Lineaarvõrrandisüsteemid

Ülesanne 1 *Uurige võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} (2a-1)x_1 + ax_2 + \ \ x_3 = 2-a \\ \qquad\quad ax_1 + ax_2 + \ \ x_3 = 1 \\ \qquad\quad\ \ x_1 + \ \ x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

lahenduvust sõltuvalt parameetri a väärtusest.

Lahenduvuse uurimiseks moodustame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame selle astmelisele kujule:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a-1 & a & 1 & 2-a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & -1 & -a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & -1 & -a \\ a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a-1 & -1 & -a \\ a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -a-1 & -1 & -1 & -a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right)$$

Astmelisest kujust on näha, et võrrandisüsteemi maatriksi determinant on nullist erinev parajasti siis, kui $a \neq 1$ ja $a \neq -1$. Sellisel juhul on tegemist Crameri pääjuhuga ning võrrandisüsteem on üheselt lahenduv. Kui $a = 1$, siis saame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksiga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

(nullidest koosnevad read on ära jäetud). Kuna süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on mõlemad võrdsed 1-ga, siis on süsteem lahenduv, tal on lõpmata palju lahendeid, mille esitamiseks tuleb kasutada $3 - 1 = 2$ vaba muutujat. Kui $a = -1$, siis saame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksiga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Näeme, et võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi astak on 3, kuid võrrandisüsteemi maatriksi astak on 2. Seega võrrandisüsteem ei ole lahenduv.

Vastus: võrrandisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui $a \neq -1$. Kui $a = 1$, siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid, kusjuures üldlahend sisaldab 2 vaba muutujat. Kui $a \neq \pm 1$, siis on võrrandisüsteem üheselt lahenduv.

Ülesanne 2 *Lahendage järgmised võrrandisüsteemid Crameri valemite abil:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}, \quad \begin{cases} ix_1 - ix_2 + \ \ x_3 = 1 \\ x_1 + ix_2 - ix_3 = -1 \\ ix_1 + \ \ x_2 - ix_3 = -1 + 2i \end{cases}.$$

a) Arvutame determinandid

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36,$$
$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 24, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -24.$$

Neid kasutades saame arvutada

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-36}{-12} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{24}{-12} = -2,\ x_1 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-24}{-12} = 2.$$

Vastus: $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2.$

b) Arvutame determinandid

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & i & -i \\ i & 1 & -i \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -i & 1 \\ -1 & i & -i \\ -1+2i & 1 & -i \end{vmatrix} = 2,$$
$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i \\ i & -1+2i & -i \end{vmatrix} = 2i, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} i & -i & 1 \\ 1 & i & -i \\ i & 1 & -1+2i \end{vmatrix} = -2i.$$

Neid kasutades saame arvutada

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{2i}{2} = i,\ x_1 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Kontroll:

$$\begin{cases} i - i\cdot i - i = 1 \\ 1 + i\cdot i + i\cdot i = -1 \\ i + i + i\cdot i = -1+2i. \end{cases}$$

Vastus: $x_1 = 1, x_2 = i, x_3 = -i.$

Ülesanne 3 *Leidke kõik muutujate komplektid, mida võib valida vabadeks muutujateks:*

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ \quad\ + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 7 \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Teoreemi 4.4.5 tõestusest järeldub järgmine väide.

Lause 1 *Kui kooskõlalise lineaarvõraandisüsteemi laiendatud maatriksi read on lineaarselt sõltumatud ja neid on r tükki, siis selle süsteemi sõltuvateks muutujateks võib valida mistahes r muutujat, mille kordajatest moodustatud r. järku miinor on nullist erinev.*

a) Vaadeldav võrrandisüsteem on lahenduv ja tema maatriksi astak on 2. Seega on nii sõltuvaid kui vabu muutujaid 2 tükki. Uurime, millised komplektid sobivad sõltuvateks muutujateks:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow x_1, x_2 \text{ sõltuvad, } x_3, x_4 \text{ vabad,}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow x_1, x_3 \text{ sõltuvad, } x_2, x_4 \text{ vabad,}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow x_1, x_4 \text{ sõltuvad, } x_2, x_3 \text{ vabad,}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_2, x_3 \text{ ei sobi sõltuvateks ja } x_1, x_4 \text{ vabadeks,}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_2, x_4 \text{ ei sobi sõltuvateks ja } x_1, x_3 \text{ vabadeks,}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_3, x_4 \text{ ei sobi sõltuvateks ja } x_1, x_2 \text{ vabadeks.}$$

Vastus: võimalikud vabade muutujate komplektid on (x_3, x_4), (x_2, x_4) ja (x_2, x_3).

Ülesanne 4 *Lahendage võrrandisüsteem*

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \tag{1}$$

Võrrandisüsteemi maatriksi ja tema laiendatud maatriksi astakud on võrdsed 1-ga. Seega on süsteem lahenduv, kusjuures üldlahendis on üks sõltuv ja $4 - 1 = 3$ vaba muutujat. Valime sõltuvaks muutujaks näiteks x_3 ja avaldame ta vabade muutujate kaudu

$$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2 + x_4.$$

Andes kõigile vabadele muutujatele väärtuseks 0 saame süsteemi (1) ühe erilahendi $c_0 = (0, 0, 1, 0)$. Süsteemile (1) vastava homogeense süsteemi

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \tag{2}$$

üldlahend avaldub kujul $x_3 = -2x_1 + x_2 + x_4$. Andes vabadele muutujatele x_1, x_2, x_4 väärtusi 3. järku ühikmaatriksi ridadest saame leida homogeense süsteemi (2) lahendite fundamentaalsüsteemi 3 vektorit

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, -2, 0), \\ b_1 &= (0, 1, 1, 0), \\ b_1 &= (0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Seega kõik süsteemi (1) lahendid avalduvad kujul $c_0 + k_1b_1 + k_2b_2 + k_3b_3$, kus $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Ülesanne 5 *Lahendage Gaussi meetodil järgmised võrrandisüsteemid:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

a) Moodustame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame ta astmelisele kujule jättes ära nullidest koosnevad read:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & \frac{1}{8} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & 0 \end{array}\right).$$

Näeme, et süsteem on lahenduv ja vabu muutujaid on $4-2=2$. Valime sõltuvateks muutjateks x_1 ja x_3, vabadeks x_2 ja x_4 ning avaldame sõltuvad muutujad vabade kaudu:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4 \\ x_3 = \qquad\qquad - \frac{11}{8}x_4. \end{cases}$$

Selle süsteemi üheks erilahendiks on $c_0 = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ (anname vabadele muutujatele väärtuseks 0). Vastava homogeense süsteemi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{16}x_4 \\ x_3 = \qquad - \frac{11}{8}x_4 \end{cases}$$

lahendite fundamentaalsüsteemi saame kui anname vabadele muutujatele x_2 ja x_4 kaks komplekti väärtusi mingi regulaarse teist järku ruutmaatriksi, nt. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$, ridadest:

$$\begin{aligned} b_1 &= (3, 2, 0, 0), \\ b_2 &= (-1, 0, -22, 16). \end{aligned}$$

Süsteemi kõik lahendid avalduvad kujul $c_0 + k_1 b_1 + k_2 b_2$, kus $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Ülesanne 6 *Lahendage järgmised võrrandisüsteemid üle korpuse $\mathbb{Z}_5$.*

$$\begin{cases} \overline{4}y + z = \overline{2} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{1} \\ x + y + z = \overline{0} \end{cases}, \quad \begin{cases} x + \overline{2}z = \overline{1} \\ y + \overline{2}z = \overline{2} \\ \overline{2}x + z = \overline{1}. \end{cases}$$

a) Moodustame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame ta astmelisele kujule jättes ära nullidest koosnevad read:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} \end{array}\right).$$

Näeme, et süsteem on lahenduv ja vabu muutujaid on $3-2=1$. Valime sõltuvateks muutjateks x ja y, vabaks z ning avaldame sõltuvad muutujad vaba kaudu:

$$\begin{cases} x = \overline{2} - \overline{2}z \\ \overline{2}y = \overline{1} - \overline{3}z \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \overline{2} + \overline{3}z \\ y = \overline{3} + z \end{cases}.$$

Selle süsteemi üheks erilahendiks on $c_0 = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{0})$. Vastava homogeense süsteemi üheks lahendite fundamentaalsüsteemiks on

$$b = (\overline{3}, \overline{1}, \overline{1}).$$

Süsteemi kõik lahendid avalduvad kujul $c_0 + kb$, kus $k \in \mathbb{R}$.

b) Moodustame võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame teda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array}\right).$$

Seega süsteemil on täpselt üks lahend $x = \overline{2}$, $y = \overline{3}$, $z = \overline{2}$.

Ülesanne 7 *Leidke ülimalt 3. astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumi $P_3(\mathbb{R})$ vektori $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ koordinaadid baasi $x - 1, x^2 + x + 1, x^3 - x^2 - 1, x^3 + x^2$ suhtes.*

Olgu need koordinaadid k_1, k_2, k_3, k_4, s.t.

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + 3x - 2 &= k_1(x-1) + k_2(x^2+x+1) + k_3(x^3 - x^2 - 1) + k_4(x^3 + x^2) \\ &= (k_3 + k_4)x^3 + (k_2 - k_3 + k_4)x^2 + (k_1 + k_2)x + (-k_1 + k_2 - k_3). \end{aligned}$$

Kuna kaks polünoomi on võrdsed parajasti siis, kui x vastavate astmete kordajad on võrdsed, siis saame siit k_1, k_2, k_3, k_4 leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & k_3 & + & k_4 & = & 2 \\ & & k_2 & - & k_3 & + & k_4 & = & 3 \\ k_1 & + & k_2 & & & & & = & 3 \\ -k_1 & + & k_2 & - & k_3 & & & = & -2. \end{array}\right.$$

Lahendame selle:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right).$$

Vastus: koordinaadid on $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Ülesanne 8 *Millisel tingimusel lõikuvad sirged $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ja $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ühes punktis?*

Kui need sirged lõikuvad ühes punktis, siis peab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & -c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & -c_2 \\ a_3x & + & b_3y & = & -c_3 \end{cases}$$

olema üheselt lahenduv. Vaatleme laiendatud maatriksit

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{array}\right).$$

Kuna süsteemi maatriksis on 2 veergu, siis tema astak ei saa olla 3. Et süsteem oleks lahenduv, ei tohi ka laiendatud maatriksi astak olla 3, s.t.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lisaks sellele peab süsteemi maatriksi astak olema võrdne muutujate arvuga, s.t. vähemalt üks determinantidest

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

peab olema nullist erinev.

Viited

[1] Kilp, M., Algebra I, Tartu, 1998.