Algebra I

Näide eukleidilise ruumi sümmeetrilise lineaarteisenduse maatriksi teisendamisest ortonormeeritud baasile.

Ülesanne 12. Leida lineaarteisenduse omavektoritest koosnev ortonormeeritud baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes, kui teisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on: c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lahendus: Leiame lineaarteisenduse karakteristliku polünoomi:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Selle juured on antud maatriksiga lineaarteisenduse omaväärtused, praegu siis 1 ja -1, esimene neist on seejuures kahekordne. Leiame vastavad lineaarselt sõltumatud omavektorid võrrandisüsteemidest

$$\begin{cases} (-1)x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & (-1)x_3 & = & 0 \end{cases} \quad \text{ja}$$

$$\begin{cases} x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Esimene neist taandub võrrandiks $x_1 = x_3$, mille lineaarselt sõltumatuteks lahenditeks sobivad näiteks (0,1,0) ja $(1,0,1)$ (kus kolmik (x_1, x_2, x_3) tähistab vektorit $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ ja $\{e_1, e_2, e_3\}$ on baas, mille suhtes esialgne teisenduse maatriks antud on). Teine taandub võrrandisüsteemiks

$$\begin{cases} x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Sellel on näiteks nullist erinev lahend $(1, 0, -1)$.

Seega oleme leidnud kolm lineaarselt sõltumatut omavektorit $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ ja $(1, 0, -1)$. Sümmeetrilise teisenduse korral on erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid automaatselt ortogonaalsed. Meie juhul on näha, et tõepoolest $< (0, 1, 0), (1, 0, -1) >=< (1, 0, 1), (1, 0, -1) >= 0$. Õnnelikul kombel oleme valinud ka omaväärtusele 1 vastavad omavektorid ortogonaalsetena. Kui nad ei oleks ortogonaalsed (nt $(0, 1, 0)$ ja $(1, 1, 1)$), saaksime nad siiski ilma muid tingimusi rikkumata Gram-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi abil ortogonaalseteks muuta. Ainus asi, mis veel puudu on, on ortonormaalsus, st me peame baasivektorite pikkuseks saama arvu 1. Seda on lihtne teha, võtame vektorid

$$\frac{(0,1,0)}{|(0,1,0)|} = (0,1,0), \frac{(1,0,1)}{|(1,0,1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{(1,0,-1)}{|(1,0,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).$$

Vastus: Üks antud teisenduse omavektoritest koosnev ortonormeeritud baas on e_2, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, seejuures teisenduse maatriks sellel baasil on $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ja $\{e_1, e_2, e_3\}$ on baas, mille suhtes esialgne teisenduse maatriks on antud.