Algebra I

Näited polünoomide jaguvusega seotud ülesannetest.

Ülesanne 1. Leida ringis $\mathbb{Q}[x]$ vähima võimaliku astmega polünoom, mis annab jagamisel polünoomiga $(x-1)^2$ jäägi $2x$ ja polünoomiga $(x-2)^3$ jäägi $3x$.

Lahendus:
Lahendame selle ülesande määramata kordajate meetodil, st võtame, et

$$f(x) = (x-1)^2 p(x) + 2x = (x-2)^3 q(x) + 3x, \tag{1}$$

kus $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ ja $q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ ning $a_0, \ldots, a_l$ ja $b_0, \ldots, b_l$ on otsitavad kordajad. Korrutades võrrandis (1) läbi mõlemad avaldised, saame määramata kordajaid sisaldavad vähemalt kuuppolünoomid. Kuuppolünoomide kõiki kordajaid võrdseteks võttes saame vähemalt neljast (kuupliikme, ruutliikme, lineaarliikme ja vabaliikme kordajad) võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi. Sellisel juhul on meil $q(x) = b_0$ ja sama astme polünoomi saamiseks $p(x) = a_0 x + a_1$. Näeme, et meil on kolm tundmatut, mille korral neli võrrandit võivad osutuda vastuolulisteks. Seega suurendame $p(x)$ ja $q(x)$ astet nii kaua, kuni tundmatuid on vähemalt sama palju, kui võrrandeid. Antud juhul piisab ühest korrast, sest siis on meil $4 + 1 = 5$ võrrandit (4. astme liige annab lisavõrrandi) ja $3 + 2 = 5$ tundmatut (nii $p(x)$ kui $q(x)$ annavad ühe lisakordaja). Sellest piisab. Võtamegi nüüd $p(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ ja $q(x) = b_0 x + b_1$ ja leiame, et

$$\begin{aligned}
& a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 - 2a_1x^3 - 2a_2x^2 - 2a_3x \\
& +a_1x^2 + a_2x + a_3 + 2x \\
= \; & (x^2 - 2x + 1)(a_0x^2 + a_1x + a_2) + 2x = (x-1)^2 p(x) + 2x \\
= \; & (x-2)^3 q(x) + 3x = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(b_0x + b_1) + 3x \\
= \; & b_0x^4 + b_1x^3 - 6b_0x^3 - 6b_1x^2 + 12b_0x^2 + 12b_1x \\
& -8b_0x - 8b_1 + 3x.
\end{aligned}$$

Kaks polünoomi on võrdsed parajasti siis, kui kõik nende kordajad on võrdsed, seega on meil lineaarvõrrandisüsteem

$$\left\{ \begin{array}{c}
a_0 = b_0 \\
a_1 - 2a_0 = b_1 - 6b_0 \\
a_2 - 2a_1 + a_0 = -6b_1 + 12b_0 \\
-2a_2 + a_1 + 2 = 12b_1 - 8b_0 + 3 \\
a_2 = -8b_1
\end{array} \right.$$

Lahendame selle lineaarvõrrandisüsteemi Gaussi meetodil:

$$
\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\
1 & -2 & 1 & -12 & 6 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 8 & -12 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & -2 & 1 & -11 & 6 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 8 & -12 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0
\end{pmatrix}
\to
$$

$$
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 4 & -11 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 1
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3
\end{pmatrix}
$$

Siit on lihtne leida, et $(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1) = (4, -19, 24, 4, -3)$. Järelikult $q(x) = 4x - 3$ ja

$$f(x) = (x-2)^3 q(x) + 3x = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(4x-3) + 3x = 4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24.$$

Kontroll:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -27x^3 & +66x^2 & -65x & +24 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
4x^4 & -8x^3 & +4x^2 & & & 4x^2 - 19x + 24 \\ \cline{1-5}
 & -19x^3 & +62x^2 & -65x & +24 & \\
 & -19x^3 & +38x^2 & -19x & & \\ \cline{2-5}
 & & 24x^2 & -46x & +24 & \\
 & & 24x^2 & -48x & +24 & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & -27x^3 & +66x^2 & -65x & +24 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ \cline{6-6}
4x^4 & -24x^3 & +48x^2 & -32x & & 4x - 3 \\ \cline{1-5}
 & -3x^3 & +18x^2 & -33x & +24 & \\
 & -3x^3 & +18x^2 & -36x & +24 & \\ \cline{3-5}
 & & & 3x & &
\end{array}
$$

Vastus: minimaalse astmega polünoom, mis annab jagamisel polünoomiga $(x-1)^2$ jäägi $2x$ ja polünoomiga $(x-2)^3$ jäägi $3x$, on $4x^4 - 27x^3 + 66x^2 - 65x + 24$.

Ülesanne 2. Teha kindlaks, kas elementidel 6 ja $3+3\sqrt{-5}$ ringist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on olemas SÜT ja VÜK.

Lahendus: Kasutame ära ruutnormi $N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, kus

$$N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$$

ja selle omadust

$$z_1 | z_2 \text{ ringis } \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \Longrightarrow N(z_1)|N(z_2) \text{ ringis } \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Selle kujutusega seotud üksikasju saab lugeda polünoomide jaguvuse näidete failist (http://math.ut.ee/pmi/kursused/algebraI/Poljag.pdf).

Esmalt näitame, et SÜT$(6, 3{+}3\sqrt{-5})$ ei eksisteeri. Oletame vastuväiteliselt, et ta eksisteerib ja tähistame $d = \text{SÜT}(6, 3 + 3\sqrt{-5})$. Definitsiooni kohaselt $\mathbf{d|6}$ ja $\mathbf{d|3 + 3\sqrt{-5}}$. Kuna $3|6$ ja $3|3 + 3\sqrt{-5}$, siis jälle definitsioonist $\mathbf{3|d}$. Paneme tähele, et $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$. Seega $1 + \sqrt{-5}|6$ ja $1 + \sqrt{-5}|3 + 3\sqrt{-5}$ ja saame, et $\mathbf{1 + \sqrt{-5}|d}$. Leiame vastavad ruutnormid: $N(3) = 3^2 + 5 \cdot 0^0 = 9$, $N(1 + \sqrt{-5}) = 1^2 + 5 \cdot 1^2 = 6$, $N(3 + 3\sqrt{-5}) = 3^2 + 5 \cdot 3^2 = 54$ ja $N(6) = 6^2 + 5 \cdot 0^2 = 36$. Omaduse (2) põhjal $N(3)|N(d)$, $N(1 + \sqrt{-5})|N(d)$, $N(d)|N(6)$ ja $N(d)|N(3 + 3\sqrt{-5})$. Järelikult

$$\text{VÜK}(N(3), N(1 + \sqrt{-5}) = 18|N(d)|18 = \text{SÜT}(N(6), N(3 + 3\sqrt{-5})).$$

Sellest järeldub, et $N(d) = 18$. See ei ole aga võimalik. Kontrollime: kui mingite $a, b \in \mathbb{Z}$ korral

$$a^2 + 5b^2 = 18,$$

siis 1) $b = 0$, aga 18 ei ole täisruut, vastuolu; 2) $b = \pm 1$, kuid $18-5 = 13$ ei ole ikkagi täisruut, vastuolu; 2) $b = \pm 2$, siis peaks $18-5*4 = -2$ olema täisruut, vastuolu. Suuremate b absoluutväärtuste korral peaks kasvavalt negatiivsed arvud olema täisruudud, mis ei ole võimalik. Järelikult suurimat ühistegurit ei leidu.

Samuti ei ole neil arvudel ei ole vähimat ühiskordset. Oletame jälle vastuväiteliselt, et $c = \text{VÜK}(6, 3 + 3\sqrt{-5})$. Eelnevaga analoogiliselt arutledes saame, et $6|c$, $3{+}3\sqrt{-5}|c$, $c|6{+}6\sqrt{-5}$ ja $c|18 = 6\cdot 3 = (3{+}3\sqrt{-5})(1{-}\sqrt{-5})$. Järelikult

$$\begin{aligned} &\text{VÜK}(N(6), N(3 + 3\sqrt{-5})) = \text{VÜK}(36, 54) = 108|N(c)|108 = \\ = \; &\text{SÜT}(324, 216) = \text{SÜT}(N(18), N(6 + 6\sqrt{-5})). \end{aligned}$$

Jälle saame, et $N(c) = 108$, mis ei ole võimalik (108, $108{-}5 = 103$, $108{-}5{\cdot}4 = 88$, $108 - 5 \cdot 9 = 63$, $108 - 5 \cdot 16 = 28$ ei ole ükski täisruut).

Vastus: Arvudel 6 ja $3{+}3\sqrt{-5}$ puuduvad nii vähim ühistegur kui suurim ühiskordne.