Vektorruumid

Definitsioon 1 *Vektorruumiks* üle korpuse K nimetatakse mittetühja hulka V, millel on defineeritud üks kahekohaline tehe $+$ (liitmine) ning iga $k \in K$ ja $a \in V$ korral on defineeritud korrutis $ka \in V$, nii et

VR1. $(V, +)$ on Abeli rühm;

VR2. $(\forall a, b \in V)(\forall k \in K)(k(a+b) = ka + kb)$;

VR3. $(\forall a \in V)(\forall k, l \in K)((k+l)a = ka + la)$;

VR4. $(\forall a \in V)(\forall k, l \in K)((kl)a = k(la))$;

VR5. $(\forall a \in V)(1a = a)$.

Vektorruumi V elemente kutsutakse *vektoriteks* ning korpuse K elemente *skalaarideks*.

Definitsioon 2 Olgu V vektorruum. Mittetühja alamhulka $U \subseteq V$ nimetatakse vektorruumi V *alamruumiks*, kui

AVR1. $(\forall a, b \in U)(a + b \in U)$; (kinnisus liitmise suhtes)

AVR2. $(\forall a \in U)(\forall k \in K)(ka \in U)$. (kinnisus skalaariga korrutamise suhtes)

Definitsioon 3 Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle korpuse K. Kujutust $\varphi : V_1 \to V_2$ nimetatakse (vektorruumide) *homomorfismiks* ehk *lineaarkujutuseks*, kui

LK1. $(\forall a, b \in V_1)(\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b))$; (liitmise säilitamine)

LK2. $(\forall a \in V_1)(\forall k \in K)(\varphi(ka) = k\varphi(a))$. (skalaariga korrutamise säilitamine)

Vektorruume V_1 ja V_2 (üle korpuse K) nimetatakse *isomorfseteks*, kui leidub bijektiivne lineaarkujutus vektorruumist V_1 vektorruumi V_2.

Ülesanne 1 *Millised järgmistest hulkadest on vektorruumid üle ratsionaalarvude korpuse (tehetena vaatleme arvude tavalist liitmist ja korrutamist):* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$*?*

Kuna $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}^+$ ei ole liitmise suhtes Abeli rühmad, siis ei ole nad ka vektorruumid. Kui korrutada ratsionaalarvuga $\frac{1}{2}$ täisarv 1, siis tulemus ei ole täisarv, s.t. arvude tavalise korrutamise abil defineeritud skalaariga korrutamine ei ole algebraline tehe. Seega $\mathbb{Z}$ ei ole vektorruum üle $\mathbb{Q}$. Iga korpus on vektorruum üle iseenda ja üle iga oma alamkorpuse. Seega $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ on vektorruumid üle $\mathbb{Q}$.

Vastus: $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ on vektorruumid üle korpuse $\mathbb{Q}$.

Ülesanne 2 *Defineerime funktsioonide hulgal* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *liitmise ja skalaariga korrutamise n.ö. punktiviisiliselt:*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (kf)(x) &= kf(x)\end{aligned}$$

mistahes $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *ja* $k, x \in \mathbb{R}$ *korral. Tõestage, et hulk* $\mathbb{R}^R$ *on vektorruum nende tehete suhtes.*

Teame juba, et hulk $\mathbb{R}^R$ on ring funktsioonide punktiviisilise liitmise ja korrutamise suhtes, seega $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +)$ on Abeli rühm. Lihtne on veenduda, et ka aksioomid VR2-VR5 on täidetud. Kontrollime näiteks aksioomi VR2. Olgu $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{R}$. Siis kasutades punktiviisilise liitmise ja skalaariga korrutamise definitsioone ning reaalarvude distributiivsust näeme, et iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}(k(f+g))(x) &= k((f+g)(x)) = k(f(x)+g(x)) = kf(x)+kg(x)\\ &= (kf)(x)+(kg)(x) = (kf+kg)(x).\end{aligned}$$

See tähendab, et funktsioonid $k(f+g)$ ja $kf+kg$ on võrdsed, mida oligi vaja näidata.

Ülesanne 3 *Olgu* $u \in \mathbb{R}$ *fikseeritud reaalarv. Kas hulk*

1. $V_1 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(u) = 0\right\}$;

2. $V_2 = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(u) = 1\right\}$;

on vektorruum (üle korpuse $\mathbb{R}$*) funktsioonide liitmise ja korrutamise suhtes, mis on defineeritud nii nagu ülesandes 2?*

Selle ülesande lahendamiseks on kaks võimalust. Esimene on loomulikult vektorruumi definitsiooni tingimuste kontrollimine, nii nagu tegime seda ülesandes 2. Teine võimalus on kasutada fakti, et vektorruumi (üle korpuse K) iga alamruum on ise ka vektorruum (üle korpuse K). Seega piisab kontrollida, kas V_1 ja V_2 on vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ alamruumid. Teemegi seda.

1. AVR1. Olgu $f, g \in V_1$, s.t. $f(u) = 0 = g(u)$. Siis ka $(f+g)(u) = f(u)+g(u) = 0+0 = 0$, s.t. $f+g \in V_1$.

AVR2. Olgu $f \in V_1$ ja $k \in \mathbb{R}$. Siis ka $(kf)(u) = kf(u) = k0 = 0$, s.t. $kf \in V_1$.

Järelikult V_1 on alamruum.

2. V_2 ei ole alamruum, kuna $(f_1+f_1)(u) = f_1(u)+f_1(u) = 1+1 = 2 \neq 1$ ja seega $f_1+f_1 \notin V_2$, kus $f_1 \in V_1$ on konstantne funktsioon väärtusega 1.

Vastus: V_1 on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$, V_2 ei ole.

Ülesanne 4 *Olgu* X *mittetühi hulk ja* $\mathcal{P}(X)$ *tema kõigi alamhulkade hulk. Defineerime hulga* X *alamhulga* A *korrutised korpuse* $\mathbb{Z}_2 = \left\{\overline{0}, \overline{1}\right\}$ *elementidega (skalaaridega) järgmiselt:*

$$\begin{aligned}\overline{1}A &= A,\\ \overline{0}A &= \emptyset.\end{aligned}$$

Kas hulk $\mathcal{P}(X)$ *on vektorruum üle korpuse* $\mathbb{Z}_2$*, kui liitmise osas vaadelda sümmeetrilist vahet* $\triangle$*?*

Eespool oleme näinud, et $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ on Abeli rühm. Seega on vaja veel kontrollida aksioome VR2-VR5. VR5 kehtimine järeldub vahetult skalaariga korrutamise definitsioonist. Kontrollime veel näiteks aksioomi VR3. Olgu $A \subseteq X$. Siis

$$\begin{aligned}
(\bar{0}+\bar{0})A &= \bar{0}A = \emptyset = \emptyset \triangle \emptyset = (\bar{0}A)\triangle(\bar{0}A), \\
(\bar{0}+\bar{1})A &= \bar{1}A = A = \emptyset \triangle A = (\bar{0}A)\triangle(\bar{1}A), \\
(\bar{1}+\bar{0})A &= \bar{1}A = A = A \triangle \emptyset = (\bar{1}A)\triangle(\bar{0}A), \\
(\bar{1}+\bar{1})A &= \bar{0}A = \emptyset = A \triangle A = (\bar{1}A)\triangle(\bar{1}A).
\end{aligned}$$

Ülejäänud aksioomid saab kontrollida analoogiliselt.

Ülesanne 5 *Defineerime hulgal* $\mathbb{Z}^n$ *liitmise ja realarvudega korrutamise järgmiselt:*

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \\
k(a_1, \ldots, a_n) &= (a_1, \ldots, a_n)
\end{aligned}$$

mistahes $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ *ja* $k \in \mathbb{R}$ *korral. Kas hulk* $\mathbb{Z}^n$ *on vektorruum üle korpuse* $\mathbb{R}$*?*

Ei ole, sest $\frac{1}{2}(1, \ldots, 1) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \notin \mathbb{Z}^n$.

Ülesanne 6 *Olgu* V *vektorruum üle* $\mathbb{R}$*. Kas kehtib järgmine väide: kui* $a, b, c \in V$ *on lineaarselt sõltumatud vektorid , siis ka* $a+b, b+c$ *ja* $c+a$ *on lineaarselt sõltumatud?*

Oletame, et

$$k(a+b) + l(b+c) + m(c+a) = 0, \tag{1}$$

kus k, l, m on mingisugused skalaarid. Siis kasutades vektorruumi aksioome saame, et ka

$$(k+m)a + (k+l)b + (l+m)c = 0.$$

Kuna vektorid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, siis sellisest võrdusest järeldub, et lineaarkombinatsiooni kõik kordajad on võrdsed nulliga:

$$k + m = k + l = l + m = 0.$$

Järelikult $m = l = k$, $2k = 0$ ja seega $k = l = m = 0$. Seega oleme näidanud, et lineaarkombinatsioon võrduse (1) vasakul poolel on triviaalne, mis tähendab, et vektorid $a+b, b+c$ ja $c+a$ on lineaarselt sõltumatud.

Vastus: jah, kehtib.

Ülesanne 7 *Olgu* V *vektorruum üle korpuse* $\mathbb{R}$*. Milliste skalaari* λ *väärtuste korral järeldub süsteemi* a, b *lineaarsest sõltumatusest süsteemi* $\lambda a + b, a + \lambda b$ *sõltumatus?*

Võrdus

$$k(\lambda a + b) + l(a + \lambda b) = 0$$

on samaväärne võrdusega

$$(k\lambda + l)a + (k + l\lambda)b = 0,$$

mis tänu vektorite a ja b lineaarsele sõltumatusele on samaväärne võrdustega

$$\begin{cases} k\lambda + l &= 0, \\ k + l\lambda &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

Seega süsteem $\lambda a + b, a + \lambda b$ on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil (2) on ainult triviaalne lahend $(k, l) = (0, 0)$. Viimane aga on samaväärne sellega, et võrrandisüsteemi maatriksi determinant on nullist erinev. Siis determinant

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

on aga nullist erinev parajasti siis, kui $\lambda \neq \pm 1$.

Vastus: kõigi väärtuste korral, mis ei ole ± 1.

Ülesanne 8 *Milliste λ väärtuste korral on vektorid $a_1 = (\lambda, 1, 0)$, $a_2 = (1, \lambda, 1)$, $a_3 = (0, 1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ lineaarselt sõltuvad?*

Vektorid a_1, a_2, a_3 on lineaarselt sõltuvad, kui leidub mittetriviaalne lineaarkombinastioon $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$, mis on võrdne nulliga:

$$\begin{aligned} (0,0,0) &= k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = (k_1\lambda, k_1, 0) + (k_2, k_2\lambda, k_2) + (0, k_3, k_3\lambda) \\ &= (k_1\lambda + k_2, k_1 + k_2\lambda + k_3, k_2 + k_3\lambda). \end{aligned}$$

See aga on samaväärne sellega, et homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil

$$\begin{cases} k_1\lambda + k_2 &= 0, \\ k_1 + k_2\lambda + k_3 &= 0, \\ k_2 + k_3\lambda &= 0 \end{cases}$$

leidub mittetriviaalne lahend (k_1, k_2, k_3). Viimane on samaväärne sellega, et

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda - \lambda = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2).$$

Saadud kuupvõrrandi lahendid on $0, \pm\sqrt{2}$.

Vastus: vektorid a_1, a_2, a_3 on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui $\lambda = 0$, $\lambda = \sqrt{2}$ või $\lambda = -\sqrt{2}$.

Ülesanne 9 *Tehke kindlaks, millised järgmistest vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorite süsteemidest on lineaarselt sõltumatud:*

$$\begin{array}{ll} 1) x+2, x-2; & 2) 6x+9, 8x+12; \\ 3) \sin x, \cos x; & 4) e^x, e^{2x}, e^{3x}; \\ 5) x, e^x, xe^x; & 6) 2^x, 3^x, 6^x; \\ 7) 1, \sin^2 x, \cos^2 x; & 8) \sin x, \cos x, \sin 2x. \end{array}$$

1) Oletame, et $k(x+2) + l(x-2) = 0$. Funktsioonid on võrdsed, kui nende väärtused on kõigi argumendi väärtuste korral võrdsed. Seega iga $x \in \mathbb{R}$ korral $(k+l)x + 2k - 2l = 0$. Võttes $x = 0$ saame $k = l$. Võttes $x = 1$ saame, et $k + l = 0$. Seega $k = l = 0$ ja süsteem on lineaarselt sõltumatu.

2) Kuna $8x + 12 = \frac{4}{3}(6x+9)$ (s.t. süsteemi üks vektor avaldub lineaarselt teise kaudu), siis süsteem on lineaarselt sõltuv.

3) Oletame, et $k \sin x + l \cos x = 0$. Võttes $x = 0$ saame $l = 0$, võttes $x = \frac{\pi}{2}$ saame $k = 0$. Seega süsteem on lineaarselt sõltumatu.

4) Olgu $ke^x + le^{2x} + me^{3x} = 0$. Kuna ühegi $x \in \mathbb{R}$ korral $e^x \neq 0$, siis võime võrduse mõlemaid pooli jagada funktsiooniga e^x ning saame, et $k + le^x + me^{2x} = 0$. Järelikult

$$0 = \lim_{x \to -\infty} 0 = \lim_{x \to -\infty} (k + le^x + me^{2x}) = k.$$

Seega $le^x + me^{2x} = 0$, kust saame, et $l + me^x = 0$ ja $0 = \lim_{x \to -\infty}(l + me^x) = l$. Lõpuks, võttes $x = 0$ võrduses $me^x = 0$ saame, et $m = 0$. Sellega oleme näidanud, et süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Ülesanne 10 *Veenduge, et 2. järku reaalarvuliste elementidega ruutmaatriksite hulk $Mat_2(\mathbb{R})$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$ maatriksite tavalise liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on selle vektorruumi alamruumid. Iga alamruumi korral leidke tema mingi baas ja mõõde.*

1. *Sümmeetriliste maatriksite hulk.*

2. *Regulaarsete maatriksite hulk.*

3. *Ülemiste kolmnurkmaatriksite hulk.*

Lihtne on kontrollida, et $Mat_2(\mathbb{R})$ *on vektorruum üle korpuse* $\mathbb{R}$ (vt. [1], teoreem 4.1.5).

1. Vaatleme sümmeetriliste maatriksite hulka

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq Mat_2(\mathbb{R}).$$

AVR1. Kuna

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ b+e & c+f \end{pmatrix} \in U$$

mistahes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ korral, siis U on kinnine liitmise suhtes.

AVR2. Kuna

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kb & kc \end{pmatrix} \in U$$

mistahes $k, a, b, c \in \mathbb{R}$ korral, siis U on kinnine skalaariga korrutamise suhtes. Seega oleme näidanud, et U on alamruum.

Vaatleme alamruumi U kuuluvaid vektoreid

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oletades, et $k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 = 0$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, saame, et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Kaks maatriksit on võrdsed, kui nende vastavad elemendid on võrdsed. Seega $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ ja oleme näidanud, et vektorite süsteem A_1, A_2, A_3 on lineaarselt sõltumatu. Samuti on ta moodustajate süsteem, sest iga sümmeetriline maatriks avaldub vektorite A_1, A_2, A_3 lineaarkombinatsioonina:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

iga $a, b, c \in \mathbb{R}$ korral. Seega A_1, A_2, A_3 on alamruumi U baas. Järelikult alamruumi U mõõde $\dim U = 3$.

2. Kuna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin GL_2(\mathbb{R}),$$

siis regulaarsete maatriksite hulk $GL_2(\mathbb{R})$ ei ole vektorruumi $Mat_2(\mathbb{R})$ alamruum.

Ülesanne 11 *Tõestage, et järgmised vektorruumi $\mathbb{R}^n$ (üle korpuse $\mathbb{R}$) vektorite hulgad on selle vektorruumi alamruumid ning leidke nende baasid ja mõõtmed:*

1) *vektorid, mille esimene ja viimane koordinaat on võrdsed;*

2) *vektorid, mille paarisarvulised koordinaadid on nullid;*

3) *vektorid, mille paarisarvulised koordinaadid on omavahel võrdsed;*

4) *vektorid kujul $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$.*

1) Vaatleme hulka

$$U = \{(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) \mid u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Näitame, et U on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum.

AVR1. Kuna

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) + (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_{n-1} + v_{n-1}, u_1 + v_1) \in U,$$

siis U on kinnine liitmise suhtes.

AVR2. Kuna

$$k(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_{n-1}, ku_1) \in U,$$

siis U on kinnine skalaariga korrutamise suhtes. Seega U on alamruum.

Vektorite süsteem

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 1, 0 \ldots, 0, 0), \\ &\ldots \\ e_{n-1} &= (0, 0, 0 \ldots, 1, 0) \end{aligned}$$

on lineaarselt sõltumatu, kuna ükski vektor ei avaldu eelmiste lineaarkombinatsioonina. Ta on ka moodustajate süsteem, sest iga vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) \in U$ avaldub kujul

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_{n-1} e_{n-1}.$$

Järelikult $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ on baas. Kuna vektorruumi mõõde on tema baasivektorite arv, siis $\dim U = n - 1$.

Ülesanne 12 *Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$ a) baasist, b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas, c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas, d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.*

a) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$;

b) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$;

c) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$, $a_5 = (1, 1, 1, 1)$;

d) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (2, 0, 0, 0)$.

Viited

[1] Kilp, M., Algebra I, Tartu, 1998.