Ruutvormid

Definitsioon 1 *Ruutvormiks* muutujate $x_1, \ldots, x_n$ suhtes nimetame avaldist

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

kus $a_{ij} = a_{ji}$ ja $a_{ij} \in \mathbb{R}$ iga $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Sümmeetrilist maatriksit $A = (a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{R})$ nimetatakse selle *ruutvormi maatriksiks.*

Definitsioon 2 Öeldakse, et ruutvorm on *kanoonilisel kujul*, kui ta on kujul

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Ruutvormi viimine kanoonilisele kujule tähendab sellise muutujate vahetuse

$$\begin{cases} x_1 &= c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n, \\ & \ldots \\ x_n &= c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n, \end{cases} \tag{2}$$

leidmist, mille tegemisel saadud uus ruutvorm muutujate $y_1, \ldots, y_n$ suhtes oleks kanoonilisel kujul. Seejuures muutujate vahetuse maatriks $C = (c_{ij}) \in Mat_n(\mathbf{R})$ peab olema regulaarne.

Kui A on ruutvormi (1) maatriks, siis võib selle ruutvormi ja muutjavahetuse (2) esitada maatrikskujul:

$$\overline{x}^T A \overline{x} \text{ ja } \overline{x} = C\overline{y},$$

kus

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ja } \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Kuna $(C\overline{y})^T A (C\overline{y}) = \overline{y}^T (C^T A C) \overline{y}$, siis muutujavahetuse (2) tulemusena teiseneb ruutvorm maatriksiga A ruutvormiks maatriksiga $C^T A C$.

Definitsiooni kohaselt on ruutvormi maatriks sümmeetriline. Seega leidub selle maatriksi omavektoreist koosnev baas, mille võime ortonormeerida (teoreem IX.3.6). Moodustades maatriksi, mille veergudes on maatriksi A ortonormeeritud omavektorid saame ortogonaalse maatriksi C (lause IX.2.3), kusjuures maatriks $C^{-1}AC$ on diagonaalmaatriks, mille diagonaalielementideks on maatriksi A omaväärtused. Tänu C ortogonaalsusele on $C^{-1} = C^T$ ning seega $C^T A C$ on diagonaalmaatriks, mille diagonaalielementideks on maatriksi A omaväärtused. See tähendab, et kanoonilise kuju kordajad on A omaväärtused ning muutujate vahetuse maatriksiks sobib C. (Vt. ka teoreemi X.3.9, mis väidab sedasama.)

Seega ruutvormi kanoonilisele kujule viimiseks tuleks teha järgmist.

1. Leida selle ruutvormi maatriks A.
2. Leida A omaväärtused $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Seega kanooniliseks kujuks on $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.
3. Leida A omavektoritest koosnev baas $a_1, \ldots, a_n$, kus a_i vastab omaväärtusele λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

4. Ortogonaliseerida vektorid $a_1, \dots , a_n$.

5. Jagada saadud vektorid läbi oma pikkustega.

6. Moodustada maatriks C, mille veeruvektoriteks on saadud ortonormeeritud omavektorid. See C ongi sobiv muutujate vahetuse maatriks, mis viib vaadeldava ruutvormi kanoonilisele kujule $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.

Ülesanne 1 Viime ruutvormi

$$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

kanoonilisele kujule ortogonaalse muutujate vahetusega (s.o. muutujate vahetusega, mille maatriks on ortogonaalmaatriks).

1. Selle ruutvormi maatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

(Paneme tähele, et kuna x_1x_2 ja x_2x_1 kordajad ruutvormis peavad olema ruutvormis võrdsed, siis $-2x_1x_2 - 2x_2x_1$ asemel kirjutatakse ruutvormis lühidalt $-4x_1x_2$. Seega maatriksi koostamisel peame arvestama, et $a_{12} = a_{21} = \frac{-4}{2} = -2$.)

2. Maatriksi A karakteristlik polünoom on

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 18-\lambda & -18+\lambda \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -4 \\ 0 & 18-\lambda & 0 \\ -2 & -4 & 10-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (18-\lambda) \begin{vmatrix} 17-\lambda & -4 \\ -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (18-\lambda)(170 - 27\lambda + \lambda^2 - 8) \\ &= (18-\lambda)(\lambda^2 - 27\lambda + 162) = (18-\lambda)(\lambda - 18)(\lambda - 9). \end{aligned}$$

Siit on näha, et omaväärtused on $\lambda_1 = 9$ ja $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$. Seega vaadeldava ruutvormi kanooniline kuju on

$$9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2. \tag{3}$$

3. Leiame omaväärtusele $\lambda_1 = 9$ vastavad omavektorid:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{x_3}{2}, \\ x_2 &= x_3, \end{aligned}$$

kust lahendite fundamentaalsüsteemiks saame näiteks $a_1 = (1, 2, 2)$.

Leiame nüüd omaväärtusele $\lambda_1 = 18$ vastavad omavektorid:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad x_1 = -2x_2 - 2x_3,$$

kust lahendite fundamentaalsüsteemiks saame $a_2 = (-2, 1, 0)$, $a_3 = (-2, 0, 1)$.

4. Ortogonaliseerime omavektorid a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 = (1, 2, 2), \\
b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - 0 b_1 = a_2 = (-2, 1, 0), \\
b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_3 - 0 b_1 - \frac{4}{5} b_2 \\
&= (-2, 0, 1) - \left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 1\right).
\end{aligned}$$

(Märkus. See, et a_1 oli ortogonaalne vektoritega a_2 ja a_3, ei olnud juhuslik. Proovige tõestada, et nii see pidigi tulema.)

5. Arvutame $|b_1| = 3$, $|b_2| = \sqrt{5}$, $|b_3| = \sqrt{\frac{4+16+25}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ning

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{3} b_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \\
c_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} b_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \\
c_3 &= \frac{\sqrt{5}}{3} \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, -\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right).
\end{aligned}$$

Sellega oleme leidnud vektorruumi $\mathbf{R}^3$ ortonormeeritud baasi c_1, c_2, c_3, mis koosneb maatriksi A omavektoreist.

6. Kanoonilisele kujule (3) viib muutujavahetus, mille maatriks on

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$$

Vastuse kontrollimiseks peab veenduma, et

$$C^T A C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$