Algebra I

Näited polünoomide juurtega seotud ülesannetest.

Ülesanne 1. Konstrueerida polünoom $f(x)$ Lagrange'i interpolatsioonivalemi abil, kasutades järgnevat väärtuste tabelit:

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	-1	-3	1

Lahendus:
Lagrange'i interpolatsioonivalem on $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \prod\limits_{j\neq i} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}$.
Antud juhul saame sellest välja kirjutada

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1\cdot\frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-2}{0-2}\cdot\frac{x-3}{0-3} \\
&+ (-1)\cdot\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-3}{1-3} \\
&+ (-3)\cdot\frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-3}{2-3} \\
&+ 1\cdot\frac{x-0}{3-0}\cdot\frac{x-1}{3-1}\cdot\frac{x-2}{3-2} \\
&= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) \\
&+ \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) \\
&= -\frac{1}{6}(x^3 + -6x^2 + 11x - 6) - \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) \\
&+ \frac{3}{2}(x^3 - 4x^2 + 4x) + \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) \\
&= x^3 - 3x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Kontroll:

$$f(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1, f(1) = 1 - 3 + 1 = -1,$$

$$f(2) = 8 - 12 + 1 = -3, f(3) = 27 - 27 + 1 = 1.$$

Ülesanne 2. Leida polünoom $g(x)$, millel on samad taandumatud tegurid, kui polünoomil $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$, kuid kordsusega 1, st eraldada polünoomi $f(x)$ kordsed tegurid, ning lahutada polünoom $f(x)$ lineaartegurite korrutiseks üle $\mathbb{C}$.

Lahendus: Esiteks leiame Eukleidese algoritmi abil SÜT$(f(x), f'(x))$. Ilmselt $f'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 2x - 2$. Kuna suurim ühistegur on määratud pööratava kordaja täpsusega, võime jagamisel vahetulemusi korrutada ja jagada vastavalt vajadusele, sest see muudab vaid kordajat leitava ühisteguri ees. Kõigepealt:

$$
\begin{array}{lllll|l}
18x^6 & -36x^5 - 18x^4 + 72x^3 - 18x^2 & -36x & +18 & & 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 2x - 2 \\
18x^6 & -30x^5 - 12x^4 + 36x^3 - 6x^2 & -6x & & & 3x - 1 \\
\hline
 & -6x^5 - 6x^4 + 36x^3 - 12x^2 & -30x & +18 & & \\
 & -6x^5 + 10x^4 + 4x^3 - 12x^2 & +2x & +2 & & \\
\hline
 & -16x^4 + 32x^3 & -32x & +16 & &
\end{array}
$$

Teiseks:

$$
\begin{array}{llllll|l}
6x^5 & -10x^4 & -4x^3 & +12x^2 - 2x & -2 & & x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \\
6x^6 & -12x^4 & & +12x^2 - 6x & & & 36x + 2 \\
\hline
 & 2x^4 & -4x^3 & +4x & -2 & & \\
 & 2x^4 & -4x^3 & +4x & -2 & & \\
\hline
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Seega

$$\text{SÜT}(f(x), f'(x)) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

Nüüd jagame $f(x)$ leitud suurima ühisteguriga:

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^6 - 2x^5 & -x^4 & +4x^3 & -x^2 & -2x + 1 & & x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \\
x^6 - 2x^5 & & +2x^3 & -x^2 & & & x^2 - 1 \\
\hline
 & -x^4 & +2x^3 & & -2x + 1 & & \\
 & -x^4 & +2x^3 & & -2x + 1 & & \\
\hline
 & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Olemegi saanud, et polünoomi $f(x)$ kordsete tegurite eraldamisel on tulemuseks $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Lihtne kontroll Horneri skeemi abil näitab, et -1 on kahe- ja 1 neljakordne juur:

	1	-2	-1	4	-1	-2	1
1	1	-1	-2	2	1	-1	|0
1	1	0	-2	0	1	| 0	
1	1	1	-1	-1	| 0		
1	1	2	1	|0			
1	1	3	4	|4			

	1	2	1
-1	1	1	|0
-1	1	|0	

Vastus: polünoomi $f(x)$ kordsete tegurite eraldamisel on tulemuseks polünoom $(x+1)(x-1)$, ja

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x+1)^2(x-1)^4.$$