Ruutvormi viimisest kanoonilisele kujule

Leiame ruutvormi
$$x_1^2 + 2x_2x_3 + x_4^2. \tag{1}$$
kanoonilise kuju ja ühe muutujavahetuse, mis viib sellele kujule.
Vastava ruutfunktsionaali maatriks on

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kirjutame tema alla ühikmaatriksi ning teisendame elementaarteisenduste abil liitmaatriksi ülemist osa diagonaalmaatriksiks. Seejuures iga ridadega elementaarteisenduse JÄREL teeme täpselt saasuguse elementaarteisenduse vastavate veergudega.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}.$$

Antud juhul me kõigepealt liitsime teisele reale kolamdna rea (siis kordasime sama veergudega), siis korrutasime kolmanda rea läbi kahega (ning tegime sama ka kolmanda veeruga) ning lõpuks lahutasime kolmandast reast teise rea (seejärel tegime sama veergudega).
Üleval tekkis vaadeldava ruutfunktsionaali maatriks

$$A_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mille ruutvorm on uue (kanoonilise) baasi e' suhtes kanoonilisel kujul

$$x_1'^2 + 2x_2'^2 - 2x_3'^2 + x_4'^2. \tag{2}$$

Allpool on aga üleminekumaatriks esialgselt baasilt e kanoonilisele baasile e':

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Vastavalt definitsioonile on üleminekumaatriksi j-ndas veerus uue baasivektori e'_j koordinaadid vana baasi suhtes.)
Vahetu kontrolli abil saab veenduda, et kehtib tõepoolest ka seos

$$A_{e'} = C^T A_e C.$$

Kui X on mingi vektori koordinaadid vana baasi suhtes ning X' koordinaadid uue baasi suhtes, siis X ja X' on seotud omavahel valemiga

$$X = CX'.$$

Meie juhul

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' - x_3', \quad x_3 = x_2' + x_3', \quad x_4 = x_4'.$$

Vahetult saab veenduda, et antud muutujavhetus viib tõepoolest ruutvormi kujul (1) kanoonilisele kujule (2).