Maatriksi astak. Pöördmaatriks

Maatriksi astaku leidmiseks on kaks põhilist meetodit. Esimene neist on elementaarteisenduste ehk Gaussi meetod. Teine on nn. miinorite ääristamise meetod, mis põhineb järgmisel asjaolul.

Lause 1 *Kui M on maatriksi A nullist erinev r. järku miinor ja $rank(A) > r$, siis leidub miinorit M ääristav $(r+1)$. järku miinor, mis on nullist erinev.*

Ehk teisisõnu: kui kõik ääristavad miinorid on võrdsed nulliga, siis astak on r. Üks miinor ääristab teist, kui ta on tollest saadud ühe rea ja ühe veeru lisamisel.

Ülesanne 1 *Leidke maatriksite astakud sõltuvalt parameetri λ väärtustest:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & \lambda & 2 \\ \lambda & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Kuna maatriksis A leidub 2. järku nullist erinev miinor

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix},$$

siis on selle maatriksi astak vähemalt 2. Vaatleme seda miinorit ääristavaid kolmandat järku miinoreid, mida on kaks tükki:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 + \lambda^2 - 20 - 1 + 12\lambda - 10\lambda = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda + 5),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 5\lambda + 40 + 2 - 2\lambda - 50 = 3\lambda - 9.$$

Näeme, et $\lambda = 3$ korral on mõlemad kolmandat järku miinorid võrdsed nulliga, seega astak on 2. Ülejäänud juhtudel aga on teine miinor nullist erinev ja seega astak 3.

Vastus:

$$rank(A) = \begin{cases} 2, & \text{kui } \lambda = 3, \\ 3, & \text{kui } \lambda \neq 3. \end{cases}$$

Ülesanne 2 *Lahendage maatriksvõrrandid:*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Lahendada tuleb maatriksvõrrand kujul $XA = B$, kus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Põhimõtteliselt võib selle lahendada leides maatriksi A pöördmaatriksi ja avaldades $X = XE = (XA)A^{-1} = BA^{-1}$. Kuid on ka vähem tööd nõudev võimalus. Nimelt, paneme tähele, et võrrand $XA = B$ on samaväärne võrrandiga $A^T X^T = B^T$. Kui me leiaksime maatriksi A^T pöördmaatriksi elementaartteisenduste abil, siis me peaksime tegema teisendusi tema ridadega, nii et tulemuseks oleks ühikmaatriks. Kuna elementaarteisendustele ridadega vastab elementaarmaatriksitega vasakult korrutamine, siis leiduvad sellised elementaarmaatriksid $C_1, C_2, \ldots, C_k$, et $(C_k \ldots C_2 C_1)A^T = E$. Järelikult

$$X^T = EX^T = (C_k \ldots C_2 C_1)A^T X^T = (C_k \ldots C_2 C_1)B^T.$$

Seega maatriksi X^T leidmiseks tuleks maatriksi B^T ridadega teha täpselt samad elementaarteisendused täpselt samas järjekorras, mis tehakse A^T pöördmaatriksi leidmisel. Seejuures X^T leidmiseks ei ole meil vaja teada A^T pöördmaatriksit ennast. Teemegi siis need elementaarteisendused:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Seega

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ehk } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kontroll:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vastus: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ülesanne 3 *Maatriksit A nimetatakse kaldsümmeetriliseks, kui $A^T = -A$. Tõestage, et kaldsümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on kaldsümmeetriline.*

Olgu A kaldsümmeetriline. Siis kasutades transponeerimise ja pöördmaatriksi leidmise omadusi saame

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = (-EA)^{-1} = A^{-1}(-E)^{-1} = A^{-1}(-E) = -A^{-1},$$

s.t. A^{-1} on kaldsümmeetriline.

Viited

[1] Kilp, M., Algebra I, Tartu, 1998.