ALGEBRA JA GEOMEETRIA

HARJUTUSÜLESANDED

Kuues, parandatud ja täiendatud trükk

Mart Abel Valdis Laan

Eesti Matemaatika Selts

Tartu 2012

,,Noh, Heete,” küsin, ,,kas hakkame jälle pihta?”

,,Kellele? Millele?”

,,Eks ikka sellesamale matemaatikale.”

,,Ah, mistarvis!” lasetab tüdruk käed rüppe. ,,Kas te ei kuulnud, mis ütles mamma? Ma ei usu, et kartulite puhastamisel vajaksin eriti palju algebrat ja geomeetriat.” (Oskar Luts, “Vaikne nurgake”.)

Käesolev ülesannete kogu on mõeldud abiliseks Tartu Ülikoolis loetava kursuse “Algebra ja geomeetria” juurde nii tudengeile, kes soovivad kontrolltöödeks valmistudes ülesandeid lahendada kui ka praktikumide juhendajatele väikeseks suunajaks ülesannete teemade valikul. Ülesanded on jaotatud 15 teemaks ning varustatud vastustega. Kogu koostamisel kasutatud materjalide nimekiri on toodud kasutatud kirjanduse loetelus. Koostajad soovitavad kontrolltöödeks valmistumisel lahendada ülesandeid ka teistest kogudest.

Eesti Matemaatika Selts
Liivi 2
50409 Tartu
tel: 7 375 865

ISBN 978–9949–9180–1–0

Trükitud Tartu Ülikooli multimeedia talituses
Lossi 3–141a, 51003 Tartu

1. Maatriksid

Näide 1. *Leidke maatriksite* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ *ja* $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *korrutis* AB.

Kuna maatriksi A veergude arv on võrdne maatriksi B ridade arvuga, siis korrutis AB on olemas (kuid korrutist BA ei eksisteeri!) ning selles on kolm rida ja kaks veergu. Arvutame:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + (-3)\cdot 1 & 2\cdot(-2) + (-3)\cdot 0 \\ 5\cdot 3 + 4\cdot 1 & 5\cdot(-2) + 4\cdot 0 \\ (-1)\cdot 3 + 6\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + 6\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 19 & -10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vastus. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 19 & -10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$**.**

1. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$;

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{45} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{45} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{45} \end{pmatrix}$;

h) $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$;

i) $I = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Leidke ülesandes 1 antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

3. Millised ülesandes 1 antud maatriksitest on

a) ruutmaatriksid;

b) diagonaalmaatriksid;

c) ühikmaatriksid;

d) sümmeetrilised maatriksid;

e) kaldsümmeetrilised maatriksid.

4. Kirjutage välja maatriks $A \in \mathrm{Mat}(3,3)$, mille elemendid a_{ij} avalduvad valemiga

a) $a_{ij} = i + j$; b) $a_{ij} = ij$; c) $a_{ij} = (i-j)^2$; d) $a_{ij} = i^2j + ij^2$.

Kas need maatriksid on sümmeetrilised?

5. Millised järgnevatest tehetest on sooritatavad maatriksitega ülesandest 1? Sooritatavate tehete korral leidke ka tehte vastus.

a) $A + E$; d) EF; g) $G + E$; j) AB;

b) $B^T + A$; e) IH; h) $E^T B$; k) FG;

c) $3C - 2D$; f) BA; i) $H^T - 3I$; l) $C - BA + D$.

6. Leidke maatriksite A ja B summa $A + B$, vahe $A - B$ ning korrutised AB ja BA, kui nad on olemas:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

7. On antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Leidke a) $A + B$; b) $A - B$; c) $2A + (-3)B$; d) AB.

8. Leidke korrutised AB ja BA, kui

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

9. Arvutage AB ja BA, kui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ja

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

10. Korrutage maatriksid:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 103 & 27 & 35 & 1 \\ -72 & 43 & 59 & 21 \\ 13 & -2 & 4 & 28 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 73 & 21 & -56 & 21 \\ 34 & 52 & 43 & -74 \\ 101 & 251 & 27 & 38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 3 & -5 & -1 \\ -8 & 8 & 24 & 16 \\ -16 & 0 & 16 & 8 \end{pmatrix}$.

11. Arvutage $(AB)C$ ja $A(BC)$, kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Leidke, kui võimalik, korrutised AB, BA, AC, CA, BC, CB, DA, AD, ABC, BAD, CBA.

13. Arvutage:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$;

b) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^3$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$;

e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

14. Leidke $f(A)$, kui

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 10$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

15. Kuidas muutub maatriksite A ja B korrutis AB, kui

a) maatriksis A vahetada i-s ja j-s rida;

b) maatriksi A i-ndale reale liita c-kordne j-s rida;

c) maatriksis B vahetada i-s ja j-s veerg;

d) maatriksi B i-ndale veerule liita c-kordne j-s veerg?

16. Leidke kõik teist järku ruutmaatriksid A, mille korral $A^2 = A$.

17. Leidke selline maatriks X, et

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

s.o. lahendage vastav maatriksvõrrand.

18. Lahendage maatriksvõrrand

$$X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Tõestage järgmiste võrduste samaväärsus mistahes sama järku ruutmaatriksite A ja B korral:

a) $AB = BA$;

b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

20. Tõestage, et maatriks BB^T on sümmeetriline iga maatriksi B korral.

21. Olgu A ja B sama järku sümmeetrilised maatriksid. Tõestage, et maatriks $ABAB \ldots ABA$ on sümmeetriline.

22. Tõestage, et kahe kaldsümmeetrilise maatriksi korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui need maatriksid kommuteeruvad.

2. Determinandid

Näide 2. *Arvutage definitsiooni põhjal determinant*

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Definitsiooni järgi on maatriksi $A = (a_{ij})$ determinant võrdne summaga märgiga varustatud korrutistest, mis sisaldavad tegurina täpselt ühte elementi maatriksi A igast reast ja igast veerust. Antud juhul on selliseid korrutisi determinandi avaldises $4! = 24$, kuid nullist erinevaid on nende hulgas vaid kaks: $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ ja $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$. Esimese korrutise veeruindeksite permutatsioon $3, 2, 4, 1$ sisaldab 4 inversiooni, teise korrutise veeruindeksite permutatsioon $3, 4, 2, 1$ sisaldab 5 inversiooni. Järelikult

$$\begin{aligned} D &= (-1)^4 a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + (-1)^5 a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (1 - 7) = -720. \end{aligned}$$

Vastus. $D = -720$.

Näide 3. *Arvutage determinant*

$$D = \begin{vmatrix} -10 & -7 & -10 & -2 \\ 5 & 14 & 2 & -1 \\ -5 & -48 & 6 & 9 \\ -13 & -54 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Teeme elementaarteisendusi vastava maatriksi ridadega selliselt, et kolmandasse veergu jääks ainult üks nullist erinev element — arv 2. Selleks liidame esimesele reale 5-kordse teise ja lahutame kolmandast reast 3-kordse teise. Kuna determinant selliste teisenduste käigus ei muutu, siis

$$D = \begin{vmatrix} -10 & -7 & -10 & -2 \\ 5 & 14 & 2 & -1 \\ -5 & -48 & 6 & 9 \\ -13 & -54 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} +5\mathrm{II} \\ \\ -3\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 15 & 63 & 0 & -7 \\ 5 & 14 & 2 & -1 \\ -20 & -90 & 0 & 12 \\ -13 & -54 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Arendades determinanti kolmanda veeru järgi ning seejärel tuues teisest veerust determinandi märgi alt välja ühise teguri 9, saame

$$D = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 15 & 63 & -7 \\ -20 & -90 & 12 \\ -13 & -54 & 6 \end{vmatrix} \\ \cdot\frac{1}{9} \qquad \end{array} = (-2) \cdot 9 \cdot \begin{array}{r} \begin{vmatrix} 15 & 7 & -7 \\ -20 & -10 & 12 \\ -13 & -6 & 6 \end{vmatrix} \\ +\mathrm{II} \end{array}.$$

Edasi võib kasutada Sarruse reeglit, kuid võib ka jätkata elementaarteisendustega. Liites kolmandale veerule teise, arendades kolmanda veeru järgi ning seejärel lihtsustades saadud teist järku determinanti, saame

$$\begin{aligned} D &= -18 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 7 & 0 \\ -20 & -10 & 2 \\ -13 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (-18) \cdot 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 15 & 7 \\ -13 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \end{array} \\ &= 36 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -13 & -6 \end{vmatrix} = 36(-12 + 13) = 36. \end{aligned}$$

Vastus. $D = 36$.

Näide 4. *Arvutage determinant*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Arvestades nullide asukohta, on kasulik seda determinanti Laplace'i valemi abil arendada teise ja kolmanda rea järgi. Nende ridade elementidest saab moodustada ülimalt kolm nullist erinevat miinorit:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nende miinorite algebralised täiendid on vastavalt

$$(-1)^{2+3+1+2} \cdot \begin{vmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3\mathrm{II} \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(-1)^{2+3+1+4}\cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix} \underset{-\mathrm{III}}{} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} -2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix} = -4,$$

$$(-1)^{2+3+2+4}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix} -\mathrm{II}\\ \\ -3\mathrm{II}\end{matrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix} = -4.$$

Laplace'i valemi põhjal

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2\\ -4 & 4\end{vmatrix}\cdot 0 + \begin{vmatrix} 3 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}\cdot(-4) + \begin{vmatrix} -2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\cdot(-4) = -40 + 32 = -8.$$

Vastus. $D = -8$.

23. Leidke inversioonide arv permutatsioonis

a) $3, 5, 4, 1, 2$;

b) $6, 9, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 4$;

c) $1, 2, 5, 7, 6, 3, 4$;

d) $7, 4, 5, 1, 6, 3, 2$;

e) $4, 6, 2, 3, 1, 5$;

f) $5, 10, 7, 1, 3, 2, 8, 6, 9, 4$;

g) $2, 4, 8, 3, 7, 5, 6, 1$;

h) $9, 3, 1, 8, 2, 5, 7, 4, 6$;

i) $1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5$;

j) $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4$;

k) $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$;

24. Leidke kõik permutatsioonid neljast elemendist, mis sisaldavad 4 inversiooni.

25. Selgitage, millised järgmistest korrutistest kuuluvad vastavat järku determinandi avaldisse ja millise märgiga:

a) $a_{41}a_{23}a_{12}a_{35}a_{54}$;

b) $a_{46}a_{35}a_{61}a_{23}a_{12}a_{54}$;

c) $a_{54}a_{71}a_{27}a_{36}a_{25}a_{43}a_{62}$;

d) $a_{25}a_{57}a_{33}a_{16}a_{61}a_{44}$.

26. Arvutage järgmised determinandid, lähtudes ainult determinandi definitsioonist:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

27. Leidke determinandi $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 & 2 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 5 & 3 & 1 & x \end{vmatrix}$ liikmed, mis sisaldavad kas x^4, x^3 või x^2.

28. Arendage determinanti

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}$ neljanda veeru järgi;

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ esimese veeru järgi;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ kolmanda rea järgi;

d) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ teise veeru järgi.

29. Arvutage determinandid

a) $\begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1273 & 2273 \\ 1272 & 2272 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 131 & 231 \\ -130 & -230 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} 361 & 273 & 568 \\ 2 & 2 & 2 \\ 363 & 275 & 570 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 19 & 20 & 22 \\ 20 & 22 & 21 \end{vmatrix}$;

h) $\begin{vmatrix} 125 & 127 & 121 \\ 625 & 630 & 615 \\ 380 & 371 & 392 \end{vmatrix}$;

i) $\begin{vmatrix} 2 & \sin^2\alpha & -\cos^2\alpha \\ 2 & \sin^2\beta & -\cos^2\beta \\ 2 & \sin^2\gamma & -\cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

j) $\begin{vmatrix} 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;

k) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

l) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

m) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

n) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;

o) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

p) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}$;

q) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$;

r) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$;

s) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

t) $\begin{vmatrix} 2 & 1000 & 4 & 0{,}08 \\ 1 & 3000 & -6 & 0{,}02 \\ 3 & -2000 & 2 & -0{,}02 \\ 2 & -1000 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; v) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$.

u) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0{,}002 \\ 3 & 8 & 0 & -0{,}004 \\ 2 & 2 & -4 & -0{,}003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$;

30. Kasutades Laplace'i teoreemi arvutage determinandid

a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 1 \\ -10 & 9 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

31. Arvutage n-ndat järku determinandid

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

32. Lahendage võrrand

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x-1 & 3 \\ 0 & 5 & x-2 \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 0 & 2-x & 3 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-t^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-t^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ t+1 & 2 & t+3 & 4 \\ 1 & 3+t & 4+t & 5+t \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$

33. Arvutage $\det(kA)$, kui $k = \sqrt[5]{2}$, $A \in \mathrm{Mat}(5,5)$ ja $\det(A) = 3$.

34. Arvud 185, 518 ja 851 jaguvad 37-ga. Tõestage, et determinant $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ jagub 37-ga.

35. Leidke seos $|A|$ ja $|-A|$ vahel, kus A on suvaline n-ndat järku ruutmaatriks.

36. Kuidas muutub determinant, kui tema igast reast peale viimase lahutada järgmine rida, viimasest reast aga lahutada esialgne esimene rida?

37. Kuidas muutub determinant, kui tema iga element asendada sümmeetrilisega tsentri suhtes?

3. Pöördmaatriks

Näide 5. *Leidke maatriksi*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks.

Pöördmaatriksi leidmiseks on kaks võimalust.

a) Arvutades maatriksi A determinandi ja kõigi elementide algebralised täiendid, saame

$$|A| = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \\ \qquad\quad -2\mathrm{I}\end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^T = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Pöördmaatriksit saab leida elementaarteisenduste abil. Selleks tuleb maatriksi A kõrvale kirjutada vastavat järku ühikmaatriks ning ridade elementaarteisenduste abil teisendada maatriks A ühikmaatriksiks. Maatriks, milleks teiseneb ühikmaatriks, ongi A pöördmaatriks. Niisiis

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \leftrightarrow \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -3\mathrm{I} \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -2\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

kus viimases maatriksis püstkriipsust paremal ongi A pöördmaatriks.

Vastus. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

38. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid algebraliste täiendite abil:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

39. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

40. Arvutage $(AB)^{-1}$ ja $(kA)^{-1}$, kui

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $k = 5$;

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $k = -3$.

41. Lahendage maatriksvõrrand, s.t. leidke kõigi selliste maatriksite X hulk, mis rahuldavad antud võrdust:

a) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

42. Kas võrdusest $AB = AC$ järeldub võrdus $B = C$?

43. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui

a) $A^2 - 4A + E = \Theta$; b) $A^3+5A^2-3A-E = \Theta$; c) $A^2 - A = \Theta$.

44. Tõestage, et $(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}$, kui $A^{k-1} \neq \Theta$ ja $A^k = \Theta$.

45. Olgu J_n n-ndat järku ruutmaatriks, mille kõik elemendid võrduvad 1-ga. Tõestage, et $(E - J_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1} J_n$.

46. Olgu A ja B sama järku regulaarsed maatriksid. Tõestage järgmiste võrduste samaväärsus:

a) $AB = BA$;

b) $AB^{-1} = B^{-1}A$;

c) $A^{-1}B = BA^{-1}$;

d) $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Vektorruum

Näide 6. *Defineerime funktsioonide hulgal* $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *liitmise ja reaalarvuga korrutamise n.ö. punktiviisiliselt:*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), && (1)\\ (kf)(x) &= kf(x) && (2) \end{aligned}$$

mistahes $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ *ja* $k, x \in \mathbb{R}$ *korral. Tõestage, et hulk* $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ *on vektorruum nende tehete suhtes.*

On selge, et nii defineerides saame funktsioonid $f+g, kf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Näitame, et selline funktsioonide liitmine on assotsiatiivne ja kommutatiivne. Olgu $f, g, h \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Kasutades definitsiooni (1) ning reaalarvude liitmise assotsiatiivsust ja kommutatiivsust, saame, et

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = (f(x)+g(x)) + h(x)\\ &= f(x) + (g(x)+h(x)) = f(x) + (g+h)(x)\\ &= (f+(g+h))(x),\\ (f+g)(x) &= f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \end{aligned}$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Järelikult kehtivad võrdused $(f+g)+h = f+(g+h)$ ja $f+g = g+f$ funktsioonide vahel, s.t. funktsioonide liitmine on tõesti assotsiatiivne ja kommutatiivne. Kui $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, siis

$$(f+c_0)(x) = f(x) + c_0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

iga $x \in \mathbb{R}$ korral, kus c_0 on konstantne nullfunktsioon. Seega iga $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ korral $f + c_0 = f = c_0 + f$, s.t. c_0 on vektorruumi $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ nullvektor. Vektori $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ vastandvektoriks osutub funktsioon $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega $(-f)(x) = -f(x)$, sest iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$(f+(-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = c_0(x).$$

Lisaks sellele, iga $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ ja $k, l, x \in \mathbb{R}$ korral saame definitsioone (1) ja (2) ning reaalarvude omadusi kasutades, et

$$\begin{aligned} (k(f+g))(x) &= k((f+g)(x)) = k(f(x)+g(x)) = kf(x) + kg(x)\\ &= (kf)(x) + (kg)(x) = (kf+kg)(x),\\ ((k+l)f)(x) &= (k+l)f(x) = kf(x) + lf(x) = (kf)(x) + (lf)(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (kf+lf)(x),\\
((kl)f)(x) &= (kl)f(x) = k(lf(x)) = k((lf)(x)) = (k(lf))(x),\\
(1f)(x) &= 1f(x) = f(x).
\end{aligned}
$$

Järelikult $k(f+g) = kf + kg$, $(k+l)f = kf + lf$, $(kl)f = k(lf)$ ja $1f = f$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on vektorruum üle $\mathbb{R}$.

Näide 7. *Olgu $u \in \mathbb{R}$ fikseeritud reaalarv. Kas hulk*

a) $V_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(u) = 0\right\}$; b) $V_2 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(u) = 1\right\}$

on vektorruum (üle $\mathbb{R}$) funktsioonide punktiviisilise liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes?

Selle ülesande lahendamiseks on kaks võimalust. Esimene on loomulikult vektorruumi definitsiooni tingimuste kontrollimine, nii nagu tegime seda näites 6. Teine võimalus on kasutada fakti, et vektorruumi iga alamruum on ise ka vektorruum. Seega piisab kontrollida, kas V_1 ja V_2 on vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ alamruumid. Teemegi seda.

a) Kui $f, g \in V_1$, s.t. $f(u) = 0 = g(u)$, siis ka

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u) = 0 + 0 = 0.$$

Seega $f + g \in V_1$ ehk hulk V_1 on kinnine liitmise suhtes. Kui $f \in V_1$ ja $k \in \mathbb{R}$, siis ka $(kf)(u) = kf(u) = k0 = 0$, mis tähendab, et $kf \in V_1$ ning seega V_1 on kinnine ka reaalarvuga korrutamise suhtes. Järelikult V_1 on alamruum.

b) Hulk V_2 ei ole alamruum, sest $(c_1+c_1)(u) = c_1(u)+c_1(u) = 1+1 = 2 \neq 1$ ja seega $c_1 + c_1 \notin V_2$, kus $c_1 \in V_2$ on konstantne funktsioon väärtusega 1.

Vastus. V_1 on vektorruum üle $\mathbb{R}$, V_2 ei ole.

Näide 8. *Defineerime hulgal $\mathbb{Z}^n$ liitmise ja realarvudega korrutamise võrdustega*

$$
\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),\\
k(a_1, \ldots, a_n) &= (ka_1, \ldots, ka_n)
\end{aligned}
$$

mistahes $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral. Kas hulk $\mathbb{Z}^n$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$?

Ei ole, sest $\frac{1}{2}(1, \ldots, 1) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}^n$.

Näide 9. *Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas kehtib järgmine väide: kui $a, b, c \in V$ on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis ka $a + 2b, b + 2c$ ja $c + 2a$ on lineaarselt sõltumatud?*

Oletame, et

$$k(a + 2b) + l(b + 2c) + m(c + 2a) = 0, \tag{3}$$

kus k, l, m on mingisugused reaalarvud. Kasutades vektorruumi aksioome, saame, et ka

$$(k + 2m)a + (2k + l)b + (2l + m)c = 0.$$

Kuna vektorid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, siis sellest võrdusest järeldub, et lineaarkombinatsiooni kõik kordajad on võrdsed nulliga:

$$k + 2m = 2k + l = 2l + m = 0.$$

Järelikult $4m - l = 0 = 2l + m$, kust $9m = 0$ ja seega $m = l = k = 0$. Oleme näidanud, et lineaarkombinatsioon võrduse (3) vasakul poolel on triviaalne, mis tähendab, et vektorid $a + 2b, b + 2c$ ja $c + 2a$ on lineaarselt sõltumatud.

Vastus. Jah, kehtib.

Näide 10. *Tehke kindlaks, millised järgmistest vektorite süsteemidest vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltumatud:*

a) $2x + 1, x - 2$; b) $c_1, \sin^2 x, \cos^2 x$; c) e^x, e^{2x}, e^{3x}.

Selles ülesandes kasutame levinud tähistusviisi, kus näiteks avaldis $x^2 - 3x$ tähistab ühtlasi ka funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega $f(x) = x^2 - 3x$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Sümboliga c_0 tähistame konstantset nullfunktsiooni ja sümboliga c_1 konstantset funktsiooni väärtusega 1.

a) Oletame, et $k(2x+1)+l(x-2) = c_0$. Funktsioonid on võrdsed, kui nende väärtused on kõigi argumendi väärtuste korral võrdsed. Seega iga $x_0 \in \mathbb{R}$ korral $k(2x_0 + 1) + l(x_0 - 2) = 0$ ehk $(2k + l)x_0 + k - 2l = 0$. Võttes $x_0 = 0$, saame $k = 2l$. Võttes $x_0 = 2$, saame $5k = 0$. Seega $k = l = 0$ ja süsteem on lineaarselt sõltumatu.

b) Kuna $c_1(x_0) - \sin^2 x_0 - \cos^2 x_0 = 1 - \sin^2 x_0 - \cos^2 x_0 = 0$ iga $x_0 \in \mathbb{R}$ korral, siis $1 \cdot c_1 + (-1)\sin^2 x + (-1)\cos^2 x = c_0$ ja vaadeldav süsteem on lineaarselt sõltuv.

c) Olgu $ke^x + le^{2x} + me^{3x} = c_0$. Kuna ühegi $x \in \mathbb{R}$ korral $e^x \neq 0$, siis võime võrduse mõlemaid pooli jagada funktsiooniga e^x ning saame, et

$k + le^x + me^{2x} = c_0$. Järelikult

$$0 = \lim_{x\to-\infty} c_0 = \lim_{x\to-\infty}(k + le^x + me^{2x}) = k.$$

Seega $le^x + me^{2x} = c_0$, kust saame, et $l + me^x = c_0$ ja

$$0 = \lim_{x\to-\infty}(l + me^x) = l.$$

Lõpuks, võttes $x = 0$ võrduses $me^x = c_0$ saame, et $m = 0$. Sellega oleme näidanud, et süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Vastus. Lineaarselt sõltumatud on süsteemid a) ja c).

Näide 11. *Tõestage, et hulk*

$$U = \{(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) \mid u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ *alamruum ning leidke selle alamruumi baas ja mõõde.*

Näitame, et hulk U on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum. Kuna

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, u_1) + (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1) = (u_1 + v_1, \ldots, u_{n-1} + v_{n-1}, u_1 + v_1) \in U,$$

sest viimase vektori esimene ja viimane komponent on võrdsed, siis U on kinnine liitmise suhtes. Kuna

$$k(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_{n-1}, ku_1) \in U,$$

siis U on kinnine ka reaalarvuga korrutamise suhtes. Seega U on alamruum.

Alamruumi U vektorite süsteem

$$\begin{array}{rcl} e_1 &=& (1, 0, 0, \ldots, 0, 1), \\ e_2 &=& (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \\ && \ldots \\ e_{n-1} &=& (0, 0, 0, \ldots, 1, 0) \end{array}$$

on lineaarselt sõltumatu, sest ükski vektor ei avaldu ülejäänute lineaarkombinatsioonina. Ta on ka moodustajate süsteem, sest alamruumi U iga vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) \in U$ avaldub kujul

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_{n-1} e_{n-1}.$$

Järelikult $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ on alamruumi U baas. Kuna vektorruumi mõõde on tema baasivektorite arv, siis $\dim U = n - 1$.

47. Olgu a vektor ja α skalaar. Tõestage, et $\alpha a = 0$ parajasti siis, kui $\alpha = 0$ või $a = 0$.

48. Olgu a, b vektorid ja α, β skalaarid. Tõestage, et $\alpha a + \beta b = \beta a + \alpha b$ parajasti siis, kui $\alpha = \beta$ või $a = b$.

49. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ tavaliste tehete suhtes arvudega: a) $\mathbb{N}$, b) $\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $\mathbb{R}$, e) $\mathbb{R}^+$?

50. Defineerime hulgal $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \\ k(a_1, \ldots, a_n) &= (ka_1, \ldots, ka_n), \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}$. Tõestada, et selliste (n.ö. komponenthaaval defineeritud) tehete suhtes on hulk $\mathbb{R}^n$ vektorruum üle $\mathbb{R}$.

51. Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ k(a_1, a_2) &= (ka_1, a_2), \end{aligned}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. Kas V on vektorruum üle $\mathbb{R}$?

52. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulga $\mathbb{R}^4$ alamhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ komponenthaaval defineeritud liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes:

a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$.

53. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ maatriksite tavalise liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes; jaatava vastuse korral leidke mingi baas:

a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk;

b) $\mathrm{Mat}(m, n)$;

c) $\mathrm{Mat}(2, 2)$;

d) $\mathrm{Mat}(n, 1)$;

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

f) kõigi n-ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk;

g) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk.

54. Olgu a, b, c vektorruumi V vektorid. Kui vektorid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorid $a+b$, $b+c$ ja $c+a$ on lineaarselt sõltumatud?

55. Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

56. Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleks lineaarselt sõltuvad?

57. Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V (üle $\mathbb{R}$) on lineaarselt sõltumatud:

a) $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$, $V = \mathbb{R}^3$;

b) $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}(2, 2)$.

58. Uurige, kas järgmised vektorite süsteemid (funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:

a) $x + 2$, $x - 2$;

b) $6x + 9$, $8x + 12$;

c) 1, $(x - 1)^2$, $x - 1$;

d) $4 - x$, $2x + 3$, $6x + 8$;

e) $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$;

f) $\sin x$, $\cos x$;

g) $\sin x, \cos x, \sin 2x$.

59. Milliste λ väärtuste korral järeldub vektorite süsteemi a_1, a_2 lineaarsest sõltumatusest vektorite süsteemi $\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2$ lineaarne sõltumatus?

60. Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$ a) baasist, b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas, c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas, d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.

61. Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorite $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suhtes.

62. Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leidke vektori $a = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:

a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$;

b) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1)$;

c) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (1, 4, 9)$.

63. On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ ja $e_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

64. Leidke üleminekumaatriks vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) baasilt $e_1, e_2, \ldots, e_n$ baasile $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ning leidke (kui võimalik) vektorite a ja b koordinaadid nende baaside suhtes, kui

a) $e_1 = \vec{i} - \vec{j}$, $e_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$, $e'_1 = 5\vec{i} - 2\vec{j}$, $e'_2 = -5\vec{i} - 4\vec{j}$, $a = 10\vec{i} - \vec{j}$, $b = 2\vec{i}$, $V = \mathbb{E}_2$ ning $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ on vektorruumi V fikseeritud baas;

b) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$e'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$a = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}(2, 2)$;

c) $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (2,3,3)$, $e_3 = (3,7,1)$, $e_1' = (3,1,4)$, $e_2' = (5,2,1)$, $e_3' = (1,1,-6)$, $a = (9,4,-1)$, $V = \mathbb{R}^3$.

65. Olgu e_1, e_2, e_3 3-mõõtmelise vektorruumi V baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e_1' = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e_2' = 2e_1 + 3e_2$, $e_3' = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.

66. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) alamruumid. Leidke iga alamruumi üks baas ja mõõde:

a) fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;

b) fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;

c) fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;

d) fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;

e) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}(2,2)$;

f) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathrm{Mat}(2,2)$;

g) n-ndat järku sümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \mathrm{Mat}(n,n)$;

h) n-ndat järku kaldsümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \mathrm{Mat}(n,n)$;

i) $\{(a,b,a,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^5$;

j) $\{(a,b,a,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}, a+b=2\}$, $V = \mathbb{R}^5$;

k) $\{(a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R}, a+e=b+d\}$, $V = \mathbb{R}^5$.

67. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas vektorruumil V on nullist erinevaid lõplikke alamruume?

5. Lineaarvõrrandisüsteemid

Näide 12. *Lahendage võrrandisüsteem*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Gaussi meetodil.

Moodustame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame ta astmelisele kujule jättes ära nullidest koosnevad read:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{8}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -5\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 0 & \frac{1}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right).$$

Näeme, et süsteem on lahenduv ja vabu tundmatuid on 2. Astmekohtade järgi valime sõltuvateks tundmatuteks x_1 ja x_3, seega vabadeks tundmatuteks jäävad x_2 ja x_4. Avaldades sõltuvad tundmatud vabade kaudu, saame üldlahendi vabade tundmatute kaudu:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{16}c_2 \\ x_2 & = & c_1 \\ x_3 & = & -\frac{11}{8}c_2 \\ x_4 & = & c_2 \end{array}\right. .$$

See tähendab, et süsteemi kõigi lahendite hulk on

$$L = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{16}c_2, c_1, -\frac{11}{8}c_2, c_2 \right) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Süsteemi (4) üheks erilahendiks on $d_* = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ (selle saame, kui anname arvudele c_1 ja c_2 väärtuseks 0). Süsteemile (4) vastava homogeense süsteemi lahendamisel saame üldlahendiks vabade tundmatute kaudu

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{16}c_2 \\ x_2 & = & c_1 \\ x_3 & = & -\frac{11}{8}c_2 \\ x_4 & = & c_2 \end{array}\right. . \tag{5}$$

Homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi saame kui anname vabadele tundmatutele x_2 ja x_4 kaks komplekti väärtusi mingi regulaarse teist järku ruutmaatriksi, nt. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, ridadest ning arvutame kummalgi juhul võrduste (5) abil sõltuvate tundmatute x_1 ja x_3 väärtused:

$$\begin{aligned} d_1 &= (3, \mathbf{2}, 0, \mathbf{0}), \\ d_2 &= (-1, \mathbf{0}, -22, \mathbf{16}). \end{aligned}$$

Süsteemi (4) kõik lahendid avalduvad kujul $d_* + t_1 d_1 + t_2 d_2$, kus $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, s.t.

$$L = \{d_* + t_1 d_1 + t_2 d_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Näide 13. *Lahendage võrrandisüsteem*

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \tag{6}$$

Näeme, et võrrandisüsteemi laiendatud maatriks on astmelisel kujul ning süsteem on lahenduv, kusjuures üldlahendis on üks sõltuv ja $4 - 1 = 3$ vaba tundmatut. Valime sõltuvaks tundmatuks näiteks x_3 ja avaldame ta vabade tundmatute kaudu

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2 + x_4.$$

Andes kõigile vabadele tundmatutele väärtuseks 0 saame süsteemi (6) ühe erilahendi $d_* = (0, 0, 1, 0)$. Süsteemile (6) vastava homogeense süsteemi

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \tag{7}$$

üldlahend avaldub kujul

$$\begin{cases} x_1 &= c_1 \\ x_2 &= c_2 \\ x_3 &= -2c_1 + c_2 + c_3 \\ x_4 &= c_3 \end{cases}.$$

Andes vabadele tundmatutele x_1, x_2, x_4 väärtusi 3. järku ühikmaatriksi ridadest saame leida homogeense süsteemi (7) lahendite fundamentaalsüsteemi 3 vektorit

$$\begin{aligned} d_1 &= (1, 0, -2, 0), \\ d_2 &= (0, 1, 1, 0), \\ d_3 &= (0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Seega süsteemi (6) kõigi lahendite hulk on

$$L = \{d_* + t_1 d_1 + t_2 d_2 + t_3 d_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Näide 14. *Leidke vektorruumi* $\mathbb{R}^4$ *vektori* $a = (2, 3, 3, -2)$ *koordinaadid baasi* $e_1 = (0, 0, 1, -1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 1)$, $e_3 = (1, -1, 0, -1)$, $e_4 = (1, 1, 0, 0)$ *suhtes.*

Tuleb leida reaalarvud x_1, x_2, x_3, x_4 nii, et $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$. Kirjutades $\mathbb{R}^4$ vektoreid $(4, 1)$-maatriksitena (kuid tehes tehteid endiselt komponenthaaval), võime viimase võrduse esitada kujul

$$x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

mis tähendab, et meil tuleb lahendada lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} \phantom{-x_1 + {}} \phantom{x_2 - {}} x_3 + x_4 = 2 \\ \phantom{-x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 \phantom{{} - x_3 + x_4} = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{} + x_4} = -2 \end{cases}.$$

Lahendame selle:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +\mathrm{III} \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}\mathrm{IV} \\ +\frac{2}{3}\mathrm{IV} \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right).$$

Vastus. Koordinaadid on $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Näide 15. *Teatud tingimustel segatakse tolueeni (C_7H_8) ja lämmastikhapet (HNO_3). Selle tulemusena tekivad trinitrotolueen ($C_7H_5O_6N_3$) ja vesi (H_2O). Millised lähteainete hulgad tuleks võtta, et tekiks antud saadus?*

Reaktsiooni kirjeldab võrrand

$$x \cdot C_7H_8 + y \cdot HNO_3 = z \cdot C_7H_5O_6N_3 + w \cdot H_2O.$$

Meil tuleb määrata kordajad x, y, z ja w. Võrreldes elementide C, H, N ja O aatomite arve võrrandi vasakul ja paremal poolel saame lineaarvõrrandid

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & & & = & 7z & & \\ 8x & + & 1y & = & 5z & + & 2w \\ & & 1y & = & 3z & & \\ & & 3y & = & 6z & + & 1w \end{array}\right. \quad \text{ehk} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & & & - & 7z & & & = & 0 \\ 8x & + & 1y & - & 5z & - & 2w & = & 0 \\ & & 1y & - & 3z & & & = & 0 \\ & & 3y & - & 6z & - & 1w & = & 0 \end{array}\right. .$$

Süsteemi lahendamisel saame üldlahendi $x = \frac{c}{3}, y = c, z = \frac{c}{3}, w = c$. Võttes näiteks $c = 3$ saame $x = 1, y = 3, z = 1, w = 3$.

Vastus. Ühe mooli tolueeni kohta tuleks võtta kolm mooli lämmastikhapet.

Näide 16. *Lahendage võrrandisüsteem*

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 11 \end{array}\right.$$

Crameri valemite abil.

Arvutame determinandid

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 24, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -24.$$

Neid kasutades saame arvutada

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-36}{-12} = 3, \ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{24}{-12} = -2, \ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-24}{-12} = 2.$$

Vastus. $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2$.

68. Tehke järgmiste lineaarvõrrandisüsteemide laiendatud maatriksite korral kindlaks, kas süsteem on lahenduv. Jaatava vastuse korral pange kirja süsteemi üldlahend.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$;

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$;

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$;

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$;

e) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$;

f) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

69. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Gaussi meetodil:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & 6 \end{array}\right.$;

b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & 5 \end{array}\right.$;

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & z & = & -4 \end{array}\right.$;

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 3z & = & 2 \end{array}\right.$;

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 9 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$;

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & - & 4z & = & 9 \\ -x & - & 12y & + & 14z & = & 1 \end{array}\right.$;

g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$;

h) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & + & 3x_5 & = & 6 \\ x_1 & + & 15x_2 & + & 6x_3 & - & 19x_4 & + & 9x_5 & = & 2 \end{array}\right.$;

i) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & 4x_5 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 7x_5 & = & -1 \end{array}\right.$.

70. Kasutades Gaussi meetodit leidke lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 12x_4 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \end{array}\right.$;

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -9x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 10x_4 & = & 3 \\ -6x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & 11x_3 & - & 15x_4 & = & 1 \end{array}\right.$;

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -9x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \\ -4x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$;

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 12x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & + & 10x_4 & = & 13 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \end{array}\right.$;

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -6x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \end{array}\right.$.

71. Leidke kõik tundmatute komplektid, mida võib valida vabadeks tundmatuteks:

a) $\left\{\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ \qquad\;\; 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 7 \\ 6x_1 & - & 9x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}\right.$.

72. Tehnikaülikooli üliõpilane Tatikas sooritas eksamid ainetes "Õlid ja määrded", "Mutrid ja poldid" ja "Kardaaniteooria" ning kogus 13 ainepunkti, üliõpilane Prussakov ainetes "Õlid ja määrded", "Kepsud ja kolvid", “Nukkvõllindus” ja “Kardaaniteooria” ning kogus 14 ainepunkti, üliõpilane Pliuhkam ainetes “Kepsud ja kolvid”, “Mutrid ja poldid”, ja “Nukkvõllindus” ning kogus 9 ainepunkti, üliõpilane Karlsson ainetes “Õlid ja määrded”, “Mutrid ja poldid” ja “Nukkvõllindus” ning kogus 12 ainepunkti. Mitu ainepunkti iga aine andis, kui on teada, et ükski aine ei andnud alla 2 ega üle 5 ainepunkti?

73. Milliste a reaalarvuliste väärtuste korral on lineaarvõrrandisüsteemil

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2+a)x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3+a)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

nullist erinevaid lahendeid?

74. Leidke homogeense lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja lahendite fundamentaalsüsteem:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} \phantom{-x_1 +{}} x_1 - x_3 = 0 \\ \phantom{-x_1 +{}} x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ - x_3 + x_5 = 0 \\ - x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

75. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Crameri valemite abil:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

76. Leidke reaalarvuliste kordajatega ruutpolünoom $f(x)$, kui

$$f(1) = 8,\ f(-1) = 2,\ f(2) = 14.$$

77. Lahendage maatriksvõrrand

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

6. Vektorid (koordinaatideta)

Näide 17. *Kolmnurga ABC raskuskeskmeks on punkt O. Tõestage, et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.*

Avaldame vektorid $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$ kolmnurga küljevektorite $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CA}$ kaudu. Selleks meenutame, et kolmnurga raskuskese asub kolmnurga küljepoolitajate lõikepunktis. Tähistagu K, L ja M vastavalt külgede BC, CA ja AB keskpunkte. Siis osutuvad lõigud AK, BL ja CM kolmnurga ABC küljepoolitajateks. Küljepoolitajate omaduse põhjal jaotab küljepoolitajate lõikepunkt O kõik küljepoolitajad lõikudeks, mille pikkused suhtuvad teineteisesse nagu 2 : 1, kusjuures pikem osa jääb kolmnurga tipu poole. Seega, $\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LB}$ ning $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC}$. Vastavalt vektorite liitmise kolmnurgareeglile saame vektorid $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{LB}$ ja $\overrightarrow{MC}$ avaldada järgmiselt:

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}.$$

Et K, L ja M on kolmnurga külgede keskpunktid, siis $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{LA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ ja $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Seetõttu saame vektorite liitmise ja arvuga korrutamise omadusi kasutades võrduse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{LB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{MC}) \\
&= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right] + \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right] + \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right]\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\left[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right]\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Viimastes võrdustes kasutasime taas vektorite liitmise kolmnurgareeglit. Kokkuvõttes olemegi näidanud, et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

78. On antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Konstrueerige järgmised vektorid:

a) $3\vec{a}$; b) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; c) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; d) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

79. On antud $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ ja $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Arvutage $|\vec{a} - \vec{b}|$.

80. On antud $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ ja $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Leidke $|\vec{a} + \vec{b}|$.

81. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on $\varphi = 120°$, kusjuures $|\vec{a}| = 3$ ja $|\vec{b}| = 5$. Leidke $|\vec{a} + \vec{b}|$ ja $|\vec{a} - \vec{b}|$.

82. Tõestage, et korrapärase kolmnurga keskpunkti tippudega ühendavate vektorite summa on nullvektor.

83. Kolm vektorit $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ on kolmnurga külgedeks. Esitage vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ abil kolmnurga mediaanidega ühtivad vektorid $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$ ja $\overrightarrow{CP}$.

84. Esitage ülesandes 83 antud kolmnurga mediaanid ainult kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonidena.

85. Tehke kindlaks, et vektorid, mis ühtivad mistahes kolmnurga mediaanidega, võivad omakorda olla teise kolmnurga külgedeks.

86. Punktist O lähtuvad kaks vektorit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Leidke nurga AOB poolitajal asuv vektor $\overrightarrow{OM}$.

87. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalvektoreiks on $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Avaldage rööpküliku külgvektorid $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu.

88. Korrapärase viisnurga $ABCDE$ külgedeks olevad vektorid on $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$ ja $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Konstrueerige vektorid:

a) $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$;

b) $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$;

c) $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

89. Korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ lähisküljedeks on vektorid $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ ja $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$. Avaldage selle kuusnurga külgedeks olevad vektorid $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ vektorite $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ kaudu.

90. On antud kolm paarikaupa ristuvat samas punktis rakendatud jõudu F, G ja H. Leidke resultantjõud R, kui $F = 2N$, $G = 10N$ ja $H = 11N$.

91. Rööptahukas $ABCDA'B'C'D'$ on antud külgservadeks olevad vektorid $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$. Konstrueerige vektorid:

a) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$;

b) $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$;

c) $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$.

92. Ringjoone raadiuste OA, OB ja OC vahelised nurgad on $120°$. Milline on vektor $\overrightarrow{XU}$, mis saadakse vektorite $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{ZU} = \overrightarrow{OC}$ järjestikkusel liitmisel?

93. On antud tetraeeder $ABCD$. Tõestage, et $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Kas see väide kehtib suvalise nelja punkti korral?

94. On antud vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ja $\vec{d} = \vec{c} + \vec{b}$, kusjuures vektorite $\vec{b}, \vec{c}$ ja $\vec{d}$ pikkused on võrdsed. Milline on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk?

95. Punktid E ja F on nelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD keskpunktid. Tõestage, et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

96. On antud kaks erinevat punkti A_1 ja A_2 ning ratsionaalarv k. Leidke selline punkt M, et vektorid $\overrightarrow{A_1M}$ ja $k\overrightarrow{A_2M}$ oleks a) võrdsed; b) teineteise vastandvektorid.

97. Punkt D jaotab kolmnurgas ABC külje AB suhtes $AD : DB = \lambda$. Leidke lõigu CD pikkus kolmnurga kolme külje ja arvu λ kaudu.

7. Vektorid (koordinaatidega)

Näide 18. *Olgu antud vektorid* $\vec{a} = (2, 3)$ *ja* $\vec{b} = (-1, 4)$. *Kontrollige, kas vektorsüsteem* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ *on vektorruumi* $\mathbf{E_2}$ *baasiks. Kui on, siis avaldage vektori* $\vec{c} = (4, 17)$ *koordinaadid baasil* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Teooriast teame, et vektorsüsteem $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ on vektorruumi $\mathbf{E_2}$ baasiks parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed.

Oletame vastuväiteliselt, et $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed. Et kumbki vektoritest ei ole nullvektor, siis peab leiduma selline reaalarv λ, et $\lambda\vec{a} = \vec{b}$. See aga tähendaks, et ka vektorite koordinaatide vahel peaks kehtima seos $(2\lambda, 3\lambda) = (-1, 4)$ ehk võrdused $2\lambda = -1$ ja $3\lambda = 4$ peaksid kehtima samaaegselt. Esimesest võrdusest saame $\lambda = -\frac{1}{2}$, kuid teisest hoopis $\lambda = \frac{4}{3}$. Vastuolu. Seega peavad $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ olema lineaarselt sõltumatud ning vektorsüsteem $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ on ruumi $\mathbf{E_2}$ baas.

Leiame nüüd vektori $\vec{c}$ koordinaadid baasil $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Olgu need μ ja ν. Siis $\vec{c} = \mu\vec{a} + \nu\vec{b}$ ehk koordinaatides

$$(4, 17) = \mu(2, 3) + \nu(-1, 4) = (2\mu, 3\mu) + (-\nu, 4\nu) = (2\mu - \nu, 3\mu + 4\nu).$$

Siin kasutasime vektorite liitmise ja arvuga korrutamise reegleid koordinaatkujul. Selle põhjal peavad vektorite võrdsuse definitsiooni kohaselt kehtima seosed $4 = 2\mu - \nu$ ja $17 = 3\mu + 4\nu$. Liidame teisele võrdusele neljakordse esimese võrduse, et saada seos μ leidmiseks. Saame $33 = 11\mu$. Siit $\mu = 3$ ning esimesest võrdusest $\nu = 2\mu - 4 = 2$. Seega $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Vastus. Vektori $\vec{c}$ koordinaadid baasil $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ on $(3, 2)$.

98. On antud kolm vektorit $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ ja $\vec{c} = (5, -2)$. Leidke vektorid

a) $2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$;

b) $\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$.

99. Esitage vektor $\vec{c}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonina, kui

a) $\vec{a} = (4, -2), \vec{b} = (3, 5), \vec{c} = (1, -7)$;

b) $\vec{a} = (5, 4), \vec{b} = (-3, 0), \vec{c} = (19, 8)$;

c) $\vec{a} = (-6, 2), \vec{b} = (4, 7), \vec{c} = (9, -3)$.

Millised on vektori $\vec{c}$ koordinaadid baasi $\vec{a}, \vec{b}$ suhtes?

100. Ruumis on antud vektorid $\vec{a} = (3, -2, 6)$ ja $\vec{b} = (-2, 1, 0)$. Leidke vektorid:

a) $\vec{a} + \vec{b}$;

b) $\vec{a} - \vec{b}$;

c) $2\vec{a}$;

d) $-\frac{1}{2}\vec{b}$;

e) $2\vec{a} + 3\vec{b}$;

f) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

101. Vektorid $\overrightarrow{AB} = (2, 6, -4)$ ja $\overrightarrow{AC} = (4, 2, -2)$ on kolmnurga ABC külgedeks. Leidke kolmnurga mediaanvektorite $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ ja $\overrightarrow{CP}$ koordinaadid.

102. Esitage vektor $\vec{d}$ vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$ lineaarkombinatsioonina, kui

a) $\vec{a} = (2, 3, 1), \vec{b} = (5, 7, 0), \vec{c} = (3, -2, 4), \vec{d} = (4, 12, -3)$;

b) $\vec{a} = (5, -2, 0), \vec{b} = (0, -3, 4), \vec{c} = (-6, 0, 1), \vec{d} = (25, -22, 16)$;

c) $\vec{a} = (3, 5, 6), \vec{b} = (2, -7, 1), \vec{c} = (12, 0, 6), \vec{d} = (0, 20, 18)$.

103. Olgu antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$. Valime vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AE}$ vektorruumi $\mathbb{E}_2$ baasivektoriteks. Leidke vektorite $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$ koordinaadid selle baasi suhtes.

8. Reeper ja punkti koordinaadid

Näide 19. *Kontrollige, kas punktid $A(-1, 4), B(2, 5), C(5, 2)$ ja $D(8, 3)$ osutuvad rööpküliku tippudeks.*

Tuletame meelde, et rööpkülikul on 2 paari omavahel võrdse pikkusega ja paraalleelseid külgi. See aga tähendab, et rööpküliku küljevektorite seas on 2 paari võrdseid vektoreid.

Leiame vektorite $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid. Teatavasti saadakse vektori koordinaadid tema alguspunkti koordinaatide lahutamisel tema lõpppunkti koordinaatidest. Seetõttu $\overrightarrow{AB} = (3, 1), \overrightarrow{BD} = (6, -2), \overrightarrow{CD} = (3, 1)$ ja $\overrightarrow{AC} = (6, -2)$. Näeme, et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ning $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, mis ütleb, et meil on tõesti tegemist rööpkülikuga $ABDC$. (Märgime, et näiteks $ABCD$ ei osutu rööpkülikuks.)

Vastus. Jah, osutuvad rööpküliku $ABDC$ tippudeks.

104. Leidke rööpküliku $ABCD$ tippude koordinaadid reeperi $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ suhtes.

105. Leidke punktidega $A(2,3), B(-3,2), C(-1,-1), D(-3,-5), E(-4,6),$ $F(a,b)$ sümmeetrilised punktid x-telje suhtes.

106. Leidke punktidega $A(-1,2), B(3,-1), C(-2,-2), D(-2,5), E(3,-5),$ $F(a,b)$ sümmeetrilised punktid y-telje suhtes.

107. Leidke punktidega $A(3,3)$, $B(2,-4)$, $C(-2,1)$, $D(5,-3)$, $E(-5,-4)$, $F(a,b)$ sümmeetrilised punktid koordinaatide alguspunkti suhtes.

108. Leidke vektori $\overrightarrow{AB} = (x,y)$ lõpp-punkti koordinaadid, kui

a) $x = 4, y = -2, A(1,2)$;

b) $x = -1, y = 3, A(-1,0)$;

c) $x = 0, y = -3, A(4,3)$.

109. On antud kaks punkti $A(3,7)$ ja $B(5,6)$. Leidke vektori $\overrightarrow{AB}$ ristprojektsioonid koordinaattelgedele.

110. Kontrollige, kas antud kolm punkti asetsevad ühel sirgel:

a) $A(0,5), B(2,1), C(-1,7)$;

b) $A(3,1), B(-2,-9), C(8,11)$;

c) $A(0,2), B(-1,5), C(3,4)$.

111. Näidake, et kolmnurk tippudega $A(6,5), B(1,10)$ ja $C(3,2)$ on täisnurkne.

112. Rööpküliku kolm tippu on

a) $A(4,2), B(5,7), C(-3,4)$;

b) $A(3,-5), B(5,-3), C(-1,3)$.

Leidke tipu B vastastipp D.

113. Kas kolmnurk tippudega $M_1(4,-1,4), M_2(0,7,-4), M_3(3,1,-2)$ on teravnurkne, täisnurkne või nürinurkne?

114. Kontrollige, kas punktid $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$ ja $D(3,-5,3)$ osutuvad trapetsi tippudeks.

115. Kaldreeperis, mille baasivektorite vaheline nurk on $\omega = \frac{\pi}{4}$, konstrueerige kolmnurk tippudega $A(3,5), B(-4,7), C(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2})$

116. Leidke kaldreeperis järgmiste punktide kaugus teineteisest:

a) $A(1,10), B(7,2), \omega = 60°$;

b) $A(0,-4), B(7,-2), \omega = 30°$;

c) $A(-5,4), B(-1,-5), \omega = 45°$;

d) $A(\frac{27}{5}, \frac{31}{5}), B(\frac{15}{2}, \frac{14}{5}), \omega = 120°$.

117. Horisontaalne latt, mille pikkus on $3m$ ja kaal $80N$, toetub otstega liikumatutele tugedele A ja B. Kui kaugele punktist A tuleb paigutada koormus 200N, et rõhk punktile B oleks 110N?

118. On antud trapetsi kolm järjestikust tippu $A(-2,-3), B(1,4), C(3,1)$. Leidke neljas tipp D tingimusel, et alus AD on viis korda pikem alusest BC.

119. Lõik otspunktidega $A(-1,8,3)$ ja $B(9,-7,-2)$ on jagatud punktidega C, D, E, F viieks võrdseks osaks. Leidke nende punktide koordinaadid.

120. Lõik A_0A_5 on jaotatud viieks võrdseks osaks, kusjuures jaotuspunktidest $A_1(3,-5,7)$ ja $A_4(-2,4,-8)$. Leidke A_0, A_2, A_3, A_5.

9. Skalaarkorrutamine

Näide 20. *Kolmnurga ABC tipud (koordinaatidega ristreeperis) on $A(2,3)$, $B(3,6)$ ja $C(0,7)$. Leidke tipu A juures olev nurk.*

Paneme tähele, et küsitav nurk on võrdne vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ vahelise nurgaga. Leiame kolmnurga ABC küljevektorid $\overrightarrow{AB} = (1,3)$ ja $\overrightarrow{AC} = (-2,4)$. Vastavalt vektorite skalaarkorrutise definitsioonile saame

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Ristreeperis saame vektorite skalaarkorrutise leida vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summana ning vektori pikkuse ruutjuurena vektori koordinaatide ruutude summast. Selle põhjal

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 10,$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}.$$

Avaldades otsitava nurga koosinuse skalaarkorrutise valemist, saame

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Järelikult on otsitav nurk $\frac{\pi}{4}$ ehk 45°.

Vastus. Tipu A juures olev nurk on $\frac{\pi}{4}$.

121. Leidke vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis, kui

a) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;

b) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

c) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

d) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

122. Leidke skalaarkorrutis $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$, kui $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ ja $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$, kus $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

123. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad $60°$. Leidke vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.

124. Milline on ühikvektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ on risti?

125. Võrdkülgse kolmnurga küljevektoriteks on ühikvektorid $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Leidke avaldis $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle$.

126. Kolmnurga ABC külgede pikkused on $BC = 5, CA = 6$ ja $AB = 7$. Leidke vektorite $\overrightarrow{BA}$ ja $\overrightarrow{BC}$ skalaarkorrutis.

127. Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$, mis mõjuvad $120°$ nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\vec{R}$ arvväärtus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}| = 7$ ja $|\vec{Q}| = 4$.

128. Leidke jõud, mis on võrdne viie komplanaarse, suuruselt võrdse ning samasse punkti rakendatud jõu resultandiga, kui nurk iga kahe järgneva jõu vahel on $72°$.

129. Leidke abstsissteljel punkt M, mille kaugus punktist $N(2, -3)$ on 5.

130. Leidke ordinaatteljel punkt M, mille kaugus punktist $N(-8, 13)$ on 17.

131. Leidke y-teljel punkt, mis asetseb punktist $(-8, -4)$ ja koordinaatide alguspunktist võrdsel kaugusel.

132. Leidke punkt, mille kaugus x-teljest ja punktist $A(-5, 2)$ on 10.

133. Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $(1, 1)$ ja $(3, 7)$ võrdsel kaugusel.

134. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x, y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest $A(7, -3)$ ja $B(-2, 1)$?

135. Leidke antud kolmest punktist $A(2, 2), B(-5, 1)$ ja $C(3, -5)$ võrdsel kaugusel asuva punkti koordinaadid.

136. On antud ruudu vastastipud $A(3,0)$ ja $C(-4,1)$. Leidke ruudu teised tipud.

137. Rombi vastastipud on $A(8,-3)$ ja $C(10,11)$ ning külje AB pikkus on 10. Leidke selle rombi ülejäänud tippude koordinaadid.

138. Rööpküliku $ABCD$ tipud on $A(3,-7), B(5,-7), C(-2,5)$ ning neljas tipp D asetseb tipu B vastas. Leidke selle rööpküliku diagonaalide pikkused.

139. Kolmnurga tipud on $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ ja $C(3,-2,1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

140. Kolm jõudu, $\vec{M}=(3,-4,2)$, $\vec{N}=(2,3,-5)$ ja $\vec{P}=(-3,-2,4)$, on rakendatud ühte punkti. Leidke nende jõudude resultantjõu poolt tehtud töö, kui see jõud paikneb ümber punktist $M_1(5,3,-7)$ mööda sirget punkti $M_2(4,-1,-4)$.

141. Tõestage, et kehtib samasus

$$\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\rangle+\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle=2(\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle).$$

Mis on selle samasuse geomeetriline tähendus?

142. Näidake, et vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindalaks on

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}\langle\vec{a},\vec{a}\rangle & \langle\vec{a},\vec{b}\rangle\\ \langle\vec{b},\vec{a}\rangle & \langle\vec{b},\vec{b}\rangle\end{vmatrix}}.$$

10. Vektorkorrutamine

Näide 21. *Olgu $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ paarikaupa ristuvate ühikvektorite parema käe kolmik ehk parema käe ristbaas vektorruumis $\mathbf{E}_3$. Leidke avaldise $\langle\vec{i}-(\vec{i}\times\vec{k}),\vec{i}\times\vec{j}\rangle$ väärtus.*

Et vektorkorrutamine on kaldsümmeetriline, siis $\vec{i}\times\vec{k}=-(\vec{k}\times\vec{i})$. Et $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ on paarikaupa ristuvate ühikvektorite parema käe kolmik, siis vastavalt vektorkorrutise definitsioonile saame, et $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. Seepärast $\langle\vec{i}-(\vec{i}\times\vec{k}),\vec{i}\times\vec{j}\rangle=\langle\vec{i}+\vec{j},\vec{k}\rangle=\langle\vec{i},\vec{k}\rangle+\langle\vec{j},\vec{k}\rangle$. Viimase võrduse saamiseks kasutasime skalaarkorrutamise omadust

$\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{c}\rangle+\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$ suvaliste tasandi- või ruumivektorite $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ korral.

Et vektorid $\vec{i}, \vec{j}$ ja $\vec{k}$ on paarikaupa risti, siis $\langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0, \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = 0$. Järelikult $\langle \vec{i} - (\vec{i} \times \vec{k}), \vec{i} \times \vec{j} \rangle = 0$.

Vastus. $\langle \vec{i} - (\vec{i} \times \vec{k}), \vec{i} \times \vec{j} \rangle = 0$.

143. Millisel α väärtusel on vektorid $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ja $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?

144. Millist tingimust peavad rahuldama vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$, et vektorid $\vec{x} + \vec{y}$ ja $\vec{x} - \vec{y}$ oleksid kollineaarsed?

145. On teada, et $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Leidke a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; b) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$; c) $|(3\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})|$.

146. On teada, et $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ ja $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -6$. Leidke $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

147. Leidke vektorite $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ poolt tekitatud kolmnurga pindala, kui $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.

148. On antud kolmnurga kaks külge $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ ja $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$. Leidke kolmnurga kõrgus $|\overrightarrow{CD}|$, kui $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ on ristuvad ühikvektorid.

149. Leidke vektoreile $\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$ ja $\overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ ja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$.

150. On antud punktid $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ ja $C(5, 2, 6)$. Leidke kolmnurga ABC pindala.

151. Kolmnurga tipud on $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ ja $C(1, 3, -1)$. Leidke tipust B küljele AC tõmmatud kõrguse pikkus.

152. Veenduge, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor.

153. Leidke vektor $\vec{x}$ teades, et ta on risti vektoritega $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ja $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ning rahuldab tingimust $\langle \vec{x}, (2, -3, 4) \rangle = 51$.

154. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ja $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ning moodustab vektoriga $\vec{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\vec{x}$ koordinaadid teades, et $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.

155. Lihtsustage korrutised $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{z}$ ja $\vec{z} \times \vec{x}$ teades, et ühikvektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ on paarikaupa risti ning moodustavad vasaku käe kolmiku.

156. Tõestage, et kui nullist erinevad vektorid $\vec{a}\times\vec{b}$ ja $\vec{c}\times\vec{d}$ on kollineaarsed, siis vektorid $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ on komplanaarsed.

157. Tõestage, et kui mittekollineaarsete vektorite $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ korral kehtivad võrdused $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$, siis $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Mis on selle väite geomeetriline sisu?

158. Uurige, kui palju võib võrrandil $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{x}$ olla lahendeid fikseeritud vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral.

11. Segakorrutamine

Näide 22. *Arvutage vektorite $\vec{a}=(2,3,-1),\vec{b}=(1,-4,3)$ ja $\vec{c}=(0,7,0)$ segakorrutis $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, kui vektorid $\vec{a},\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on antud oma koordinaatidega ristbaasis.*

Vastavalt segakorrutise arvutamise valemile ristbaasis, avaldub segakorrutis determinandina kujul

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}=-49.$$

Vastus. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-49.$

159. Leidke alljärgnevatele vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala:

a) $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$;

b) $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-2\vec{n},\ \vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, kus $|\vec{m}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{n}|=3$ ja $\angle(\vec{m},\vec{n})=135°$.

160. Tetraeedri tipud on $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ ja $D(4,1,3)$. Leidke tetraeedri ruumala.

161. Tetraeedri tipud on $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ ja $D(-5,-4,8)$. Leidke tipust D tõmmatud kõrgus.

162. Tetraeedri ruumala on $V=5$ ja kolm tippu asetsevad punktides $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ ja $C(2,-1,3)$. Leidke neljanda tipu D koordinaadid, kui ta asetseb y-teljel.

163. Tõestage, et neli punkti $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ ja $D(2,1,3)$ asetsevad samal tasandil.

164. On antud vektorid $\vec{a} = (8, 4, 1)$, $\vec{b} = (2, 2, 1)$ ja $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Leidke ühikvektor $\vec{d}$, mis moodustab vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ sama nurga, on risti vektoriga $\vec{c}$ ning on suunatud nii, et kolmikud $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ja $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ oleks sama orientatsiooniga, s.t. mõlemad on kas vasaku käe kolmikud või parema käe kolmikud.

165. On antud vektorid $\vec{a} = (11, 10, 2)$, $\vec{b} = (4, 0, 3)$. Leidke ühikvektor $\vec{c}$, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik.

166. Tõestage samasus $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{z}$.

167. Tõestage *Jacobi samasus*:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

12. Sirge võrrandid tasandil

Näide 23. *Koostage sirgega $t : 2x + 3y + 5 = 0$ ristuva ning sirgete $u : 3x - 5y + 11 = 0$ ja $v : x - y + 1 = 0$ lõikepunkti läbiva sirge s üldvõrrand.*

Et sirged s ja t on risti, siis võime sirge s sihivektoriks võtta sirge t normaalvektori $\vec{n} = (2, 3)$. Leiame sirgete u ka v lõikepunkti $P(q, r)$ koordinaadid. Et punkt P kuulub nii sirgele u kui ka sirgele v, siis peavad samaaegselt kehtima seosed $3q - 5r + 11 = 0$ ja $q - r + 1 = 0$. Viimasest võrrandist saame avaldada q kujul $q = r - 1$. Asendades q avaldise esimesse võrrandisse, saame $3r - 3 - 5r + 11 = 0$ ehk $8 - 2r = 0$, millest $r = 4$ ja $q = 4 - 1 = 3$. Seega sirge s kanooniline võrrand on $s : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3}$. Siit saame $s : 3(x - 3) = 2(y - 4)$ ehk sirge s üldvõrrandiks on $s : 3x - 2y - 1 = 0$.

Vastus. Sirge s üldvõrrand on $s : 3x - 2y - 1 = 0$.

168. Punktid $P_1(1, b)$ ja $P_2(a, -5)$ asetsevad sirgel $9x + 2y - 17 = 0$. Leidke tundmatute koordinaatide väärtused.

169. Leidke sirgega $s : 2x - 7y + 1 = 0$

a) paralleelse; b) ristuva

sirge tõus.

170. Leidke järgmiste sirgete võrrandid telglõikudes:

a) $5x + 3y - 15 = 0$;

b) $4x - 7y - 14 = 0$;

c) $3x - 2y + 9 = 0$;

d) $6x + 4y + 24 = 0$.

171. Punkti P läbiva sirge telglõigud on võrdsed. Koostage selle sirge võrrand, kui

a) $P(8, -3)$;

b) $P(-1, 4)$.

172. Leidke kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid, kui kolmnurga tipud on:

a) $A(3, 1), B(-1, 4), C(1, 9)$;

b) $D(1, 0), E(0, -3), F(1, 1)$;

c) $G(k, l), H(k - l, l), I(l, k + l)$.

173. Sirge läbib punkte $K(2, 3)$ ja $L(1, 4)$. Leidke sellel sirgel punkt, mille ordinaat on 7.

174. Leidke punkte $K(1, 3)$ ja $L(5, 6)$ läbival sirgel punkt, mille kaugus punktist $P(-6, 4)$ on 5.

175. Kontrollige, kas punktid $A(-2, -2), B(-3, 1), C(7, 7)$ ja $D(3, 1)$ on trapetsi tippudeks. Kui on, siis koostage trapetsi kesklõigu ja diagonaalide poolt määratud sirgete võrrandid.

176. Olgu antud punktid $P(2, -3)$ ja $Q(4, 1)$. Leidke abstsissteljel punkt R nii, et lõikude PR ja QR poolt määratud sirged oleksid teineteisega risti.

177. Koostage võrrandid sirgetele, mis läbivad kolmnurga tippe

a) $A(3, -3), B(2, -1), C(-4, 0)$;

b) $D(-1, 4), E(3, -2), F(0, 0)$.

ja on paralleelsed nende tippude vastaskülgedega.

178. Leidke sirge, mis läbib punkti $P(3, 1)$ ja moodustab sirgega $t : 2x + 3y - 1 = 0$ nurga $45°$.

179. Valguskiir levib mööda sirget $2x - 3y - 12 = 0$. Jõudnud abstsissteljeni, ta peegeldub. Leidke kiire peegeldumispunkt ning peegeldunud kiire võrrand.

180. Millise nurga all tuleks punktist $A(5, 2)$ suunata kiir x-teljeni, et peegeldunud kiir läbiks punkti $B(-1; 4)$?

181. Punktist $A(2, 3)$ lähtuv valguskiir peegeldub sirgelt $x + y + 1 = 0$. Peegeldunud kiir läbib punkti $B(1, 1)$. Koostage langeva ja peegeldunud kiire võrrandid.

182. Valguskiir levib mööda sirget $x - 2y + 5 = 0$ ning peegeldub sirgelt $3x - 2y + 7 = 0$. Koostage peegeldunud kiire võrrand.

183. Leidke sirgel $2x - y - 5 = 0$ punkt P nii, et tema kauguste summa punktideni $A(-7, 1)$, $B(-5, 5)$ oleks minimaalne.

184. Kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid on $x+y-4 = 0$, $3x-7y+8 = 0$ ja $4x-y-31 = 0$. Tehke kindlaks kas punkt $M(-3, 2)$ asetseb sees- või väljaspool kolmnurka.

185. Tõestage, et sirged $10x + 15y - 20 = 0$ ja $6x + 9y - 51 = 0$ on paralleelsed ning leidke nende sirgete vaheline kaugus.

186. Leidke punkti P läbiva ning punktidest A ja B võrdsel kaugusel oleva sirge võrrand, kui

a) $P(1, 2)$, $A(3, 3)$, $B(5, 2)$;

b) $P(-2, 3)$, $A(5, -1)$, $B(3, 7)$;

c) $P(1, 2)$, $A(2, 3)$, $B(4, -5)$.

187. Milliste kordaja a väärtuste korral on võrranditega $(a+1)x-2y-1 = 0$ ja $(2a - 1)x - ay + 14 = 0$ määratud sirged paralleelsed?

188. Leidke kolmnurga tipud kui kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid on

a) $5x - 3y - 15 = 0, x + 5y - 3 = 0, 3x + y + 5 = 0$;

b) $4x + 3y - 5 = 0, x - 3y + 10 = 0, x - 2 = 0$;

c) $y = 0, 5x + 2y - 10 = 0, 5x + 3y - 15 = 0$;

d) $x - 2y - 2 = 0, 3x - y - 6 = 0, x + y - 2 = 0$.

189. On antud esimese astme võrrand $\frac{12x-15}{6} + \frac{8y-7}{2} = 4$. Leidke selle võrrandiga määratud sirge

a) üldvõrrand;

b) taandatud võrrand;

c) kanooniline võrrand;

d) võrrand telglõikudes.

190. Võrdhaarse kolmnurga võrdsete nurkade tipud on $A(-7, 2)$ ja $B(3, 0)$ ning tema pindala on 26. Koostage kolmurga külgede võrrandid.

191. Koostage ruudu külgede poolt määratud sirgete võrrandid, kui on antud üks tipp $A(3, 5)$ ja diagonaalide lõikepunkt $M(5, 7)$.

192. Leidke sirgel $s : x - 3y + 1 = 0$ punkt, mis oleks võrdsetel kaugustel punktidest $A(-3, 1)$ ja $B(5, 4)$.

193. Punktides $A(7, 1\frac{1}{2})$, $B(6, 7)$ ja $C(2, 4)$ asetsevad vastavalt raskused $60g$, $100g$ ja $40g$. Määrake selle süsteemi raskuskeskme koordinaadid.

13. Tasandi võrrandid

Näide 24. *Leidke tasandite* $\pi_1 : 2x+3y-4z+5 = 0$ *ja* $\pi_2 : 7x+y-2z-5 = 0$ *lõikesirgega ristuva ning punkti* $A(3, -2, 5)$ *läbiva tasandi* π *võrrand.*

Et ülesande tekstis ei ole täpsustatud, millist tasandi võrrandi kuju meilt tahetakse, võime ise valida, millise tasandi võrranditüüpidest me kirja paneme. Leiame näiteks tasandi π üldvõrrandi. Et π on risti tasandite π_1 ja π_2 lõikesirgega s, siis on ka tasandite lõikesirge s sihivektor $\vec{s}$ risti tasandiga π. Seetõttu võime tasandi π normaalvektoriks võtta vektori $\vec{s}$. Et tasandite π_1 ja π_2 lõikesirge asub samaaegselt mõlemal tasandil (et tasandid ei ole paralleelsed, siis on see võimalik), siis on lõikesirge sihivektor risti mõlema tasandi normaalvektoriga $\vec{n}_1$ ja $\vec{n}_2$. Et sirge sihivektor on määratud kordaja täpsusega ning et vektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ on risti vektoritega $\vec{n}_1$ ja $\vec{n}_2$, siis võime vektoriks $\vec{s}$ valida just vektori $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-2, -24, -19)$. Järelikult on tasandi π üldvõrrand kujul $\pi : -2x - 24y - 19z + D = 0$. Konstandi D saame leida, asetades punkti A koordinaadid tasandi π võrrandisse. Et A asub tasandil π, peab kehtima võrdus $-2 \cdot 3 - 24 \cdot (-2) - 19 \cdot 5 + D = 0$, millest saame, et $D = 53$ ning tasandi π üldvõrrandiks on $\pi : -2x - 24y - 19z + 53 = 0$ ehk $\pi : 2x + 24y + 19z - 53 = 0$.

Vastus. Tasandi π üldvõrrand on $\pi : 2x + 24y + 19z - 53 = 0$.

194. Kontrollige, kas tasand $\pi : 2x+3y-4z+7 = 0$ läbib järgmisi punkte: $A(1, 1, 3)$, $B(2, -2, 2)$, $C(0, 3, 7)$, $D(-7, 1, -1)$, $E(0, -5, -2)$.

195. Leidke tasandi üldvõrrand, kui tema parameetrilised võrrandid on:

a) $x = 3 + t_1$, $y = 1 - 2t_1 + 4t_2$, $z = 7 + 3t_1 + 7t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

b) $x = 1 + 2t_1 + 3t_2,\ y = 3 + 3t_1 - 4t_2,\ z = 2 - t_1 + 2t_2,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

196. Leidke tasandi võrrand, kui tasandil asuvad

a) x-telg ja punkt $A(2, -1, 3)$;

b) y-telg ja punkt $B(-3, 4, 2)$;

c) z-telg ja punkt $C(8, -2, 5)$.

197. Leidke tasandi võrrand, kui tasand

a) on paralleelne x-teljega ning läbib punkte $A(3, -1, 1)$ ja $B(4, -6, -1)$;

b) on paralleelne y-teljega ning läbib punkte $C(3, 4, 0)$ ja $D(7, 5, -3)$;

c) on paralleelne z-teljega ning läbib punkte $E(-1, -2, -3)$ ja $F(1, 3, 4)$.

198. Leidke tasandi võrrand, kui tasand

a) on paralleelne xy-tasandiga ning läbib punkti $A(13, 21, 1)$;

b) on paralleelne yz-tasandiga ning läbib punkti $B(-3, 4, 10)$;

c) on paralleelne xz-tasandiga ning läbib punkti $C(-7, 2, -4)$.

199. Leidke tasandi telglõigud:

a) $6x - 2y + 3z - 24 = 0$;

b) $2x - 8y - z + 16 = 0$;

c) $30x - 3y + 5z - 15 = 0$;

d) $13x - 4y + 7z = 0$.

200. Koostage tasandi võrrand, kui tasand läbib punkti $P(1, -1, 1)$ ning moodustab x- ja z-teljega telglõigud -2 ja $1\frac{1}{2}$.

201. Koostage tasandi võrrand, kui tasand läbib kolme antud punkti:

a) $A(0, 0, 0),\ B(1, 4, 0),\ C(3, -2, 1)$;

b) $D(-3, 6, -7),\ E(-1, 7, -6),\ F(-7, 3, -8)$;

c) $G(3, -1, 2),\ H(4, -1, -1),\ I(2, 0, 2)$;

d) $J(1, 2, 1),\ K(-2, 1, 2),\ L(-2, -1, 3)$.

202. Koostage tasandi võrrand, kui on teada, et tasand on risti vektoriga

a) $\vec{n} = (2, 3, -5)$ ning tasandi aplikaatlõik on 6;

b) $\vec{n} = (-1, 4, 7)$ ning tasandi ordinaatlõik on 3;

c) $\vec{n} = (4, -1, -3)$ ning tasandi abstsisslõik on -5.

203. Koostage tasandi võrrand, kui reeperi alguspunkti projektsioon otsitavale tasandile on punkt

a) $A(3, -2, 4)$; b) $B(-2, 5, 1)$; c) $C(4, 7, -11)$.

204. Leidke tasand, mis läbib reeperi alguspunkti ning on paralleelne tasandiga $3x - 6y + 7z - 33 = 0$.

205. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad:

a) $\pi_1 : -2x + 4y - z + 5 = 0$, $\pi_2 : 7x + 3y - 2z + 1 = 0$;

b) xz-tasand ja $\pi : 3y - 3z + 5 = 0$;

c) $\pi_1 : 6x - 3y + 12z - 23 = 0$, $\pi_2 : 10x - 5y + 20z - 1 = 0$;

d) $\pi_1 : 2x + y - \sqrt{5}z - 3 = 0$, $\pi_2 : 3x - y + 7 = 0$.

206. Leidke punkti P kaugus tasandist π, kui

a) $P(1, 2, 1)$ ja $\pi : x + 2y + 2z - 10 = 0$;

b) P on reeperi alguspunkt ja $\pi : 15x - 10y + 6z - 190 = 0$;

c) $P(2, 0, -\frac{1}{2})$ ja $\pi : 4x - 4y + 2z + 17 = 0$;

d) $P(4, 3, -2)$ ja $\pi : 3x - y + 5z + 1 = 0$.

207. Leidke tasandiga $x+2y-2z+7 = 0$ paralleelse ja punktist $M(4, 3, -2)$ seitsme ühiku kaugusel asetseva tasandi võrrand.

208. Tehke kindlaks, kas punkt $P(2, -1, 1)$ ja reeperi alguspunkt asuvad järgmisest tasandist samal pool või asub teine teisel pool.

a) $5x - 3y + z - 18 = 0$;

b) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$;

c) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$;

d) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$.

209. Tõestage, et tasand $\pi : 3x - 4y + 2z + 5 = 0$ lõikab punkte $A(3, -2, 1)$ ja $B(-2, 5 - 2)$ ühendavat lõiku.

210. Tetraeedri tipud on $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$ ja $D(0, -7, 8)$. Leidke külgserva CD keskpunkti ning külgserva AB läbiva tasandi võrrand.

14. Sirge ja tasand ruumis

Näide 25. *Koostage tasandi π võrrand, kui on teada, et π läbib punkti $A(3,-4,-5)$ ning et sirge $s: \frac{x-4}{6} = \frac{2y+6}{8} = 9 - z$ asub tasandil π.*

Esimese sammuna teisendame sirge s võrrandi tema kanooniliseks võrrandiks $s: \frac{x-4}{6} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-9}{-1}$. Et sirge s asub tasandil π, siis asub tasandil π ka punkt $B(4,-3,9)$ ning vektor $\vec{s} = (6,4,-1)$ on tasandi π rihis. Tasandi π normaalvektoriks $\vec{n}$ võime seega võtta kahe tasandi π rihis oleva vektori $\vec{s}$ ja $\overrightarrow{AB} = (1,1,14)$ vektorkorrutise $\vec{n} = \vec{s} \times \overrightarrow{AB} = (57,-85,2)$. Tasandi π üldvõrrand on seega kujul $\pi: 57x - 85y + 2z + D = 0$. Parameetri D määramiseks asendame punkti A koordinaadid tasandi π võrrandisse. Saame $57 \cdot 3 + 85 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + D = 0$ ehk $D = -501$. Tasandi π üldvõrrandiks on järelikult $\pi: 57x - 85y + 2z - 501 = 0$.

Vastus. Tasandi π üldvõrrand on $\pi: 57x - 85y + 2z - 501 = 0$.

211. Olgu kolmnurga tipud $A(2,1,3)$, $B(-1,4,5)$ ja $C(0,2,-6)$. Koostage kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

212. Koostage tetraeedri servade poolt määratud sirgete võrrandid, kui tetraeedri tipud on $A(1,2,3)$, $B(3,-2,5)$, $C(-2,3,-4)$ ja $D(-4,7,1)$.

213. Millise vabaliikme väärtuse D korral lõikab sirge

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 &= 0 \\ x + 4y - z + D &= 0 \end{cases}$$

x-telge?

214. Koostage sirge kanooniline võrrand, kui see sirge läbib punkti $P(-3,4,-7)$ ja on paralleelne

a) x-teljega;

b) vektoriga $\vec{v} = (3,-2,4)$;

c) sirgega $s: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{8}$;

d) z-teljega.

215. Koostage sirge parameetrilised võrrandid, kui sirge läbib punkte:

a) $A(3,2,-4)$ ja $B(-11,5,3)$;

b) $C(1,-3,8)$ ja $D(-4,-5,0)$;

c) $E(1,3,6)$ ja $F(0,0,2)$;

d) $O(0,0,0)$ ja $P(1,1,1)$.

216. On antud kolmnurga tipud $A(3,6,-7)$, $B(-5,2,3)$ ja $C(4,-7,-2)$. Koostage tippu C läbiva mediaani poolt määratud sirge parameetrilised võrrandid.

217. Koostage järgmiste sirgete kanoonilised võrrandid:

a) $\begin{cases} x-2y+3z-4 &= 0 \\ 3x+2y-5z-4 &= 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9 &= 0 \\ x-2y+z+3 &= 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 5x+y+z &= 0 \\ 2x+3y-2z+5 &= 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+2y-z+1 &= 0 \\ 2x-y-2z-3 &= 0 \end{cases}$.

218. Koostage sirge kanooniline võrrand, kui sirge läbib punkti $P(2,3,4)$ ja on paralleelne sirgega

$$\begin{cases} 3x+7y-2z+4 &= 0 \\ 2x-6y+7z-13 &= 0 \end{cases}$$

219. Arvutage punkti kaugus sirgest:

a) $P(7,9,7)$ ja $p: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$;

b) $Q(1,3,5)$ ja $q: \begin{cases} 2x+y+z-1 &= 0 \\ 3x+y+2z-3 &= 0 \end{cases}$;

c) $R(1,2,5)$ ja $r:\ x=t,\ y=-2t+1,\ z=t+3,\ t\in\mathbb{R}$.

220. Koostage antud punkti läbiva ja antud sirgetega paralleelse tasandi võrrand, kui

a) $A(-1,-2,3)$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z-5}{6}$, $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-8}$;

b) $B(-3,-8,0)$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{0}$, $\begin{cases} 2x-2y+2z-7 &= 0 \\ x+9y-11z &= 0 \end{cases}$.

221. Koostage paralleelseid sirgeid $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ ja $t: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{3}$ läbiva tasandi võrrand.

222. Määrake sirge ja tasandi vastastikune asend. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke nende lõikepunkt:

a) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $3x+5y-z-2=0$;

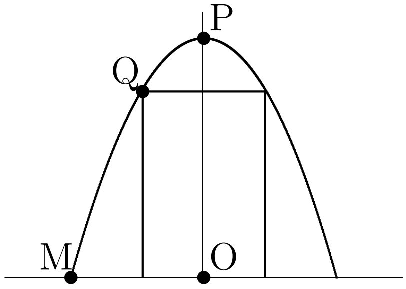
b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$;

c) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 &= 0 \\ 2x - y + z - 6 &= 0 \end{cases}$, $5x - z - 4 = 0$;

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 &= 0 \\ 5x + 3y + z - 16 &= 0 \end{cases}$, $2x - y - 4z - 24 = 0$.

15. Ellips, hüperbool, parabool

Näide 26. *Kalju sisse tahetakse rajada poolellipsi kujulise ristlõikega tunnel, mille suurim kõrgus oleks võrdne tema laiusega maapinnal. Tunnel peab olema selline, et temast mahuks läbi 2 meetri laiune ja 4 meetri kõrgune sõiduk. Milline on tunneli minimaalne võimalik kõrgus täissentimeetrites?*



Ülesande tingimuste kohaselt $OP = 2OM$ (vaata joonist), mis tähendab, et ellipsi pikem pooltelg on kaks korda pikem kui lühem pooltelg. Tähistades lühema pooltelje $OM = b$, saame ellipsi võrrandiks tema kanoonilises reeperis $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Paneme tähele, et punkti Q koordinaadid on $(4, 1)$. Et punkt Q asub ellipsil, siis peab kehtima seos $\frac{16}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, milles saame, et $b = \sqrt{5}$. Seega vähim võimalik tunneli kõrgus (lõigu OP pikkus) on $2\sqrt{5}$ meetrit. Et $4,47 < 2\sqrt{5} < 4,48$, siis peab tunnel olema vähemalt 448 cm kõrgune.

Vastus. Tunneli minimaalne kõrgus on 448 cm.

223. Milliseks teiseneb ringjoone $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 51 = 0$ võrrand, kui reeperi alguspunkt kanda ringjoone keskpunkti?

224. Leidke ellipsi pooltelgede pikkused, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus, kui ellips on antud võrrandiga

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$;

b) $9x^2 + y^2 = 36$.

225. Koostage ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

a) fookuste vaheline kaugus on 8 ja suur telg on 10;

b) suurem pooltelg on 10 ja ekstsentrilisus on $0,8$;

c) fookuste vaheline kaugus on $4\sqrt{5}$ ja pooltelgede summa on 10;

d) juhtsirgete vaheline kaugus on 13 ja väike telg on 6.

226. Leidke ellipsil $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ punktid, mis asuvad viie ühiku kaugusel ellipsi lühemast teljest.

227. Leidke antud hüperbooli pooltelјed, fookuste koordinaadid, ekstsentrilisus ja fokaalparameeter:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$;

b) $4x^2 - 9y^2 = 36$;

c) $3x^2 - y^2 = 12$;

d) $-6x^2 + 10y^2 = 60$.

228. Koostage hüperbooli võrrand, võttes reaalteljeks x-telje, imaginaarteljeks y-telje ning teades kahte parameetrit:

a) $a = 8,\ e = 1,25$;

b) $c = 2,\ e = 2$;

229. Määrake punkti $M(x, y)$ trajektoor, kui ta jääb oma liikumisel sirgele $x = 1$ kaks korda lähemale kui punktile $F(4, 0)$.

230. Määrake hüperbooli $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{20} = 1$ ja parabooli $y^2 = 3x$ lõikepunktid.

231. Koostage parabooli võrrand, kui parabooli tipp asetseb reeperi alguspunktis ning

a) parabool on sümmeetriline x-telje suhtes ja läbib punkti $A(9, 6)$;

b) parabool on sümmeetriline y-telje suhtes ja läbib punkti $B(4, -8)$;

c) parabool on sümmeetriline x-telje suhtes ja parabooli fookuse kaugus tipust on 3 pikkusühikut;

d) parabool on sümmeetriline y-telje suhtes ja parabooli fookus asetseb punktis $F(0, 2)$.

Vastused

1. a) $m=3, n=2$; b) $m=2, n=3$; c) $m=2, n=2$; d) $m=2, n=2$; e) $m=3,\ n=3$; f) $m=3,\ n=4$; g) $m=3,\ n=45$; h) $m=5,\ n=1$; i) $m=1,\ n=5$. **3.** a) C, D, E; b) C, E; c) E; d) C, E; e) mitte ükski. **4.** a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 6 & 16 & 30 \\ 12 & 30 & 54 \end{pmatrix}$. **5.** a) ei ole võimalik; b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; e) (76); f) $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 25 & 39 \end{pmatrix}$; g) ei ole võimalik; h) ei ole võimalik; i) $(-28\ \ 6\ \ -25\ \ -16\ \ -18)$; j) $\begin{pmatrix} -5 & 14 & 33 \\ -2 & 16 & 34 \\ -3 & 22 & 47 \end{pmatrix}$; k) ei ole võimalik; l) $\begin{pmatrix} -15 & -33 \\ -20 & -31 \end{pmatrix}$. **6.** a) $A+B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} -12 & 23 & -1 \\ -6 & 29 & 2 \\ -16 & 35 & -2 \end{pmatrix}$; b) $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$, $AB=\Theta$, $BA=\begin{pmatrix} 17 & -7 & -10 \\ 17 & -7 & -10 \\ 17 & -7 & -10 \end{pmatrix}$; c) $AB=(\,13\ \ 8\,)$; d) $AB=(\,19\,)$, $BA=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ -2 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix}$; e) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $AB=\Theta$, $BA=A$; f) $A+B=\begin{pmatrix} 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -2\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$, $AB=BA=E$. **7.** a) $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 9 & 5 \\ 8 & 5 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -5 & -9 & -3 & -13 \\ -2 & -9 & 0 & -8 \\ 2 & -7 & -7 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} -17 & -26 & -12 & -35 \\ -9 & -25 & -4 & -21 \\ 1 & -18 & -19 & -16 \\ 0 & -9 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$. **8.** a) $AB = \Theta$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; b) $AB = (-11)$, $BA = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 12 \\ 10 & -2 & 8 \\ -30 & 6 & -24 \end{pmatrix}$; c) $AB = \begin{pmatrix} 8 & -14 \\ 26 & -35 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 21 & -27 \end{pmatrix}$. **9.** a) $AB = BA = A$; b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3a & -2 \\ 4 & 5a & 2 \\ -6 & 7a & 8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4a & 5a & 2a \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3b-2 \\ 4 & 5 & 5b+2 \\ -6 & 7 & 7b+8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4-6b & 5+7b & 2+8b \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; d) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; e) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **10.** a) $\begin{pmatrix} -16 & -6 \\ -2 & 24 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 28 & -10 \\ -43 & 87 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -15 & 11 & 5 \\ -12 & 5 & 6 \\ -17 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 27 & 22 & -16 \\ 25 & 11 & -14 \\ 61 & 46 & -38 \end{pmatrix}$; e) $(26\ -4\ 8\ 56)$; f) $\begin{pmatrix} 63 \\ 156 \\ 753 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \\ 10 & 17 & 19 & 23 \end{pmatrix}$; h) Θ. **11.** $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 30 & 16 & -38 \\ -33 & 136 & 19 \\ 93 & -9 & -96 \end{pmatrix}$. **12.** $BA = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 28 & 19 \\ 38 & 25 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 8 \\ 23 & 9 & 12 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 13 & -6 & 12 \\ 37 & 13 & 20 \\ 51 & 17 & 28 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} 38 & 21 \\ 21 & 16 \end{pmatrix}$, $CBA = \begin{pmatrix} 139 & 46 \\ 90 & 43 \end{pmatrix}$. **13.** a) $\begin{pmatrix} -37 & 54 \\ 81 & -118 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -39 & 22 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 34 & -7 \\ 35 & -8 \end{pmatrix}$; d) Θ; e) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$; f) $7E$.

14. a) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$; b) Θ; c) Θ; d) $\begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$. **15.** a) i-s rida ja j-s rida vahetavad kohad; b) i-ndale reale liidetakse c-kordne j-s rida; c) i-s veerg ja j-s veerg vahetavad kohad; d) i-ndale veerule liidetakse c-kordne j-s veerg. **16.** Θ, E, $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$, kus $k \in \mathbb{R}$ ja $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & -a+1 \end{pmatrix}$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. **17.** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. **18.** E . **23.** a) 7; b) 15; c) 7; d) 15; e) 9; f) 22; g) 14; h) 18; i) 10; j) 18; k) 36. **24.** $4,2,1,3$; $4,1,3,2$; $3,4,1,2$; $3,2,4,1$; $2,4,3,1$. **25.** a) Kuulub märgiga $+$; b) kuulub märgiga $-$; c) ei kuulu; d) ei kuulu. **26.** a) 0; b) 0; c) 16. **27.** x^4, x^2, $6x^2$, $15x^2$, $3x^2$, $2x^2$. **28.** a) $4a-c-d$; b) $2a-b-c-d$; c) $-5a-5b-5c-5d$; d) $2a-8b+c+5d$. **29.** a) $2b-a$; b) -100; c) 1000; d) -1; e) 1; f) 0; g) -28; h) 3750; i) 0; j) $(b-a)(c-a)(c-b)$; k) 297; l) 900; m) 81; n) 12; o) -32; p) 0; q) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$; r) 0; s) -22; t) 240; u) 2; v) -18016. **30.** a) 30; b) -30; c) 100; d) -2. **31.** a) $n+1$; b) $9-2^{n+1}$; c) $2n+1$. **32.** a) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; c) $t_{1,2} = \pm 1$, $t_{3,4} = \pm 2$; d) $t_1 = 0$, $t_2 = -1$. **33.** 6. **35.** $|-A| = (-1)^n|A|$. **36.** Uus determinant võrdub nulliga. **37.** Determinant ei muutu. **38.** a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; c) ei leidu; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
39. a) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, kui $ad - bc \neq 0$; c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; d) ei leidu; e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; i) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **40.** a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$,

$(5A)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 20 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$,

$(-3A)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. **41.** a) $\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\right\}$; b) $\left\{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$;

c) $\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$; d) $\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}\right\}$; e) $\left\{(1 \quad 1 \quad 1)^T\right\}$;

f) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$; g) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. **42.** Jah, kui $\det A \neq 0$.
43. a) $-A+4E$; b) $A^2+5A-3E$; c) $A = E = A^{-1}$. **49.** d). **51.** Ei. **52.** a), c) ja d). **53.** a), f) ja g) ei ole. **54.** Jah. **55.** $k^3-2k=0$. **56.** $(k-l)(k-m)(l-m)=0$.
58. b) $4(6x+9)-3(8x+12)=0$; d) $2(4-x)-32(2x+3)+11(6x+8)=0$.
59. $\lambda \neq \pm 1$. **61.** $A=(3,4,-2), B=(2,5,0)$. **62.** a) $(3,7,13)$; b) $(-4,-6,13)$; c) $(1,1,1)$. **63.** $(-3x_1-8x_2-5x_3, 2x_1+5x_2+3x_3, x_1+x_2+x_3)$, $(1,1,1)$.
64. a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $a = 4e_1+3e_2$, $a = \frac{3}{2}e_1'-\frac{1}{2}e_2'$, $b = \frac{2}{3}(e_1+e_2)$, $b = \frac{2}{15}(2e_1'-e_2')$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a = 2e_1+4e_2+5e_3-3e_4$, $a = 5e_1'+2e_2'-8e_3'+3e_4'$,

$b \notin V$; c) $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $a = -139e_1+38e_2+24e_3$, $a = e_1'+e_2'+e_3'$.

65. $a = (-13, 6, -27)$. **66.** a) $\vec{n} \neq \vec{0}$ ja $\vec{n}$ on risti antud tasandiga, 1; b) kaks antud tasandiga paralleelset ja mittekollineaarset vektorit, 2; c) kaks antud sirgega ortogonaalset ja mittekollineaarset vektorit, 2; d) $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{a}$ on paralleelne antud sirgega, 1; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 2; g) $E_{ij} + E_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; $\frac{1}{2}(n+1)n$; h) $E_{ij} - E_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$; $\frac{1}{2}(n-1)n$; i) $(1,0,1,0,1), (0,1,0,1,0)$, 2; k) $(1,0,0,0,-1), (0,1,0,0,1)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,1)$, 4. **67.** Ei. **68.** a) $\{(1,2)\}$; b) $\{(0,0,0)\}$; c) $\emptyset$; d) $\{(3,2,2)\}$; e) $\{(1+\frac{3}{2}c, c, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \mid c \in \mathbb{R}\}$;
f) $\{(c_1, 1-2c_1-3c_2-2c_3-4c_4, c_2, c_3, c_4) \mid c_1, c_2, c_4, c_4 \in \mathbb{R}\}$.
69. a) $\{(3+2c, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$; b) $\emptyset$; c) $\{(c, 1-4c, -3-7c) \mid c \in \mathbb{R}\}$; d) $\emptyset$; e) $\{(1,0,2)\}$; f) $\{(\frac{13}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{10}{3})\}$; g) $\{(1,0,-1,2)\}$; h) $\emptyset$; i) $\{(1+\frac{1}{32}(47c_1-38c_2), 1+\frac{1}{4}(-7c_1+6c_2), \frac{1}{32}(-21c_1-30c_2), c_1, c_2) | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
70. a) $\{(c_1, c_2, (c_1-9c_2-2)/11, (-5c_1+c_2+10)/11) | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(0,1,-1,1)$; b) $\{(c_1, c_2, -33c_1+22c_2-11, 24c_1-16c_2+8) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(-1,-1,0,0)$; c) $\emptyset$; d) $\{(c_1, c_2, 1-4c_1-3c_2, 1) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(1,-1,0,1)$; e) $\{(c_1, c_2, 6+10c_1-15c_2, -7-12c_1+18c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(1,1,1,-1)$.
71. a) (x_3, x_4); (x_2, x_4); (x_2, x_3); b) x_2; x_1. **72.** "Õlid ja määrded" 5, "Kepsud ja kolvid" 2, "Mutrid ja poldid" 4, "Nukkvõllindus" 3 ja "Kardaaniteooria" 4 ainepunkti. **73.** a) $-2, 1$; b) $-1, 0, 1$. **74.** a) $\{(c_1, c_1) \mid c_1 \in \mathbb{R}\}$, $(1,1)$; b) $\{(0, c_1, c_1) \mid c_1 \in \mathbb{R}\}$, $(0,1,1)$; c) $\{(0,0,0)\}$, ei leidu; d) $\{(0,0,0,0)\}$, ei leidu; e) $\{(8c_1-7c_2, -6c_1+5c_2, c_1, c_2) | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$, $(8,-6,1,0), (-7,5,0,1)$; f) $\{(0,0,0,0,0,0)\}$, ei leidu; g) $\{(c_1-c_2, c_1-c_3, c_1, c_1, c_2, c_3) | c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$, $(1,1,1,1,0,0)$, $(-1,0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0,1)$. **75.** a) $(0,-3,6)$; b) $(3,2,1)$. **76.** x^2+3x+4. **77.** $\left\{\begin{pmatrix} 2+b-2c+2d & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$. **79.** 22.
80. 20. **81.** $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. **83.** $\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$ või $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$ või $\overrightarrow{BN} = \frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$; $\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$ või $\overrightarrow{CP} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.
84. $\overrightarrow{AM} = -\left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right)$; $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. **85.** Näpunäide: kui kehtib seos $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, on kolm vektorit $\pm\vec{a}, \pm\vec{b}$ ja $\pm\vec{c}$, sõltumata sellest, kas mingi vektori ees on $+$ või $-$, mingi kolmnurga külgedeks.
86. $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. **87.** $\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.
89. $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + \vec{q}$; $\overrightarrow{CD} = \vec{q}$; $\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{p} - \vec{q}$. **90.** $|\vec{R}| = 15$.
92. $\vec{0}$. **94.** $150°$. **96.** a) kui $k = 1$, siis sellist punkti ei leidu. Kui $k \neq 1$, siis määratakse punkt M seosega

$\overrightarrow{A_1M} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{A_1A_2}$; b) Kui $k = -1$, siis sellist punkti ei leidu. Kui $k \neq -1$, siis määratakse punkt M seosega $\overrightarrow{A_1M} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{A_1A_2}$. **97.** $CD = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda}|AC|^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}|BC|^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}|AB|^2}$. **98.** a) $(-3, 11)$; b) $(-10, 9)$. **99.** a) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; b) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; c) $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a}$. **100.** a) $(1, -1, 6)$; b) $(5, -3, 6)$; c) $(6, -4, 12)$, d) $(1, -\frac{1}{2}, 0)$; e) $(0, -1, 12)$; f) $(3, -\frac{5}{3}, 2)$. **101.** $\overrightarrow{AM} = (3, 4, -3)$; $\overrightarrow{BN} = (0, -5, 3)$; $\overrightarrow{CP} = (-3, 1, 0)$. **102.** a) $\vec{d} = \vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; b) $\vec{d} = 5\vec{a} + 4\vec{b}$; c) $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{c}$. **103.** $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 1)$, $\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. **104.** $A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1)$, $D(0, 1)$. **105.** $(2, -3)$, $(-3, -2)$, $(-1, 1)$, $(-3, 5)$, $(-4, -6)$, $(a, -b)$. **106.** $(1, 2)$, $(-3, -1)$, $(2, -2)$, $(2, 5)$, $(-3, -5)$, $(-a, b)$. **107.** $(-3, -3)$, $(-2, 4)$, $(2, -1)$, $(-5, 3)$, $(5, 4)$, $(-a, -b)$. **108.** a) $B(5, 0)$; b) $B(-2, 3)$; c) $B(4, 0)$. **109.** $p_x\overrightarrow{AB} = 2, p_y\overrightarrow{AB} = -1$. **110.** a) jah; b) jah; c) ei. **112.** a) $D(-4, -1)$; b) $D(-3, 1)$. **113.** Nürinurkne. **114.** Jah. **116.** a) $2\sqrt{13}$; b) $\sqrt{53 + 14\sqrt{3}}$; c) $\sqrt{97 - 36\sqrt{2}}$; d) $\frac{\sqrt{2311}}{10}$. **117.** $1{,}05m$. **118.** $D(8, -18)$. **119.** $C(1, 5, 2)$, $D(3, 2, 1)$, $E(5, -1, 0)$, $F(7, -4, -1)$. **120.** $A_0(\frac{14}{3}, -8, 12)$, $A_2(\frac{4}{3}, -2, 2)$, $A_3(-\frac{1}{3}, 1, -3)$, $A_5(-\frac{11}{3}, 7, -13)$. **121.** a) 20; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 3; d) -3. **122.** 9. **123.** 10. **124.** $60°$. **125.** $-\frac{3}{2}$. **126.** 19. **127.** $|\vec{R}| = \sqrt{37}$. **128.** 0. **129.** $M_1(6, 0)$ ja $M_2(-2, 0)$. **130.** $M_1(0, 28)$ ja $M_2(0, -2)$. **131.** $(0, -10)$. **132.** $(1, 10)$ ja $(-11, 10)$. **133.** $(14, 0)$ ja $(0, \frac{14}{3})$. **134.** $18x - 8y = 53$. **135.** $M(-1, -2)$. **136.** $B(0, 4)$ ja $D(-1, -3)$. **137.** $B(2, 5)$ ja $D(16, 3)$. **138.** 13, 15. **139.** $45°$. **140.** 13. **143.** $\alpha = -15$. **144.** Vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ peavad olema kollineaarsed. **145.** a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$; b) $15\sqrt{3}$; c) $75\sqrt{3}$. **146.** $6\sqrt{3}$. **147.** $72\sqrt{2}$. **148.** $|\overrightarrow{CD}| = \frac{19}{5}$. **149.** 210. **150.** 14. **151.** 5. **152.** $\vec{c_1} = (1, 2, -2), \vec{c_2} = (-1, -2, 2)$. **155.** $-\vec{z}, -\vec{x}, -\vec{y}$. **153.** $(24, -21, -15)$. **154.** $(-8, 7, 5)$. **158.** Kui $\vec{a} = \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$, siis sobib lahendiks suvaline vektoriga $\vec{b}$ kollineaarne vektor, s.t., suvaline vektor $\vec{x} = \lambda\vec{b}$, kus $\lambda \in \mathbb{R}$. Kui kas a) $\vec{a} = \vec{0} = \vec{b}$ või b) $\vec{b} \neq \vec{0}$ ning vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on omavahel risti, siis on lahendeid lõpmata palju. Ülejäänud juhtudel lahendid puuduvad. **159.** a) 25; b) 0. **160.** 3. **161.** 11. **162.** $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$. **164.** $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **165.** $\left(\frac{6}{5\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{5\sqrt{5}},\right)$. **168.** $a = 3, b = 4$. **169.** a) $\frac{2}{7}$; b) $-\frac{7}{2}$. **170.** a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$; b) $\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{-2} = 1$; c) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{9}{2}} = 1$; d) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-6} = 1$. **171.** a) $x + y - 5 = 0$; b) $x + y - 3 = 0$. **172.** a) $3x + 4y - 13 = 0$; $5x - 2y + 13 = 0; 4x + y - 13 = 0$; b) $3x - y - 3 = 0; 4x - y - 3 = 0; x = 1$;

c) $y=l; kx+(k-2l)y-k^2+2l^2=0; kx+(k-l)y-k^2+l^2-kl=0$. **173.** $(-2,7)$. **174.** $(-3,0)$. **175.** Et $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$, siis on tõepoolest tegu trapetsiga. Kesklõik: $3x-5y+5=0$; diagonaalid: $x-y=0$; $y-1=0$. **176.** $(1,0)$ ja $(5,0)$. **177.** a) $x+6y+15=0; 3x+7y+1=0; 2x+y+8=0$; b) $2x+3y-10=0$; $4x+y-10=0$; $3x+2y=0$. **178.** $5x+y-16=0; x-5y+2=0$. **179.** $(6,0), 2x+3y-12=0$. **180.** $\frac{\pi}{4}$. **181.** Langev kiir: $5x-4y+2=0$, peegeldunud kiir: $4x-5y+1=0$. **182.** $29x-2y+33=0$. **183.** $P(2,-1)$. **184.** Väljaspool kolmnurka. **185.** Kaugus on $\sqrt{13}$. **186.** a) $x+2y-5=0$; $x-6y+11=0$; b) $4x+y+5=0; y-3=0$; c) $4x+y-6=0; 3x+2y-7=0$. **187.** $a=1$ ja $a=2$. **188.** a) $(3,0),(0,-5),(-2,1)$; b) $(2,-1),(-1,3),(2,4)$; c) $(2,0),(0,5),(-3,0)$; d) Sirged lõikuvad punktis $(2,0)$. **189.** a) $x+2y-5=0$; b) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$; c) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}$; d) $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1$. **190.** $2x-3y+20=0$, $3x+2y-9=0$, $x+5y-3=0$ või $2x-3y-6=0$, $3x+2y+17=0$, $x+5y-3=0$. **191.** $x=3$, $x=7$, $y=9$ ja $y=5$. **192.** $(\frac{29}{18},\frac{47}{54})$. **193.** $(5\frac{1}{2},4\frac{3}{4})$. **194.** Tasand läbib punkte A,D,E. **195.** a) $26x+7y-4z-57=0$; b) $2x-7y-17z+53=0$. **196.** a) $3y+z=0$; b) $2x+3z=0$; c) $x+4y=0$. **197.** a) $2y-5z+7=0$; b) $3x+4z-9=0$; c) $5x-2y+1=0$. **198.** a) $z-1=0$; b) $x+3=0$; c) $y-2=0$. **199.** a) $4,-12$ ja 8; b) $-8,2$ ja 16; c) $\frac{1}{2},-5$ ja 3; d) $0,0$ ja 0 (tasand läbib reeperi alguspunkti). **200.** $3x+5y-4z+6=0$. **201.** a) $4x-y-14z=0$; b) $x-y-z+2=0$; c) $3x+3y+z-8=0$; d) $x+3y+6z-13=0$. **202.** a) $2x+3y-5z+30=0$; b) $x-4y-7z+12=0$; c) $4x-y-3z+20=0$. **203.** a) $3x-2y+4z-29=0$; b) $2x-5y-z+30=0$; c) $4x+7y-11z-186=0$. **204.** $3x-6y+7z=0$. **205.** a) $90°$; b) $45°$; c) tasandid on paralleelsed; d) $60°$. **206.** a) 1; b) 10; c) 4; d) 0. **207.** $x+2y-2z+7=0$ ja $x+2y-2z-35=0$. **208.** a) samal pool; b) teine teisel pool; c) teine teisel pool; d) samal pool. **210.** $27x+11y+z-65=0$. **211.** $AB: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $BC: \frac{x}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+6}{11}$, $CA: \frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-9}$. **212.** $AB: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{2}$, $AC: \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-7}$, $AD: \frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{-2}$, $BC: \frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-5}{-9}$, $BD: \frac{x-3}{-7}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-5}{-4}$, $CD: \frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+4}{5}$. **213.** $D=-2$. **214.** a) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+7}{0}$; b) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z+7}{4}$; c) $\frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+7}{8}$; d) $\frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+7}{1}$. **215.** a) $x=-14t+3$, $y=3t+2$, $z=7t-4$, $t\in\mathbb{R}$; b) $x=-5t+1$, $y=-2t-3$, $z=-8t+8$, $t\in\mathbb{R}$; c) $x=-t+1$, $y=-3t+3$, $z=-4t+6$, $t\in\mathbb{R}$; d) $x=t$, $y=t$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. **216.** $x=5t+4$, $y=-11t-7, z=-2, t\in\mathbb{R}$. **217.** a) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$; b) $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$; c) $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$; d) $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+1}{1}$.

218. $\frac{x-2}{37} = \frac{y-3}{-25} = \frac{z-4}{-32}$. **219.** a) $\sqrt{22}$; b) $\sqrt{14}$; c) $\sqrt{\frac{35}{6}}$. **220.** a) $2x+3y+z+5=0$; b) $3x+2y-3z+25=0$. **221.** $2x+y-1=0$. **222.** a) Sirge ja tasand lõikuvad punktis $(0,0,-2)$ nurga $\arcsin\sqrt{\frac{26}{35}}$ all; b) sirge ja tasand on paralleelsed; c) sirge ja tasand lõikuvad punktis $(2,4,6)$ nurga $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{3003}}$ all; d) sirge asub tasandil. **223.** $x^2+y^2=64$. **224.** a) $a=5$, $b=4$, $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$, $e=0{,}6$; b) Pikem pooltelg (NB! asub y-teljel, seega on a rollis!) on 6, lühem pooltelg (NB! asub x-teljel, seega on b rollis!) on 2, $F_1(0,-4\sqrt{2})$, $F_2(0,4\sqrt{2})$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **225.** a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; c) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; d) $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$ ja $\frac{x^2}{\frac{117}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$. **226.** $(-5,-2)$, $(-5,2)$, $(5,-2)$, $(5,2)$. **227.** a) $a=6$, $b=4$, $c=2\sqrt{13}$, $F_1(-2\sqrt{13},0)$, $F_2(2\sqrt{13},0)$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $p=2\frac{2}{3}$; b) $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{13}$, $F_1(-\sqrt{13},0)$, $F_2(\sqrt{13},0)$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $p=\frac{4}{3}$; c) $a=2$, $b=2\sqrt{3}$, $c=4$, $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $e=2$, $p=6$; d) Imaginaarne pooltelg (NB! asub x-teljel, seega on b rollis!) on $\sqrt{10}$, reaalne pooltelg (NB! asub y-teljel, seega on a rollis!) on $\sqrt{6}$, $c=4$, $F_1(0,-4)$, $F_2(0,4)$, $e=\frac{4}{\sqrt{6}}$, $p=\frac{10}{\sqrt{6}}$. **228.** a) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; b) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. **229.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **230.** $(10,-\sqrt{30})$, $(10,\sqrt{30})$, $(2,-\sqrt{6})$, $(2,\sqrt{6})$. **231.** a) $y^2=4x$; b) $x^2=-2y$; c) $y^2=-12x$ või $y^2=12x$; d) $x^2=8y$.

Kasutatud kirjandus

1. L. Tuulmets, *Analüütilise geomeetria praktikum,* I–III, Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1971–1980.

2. K. Kaarli, *Algebra praktikum. Kujutused, maatriksid ja determinandid*, Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1981.

3. E. Abel, K. Kokk, *Kõrgem matemaatika. Harjutusülesanded*, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2002.

4. А. И. Кострикин, *Сборник задач по алгебре*, Наука, Москва, 1987.

5. А. С. Феденко, *Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии*, Университецкое, Минск, 1989.

Sisukord