left\{\sqrt[6]{2}\,(\cos(10°+k\cdot 60°)+i\sin(10°+k\cdot 60°)) \mid k=0,1,2,3,4,5\right\} \\
&= \{\sqrt[6]{2}\,(\cos 10°+i\sin 10°)\,,\sqrt[6]{2}\,(\cos 70°+i\sin 70°)\,,\sqrt[6]{2}\,(\cos 130°+i\sin 130°)\,, \\
&\quad \sqrt[6]{2}\,(\cos 190°+i\sin 190°)\,,\sqrt[6]{2}\,(\cos 250°+i\sin 250°)\,,\sqrt[6]{2}\,(\cos 310°+i\sin 310°)\}.
\end{aligned}$$

Ülesanne 10 *Leidke a) 12. astme, b) 16. astme algjuurte arv.*

Teame, et n. astme ühejuured ε_k, $k=0,1,\ldots,n-1$, avalduvad kujul

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Samuti on teada (vt. [1], teoreem 6.8.4), et n. astme ühejuur ε_k on n. astme algjuur parajasti siis, kui k ja n on ühistegurita.

a) Kuna arvude $0,1,2,\ldots,11$ hulgas on 4 arvu, mis on arvuga 12 ühistegurita $(1,5,7,11)$, siis 12. astme algjuuri on 4 tükki, need on $\varepsilon_1,\varepsilon_5,\varepsilon_7,\varepsilon_{11}$.

Ülesanne 11 *Avaldage* $\sin n\varphi$ *ja* $\cos n\varphi$ *(*$n \in \mathbb{N}$*)* $\sin\varphi$ *ja* $\cos\varphi$ *kaudu.*

Kasutades ühelt poolt Moivre'i valemit ja teiselt poolt Newtoni binoomvalemit saame, et

$$\begin{aligned}\cos n\varphi + i\sin n\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + C_n^1\cos^{n-1}\varphi\cdot i\sin\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi \\ &\quad - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\cdot i\sin^3\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\cdot i\sin^5\varphi - \ldots.\end{aligned}$$

Kuna kompleksarvud on võrdsed parajasti siis, kui reaalosad on võrdsed ja imaginaarosad on võrdsed, siis saame siit võrdused

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots, \tag{1}$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \ldots. \tag{2}$$

Ülesanne 12 *Leidke summa a)* $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$, *b)* $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$.

a) Võttes võrduses (1) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ saame

$$\begin{aligned}\cos\frac{n\pi}{4} &= \cos^n\frac{\pi}{4} - C_n^2\cos^{n-2}\frac{\pi}{4}\cdot\sin^2\frac{\pi}{4} + C_n^4\cos^{n-4}\frac{\pi}{4}\sin^4\frac{\pi}{4} - \ldots \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - C_n^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + C_n^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - \ldots.\end{aligned}$$

Järelikult

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} = \left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Viited

[1] Kilp, M., Algebra I, Tartu, 1998.