Diskreetne matemaatika I

praktikumiülesannete kogu

2019. a. kevadsemester

Sisukord

Ülesanded valinud Reimo Palm

1. Tingimuste ja olukordade analüüsimine

1. Kasutades De Morgani seadusi, pange kirja järgmiste lausete eitused, kus x on teatav reaalarv.

a) $-2 < x < 7$

b) $x \leqslant 4$ ja $x \geqslant 1$

c) $x \leqslant -1$ või $x > 2$

d) $1 > x \geqslant -3$

2. Tööealisteks loetakse inimesi vanuses 16–64. Mari kirjutas Pythonis tingimuslause, mis peaks kontrollima, kas kasutaja on tööealine või ei:

```
vanus = int(input("Mis su vanus on? "))
if not(not (vanus < 16) or (not vanus > 64)):
   print("oled tööealine")
else:
   print("ei ole tööealine")
```

See tingimuslause on aga üpris segane. Lihtsustage seda lausearvutuse samaväärsustega ja tehke kindlaks, kas see tingimuslause on õige.

3. Järgmised tingimuslaused võivad esineda mingi programmi tekstis. Pange kirja nende tingimuslausete eitused.

a) `(tellimusi > 100 and laos <= 500) or laos < 200`

b) `(tellimusi < 50 and laos > 300) or (50 <= tellimusi < 75 and laos > 500)`

4. Tehke kindlaks, kas laused 1 ja 2 väljendavad sama mõtet.

a) **Lause 1.** $x < 2$ või pole õige, et $1 < x < 3$.
Lause 2. $x \leqslant 1$ või kas $x < 2$ või $x \geqslant 3$.

b) **Lause 1.** Robert õpib korraga matemaatika ja informaatika erialal ning Pille õpib matemaatika erialal, kuid mitte korraga matemaatika ja informaatika erialal.

Lause 2. Pole nii, et Robert ja Pille õpivad mõlemad korraga matemaatika ja informaatika erialal, kuid on nii, et Pille õpib matemaatika erialal ja Robert õpib korraga matemaatika ja informaatika erialal.

5. Uue hoone turvateenistuse lepingusse on sattunud üks esmapilgul võrdlemisi raskesti arusaadav punkt:

> Alarm hakkab tööle, kui uks avatakse ja stopp-nupp pole alla vajutatud ajal, mil alarm on aktiivne, või kui ruumis on liikumine ja pole nii, et stopp-nupp on alla vajutatud või alarm pole aktiivne.

Lihtsustage seda tingimust.

6. Röövimises süüdistatuna toodi kohtu ette kolm kahtlustatavat A, B ja C. Juurdlus tegi kindlaks järgmist:

- Kui A on süütu või B on süütu, siis C on süüdi;
- Kui A on süütu, siis C on süütu.

Kas sellest järeldub, et A on süüdi?

7. Kastevalla vanim elanik Jakup Orupõld sai hiljuti saja-aastaseks ning vallalehe reporter võttis temalt intervjuu. „Mis on teie pika eluea saladus?“ tahtis reporter teada. „Ma jälgin ranget dieeti,“ vastas Jakup. „Kui ma ei joo lõunaks õlut, siis ma söön kala. Alati, kui mul on lõunaks nii õlu kui kala, ei söö ma jäätist. Kui ma söön jäätist või ei joo õlut, siis ei söö ma kala.“ Intervjueerija leidis, et vastus on võrdlemisi keeruline. Proovige seda lihtsustada ja kindlaks teha, mida Jakup Orupõld lõunaks sööb.

8. Kas järgmises tarkvaraspetsifikatsioonis antud tingimused on omavahel kooskõlalised?

> Süsteemitarkvara uuendamise ajal kasutajad failisüsteemile juurde ei pääse. Kui kasutajad pääsevad failisüsteemile juurde, siis on võimalik salvestada uusi faile. Kui pole võimalik salvestada uusi faile, siis ei uuendata ka süsteemitarkvara.

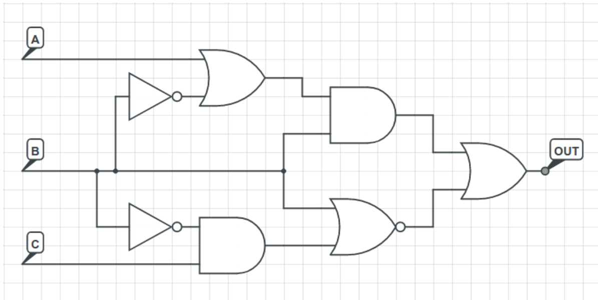
9. Masina töös esineb kahte liiki häireid: vibreerimine ja sädelemine. Ühe tunni jooksul võib kumbki nimetatud häiretest esineda kogu tunni vältel või üldse mitte esineda, vahepealset võimalust ei ole.
Masina tööd saab mõjutada juhtkangi ja kaitseseadme nupu abil. Masina olek järgmisel tunnil sõltub üheselt olukorrast eelmisel tunnil: masin vibreerib (ei vibreeri), kui ta vibreeris (ei vibreerinud) eelmise tunni jooksul; seda aga tingimusel, et sädelemise puudumisel juhtkangi sisse ei lülitatud. Kui aga juhtkang lülitati sisse ja masin vibreeris, siis nüüd masin enam ei vibreeri, ja ümberpöördult: kui juhtkang lülitati sisse ja masin ei vibreerinud, siis hakkab ta nüüd vibreerima. Edasi, kui eelmisel tunnil

vajutati nupule, siis masin hakkab või ei hakka sädelema sõltuvalt sellest, kas ta eelmise tunni jooksul vibreeris või mitte. Kui aga nupule ei vajutatud, siis masin hakkab (ei hakka) sädelema, kui ta enne ei vibreerinud (vibreeris).

Nüüd aga masin vibreerib ja sädeleb. Mida tuleks ette võtta kangi ja nupuga, et kõrvaldada järgmiseks töötunniks mõlemad häired? Mida tuleks kangi ja nupuga teha, et masin töötaks häireteta kogu aeg?

10*. Joonisel toodud elektroonikaskeemil on kolm sisendit (A, B ja C) ja üks väljund (OUT). Eesmärk on skeem realiseerida võimalikult vähese arvu integraallülitustega. Kasutada on tabelis toodud integraallülitused.

Tähis	Sisu
74HC00	Neli NAND-väravat
74HC02	Neli NOR-väravat
74HC04	Kuus NOT-väravat
74HC08	Neli AND-väravat
74HC32	Neli OR-väravat



Joonistage skeem ümber nii, et ta teeks loogiliselt sama tööd, mis algne skeem, ning kasutatavate integraallülituste arv oleks vähim võimalik. Näiteks, joonisel toodud skeemi jaoks läheks vaja nelja integraallülitust: 74HC02 (kasutuses üks värav neljast), 74HC04 (kasutuses kaks väravat kuuest), 74HC08 (kasutuses kaks väravat neljast), 74HC32 (kasutuses kaks väravat neljast).

2. Tõesuspuu meetod

11. Kontrollige tõesuspuu meetodil, kas valem on kehtestatav.

a) $\neg A \wedge \neg(A \Rightarrow B)$

b) $(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \neg(A \vee C)$

c) $\neg(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \wedge C \Leftrightarrow B)$

12. Kontrollige tõesuspuu meetodil, kas valem on samaselt tõene.

a) $\neg(\neg B \vee A) \vee (A \Rightarrow B)$

b) $\neg(\neg A \vee \neg B \wedge A) \Rightarrow (B \vee C)$

c) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

d) $(A \Leftrightarrow C \vee \neg A \Rightarrow B) \vee C$

13. Täitke järgmine tabel.

Ülesanne	Tõesuspuu tippu kirjutame	Järeldus, kui igas harus on vastuolu	Järeldus, kui mõnes harus pole vastuolu
Kas $\mathcal{F}$ on kehtestatav?			
Kas $\mathcal{F}$ on samaselt tõene?			
Kas $\mathcal{F}$ on samaselt väär?			

14. Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ kohta on teada, et valem $\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ ei saa olla samaselt tõene ega ka mitte samaselt väär. Kas siit saab midagi järeldada valemi $\mathcal{F}$ liigi kohta ja kui saab, siis mida?

15. Arvutis on realiseeritud lausearvutuse valemite samaselt tõesuse kontrollija, mis teeb kindlaks, kas etteantud valem on samaselt tõene või mitte. Arvutisse sisestati kaks valemit, mille üldkuju oli $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ ja $\neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, ning kontrollija teatas vastuseks, et kumbki neist valemeist ei ole samaselt tõene. Mida saab sellest järeldada valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ liigi kohta?

16. Tehke kindlaks, kas kehtivad järgmised järeldumised.

a) $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C,\ \neg C \vDash \neg A$

b) $A \vee B,\ \neg B,\ C \Rightarrow \neg A \vDash \neg C$

c) $A \vee B,\ \neg A \vee C,\ \neg B \vDash C$

d) $A \vee B \wedge C,\ A \vee B \Rightarrow D \vDash C \vee D$

17. Teisendage iga arutluskäik sümbolkujule ja seejärel tehke kindlaks, kas ta on korrektne. Kui arutluskäik ei ole korrektne, siis tooge kontranäide lausemuutujate konkreetsete väärtustega.

a) Kui ma oleksin lehm, siis ma sööksin rohtu. Ma ei ole lehm, järelikult ma ei söö rohtu.

b) Sa ei saa olla korraga rikas ja õnnelik. Järelikult oled sa kas mitterikas või mitteõnnelik. Praegu aga oled sa õnnelik. Järelikult sa ei ole rikas.

c) Mina olen tark, kui sina oled rumal. Päike loojub idas või sina oled rumal. Aga päike ei saa korraga tõusta idast ja idas loojuda, pane tähele, et päike tõuseb idast. Järelikult mina olen tark ja sina oled rumal.

d) Kui Smith ei kohanud tol ööl Jonesi, siis kas kurjategija oli Jones või Smith valetab. Kui Jones polnud kurjategija, siis Smith ei kohanud tol ööl Jonesi ja sissemurdmine toimus pärast keskööd. Kui sissemurdmine toimus pärast keskööd, siis kas kurjategija oli Jones või Smith valetab. Kas nendest andmetest piisab järelduseks, et kurjategija oli Jones?

e) Kui lause A on väär, siis lause B on tõene. Kui lause C on tõene, siis lause D või E on tõene. Kui lause D on tõene, siis lause C on väär. Kui lause A on tõene, siis lause E on väär. Järelikult kui lause C on tõene, siis lause B on samuti tõene.

f) Kui sina tantsid, siis Jaana tantsib
ja Liina tantsib ka.
Kui Liina tantsib, siis Miina tantsib
ja Tiina ning sina ka.
Ent Tiina ja Niina ei tantsi,
sest nukrus on haaranud nad.
Seega Miina või Riina tantsib
ilma sinu ja Jaanata.

18. Keskaja skolastikud vaidlesid palju küsimuse üle, kas jumal on olemas või mitte. Et lihtsad kinnitamised stiilis „on“ või „ei ole“ vastaspoolt veenda ei suutnud, püüdsid nad oma väidet tõestada. Nii tekkis mitmeid argumenteeritud arutluskäike, mis loogiliste sammude teel jõudsid jumala olemasolu suhtes ühele või teisele järeldusele. Vaatleme ühte sellist arutluskäiku.
Kurjuse probleem. Oletame, et kehtivad väited

1) Kui on olemas kurjus, siis kas jumal ei taha seda ära hoida või ta ei saa seda ära hoida.
2) Kui jumal on kõikvõimas, siis ta saab kurjust ära hoida.
3) Kui jumal on hea, siis ta tahab kurjust ära hoida.
4) Kui jumal eksisteerib, siis ta on kõikvõimas ja hea.
5) Kurjus eksisteerib.

Tõestage, et nendest väidetest järeldub, et jumalat pole olemas.

3. Valemite teisendamine

19. Ülesanded arvutis (teisendus.zip).

20*. Tehke kindlaks, kas iga lausearvutuse valemi jaoks leidub samaväärne valem, kus kas ei esine ühtegi eitust või ainus eitus esineb terve valemi ees. Kui vastus on „jah“, siis tõestage seda. Kui vastus on „ei“, siis tooge näide vastavast valemist ning põhjendada, miks sellisel valemil niisugust kuju ei leidu.

4. Normaalkujud

21. Leidke valemite täielik disjunktiivne normaalkuju.

a) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \wedge \neg A$

b) $\neg A \Rightarrow B \vee C \Leftrightarrow A$

c) $\neg(A \Rightarrow C \wedge A) \wedge (\neg B \Leftrightarrow A \Rightarrow B)$

22. Leidke eelmise ülesande valemite täielik konjunktiivne normaalkuju.

23. a) Defineerige täielik elementaardisjunktsioon.

b) Defineerige täielik konjunktiivne normaalkuju.

c) Defineerige täielik disjunktiivne normaalkuju.

24. Antud on valemite $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ täielikud disjunktiivsed normaalkujud. Kuidas kontrollida nende normaalkujude järgi, kas

a) valem $\mathcal{F}$ on samaväärne valemiga $\mathcal{G}$

b) valemist $\mathcal{F}$ järeldub valem $\mathcal{G}$

c) valemist $\mathcal{F}$ ei järeldu valem $\mathcal{G}$

d) valem $\mathcal{F}$ on samaselt tõene

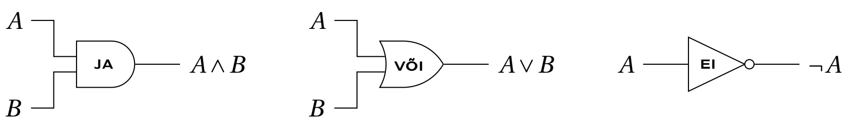
25. Auditooriumi tulesid saab lülitada kahest kohast: laua juurest ja ukse juurest. Muutes emma-kumma lüliti asendi vastupidiseks, saab kas lülitada tuled välja, kui nad on sees, või sisse, kui nad on väljas. Kui mõlemad lülitid on alumises asendis, siis on tuled väljas. Koostage valem, mis sõltuvalt lülitite asendist näitab, kas tuled on sees või väljas.

26. Hoone kütmiseks on sinna paigaldatud kaks küttekeha: suurem võimsusega 3000 W ja väiksem võimsusega 1200 W. Küttekehad peavad töötama vastavalt välistemperatuurile järgmiselt:

- kui välistemperatuur on kõrgem kui 0 °C, siis peavad mõlemad küttekehad olema välja lülitatud;
- kui välistemperatuur on −6 °C ja 0 °C vahel, siis peab väiksem küttekeha olema sisse lülitatud ja suurem välja lülitatud;
- kui välistemperatuur on −12 °C ja −6 °C vahel, siis peab suurem küttekeha olema sisse lülitatud ja väiksem välja lülitatud;
- kui välistemperatuur on madalam kui −12 °C, siis peavad mõlemad küttekehad olema sisse lülitatud.

Välistemperatuuri fikseerimiseks on hoone välisseinale kinnitatud kolm andurit 1, 2 ja 3. Seejuures andur 1 annab signaali (lülitub sisse), kui temperatuur langeb alla 0 °C, andur 2 annab signaali, kui temperatuur langeb alla −6 °C ja andur 3 annab signaali, kui temperatuur langeb alla −12 °C. Koostage valemid, mis näitavad kummagi küttekeha töötamist või mittetöötamist sõltuvalt andurite saadetud signaalidest.

27. *Kahendarvude liitmine.* Loogikaskeemid pannakse kokku loogikaelementidest, millest igaüks sooritab oma sisenditega elementaarseid lausearvutuse tehteid. Levinud loogikaelemendid vastavad näiteks konjunktsioonile, disjunktsioonile ja eitusele:



Poolsummaator on loogikaskeem, mille sisendiks on kahendnumbrid A ja B ning väljundiks nende numbrite summa viimane koht S ja liitmisel tekkiv ülekanne K. *Täis-*

summaator on loogikaskeem, mille sisendiks on kahendnumbrid A ja B ning eelmisest järgust tekkinud ülekanne C ning väljundiks nende kolme numbri summa viimane koht S ja tekkiv ülekanne K.

a) Panna ülaltoodud loogikaelementidest kokku poolsummaator.
b) Panna ülaltoodud loogikaelementidest kokku täissummaator.
c) Olgu antud kahendarvud $A_1A_2A_3$ ja $B_1B_2B_3$. Koostage loogikaskeem, mis sisendite A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 põhjal annab väljundiks nende kahendarvude summa kahendkohad S_1, S_2, S_3 ja liitmisel tekkiva ülekande K.

28. Lahendage keskkonnas `http://loogika.cs.ut.ee/truthtable/` ülesandekogu „Diskreetne matemaatika I – Valemi koostamine".

5. Predikaadid ja kvantorid

29.
a) Olgu $P(x)$ = „$x > 3$". Millise tõeväärtusega on laused $P(4)$, $P(3)$, $P(2)$?
b) Olgu $Q(x, y)$ = „$x = y+3$". Millise tõeväärtusega on laused $Q(1,4)$, $Q(3,0)$?
c) Olgu $R(x, y, z)$ = „$z + y = x$". Millise tõeväärtusega on laused $R(1,2,3)$, $R(1,0,0)$?

30. Kõigi täisarvude hulgal on antud predikaat $Q(x)$ = „$x + 1 > 2x$". Leidke järgmiste valemite tõeväärtused.

a) $Q(1)$
b) $Q(-1)$
c) $\exists x Q(x)$
d) $\forall x Q(x)$
e) $\exists x \neg Q(x)$
f) $\forall x \neg Q(x)$

31. Täitke järgmine tabel.

Valem	**Valem on tõene, kui**	**Valem on väär, kui**
$\forall x Q(x)$	__________ a puhul $Q(a)$ = _	__________ a puhul $Q(a)$ = _
$\exists x Q(x)$	__________ a puhul $Q(a)$ = _	__________ a puhul $Q(a)$ = _

32. Olgu $L(x)$ = „x on käinud Lätis" ning indiviidide piirkond kõigi selles klassis viibivate tudengite hulk. Mida tähendavad järgmised valemid?

a) $\exists x L(x)$
b) $\forall x L(x)$
c) $\neg\exists x L(x)$
d) $\exists x \neg L(x)$
e) $\neg\forall x L(x)$
f) $\forall x \neg L(x)$
g) $\neg\exists x \neg L(x)$
h) $\neg\forall x \neg L(x)$

33. Olgu $J(x)$ = „x on jänes" ja $H(x)$ = „x hüppab", kusjuures indiviidide piirkond on kõigi loomade hulk. Pange järgmised valemid kirja sõnalisel kujul.

a) $\forall x(J(x) \Rightarrow H(x))$

b) $\forall x(J(x) \wedge H(x))$

c) $\exists x(J(x) \Rightarrow H(x))$

d) $\exists x(J(x) \wedge H(x))$

34. Võtke kasutusele predikaadid ja pange lause kirja predikaatarvutuse valemiga. Püüdke lause struktuuri väljendada võimalikult täpselt. (Proovige erinevate põhihulkadega.)

a) Iga hobune on neljajalgne, kuid mõni neljajalgne pole hobune.
b) Mitte kõik linnud ei oska lennata.
c) Mitte ükski poliitik pole aus.
d) Kõik on hea, mis hästi lõpeb.
e) Kõik kalad, välja arvatud haid, on lahked laste vastu.
f) Mõni on teravmeelne ainult siis, kui ta on purjus.
g) Igaüks, kes on lärmakas, häirib kõiki teisi peale iseenda.
h) Iga inimene on paremal järjel kui mõni teine.

Märkus. Eesti keeles tähendab topelteitus sama, mis ühekordne eitus. Näiteks laused „Mitte ükski poliitik pole aus“ ja „Ükski poliitik pole aus“ tähendavad üht ja sedasama.

35. Pange järgmised laused kirja predikaatarvutuse valemiga, kus predikaadid on määratud kõigi inimeste hulgal.

a) Igaühel selle rühma tudengitest on mobiiltelefon.
b) Keegi selle rühma tudengitest on käinud Austraalias.
c) Selles rühmas leidub tudeng, kes ei oska ujuda.
d) Kõik selle rühma tudengid oskavad lahendada ruutvõrrandit.
e) Mõni tudeng selles rühmas ei taha saada rikkaks.

36*. Leidke mõne oma õpitava matemaatika või informaatika aine materjalidest lause, kus ei esine ilmutatult üldisuskvantorit, aga mis on sisu poolest üldväide ning kus üldisuskvantor on järeldatav.

a) Esitage see lause koos aine nime ja täielike tsiteerimisandmetega (materjali pealkiri, autor, aasta, leheküljenumbrid).
b) Sõnastage see lause kujul, kus esineb ilmutatult üldisuskvantor.
c) Pange see lause kirja predikaatarvutuse valemiga.

6. Predikaadid ja kvantorid

37. Kõigi loomade hulgal on antud predikaadid $K(x)$ = „x on koer“ ja $H(x)$ = „x haugub“. Väljendage järgmised väited predikaatarvutuse valemiga.

a) Kõik koerad hauguvad.

b) Mitte ükski koer ei haugu.

c) Mõni koer haugub.

d) Mõni koer ei haugu.

38. Kõigi inimeste hulgal on antud predikaat $A(x, y)$ = „x armastab y-t“. Pange järgmised väited kirja predikaatarvutuse valemiga.

a) Igaüks armastab kedagi.

b) Leidub keegi, keda kõik armastavad

c) Pole kedagi, keda ei armastata.

d) Leidub vastuseta armastust.

e) Igaüks armastab kedagi armunut.

f) Kõik armunud armastavad iseennast.

39. Eeldame, et predikaat $P(x)$ on määratud lõplikul hulgal $\{1,2,3\}$. Kirjutage järgmised valemid lahti konjunktsioonide, disjunktsioonide ja eituste kaudu.

a) $\exists x P(x)$

b) $\forall x P(x)$

c) $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$

d) $\forall x (x < 3 \wedge P(x))$

e) $\forall x (x \neq 2 \Rightarrow P(x))$

40. Hulgal $\{0, 1, \ldots, 999\}$ on defineeritud predikaat $P(x)$, mis iga selle hulga elemendi puhul tagastab mingi tõeväärtuse. Järgmine Pythoni programm kontrollib, kas valem $\exists x P(x)$ on tõene:

```
vastus = False
for x in range(1000):
    if P(x) == True:
        vastus = True
        break
if vastus == True:
    print("Valem on tõene")
```

Koostage programm, mis kontrollib, kas valem $\exists x P(x)$ on väär.

41. Lahendage arvutiülesanded ülesandekogust `kvantorid.pyk`. Juhised asuvad Moodle'is.

7. Väidete väljendamine

42. Leidke järgmiste valemite tõeväärtus, kui põhihulk on reaalarvude hulk $\mathbb{R}$.

a) $\exists x (x = -x)$

b) $\forall x (2x \geqslant x)$

c) $\forall x (x^2 \geqslant x)$

d) $\forall x \exists y (x^2 < y)$

e) $\exists x \forall y (xy = y)$

f) $\forall x \exists y (x = y^2)$

g) $\exists x \forall y (x^2 > y)$

h) $\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (xy = 1))$

i) $\exists x \forall y (y \neq 0 \Rightarrow xy = 1)$

j) $\exists x \exists y (x + y = 4 \wedge x - y = 1)$

k) $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$

43. Olgu interpretatsiooni kandja hulk $\mathbb{N}$ ja signatuur $\langle 0,1;+,\cdot;=\rangle$, sümbolite interpretatsioon standardne. Väljendage järgmised predikaadid ja väited. (Kõik väited tuleb väljendada ainult signatuuris antud sümboleid ja loogikatehteid kasutades.)

a) $x - y = z$
b) $x \big/ y = z$
c) x on paarisarv
d) x on paaritu arv
e) x lõpeb 3-ga
f) x on täisruut
g) $x \leqslant y$
h) $x < y$
i) x jagub y-ga
j) x on algarv
k) jagatise $x \big/ y$ täisosa on z
l) jääk x jagamisel y-ga on z
m) $\text{SÜT}(x,y) = z$
n) $\text{VÜK}(x,y) = z$
o) x on arvu 2 aste
p) $x^y = z$

44. Matemaatilistes tekstides esineb sageli lauseid, kus objektilt nõutakse lisaks vajalikule omadusele veel mõne lisatingimuse täidetust. Näiteks nõutakse, et otsitav objekt oleks ainus või vähim vms. Olgu $P(x)$ naturaalarvude hulgal määratud predikaat, mis esitab teatavat arvude omadust P. Väljendage järgmised laused valemiga signatuuris $\langle 0,1;+,\cdot;=,P(x)\rangle$.

a) Leidub täpselt üks arv, millel on omadus P
b) x on vähim arv, millel on omadus P
c) Kõigil arvudel vahemikus x-st y-ni on omadus P
d) Arve, millel on omadus P, on lõpmata palju

45. Järgnev definitsioon määratleb, mida tähendab lause „funktsiooni f piirväärtus kohal a on reaalarv L“.

> Iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline reaalarv $\delta > 0$, et iga reaalarvu x puhul kehtib: kui $0 < |x-a| < \delta$, siis $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Olgu põhihulgaks reaalarvude hulk. Eeldame, et signatuur sisaldab kõiki selles definitsioonis esinevaid matemaatilisi sümboleid.

a) Väljendage eeltoodud definitsioon predikaatarvutuse valemiga.
b) Väljendage ja lihtsustada lause: „Funktsioonil f kohal a reaalarvulist piirväärtust ei leidu.“

46*. Olgu antud signatuur $\sigma = \langle ;;P\rangle$, kus P on ühekohaline predikaatsümbol. Leidke signatuuri σ valem F, mis pole samaselt tõene, aga mille puhul valem $\exists x F$ on samaselt tõene.

8. Interpretatsioonide koostamine

47. Leidke järgmistele üldisuskvantoriga algavatele väidetele kontranäited, kui valemid on määratud kõigi täisarvude hulgal.

a) $\forall x(2x+1 \geqslant x)$

b) $\forall x(x>0 \vee x<0)$

c) $\forall x \forall y(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

d) $\forall x \forall y(xy \geqslant x)$

e) $\forall x \forall y(x^2 \neq y^3)$

f) $\forall x \exists y(x < y^2 \wedge y^2 < x+100)$

48. a) Defineerige predikaat.

b) Defineerige interpretatsioon.

49. Leidke valemi $\exists x \forall y(x \leqslant y^2)$ tõeväärtus, kui sümboleid interpreteeritakse tavalises tähenduses ja interpretatsiooni kandja on

a) positiivsete reaalarvude hulk

b) täisarvude hulk

c) nullist erinevate täisarvude hulk

50. Leidke valemi $\forall x \exists y(xy = 1)$ tõeväärtus, kui sümboleid interpreteeritakse tavalises tähenduses ja interpretatsiooni kandja on

a) nullist erinevate reaalarvude hulk

b) nullist erinevate täisarvude hulk

c) positiivsete reaalarvude hulk

51. Lahendage arvutiülesanded ülesandekogust `interpret.pyk`. Juhised asuvad Moodle'is.

9. Väljendamine II

52. Määrake valemi liik (samaselt tõene, samaselt väär, kehtestatav).

a) $\forall x(\neg A(x) \vee \neg B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x))$

b) $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg \exists y(P(y) \Rightarrow Q(x,y)))$

c) $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)) \wedge \forall x(Q(x) \vee R(x)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

53. Tehke kindlaks järgmiste valemite ja lausete vabad muutujad.

a) $\exists x\, I(x) \wedge A(x)$

b) $\forall x\, T(x,y) \wedge \exists z T(x,z)$

c) $\forall x \forall y(A(x) \wedge I(x) \wedge \neg A(y) \wedge I(y)) \Rightarrow T(x,y)$

d) Iga reaalarvu x puhul, mis on suurem kui y, kehtib $x(x+1) > y$.

e) Arvude x ja y vahel leidub arv z nii, et $|x-z| = |y-z|$.

f) Pole olemas arve x ja y, mille puhul $x^2 + y^2 = -1$.

54. Olgu interpretatsiooni kandja $\mathbb{N}$ ja signatuur $\langle 0,1;+,\cdot;=\rangle$. Väljendage järgmised laused predikaatarvutuse valemiga.

a) x jagub kahe erineva paarisarvuga

b) x jagub kõigi y-st väiksemate positiivsete arvudega

c) Sellest, et kahe arvu summa on paarisarv, ei järeldu, et mõlemad arvud on paarisarvud

d) Arvude x ja y viimaste numbrite summa on 5

e) Ühegi arvu ruut ei anna 3-ga jagamisel jääki 2

f) Arvude x ja y vahel, kus $x < y$, leidub täpselt üks täisruut

g) x on suurim algarv, millega y jagub

55. Olgu interpretatsiooni kandja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (naturaalarvude hulga kõigi alamhulkade hulk) ja signatuur $\langle\,;\,;\subseteq\rangle$. Väljendage järgmised predikaadid.

a) $X = Y$

b) $X = \mathbb{N}$

c) $X = \varnothing$

d) $X \cap Y = Z$

e) $X \cup (Y \cap Z) = W$

f) $X \cap Y = \varnothing$

g) $X' = Y$

h) $X \setminus Y = Z$

i) $|X| = 1$

j) $|X| = 2$

56. Kõigi täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$ on antud järgmised predikaadid: $N(x)$ = „x on naturaalarv“, $A(x)$ = „x-l on omadus A“ ja $V(x, y)$ = „x on väiksem kui y“. Avaldage järgmine lause predikaatarvutuse valemiga:

> Kui leidub naturaalarv, millel on omadus A, siis kõigi nende naturaalarvude hulgas, millel on omadus A, leidub vähim naturaalarv.

57. Jaan korraldab peo ja kutsus sinna kõik sõbrad. Väljendage järgmised laused predikaatarvutuse valemiga (põhihulgaks kõigi sõprade hulk).

a) Kui kõik sõbrad tulevad peole, siis Jaan peame ostma rohkem toitu.

b) Leidub selline sõber, et kui ta tuleb peole, siis Jaan peame ostma rohkem toitu.

Nendele lausetele vastavad valemid tulevad loogiliselt samaväärsed vastavalt predikaatarvutuse põhisamaväärsuste 4. rühma teisele samaväärsusele. Kuid on ilmne, et eesti keeles ei tähenda need laused sama asja. Selgitada, mis siin toimub. Kas lausetele vastavad valemid on ikka õiged?

58*. Kui on antud kolme vaba muutujaga predikaat $P(x, y, z)$, siis muutujate kvantorite abil sidumiseks on $48 = 6 \cdot 8$ võimalust: muutujate erinevaid järjestusi on 6 ning kvantorite valikuid muutujate ette on $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, näiteks $\forall x\, \exists z\, \forall x\, P(x, y, z)$ on üks selline valik. Samas on mõned kvantorite ja järjestuste valikute abil saadavatest lausetest ilmselt loogiliselt samaväärsed ning mõned ilmselt seotud implikatsiooniga, seda suvalise predikaadi $P(x, y, z)$ korral.
Kui fikseerime predikaadi $P(x, y, z)$, st fikseerime hulga, kust muutujad x, y, z pärinevad ning tõeväärtused igal muutujate väärtustusel, siis saame vaadelda neid 48 viisi, kuidas muutujaid kvantoritega siduda. Fikseeritud predikaadi jaoks annab igaüks neist mingi tõeväärtuse 0 või 1. Seega iga predikaadi jaoks saame 48-elemendilise

järjendi, mille elemendid on arvud 0 või 1 ning mille iga konkreetses positsioonis olev arv vastab konkreetsele sidumisele kvantorite abil – teisisõnu järjendi positsioonid on indekseeritud paaridega muutujate järjestustest ning kvantorite valikutest.
Leidke, mitu neist 48-elemendilistest 0-1-järjenditest on saavutatavad, kui predikaate saab vabalt fikseerida. (Ülesannet võib lahendada arutelu teel või programmi koostamise teel.)

10. Tõesuspuu predikaatarvutuses

59. Tehke kindlaks, kas valem on samaselt tõene, samaselt väär või ei kumbki.

a) $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$

b) $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B(x))$

c) $\exists x(\neg \forall y(P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge \neg P(x))$

60. Predikaatarvutuses kehtib teatavasti distributiivsuse seadus üldisuskvantori ja konjunktsiooni vahel ning olemasolukvantori ja disjunktsiooni vahel. Selles ülesandes uurime, kas predikaatarvutuses kehtib ka distributiivsuse seadus üldisuskvantori ja implikatsiooni vahel.

a) Kirjutage välja uuritava seaduse vasak pool ja parem pool.

b) Tehke kindlaks, kas vasakust poolest järeldub parem pool.

c) Tehke kindlaks, kas paremast poolest järeldub vasak pool.

d) Kas distributiivsus üldisuskvantori ja implikatsiooni vahel kehtib?

61. Tehke kindlaks, kas kehtivad järgmised järeldumised.

a) Kõik noorpoliitikud on aktivistid. Mõned aktivistid on igorandid. Järelikult mõned noorpoliitikud on ignorandid.

b) Mõned tuulelohed ei suuda lennata. Mõned objektid, mis suudavad lennata, on aerodünaamilised. Järelikult mõned tuulelohed ei ole aerodünaamilised.

c) Mõned asjad on vilkuvad ja mõned siravad. Kõik vilkuvad ja siravad asjad on helkivad. Kõik asjad, mis on siravad ja helkivad, on küütlevad. Järelikult mõned asjad on küütlevad.

62. Avage programmiga `pred.zip` ülesandekogu `prakt10.pyk` ning koostage eelmise ülesande iga sellise osaülesande kohta, kus järeldumine ei kehti, interpretatsioon, milles eeldused on tõesed, aga väide väär.

63. On teada järgmised faktid.

1. Kõik rohelised draakonid oskavad lennata.
2. Iga draakon on õnnelik, kui kõik tema lapsed oskavad lennata.
3. Draakon on roheline, kui ta on vähemalt ühe rohelise draakoni laps.

Tõestage, et kõik rohelised draakonid on õnnelikud.

64. *Habemeajaja paradoks.* Tooge sisse sobivad predikaatsümbolid ja pange järgmised laused kirja predikaatarvutuse valemitega.

a) Iga habemeajaja ajab habet kõigil neil, kes ise endal habet ei aja.
b) Ükski habemeajaja ei aja habet kellelgi, kes ise endal habet ajab.

Tõestage, et nendest lausetest järeldub lause

c) Habemeajajaid pole olemas.

11. Samaväärsuste kasutamine

65. Leidke lausete eitused ja lihtsustada neid predikaatarvutuse põhisamaväärsuste abil.

a) Leidub arv, mis on väiksem kui ükskõik milline positiivne arv.
b) Iga positiivse arvu jaoks leidub temast väiksem positiivne arv.
c) Igas külas leidub elanik, kes tunneb iga ülejäänud elanikku selles külas.
d) Leidub küla, kus vähemalt ühte elanikku ei tunne ükski selle küla elanik.

66. Kas järgmised laused väljendavad sama mõtet?

a) 1) Inimesed pole loomad
   2) Loomad pole inimesed
b) 1) Mõned poliitikud pole inimesed.
   2) Mõned inimesed pole poliitikud.
c) 1) Ei leidu fakti, mida ei saa kontrollida.
   2) Ühtegi fakti ei saa kontrollida.
   3) Leidub fakt, mida saab kontrollida.
   4) Kõiki fakte saab kontrollida.
   5) Pole nii, et kõiki fakte saab kontrollida.
d) 1) Iga kodanik on rikkunud mõnda seadust.
   2) Ei leidu kodanikku, kes ei ole rikkunud ühtegi seadust.
   3) Ei leidu kodanikku, kes ei ole rikkunud kõiki seadusi.
   4) Ei leidu seadust, mida pole rikkunud ükski kodanik.
   5) Ei leidu seadust, mida pole rikkunud kõik kodanikud.

67. Teie sõber väidab, et temale kvantoritest $\forall$ ja $\exists$ ei piisa, vaid vaja oleks veel kvantoreid. Siis saaks näiteks väljendada fraase „mitte ühegi puhul“, „täpselt ühe puhul“ ja „kõigi, välja arvatud ühe puhul“. Näiteks lause „Mitte ühegi x puhul pole $x^2 < 0$“. Mida peaks talle vastama?

68. Lahendage programmiga `teisendus` predikaatarvutuse valemite teisendamise ülesanded ülesandekogust `dmpredteis.ylk`. Juhised asuvad Moodle'is.

69*. a) Olgu signatuur $\sigma = \langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$ ja vaatleme standardset interpretatsiooni reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Väljendage predikaat $x \leqslant y$.

b) Olgu signatuur $\sigma = \langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$ ja vaatleme standardset interpretatsiooni täisarvude hulgal $\mathbb{Z}$. Väljendage predikaat $x \leqslant y$.

12. Tõestamine interpretatsioonide abil

70. Teatavasti tekib predikaatarvutuse valemile tõeväärtus alles siis, kui on määratud interpretatsioon. Vaatleme valemit

$$\forall y \exists x (A(x) \wedge B(x, y)).$$

Leidke selle valemi tõeväärtus järgmistes interpretatsioonides.

a) Kandja $\mathbb{N}$ ning $A(x) =$ „x on algarv“, $B(x, y) =$ „$x > y$“.

b) Kandja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ning $A(x) =$ „x on üheelemendiline“, $B(x, y) =$ „$x \subseteq y$“.

c) Kandja $\mathbb{Z}^+$ ning $A(x) =$ „x on paarisarv“, $B(x, y) =$ „x on y-i tegur“.

71. Olgu interpretatsiooni kandjaks kolmeelemendiline hulk $\{a, b, c\}$. Mitmel viisil saab interpreteerida

a) konstantsümbolit

b) ühekohalist predikaatsümbolit

c) kahekohalist predikaatsümbolit

d) kahekohalist funktsionaalsümbolit?

72. Tõestage, et

a) valemid $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ ja $\forall x (A(x) \vee B(x))$ ei ole samaväärsed;

b) valemid $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ ja $\forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$ on samaväärsed.

73. Tõestage vahetu arutlusega, et kehtivad järgmised järeldumised.

a) $\forall x (P(x) \Rightarrow \neg Q(x)), \forall x (R(x) \Rightarrow Q(x)) \vDash \forall x (P(x) \Rightarrow \neg R(x))$

b) $\exists x (P(x) \wedge R(x)), \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vDash \exists x (R(x) \wedge \neg Q(x))$

c) $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \vDash \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$

d) $\exists x \exists y \exists z \neg (P(x) \vee P(y) \Rightarrow P(z)) \vDash \exists a P(a)$

74. Tehke kindlaks, kas esimesest valemist järeldub teine ja kas teisest valemist järeldub esimene. Põhjendage vastuseid interpretatsioonide abil. Kas valemid on samaväärsed?

a) $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x) \wedge C(x))$ ja $\neg \forall x (C(x) \Rightarrow \neg A(x) \vee B(x))$

b) $\neg \exists x (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$ ja $\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x Q(x)$

75. Kirjutage järgmise tabeli igasse lahtrisse, kas kehtib distributiivsuse seadus selle kvantori ja tehte vahel.

	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\forall$				
$\exists$				

13. Väidete tõestamine I

76. Tehke kindlaks, kas tõestus on korrektne. Kui ei, siis selgitage, mis on valesti.

a) **Eeldus.** Igale poisile meeldib mõni tüdruk.
Väide. Leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.

Tõestus. Eeldame, et igale poisile meeldib mõni tüdruk. Olgu a vabalt valitud poiss. Eelduse põhjal meeldib a-le mõni tüdruk. Olgu see tüdruk b. Kuna poiss a oli valitud vabalt, siis võime seda arutelu korrata iga poisi puhul. Järelikult igale poisile meeldib tüdruk b. Järelikult leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.

b) **Eeldus.** Leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele.
Väide. Igale poisile meeldib mõni tüdruk.

Tõestus. Eeldame, et leidub tüdruk, kes meeldib kõigile poistele. Olgu c selline tüdruk. Olgu d vabalt valitud poiss. Meil on vaja tõestada, et d-le meeldib mõni tüdruk. Teame, et kõigile poistele meeldib c. Järelikult ka d-le meeldib c. Järelikult leidub tüdruk, kes d-le meeldib. Kuna d oli valitud vabalt, siis saame, et igale poisile meeldib mõni tüdruk.

c) **Väide.** On olemas maksimaalselt üks inimene.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et on olemas rohkem kui üks inimene. Valime vabalt inimese e. Siis leidub selline inimene f, et $f \neq e$. Kuna e oli valitud vabalt, siis kehtib $\forall x(f \neq x)$. Üldisuskvantori mõiste põhjal saame siit $f \neq f$. Kuid samal ajal $f = f$. Oleme jõudnud vastuolule. Järelikult ei saa rohkem kui ühte inimest olemas olla.

d) **Eeldus 1.** Valner imetleb ainult neid suuri näitlejaid, kes ei imetle iseennast.
Eeldus 2. Valner imetleb kõiki neid suuri näitlejaid, kes ei imetle iseennast.
Väide. Valner ei ole suur näitleja.

Tõestus. Oletame, et Valner on suur näitleja. Valner kas imetleb iseennast või ei imetle. Näitame, et mõlemad juhud viivad vastuolule, mistõttu meie oletus, et Valner on suur näitleja, peab olema väär. Kõigepealt eeldame, et Valner imetleb iseennast. Esimese eelduse ja meie oletuse, et Valner on suur näitleja, põhjal Valner ei imetle iseennast, mis on vastuolu. Teisel juhul eeldame, et Valner ei imetle iseennast. Kuid siis teisest eeldusest ja meie oletusest, et Valner on suur näitleja, järeldub, et Valner imetleb iseennast. Seega mõlemal juhul saame vastuolu.

77. Tõestage vahetu arutlusega, et kehtivad järgmised järeldumised

a) $\exists x(B(x) \Rightarrow C(x)), \forall x B(x) \vDash \exists x C(x)$

b) $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x) \vDash \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$

c) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \vDash \exists x \neg B(x) \Rightarrow \neg \forall x A(x)$

d) $\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x Q(x) \vDash \exists x (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

78. Süllogism *Festino* on arutlusskeem, mis väljendub järgmises arutluses.

> Kui ükski lind pole neljajalgne ja leidub elusolend, kes on neljajalgne, siis leidub elusolend, kes pole lind.

Pange see süllogism kirja predikaatarvutuse valemitega ja tõestada, et süllogism on korrektne.

79. Tõestage süllogismi *Celarent* korrektsus:

> Kui ükski roomaja ei ole karvane ja kõik maod on roomajad, siis ükski madu ei ole karvane.

80. Järgmised arutluskäigud on võetud Lewis Carrolli (tuntud ka kui raamatu „Alice imedemaal“ autor) teosest „Symbolic Logic“ (1896). Pange need arutluskäigud kirja valemkujul ja tõestage, et nad on korrektsed.

a) Lapsed on ebaloogilised. Me ei põlasta kedagi, kes saab jagu krokodillist. Me põlastame kõiki, kes on ebaloogilised. Järelikult ükski laps ei saa jagu krokodillist.

b) Ükski part ei oska tantsida valssi. Ükski ohvitser ei lükka tagasi kutset valsile. Kõik minu kodulinnud on pardid. Järelikult minu kodulinnud pole ohvitserid.

81. Arutluskäigu korrektsus või mittekorrektsus sõltub tihti sellest, kuidas mingit mittemõttelist lauset mõistetakse. Järgmises arutluskäigus on esimene eeldus kahemõtteline. Teisendage see arutluskäik valemkujule kahel viisil. Esimesel juhul eeldustest järeldub väide. Tõestage seda vahetu arutlusega. Teisel juhul ei järeldu. Kirjeldage olukorda, kus eeldused on tõesed, aga väide väär.

> Igaüks imetleb mingit punapead.
> Igaüks, kes imetleb iseennast, on ülbe.
> ---
> Järelikult keegi punapea on ülbe.

82. Vaatleme järgmist arutluskäiku.

> Kui antud indiviidi eellase iga eellane on alati ka antud indiviidi eellane ja ükski indiviid pole iseenda eellane, siis peab leiduma keegi, kellel pole eellasi.

Kas see arutluskäik on korrektne?

83. Tõestage, et eeldustest järeldub väide.

Iga hulga X puhul leidub hulk Y, mille võimsus on suurem kui hulga X võimsus.
Kui hulk X kuulub hulka Y, siis hulga X võimsus ei ole suurem kui hulga Y võimsus.
Kõik hulgad sisalduvad hulgas U.

Järelikult U pole hulk.

84*. Tõestage, et Peano aksioomidest järeldub naturaalarvude korrutamise kommutatiivsus:

$$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x).$$

Tõestuses võib kasutada ainult Peano aksioome ja loengukonspektis tõestatud tulemusi.

14. Väidete tõestamine II

85. Vaatleme järeldumist kujul

$$\text{eeldus}, \text{eeldus}, \text{eeldus} \vDash \text{väide}$$

kus eeldused ja väide on mingid predikaatarvutuse valemid. Kuidas tuleks selle järeldumise tõestamisel käsitleda olukorda, kus

a) eeldus on kujul $\exists x(\ldots)$
b) eeldus on kujul $\forall x(\ldots)$
c) eeldus on kujul $(\ldots) \vee (\ldots)$
d) eeldus on kujul $(\ldots) \Rightarrow (\ldots)$
e) väide on kujul $\forall x(\ldots)$
f) väide on kujul $\exists x(\ldots)$
g) väide on kujul $(\ldots) \Rightarrow (\ldots)$
h) väide on kujul $(\ldots) \vee (\ldots)$

86. Tõestage vahetu arutlusega järgmised järeldumised.

a) $\exists x(P(x) \Rightarrow Q), \exists x(Q \Rightarrow P(x)) \vDash \exists x(P(x) \Leftrightarrow Q)$
b) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)), \neg\forall x(A(x) \Rightarrow C(x)) \vDash \exists x(\neg C(x) \wedge B(x))$
c) $\neg\exists x P(x), \neg\exists x(Q(x) \wedge R(x)), \forall x(P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \vDash \forall x(R(x) \Leftrightarrow \neg Q(x))$
d) $\forall x \forall y(L(x,y) \Rightarrow L(y,x)), \exists x \forall y L(x,y) \vDash \forall x \exists y L(x,y)$

87. Tõestage vahetu arutlusega, et järgmised valemid on samaselt tõesed.

a) $\exists x \forall y(P(y) \vee (P(x) \Rightarrow Q(x,y)))$
b) $\forall x(\exists y(R(x,y) \Rightarrow \neg S(y)) \vee S(x))$
c) $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \Rightarrow B(x))$
d) $\forall x \exists y(C(x,y) \wedge C(y,x) \Rightarrow C(x,x))$

88. Igapäevaelus tuleb teinekord ette arutluskäike, mis pole loogiliselt korrektsed. Kui loogikaviga tehakse tahtlikult, siis nimetatakse sellist käitumist demagoogiaks. Pange järgmised arutluskäigud kirja valemkujul ja selgitage, milles seisneb nendes arutluskäikudes viga.

a) *Pöördväite viga.* Kõik suured projektid on keerulised. See projekt on keeruline. Järelikult see projekt on suur.

b) *Vastandväite viga.* Kõik ausad inimesed maksavad makse. Robert ei ole aus inimene. Järelikult Robert ei maksa makse.

c) Kui kompileerimisel tekib veateade, siis programm ei ole korrektne. Kompileerimisel ei tekkinud veateadet. Järelikult programm on korrektne.

d) Ükski hea auto ei ole odav. Simbaru ei ole odav. Järelikult Simbaru on hea auto.

e) Tartu tänavad on heas korras — sest näete, Roosi tänav on heas korras.

89. Formuleerige arutlusskeem, mis sarnaneks eelmise ülesande punktide a) ja b) aluseks olevate skeemidega ja mis oleks loogiliselt korrektne. Tõestage predikaatarvutuse vahenditega, et see skeem on tõepoolest loogiliselt korrektne.

90. Tõestage, et esimesest lausest järeldub teine.

1) Professor on rõõmus, kui kõik tema õpilased armastavad loogikat.

2) Professor on rõõmus, kui tal ei ole õpilasi.

91. *Võileib Krakovi vorstiga.* Tuntud panteroloog Pauka on teinud ühe kindla kvartali kasside kohta 9 huvipakkuvat tähelepanekut. Huvipakkuvat seepoolest, et esmapilgul ei näi neil olevat mingit omavahelist seost. See on aga siiski olemas. Enamgi, nende vaatluste alusel võib teha ülesande pealkirja suhtes üsna kindla järelduse. Millise?

1) Spetsiaalselt loomadele ettenähtud einelauas „Roheline aas“ pakutakse alati võileibu Krakovi vorstiga.

2) Ükski kass, kes ei eelista põldhiiri koduhiirtele, ei külasta loomaaeda.

3) Kõik kassid oskavad näuguda.

4) Ühtki kassi, kes pole kollast karva, ei saa kahtlustada rõõsa koore varguses.

5) Iga kass, kes oskab näuguda, võib käia öösiti õues.

6) Iga kass, kes ei varasta rõõska koort, käib einelauas „Roheline Aas“.

7) Kõik kassid, kes käivad öösiti õues, eelistavad koduhiiri põldhiirtele.

8) Ainult need kassid, kes külastavad einelauda „Roheline Aas“, armastavad võileiba Krakovi vorstiga.

9) Ainult need kassid, kes käivad loomaaias, on kollast karva.

15. Loogika kordamine

92. Tehke tõesuspuu abil kindlaks, kas valem on samaselt tõene, samaselt väär või ei kumbki.

a) $A \wedge \neg B \Leftrightarrow B \Rightarrow C$

b) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

c) $\neg(A \Rightarrow C \wedge A) \wedge (A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B)$

93. Olgu hulgal $\{a, b, c\}$ määratud järgmised predikaadid:

$P(x)$

	a	b	c
	t	t	v

$Q(x)$

	a	b	c
	t	v	v

$R(x, y)$

	a	b	c
a	v	t	t
b	v	v	v
c	v	v	t

Leidke järgmiste valemite tõeväärtused.

a) $\exists x \forall y(P(x) \Leftrightarrow Q(y))$

b) $\neg\exists x \neg\exists y(P(x) \Rightarrow Q(y))$

c) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y \neg(P(y) \Rightarrow Q(x)))$

d) $\exists x \forall y \neg(R(x, y) \vee R(y, x))$

e) $\forall x(\exists y R(x, y) \vee \exists z R(z, x))$

f) $\forall x \exists y \exists z \neg(R(x, y) \Rightarrow \neg R(z, x))$

94. Olgu interpretatsiooni kandjaks kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$. Väljendage järgmised laused.

a) Arvude x ja y vahel leidub 5-ga jaguv arv.

b) Kõik arvude x ja y vahel asuvad algarvud avalduvad kujul $4n + 1$.

c) x jagub täpselt ühe algarvuga.

d) x on vähim paarisarv, mille ruut jagub y-ga.

95. Lihtsustage valemid predikaatarvutuse põhisamaväärsuste abil.

a) $\neg((\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)) \Rightarrow \forall x \neg P(x) \wedge \forall x \neg Q(x))$

b) $\forall y(\exists x A(x) \Rightarrow B(y)) \wedge \forall y(B(y) \Rightarrow \forall x A(x))$

96. Leidke järgmiste valemite prefikskuju.

a) $\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x B(x)$

b) $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \Rightarrow C(x)$

97. Laual on hulk geomeetrilisi kehasid. Tehke iga järgmise arutluse puhul kindlaks, kas eeldustest järeldub väide. Kui jah, siis esitage tõestus. Kui ei, siis tooge kontranäide. (Igas ülesandes on erinev olukord.)

a) **Eeldus 1.** Iga kujund on kuup või püramiid.
Eeldus 2. Vähemalt üks kujund ei ole kuup.
Väide. Vähemalt üks kujund ei ole püramiid.

b) **Eeldus 1.** Iga kujund on kuup või püramiid.
Eeldus 2. Vähemalt üks kujund ei ole kuup.
Väide. Vähemalt üks kujund on püramiid.

c) **Eeldus 1.** Iga kuup on suurem igast püramiidist.
Eeldus 2. Iga püramiid on suurem igast silindrist.
Väide. Iga kuup on suurem igast silindrist.

d) **Eeldus 1.** Alati, kui üks kujund asub teisest vasakul, on esimene kujund teisest suurem.
Eeldus 2. Kõik kuubid on rohelised.
Eeldus 3. Kõik püramiidid on hallid.
Eeldus 4. Ükski roheline kujund ei ole ühestki rohelisest kujundist suurem.
Väide. Ükski kuup ei asu ühestki teisest kuubist vasakul.

98. Tõestage vahetu arutlusega järgmised järeldumised.

a) $\forall x(K(x) \vee P(x)), \exists x \neg R(x), \forall x(K(x) \Rightarrow R(x)) \models \exists x P(x)$

b) $\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg B(x) \models \neg \forall x(A(x) \Leftrightarrow B(x))$

16. Kontrolltöö. Näidis 2017. aastast.

1. Kontrollida tõesuspuu abil:
   a) kas valem $(C \wedge B) \wedge (\neg A \vee B \Rightarrow B \wedge C)$ on samaselt väär;
   b) kas valem $C \wedge (A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow \neg B \wedge A)$ on samaselt tõene.

2. Hulgal $\{a, b, c, d\}$ on antud predikaadid $P(x)$ ja $S(x, y)$ vastavalt tabelitega

x	a	b	c	d
	t	t	v	t

ja

$x \backslash y$	a	b	c	d
a	v	t	v	v
b	t	v	v	v
c	v	v	v	t
d	v	v	v	t

Leida valemite tõeväärtused ja põhjendada neid lühidalt.
   a) $\forall x \forall y(\neg P(x) \wedge \neg P(y) \Rightarrow (x = y))$
   b) $\exists x \exists y(\forall z(S(z, y) \Leftrightarrow S(x, y)))$

3. Defineerida vajalikud predikaadid ning väljendada predikaatarvutuse valemitega järgmised laused.
   a) Väljendada kasside hulgal lause: „Iga hästi käituva valge kassi puhul leidub kaks erinevat musta kassi, kes ei käitu hästi.“
   b) Väljendada inimeste hulgal lause: „Ei leidu kedagi, kelle sõprusringkonnas oleks mõni sõber, kellel pole ühtegi sõpra.“

4. Olgu interpretatsiooni kandja kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ ning signatuur $\langle 0, 1; +, \cdot; = \rangle$.
   a) Defineerida ja väljendada abipredikaadid „x jagub y-ga“, „$x > y$“ ja „x on paaritu arv“.
   b) Väljendada nende predikaatide abil lause: „x on 5-st suurem paaritu arv“.
   c) Väljendada nende predikaatide abil lause: „kõik paaritud arvud, mis jaguvad x-ga, on y-st suuremad“.

5. Teisendada valem prefikskujule:

$$\forall x A(x) \vee \neg(\forall x B(x) \wedge (\exists x C(x, y) \Rightarrow \exists x D(x)))$$

6. a) Tõestada vahetu arutlusega, et kehtib järeldumine

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x) \vDash \exists x (A(x) \Rightarrow B(x))$$

   b) Leida interpretatsioon, millest nähtuks, et ei kehti järeldumine

$$\exists x(\neg Q(x) \Rightarrow \forall y P(y)) \vDash \exists x(\neg \forall y Q(y) \Rightarrow P(x))$$

17. Graafide sissejuhatus

99. *Hunt, lammas ja kapsas.* Talumehel on vaja paadiga üle jõe viia hunt, lammas ja kapsas. Paat on nii väike, et talumees saab kaasa võtta ainult ühe neist objektidest. Arusaadavatel põhjustel ei või jätta hunti samale kaldale üksi lambaga ega lammast üksi kapsaga. Kuidas peaks talumees tegutsema?
Ülesande lahendamiseks koostage graaf, mille tipud on võimalikud seisud: näiteks $(hk \mid Pl)$ tähendab, et vasakul kaldal asuvad hunt ja kapsas, ning paremal kaldal paat ja lammas. Servaga on ühendatud seisud, mis on teineteisest saadavad ühe ülemine-kuga.

100. *Misjonärid ja kannibalid.* Kaks misjonäri ja kaks kannibali peavad ületama paadiga jõe, kuid paat mahutab maksimaalselt kaks inimest. Ühelgi hetkel ei tohi samal kaldal asuda rohkem kannibale kui misjonäre, sest siis sööksid kannibalid misjonärid ära. Kuidas saaksid kõik misjonärid ja kannibalid üle jõe? (Tühjalt paat üle jõe ei liigu.)

101. Lahendage eelmine ülesanne juhul, kui jõe peavad ületama kolm misjonäri ja kolm kannibali.

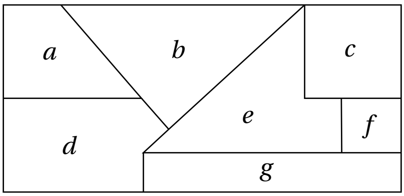
102. Festivali aitab korraldada 12 vabatahtlikku, kes kuuluvad järgmistesse toimkondadesse:
Ülesseadmistööd: Agu, Pihel, Luule, Kari
Piletimüük: Vesse, Ebe, Säuk

Toitlustamine: Raho, Vesse, Pihel, Urm
Festivalipood: Hink, Säuk, Agu
Liikluskorraldus: Urm, Iko, Hink
Koristamine: Raho, Urm, Kari, Tirt

Kõik toimkonnad peavad järgmisel nädalal korra kokku saama, kuid vabad on ainult kolm ajavahemikku. Koostada koosolekute ajakava nii, et kõik vabatahtlikud saaksid osaleda kõigi oma toimkondade koosolekutel.

Selleks esitage iga toimkond graafi tipuna ja tõmmata tippude vahele serv, kui toimkondadel on ühine liige. Värvige tipud kolme värviga nii, et ühise liikmega toimkonnad oleksid alati eri värvi, ja pange selle järgi kokku ajakava.

103. Milline on vähim arv värve, millega saab järgmisel kaardil ära värvida kõik riigid a–g nii, et ühise piiriga riigid oleksid alati eri värvi? Küsimusele vastamiseks joonistage graaf, kus igale riigile vastab üks tipp ja tipud on servaga ühendatud parajasti siis, kui riikidel on ühine piir.



104. Lahendage graafiteooria programmiga `lahendaja.jar` ülesanded ülesandekogust `graafid.yk`. Juhised asuvad Moodle'is.

105*. n-mõõtmeline hüperkuup on graaf, mille tippude hulk on kõigi n-bitiste kahendsõnede hulk $\{0,1\}^n$ ja servaga on ühendatud parajasti need tipud, millele vastavad kahendsõned erinevad täpselt ühe kahendkoha poolest.

Hüperkuubi mingitesse tippudesse astub m politseinikku ning seejärel mingisse tippu pätt. Mõlemad pooled hakkavad mööda hüperkuubi tippe liikuma. Politseinike käik tähendab, et kõigist politseinikest igaüks kas liigub oma tipust naabertippu või jääb oma tippu paigale. Päti käik tähendab, et pätt kas liigub oma tipust naabertippu või jääb oma tippu paigale. Ühes tipus võib asuda mitu isikut, nende asukohad on kõigile osalistele nähtavad. Käike tehakse vaheldumisi, alustavad politseinikud. Mäng lõpeb, kui pärast politseinike käiku asub vähemalt üks politseinik pätiga samas tipus.

Tõestage, et iga politseinike arvu m jaoks leidub hüperkuup, millel m politseinikku pätti kätte ei saa.

18. Tipuastmete teoreem

106. Leidke graafi K_n servade arv.

107. Kui graafil G on 15 serva ja graafil $\overline{G}$ on 13 serva, siis mitu tippu on graafil G?

108. Riigis on 16 linna, sh pealinn. Kas on võimalik rajada linnade vahele kaabliühendused nii, et pealinnal oleks otseühendus kõigi ülejäänud linnadega ja igal ülejäänud linnal oleks otseühendus täpselt 2/3-ga kõigist teistest linnadest?

109. Riigis on 15 linna, millest osa on omavahel ühendatud kahesuunaliste maanteedega. Kõik maanteed on kahesuunalised ja väljaspool linnu üksteisega ei lõiku. Hommikul väljub igast linnast 5 lumesahka, millest igaüks puhastab oma teel lumest ühe sõidusuuna. Õhtuks jõuavad kõik lumesahad tee lõppu järgmisse linna. Kas on võimalik organiseerida lumesahkade sõidud nii, et õhtuks ei jääks ühtegi poolikult puhastatud teed (st teed, millel oleks puhastatud ainult üks sõidusuund)?

110.

a) Kas leidub 6-tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe ühepalju?

b) Kas leidub 8-tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe ühepalju?

c) Pange kirja tingimus, mida peab rahuldama graafi tippude arv n, et graafis oleks paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.

d) Tõestage, et iga naturaalarvu n puhul, mis rahuldab seda tingimust, leidub n-tipuline graaf, milles on paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.

e) Tõestage, et ühegi naturaalarvu n puhul, mis ei rahulda seda tingimust, ei leidu n-tipulist graafi, milles oleks paaris- ja paaritu astmega tippe võrdselt.

111. Tõestage, et majas, kus on ainult üks välisuks, leidub ruum, millel on paaritu arv uksi.

112. 100-tipulisel graafil on 360 serva ning iga tipp, välja arvatud tipp v, on astmega 7. Leidke tipu v aste.

113. 75-tipulisel graafil on 256 serva. Graafi kõik tipud, välja arvatud kaks, on astmega 5. Leidke ülejäänud kahe tipu astmed.

114. 18-tipulises täisgraafis värvitakse osa tippe valgeks ja ülejäänud mustaks. Leidke vähim arv tippe, mis tuleb valgeks värvida, et erinevat värvi tippe ühendavaid servi oleks rohkem kui sama värvi tippe ühendavaid servi.

115. Graafis G on x tippu astmega 12 ja ülejäänud y tippu on astmega 30. Graafi G täiendis on x tippu astmega 32 ja ülejäänud y tippu on astmega 14. Mõlemal graafil on ühepalju servi. Leidke x ja y.

19. Sidusus, isomorfism

116. Tõestage, et igas vähemalt kaheliikmelises seltskonnas leidub kaks inimest, kellel on koosviibijate hulgas sama arv tuttavaid. (Eeldame, et tutvusseos on kahesuunaline.)

117. Kas on võimalik värvida 15-tipulise täisgraafi mõned servad punaseks ja ülejäänud roheliseks nii, et igast tipust väljub punaseid servi sama palju kui rohelisi?

118. Defineerige: a) sidus graaf; b) sidus komponent.

119. Graafi tippude hulk jaguneb kaheks ühisosata alamhulgaks A ja B. On teada, et

1) igast hulga A tipust pääseb mööda ahelat mõnda hulga B tippu;
2) igast hulga B tipust pääseb mööda ahelat igasse hulga B tippu.

Tõestage, et graaf on sidus.

120. Tõestage, et iga graafi G puhul on G ise või G täiend sidus.

121. Graaf rahuldab järgmist kahte tingimust:

1) iga kahe servaga ühendatud tipu jaoks leidub tipp, mis on kummagi tipuga ühendamata;
2) iga kahe servaga ühendamata tipu jaoks leidub tipp, mis on kummagi tipuga ühendatud.

Tõestage, et nii graaf kui ka tema täiendgraaf on sidus.

122. Lahendada graafiteooria programmiga `lahendaja.jar` ülesanded ülesandekogust `graafid2.yk`.

123. Defineerige graafide isomorfism.

124. Graafiteoreetilise invariandi *kontranäide* on kaks graafi, mille puhul invariandi väärtused on võrdsed, aga graafid ei ole isomorfsed. Üks invariant on näiteks graafi tipuastmete järjend. Leidke selle invariandi kontranäide.

125.
a) Leidke 4-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.
b) Leidke 5-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.
c) Tõestage, et kui G on n-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga, siis n annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1.
d) Tõestage, et kui n annab 4-ga jagamisel jäägi 0 või 1, siis leidub n-tipuline graaf, mis on isomorfne oma täiendiga.

126*. Antud on sidus graaf. Kirjutage vabalt valitud programmeerimiskeeles programm, mis loeb käsurealt tekstifaili nime, sellest failist sidusa suunamata graafi naabrusmaatriksi ning leiab vähima suurusega tippude hulga, mis tuleb graafist eemaldada, et graaf muutuks mittesidusaks.

20. Graafiteooria väidete tõestamine

127. Defineerige: a) graaf; b) graafi täiendgraaf.

128. Kuuetipulise täisgraafi K_6 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestage, et värvitud graafis leidub kolmnurk, mis koosneb ainult sinistest või ainult punastest servadest.

129. Viietipulise täisgraafi K_5 iga serv värvitakse kas siniseks või punaseks. Tõestage, et värvitud graafis leidub ühte värvi tsükkel.

130.
a) Tõestage, et kui graafis leidub sild, siis leidub graafis vähemalt kaks paaritu astmega tippu.
b) Olgu antud sidus graaf, milles leidub sild e ning milles on täpselt kaks paaritu astmega tippu u ja v. Tõestage, et iga lihtahel tipust u tippu v läbib graafi silda e.

131. Tõestage, et igas graafis leidub iga paaritu astmega tipu jaoks ahel sellest tipust mingisse teise paaritu astmega tippu.

132. Olgu G graaf, mille iga tipu aste on paarisarv ning vähemalt üks astmetest erineb nullist. Tõestage, et graafis G leidub serv, mis ei ole sild.

133. Olgu G graaf, mille iga tipu aste on 3. Tõestage, et graafis G leidub tsükkel, mille pikkus on paarisarv.

134. On seltskond inimesi, kellest mõned on omavahel tuttavad ning ülejäänud ei ole. Igal õhtul korraldab üks neist peo, kutsub sinna kõik oma tuttavad ja tutvustab kõiki neid üksteisega. Pärast seda, kui kõik sellest seltskonnast on peo ära korraldanud, leidub seltskonnas ikkagi kaks inimest, kes teineteisega ei ole tuttavad. Tõestage, et nad ei ole teineteisega tuttavad ka pärast järgmist pidu.

135. Väike hiir kavatseb süüa kuubikujulist juustu. Selleks jagab ta mõttes juustu $3 \times 3 \times 3$ võrdseks kuubikuks, alustab nurkmisest kuubikust ning soovib lõpetada keskel. Pärast iga kuubiku söömist liigub hiir naaberkuubikusse (millel on senise kuubikuga ühine tahk). Kas hiirel õnnestub see plaan?

136. Jalgpalliturniiril osaleb 18 meeskonda. Igas voorus peab iga meeskond ühe mängu. (Iga kaks meeskonda mängivad omavahel kogu turniiri jooksul ülimalt ühe mängu.)

a) Tõestage, et pärast teist vooru saab leida 9 meeskonda, kes pole omavahel mänginud ühtegi mängu.
b) Tõestage, et pärast kaheksandat vooru saab leida 3 meeskonda, kes pole omavahel mänginud ühtegi mängu.

21. Graafiteooria väidete tõestamine II

137. *n-mõõtmeline kuup* on graaf, mille tippudeks on kõikvõimalikud kahendarvud pikkusega n ning servaga on ühendatud parajasti need tipud, millele vastavad kahendarvud erinevad täpselt ühe kahendkoha poolest.
a) Leidke n-mõõtmelise kuubi tippude arv.
b) Leidke n-mõõtmelise kuubi servade arv.
c) Tõestage, et n-mõõtmeline kuup on sidus.
d) Leidke suurim kaugus n-mõõtmelise kuubi mingi kahe tipu vahel.
e) Kas n-mõõtmelises kuubis leidub sildu?
f) Kas n-mõõtmelises kuubis leidub eraldavaid tippe?

138. Klassis on 12 poissi ja 16 tüdrukut, kellest osa on omavahel sõbrad. Kas võib esineda olukord, kus iga poiss on sõber 6 poisi ja 9 tüdrukuga ning iga tüdruk on sõber 7 poisi ja 8 tüdrukuga? Kui selline olukord saab esineda, siis tooge vastav näide; kui ei, siis põhjendage.

139. Olgu G graaf, mille iga tipp kuulub mingisse tsüklisse (erinevad tipud võivad kuuluda erinevatesse tsüklitesse). Tõestage, et graafis on servi vähemalt samapalju kui tippe.

140. Tõestage, et igas graafis G kehtib

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)^2 = \sum_{uv\in E(G)} \big(d(u)+d(v)\big).$$

141. Sidusas graafis G on kaks tsüklit, mis ei sisalda ühiseid tippe. Esimesel tsüklil on võetud tipp a, teisel tsüklil tipud b ja c. Tõestage, et graafis G leidub ahel, kuhu kuuluvad tipp a ja lisaks täpselt üks tippudest b või c (aga mitte mõlemad).

142. Olgu G mittesidus graaf, mille igas sidusas komponendis on vähemalt kaks tippu. Tõestage, et iga kahe samasse komponenti kuuluva tipu u ja v puhul leidub graafi G täiendis tsükkel, mis läbib tippe u ja v.

143. Tõestage, et kui G on sidus graaf, siis graafi G saab teatava hulga tippude kustutamisega muuta mittesidusaks parajasti siis, kui G ei ole täisgraaf.

144. Olgu G graaf, milles iga tipu aste on vähemalt 2.

a) Tõestage, et graafis G leidub tsükkel.

b) Tõestage, et leidub sidus graaf H, mille tipuastmete järjend on sama mis graafil G.

145. Tõestage, et igas vähemalt kahetipulises graafis leidub vähemalt kaks tippu, mis ei ole eraldavad.

146. Olgu G graaf ja v tema vähima astmega tipp.

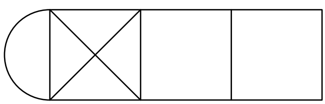
a) Tõestage, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $d(v)$.

b) Eeldame, et G on sidus, aga mitte täisgraaf. Tõestage, et graafis G leidub lihtahel pikkusega $d(v)+1$.

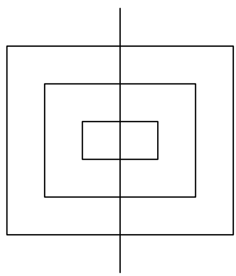
147*. Doominomängus on olemas kõikvõimalikud doominokivid $\boxed{i \mid j}$, kus iga kivi peale on märgitud kaks täisarvu, i ja j, nii et $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 46$, igat kivi on üks koopia. Seejuures kivi $\boxed{i \mid j}$ saab pöörata 180°, mis annab kivi $\boxed{j \mid i}$, ehk see on seesama kivi. Doominomängus on lubatud panna kaks kivi kõrvuti, kui nende kõrvutiasuvad arvud on samad, näiteks saab panna kõrvuti $\boxed{i \mid j}$ ja $\boxed{j \mid k}$ sellisel viisil: $\boxed{i \mid j}\boxed{j \mid k}$. Ühe doominokivi mõõtmed on 1 sentimeeter korda 2 sentimeetrit. Kui pikk on kõige pikem võimalik sirge rida doominokividest, mida mängureeglite järgi saab ehitada? Seejuures on vaja leida pikima võimaliku rea pikkus ja näidata, et veelgi pikemat rida ei leidu.

22. Euleri ja Hamiltoni graafid

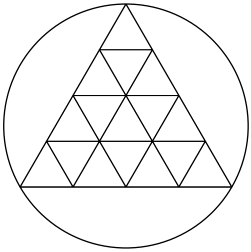
148. Tehke kindlaks, kas järgmisi kujundeid saab joonistada ilma pliiatsit paberilt tõstmata ja ühtegi joont korduvalt läbimata.



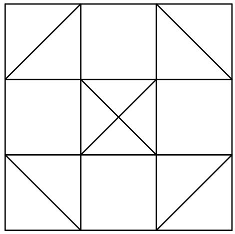
a)



b)



c)



d)

149. Millal saab linna tänavate keskjooned joonistada nii, et joonistusmasin ei läbi ühtegi tänavat kaks korda?

150.

a) Tõestage, et kui sidusas graafis leidub täpselt kaks paaritu astmega tippu, siis leidub graafis Euleri ahel, mis algab ühes neist tippudest ja lõpeb teises.

b) Olgu G sidus graaf, milles leidub $m > 0$ paaritu astmega tippu. Tõestage, et graafis leidub $m/2$ ahelat nii, et graafi G iga serv asub täpselt ühel neist ahelatest.

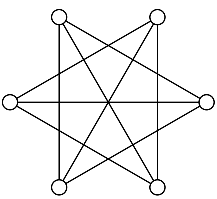
151. Olgu n positiivne täisarv ja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vaatleme graafi G, mille korral $V(G) = \{A \subseteq X : |A| = 2\}$ ning $E(G) = \{\{A, B\} : A \cap B \neq \varnothing\}$. Leida kõik positiivsed täisarvud n, mille korral G on Euleri graaf.

152.

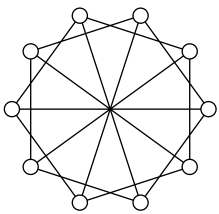
a) Tõestage, et iga sidusa graafi G puhul kehtib üks järgmistest tingimustest.
   (1) G on Euleri graaf.
   (2) G on saadav teatavast Euleri graafist ühe tipu kustutamise teel.

b) Kas leidub sidus graaf, mis rahuldab korraga mõlemat tingimust?

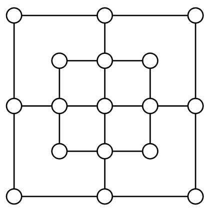
153. Kui graafis leidub Hamiltoni tsükkel, siis leidke see. Vastasel korral tõestage, et graafis Hamiltoni tsüklit ei ole.



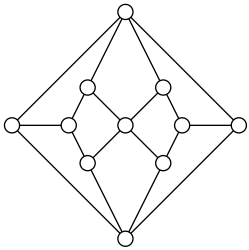
a)



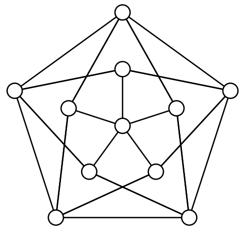
b)



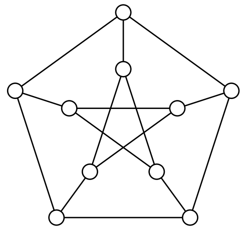
c)



d) *Herscheli graaf*



e) *Grötzschi graaf*



f) *Peterseni graaf*

154. *Täielik kahealuseline graaf* $K_{m,n}$ on graaf, mille tippude hulk jaguneb kaheks hulgaks: m tippu ja n tippu, kusjuures sama hulga tippude vahel servi ei ole ja erinevate hulkade tippude vahel on tõmmatud kõikvõimalikud servad.

a) Tõestage, et $K_{n,n}$ on Hamiltoni graaf iga $n > 2$ puhul.

b) Tõestage, et $K_{n,n+1}$ ei ole Hamiltoni graaf ühegi $n > 1$ puhul.

155.

a) Kas kehtib väide, et sidusas graafis, kus pole rippuvaid tippe, leidub alati kinnine ahel, mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord?

b) Kas kehtib väide, et sidusas graafis, kus pole rippuvaid tippe, leidub alati ahel mis läbib graafi iga tippu täpselt üks kord?

156. *Gray kood* on n-bitiste kahendarvude $0, 1, \ldots, 2^n - 1$ järjestus, kus iga kaks järjestikust kahendarvu erinevad täpselt ühe biti poolest.

a) Tõlgendage n-bitist Gray koodi n-mõõtmelise kuubi (vt eelmise praktikumi ülesanded) abil.

b) Leidke üks 3-bitine Gray kood.

c) Tõestage, et iga positiivse täisarvu n korral leidub n-bitine Gray kood.

157.

a) 8×8 malelaua mõlemast vastandnurgast lõigatakse välja üks ruut. Tõestage, et järelejäänud malelauda ei saa katta 1×2 doominokividega.

b) *Gomory teoreem.* 8×8 malelauast lõigatakse ükskõik kust välja üks valge ruut ja üks must ruut. Tõestage, et järelejäänud malelaua saab alati katta 1×2 doominokividega.

23. Puu mõiste

158. Kas leidub järgmiste omadustega graaf? Joonistage graaf või põhjendage, miks sellist ei ole.

a) Puu, 9 tippu, 9 serva

b) Graaf, sidus, 9 tippu, 9 serva

c) Graaf, tsükliteta, 9 tippu, 6 serva

d) Puu, 6 tippu, tipuastmete summa 14

e) Puu, 5 tippu, tipuastmete summa 8

f) Graaf, sidus, 6 tippu, 5 serva, sisaldab tsüklit

g) Graaf, 6 tippu, 5 serva, pole puu

159. Millega võrdub n-tipulise puu kõigi tippude astmete summa?

160. Puu tippude astmed on 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4 ja x. Leidke kõik võimalused, milline saab olla x.

161. 150-tipulises puus on 20 tippu astmega 4 ja 30 tippu astmega 3. Ülejäänud tipud on astmega 2 või 1. Mitu tippu on astmega 2 ja mitu tippu astmega 1?

162. Tõestage, et kui vähemalt kolmetipulise puu ühegi tipu aste pole 2, siis puus leidub tipp, millest väljub vähemalt kaks lehte.

163. Ahelkiri algab ühest inimesest, kes saadab kirja viiele inimesele. Iga inimene, kes kirja saab, kas saadab selle edasi viiele järgmisele inimesele, kes veel kirja saanud pole, või ei saada seda kellelegi. Oletame, et kirja jõuab enne skeemi hääbumist saata 1000 inimest ja et keegi ei saa rohkem kui ühe kirja. Mitu inimest selle kirja saab ja mitu neist ei saada kirja edasi?

164. Kirjeldage puude ja tsüklite abil kõik sidusad graafid, mille tippude ja servade arv on võrdsed.

165. Olgu puu pikima lihtahela pikkus teatav paarisarv $2d$ ja v selle lihtahela keskmine tipp. Tõestage, et kõik puu lehed asuvad tipust v kaugusel ülimalt d.

166. Olgu G mingi n-tipuline puu ning v tema suvaline sisetipp. Tõestage, et puul G leidub leht, mille kaugus (st lühima lihtahela pikkus) tipust v pole suurem kui $n/2$.

167. Olgu G puu. Tõestage, et puu G kõigi tippude astmed on paaritud parajasti siis, kui ükskõik millise serva eemaldamisel koosnevad järelejäänud graafis kõik sidusad komponendid paaritust arvust tippudest.

168*. Nõia-Ella võlusõna, mis ravib kõiki haigusi, on $n+2$-täheline sõne, mis koosneb väikestest ladina tähtedest. Nõia-Ella assistent on aja jooksul pannud kirja võlusõna kõik kolmetähelised alamsõned. (Näiteks kui võlusõna on `vares`, on selle kolmetähelised alamsõned `var`, `are` ja `res`.) Assistent soovib võlusõna ise teada saada ning selleks tuleb kasutada arvuti abi. Koostage tema jaoks vastav programm. Sisendina antakse ette võlusõna kolmetähelised alamsõned (teadmata järjekorras) ning väljastada tuleb mingi võlusõna, kui selle saab neist taastada, või `EI SAA`, kui toodud n alamsõnest $n+2$-tähelist sõnet taastada pole võimalik.

24. Tõestusülesanded puudest

169. a) Tõestage, et kui puule lisada üks uus serv, siis tekib seal tsükkel.
b) Tõestage, et kui puust kustutada üks serv, siis muutub ta mittesidusaks.

170. Olgu G graaf, kus serva lisamisel suureneb alati graafis olevate tsüklite arv ja serva kustutamisel suureneb alati graafi sidusate komponentide arv. Tõestage, et graaf G on puu.

171. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

1) iga kahte tippu ühendab ülimalt üks ahel (st ahelate arv on kas 1 või 0);
2) tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestage, et graaf G on puu.

172. Lisame puule ühe serva ja seejärel kustutame tekkinud tsüklist mingi teise serva. Tõestage, et saadud graaf on jällegi puu.

173. 12-tipulises sidusas graafis G esinevad ainult tipud astmega 1, 2 ja 3. On teada, et *vähemalt* pool graafi tippudest on astmega 1 ja *ülimalt* kolmandik graafi tippudest on astmega 3. Tõestage, et graaf G on puu.

174. Olgu G puu, mida vaatleme teedevõrguna keskaegses riigis. Puu tippudes asuvad kindlused. Tipus k elab kuningas, ülejäänud tippudes tema vasallid. Ühel päeval otsustavad kõik vasallid külastada kuningat ning väljuvad oma kindlustest täpselt keskpäeval. Tõestage, et kohe pärast keskpäeva asub igal serval parajasti üks vasall. Järeldage sellest, et n tipuga puul on alati $n-1$ serva.

175. Mis on valesti järgmises „tõestuses“?
Tõestame matemaatilise induktsiooniga, et igas n-tipulises puus leidub lihtahel pikkusega $n-1$.
Baas. Selge, et ühetipulises puus leidub lihtahel pikkusega 0.
Samm. Eeldame, et n-tipulises puus leidub lihtahel pikkusega $n-1$. Olgu u selle lihtahela otstipp. Lisame tipu v ja serva tipust u tippu v. Tulemuseks saadud puul on $n+1$ tippu ja selles leidub lihtahel pikkusega n. Sellega on induktsiooni samm tõestatud.

176. Olgu G puu. Vaatleme selles puus maksimaalse pikkusega lihtahelaid.

a) Tõestage, et igal kahel maksimaalse pikkusega lihtahelal leidub ühine tipp.
b) Tõestage, et kõigil maksimaalse pikkusega lihtahelatel leidub ühine tipp.

177. Tõestage, et kui puu ei ole *täht*, st selline graaf, kus üks tipp on ühendatud kõigi teiste tippudega ja rohkem servi ei ole, siis tema täiendgraaf on sidus.

178. Graafi tipu v *ekstsentrilisuseks* (ehk ulatuseks) nimetatakse tipust v lähtuva maksimaalse pikkusega lihtahela pikkust. Tipud, mille ekstsentrilisus on graafi tippude hulgas kõige väiksem, moodustavad graafi *tsentri*. Tõestage, et kui graaf on puu, siis tema tsenter on ühe- või kahetipuline.

25. Puude omaduste kasutamine

179. Tõestage, et kümnetipulises puus, mille kõik tipuastmed on paaritud, leidub vähemalt kuus lehte.

180. 175-tipulisel puul on 90 lehte. Tõestage, et selles puus leidub tipp, mille aste on vähemalt 4.

181. Ahelkiri algab ühest inimesest, kes saadab kirja 10 inimesele. Kirja sisus palutakse saata kiri edasi 10 tuttavale ning kirja lõpus on kuni kuuest inimesest koosnev nimekiri. Kui nimekirjas on täpselt kuus inimest, peab igaüks, kes kirja saab, saatma nimekirjas esimesel kohal olevale inimesele 1 euro, kustutama selle inimese nimekirjast ja lisama oma nime nimekirja lõppu. Oletame, et Teile saabus selline ahelkiri. Mitu eurot oleks Teil seda kirja edasi saates maksimaalselt võimalik teenida?

182. *Kahendpuu* on juurega puu, mille igal sisetipul on ülimalt 2 alluvat. *Täielik kahendpuu* on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt 2 alluvat.

a) Täielikul kahendpuul on k sisetippu. Leidke selle kahendpuu lehtede arv.

b) Tõestage, et igal täielikul kahendpuul on paaritu arv tippe.

183. Täielik kolmendpuu on juurega puu, mille igal sisetipul on täpselt 3 alluvat. Olgu G täielik kolmendpuu, millel on kokku 100 tippu. Leidke G lehtede arv.

184. Olgu G_1 ja G_2 puud, milles ühegi kahe tipu vaheline kaugus (tippe ühendava lihtahela pikkus) ei ole suurem kui d, kus d on teatav paarisarv. Tõestage, et puu G_1 mingi tipu ja puu G_2 mingi tipu saab servaga ühendada nii, et saadavas graafis ei ole ühegi kahe tipu vaheline kaugus suurem kui $d+1$.

185. Süsivesinikud on keemilised ühendid, mis koosnevad süsiniku ja vesiniku aatomitest. Iga süsinikuaatom moodustab teiste aatomitega kuni neli keemilist sidet ning iga vesinikuaatom ühe sideme. Alkaanid (küllastunud süsivesinikud) on sellised süsivesinikud, mille molekulis on fikseeritud arvu süsinikuaatomite puhul maksimaalne arv vesinikuaatomeid.

a) Joonistage kõik pentaani C_5H_{12} isomeerid.

b) Tõestage, et alkaani struktuuri kujutav graaf on alati puu.

c) Tõestage, et k süsinikuaatomiga alkaani vesinikuaatomite arv on $2k+2$.

186. Tõestage, et järgmised tingimused positiivsete täisarvude järjendi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ kohta on samaväärsed.

1) Leidub n-tipuline puu, mille tippude astmed on $d_1, d_2, \dots, d_n$.

2) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

(See annab lihtsa võimaluse kontrollida, kas antud tipuastmete järjendi puhul leidub selliste tipuastmetega puu.)

187. Ühes puu tipus istub sipelgas, kes hakkab liikuma mööda puu servi. Pärast jalutuskäigu lõpetamist selgub, et iga serva, mida sipelgas läbis, läbis ta täpselt kaks korda. Tõestage, et teekonna lõpus jõudis sipelgas tagasi samasse tippu, kust alustas.

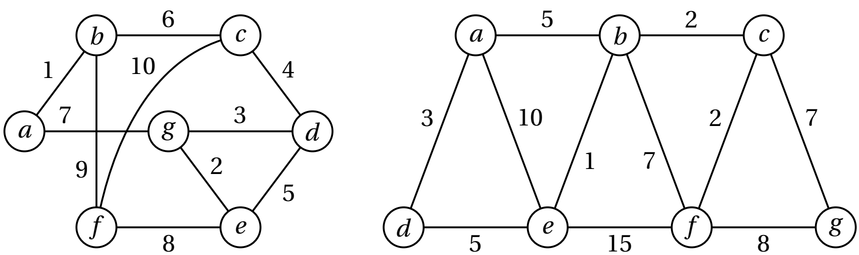
188. Kui kustutada puust tipp v koos temast lähtuvate servadega, siis tekib hulk sidusaid komponente, millest igaüks on samuti puu. Nimetame neid tipu v *harudeks.* Tõestage, et puus leidub alati tipp, mille ükski haru ei sisalda rohkem kui pooli puu tippe.

26. Toespuud

189. Leidke järgmiste graafide vähima kaaluga toespuud

a) Kruskali algoritmiga;

b) Primi algoritmiga.



graaf G_1 graaf G_2

Kas mõlemad algoritmid annavad sama toespuu?

190. Oletame, et

a) Kruskali algoritmile

b) Primi algoritmile

antakse ette mittesidus graaf. Mis on algoritmi töö tulemus?

191. Olgu G sidus graaf ning P_1 ja P_2 tema kaks erinevat toespuud. Kas puudel P_1 ja P_2 peab kindlasti leiduma ühine serv? Tõestage või tooge kontranäide.

192. Olgu G sidus graaf ja P tema toespuu. Tõestage, et iga serva e jaoks, mis ei kuulu puusse P, leidub puus P selline serv e', et asendades puus serva e' servaga e, saame tulemuseks jällegi graafi G toespuu.

193. Olgu G sidus kaalutud graaf.

a) Tõestage, et kui e on graafi serv, mille kaal on väiksem iga ülejäänud serva kaalust, siis e kuulub igasse graafi G vähima kaaluga toespuusse.

b) Tõestage, et kui e on tipuga v intsidentne serv, mille kaal on väiksem iga ülejäänud tipuga v intsidentse serva kaalust, siis e kuulub igasse graafi G vähima kaaluga toespuusse.

194. Tõestage, et kui sidusa graafi kõigi servade kaalud on erinevad, siis ühegi tsükli suurima kaaluga serv ei kuulu selle graafi vähima kaaluga toespuusse.

195. Tõestage, et kui sidusa graafi kõigi servade kaalud on erinevad, siis graafil leidub täpselt üks vähima kaaluga toespuu.

196. Tõestage, et kui anda järgmisele algoritmile ette sidus kaalutud graaf G, siis väljundiks on graafi G vähima kaaluga toespuu.

Sisendiks on graaf G
$T := G$
$E :=$ graafi G servade hulk
$m :=$ graafi G servade arv
Korda kui veel $m > 0$:
    Leia hulgast E suurima kaaluga serv e
    Kustuta serv e hulgast E
    $m := m - 1$
    Kui alamgraaf, mis on saadud graafi T servade hulgast serva e
        kustutamisel, on sidus, siis kustuta serv e graafi T servade
        hulgast
Tagasta graaf T

197. Riigis on n linna, mille vahele tuleb rajada telefonivõrk. Riigis on kaks parteid: optimistid ja pessimistid. Optimistide strateegia on ehitatada uus liin alati nende kahe linna vahele, mille ühendamine on kõige odavam, tingimusel, et see ei tekita tsüklit. Pessimistide strateegia on välistada esmalt kõige kallim liin, seejärel kalliduselt järgmine jne ning ehitada kahe linna vahele liin alles siis, kui selle välistamine muudaks linnadevahelise ühenduse võimatuks. Võimul on optimistid ja pessimistid vaheldumisi etteteadmata ajavahemike tagant. Tõestage, et lõpuks valminud telefonivõrgu maksumus on võimalikest väikseim.

198. Tasandil on antud n punktist koosnev hulk V, mida vaatleme täisgraafi tippude hulgana. Defineerime selle täisgraafi servade hulgal kaalufunktsiooni, lugedes serva

uv kaaluks punktide u ja v vahelise kauguse.

a) Tõestage, et selle graafi vähima kaaluga toespuus on iga tipu aste ülimalt 6.

b) Tõestage, et selle graafi vähima kaaluga toespuus ükski kaks serva ei lõiku.

199*. Antud on graaf G, tema kaks erinevat tippu u ja v ning kaks positiivset täisarvu x ja y. Kirjutage programm, mis väljastab ekraanile graafi G toespuu, milles tipu u aste on maksimaalselt x ja tipu v aste on maksimaalselt y. Kui sellist toespuud moodustada ei saa, siis programm väljastagu sellekohase teate.

27. Puud ja suunatud graafid

200. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

1) ükskõik millise serva eemaldamisel suureneb sidusate komponentide arv ühe võrra;
2) tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestage, et graaf G on puu.

201. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

1) ükskõik millise kahe tipu vahele serva lisamisel tekib tsükkel, mis sisaldab seda serva;
2) tippe on 1 võrra rohkem kui servi.

Tõestage, et graaf G on puu.

202. Olgu G sidus graaf ja T tema mingi tsükliteta alamgraaf. On teada, et kui graafile T lisada ükskõik milline graafi G serv e, mis graafi T ei kuulu, siis sisaldab tulemuseks saadud graaf tsüklit. Tõestage, et T on graafi G toespuu.

203. Olgu G sidus graaf. Tõestage, et serv e kuulub igasse graafi G toespuusse parajasti siis, kui G muutub serva e kustutamisel mittesidusaks.

204. Tõestage, et kui puus leidub k tippu ($k > 0$) astmega 4, siis on puul vähemalt $2k+2$ lehte.

205. Klassis on 8 poissi ja 12 tüdrukut. Kas võib esineda olukord, kus korraga kehtivad järgmised tingimused:

- pooltele poistest meeldivad igaühele täpselt pooled tüdrukutest;
- ülejäänud pooltele poistest meeldib igaühele täpselt 5 tüdrukut;
- pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt pooltele poistest;
- ülejäänud pooled tüdrukutest meeldivad igaüks täpselt 3 poisile?

Kui selline olukord saab esineda, siis tooge vastav näide; kui ei, siis põhjendage.

206.
a) Kirjeldage, kuidas saab graafe kasutada teatava võrgustiku piires saadetud e-kirjade modelleerimiseks. Mis on tipud ja mis on servad? Kas servad peaksid olema suunatud või suunamata? Kas tuleks lubada kordseid servi? Kas tuleks lubada silmuseid?
b) Kuidas saab selle graafi abil otsida inimesi, kes on hiljuti muutnud oma peamist meiliaadressi?
c) Kuidas saab selle graafi abil otsida meililistide aadresse, mille kaudu saadetakse sama e-kirja paljudele erinevatele meiliaadressidele?

207. Programmi käskude omavahelist sõltuvust võib kujutada eelnevusgraafiga, mille tipud on käsud ja ühest käsust viib teise käsuni kaar, kui teist käsku pole võimalik täita enne esimest. Joonistage programmilõigu eelnevusgraaf ja teha selle abil kindlaks, millised käsud peavad olema täidetud enne viimase käsu täitmist.

a)
```
(K1) a := 0
(K2) b := 1
(K3) c := a + 1
(K4) d := b + a
(K5) e := d + 1
(K6) e := c + d
```

b)
```
(K1) x := 0
(K2) x := x + 1
(K3) y := 2
(K4) z := y
(K5) x := x + 1
(K6) z := 4
(K7) y := x + z
```

208. Projekti teostamiseks on vaja täita 10 tööülesannet. Ülesanded 1, 3 ja 5 ei nõua eeltöid. Enne ülesannet 2 peavad olema tehtud ülesanded 8 ja 6. Enne ülesannet 4 peavad olema tehtud ülesanded 1 ja 5. Enne ülesannet 6 peavad olema tehtud ülesanded 7 ja 4. Enne ülesannet 7 peab olema tehtud ülesanne 3. Enne ülesannet 8 peavad olema tehtud ülesanded 4 ja 7. Enne ülesannet 9 peavad olema tehtud ülesanded 2 ja 6. Enne ülesannet 10 peab olema tehtud ülesanne 9. Iga ülesanne võtab 1 päeva. Ülesandeid võib täita paralleelselt. Milline on vähim päevade arv, millega on võimalik projekt valmis saada?

209. Lahendage graafiteooria programmiga `lahendaja.jar` ülesanded ülesandekogust `suunatud.yk`.

28. Suunatud graafide kasutamine

210. Laual on n tikku. Käigul olles võib kumbki kahest mängijast võtta suvalise arvu tikke 1-st k-ni, $1 \leqslant k < n$. Käike tehakse kordamööda ning võidab see, kes võtab viimase tiku.

a) Joonistage tikumängu graaf juhul $n = 8$ ja $k = 3$. Graafi tipud vastavad seisudele ja kaared käikudele ühest seisust teise.

b) Leidke tikumängu võitev strateegia.

211. Külas elab n vanamutti, $n \geqslant 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada uudise. Tõestage, et on võimalik organiseerida telefonikõned niiviisi, et pärast $2n-4$ kõnet teab igaüks igaühe uudist.

212. Linnas elab n sõbrannat. Üksteisega suhtlevad nad mobiilisõnumite abil. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada uudise. Tõestage, et on võimalik organiseerida sõnumite saatmised nii, et pärast $2n-2$ sõnumit teab igaüks igaühe uudist.

213. Tõestage, et vähemalt kahetipulise puu servad saab alati orienteerida nii, et ühegi tipu juures pole korraga sisenevaid ja väljuvaid servi.

214. Suunatud graafi tippudeks on kahendarvud $000, 001, \ldots, 111$. Igast tipust $b_1 b_2 b_3$ viib kaar igasse tippu $b_2 b_3 b_4$.

a) Leidke selles graafis kinnine suunatud ahel, mis läbib kõik tipud täpselt üks kord.

b) Paigutage ringjoonele neli numbrit 0 ja neli numbrit 1 nii, et tekkiv ringjärjend sisaldab kõiki kahendarve $000, 001, \ldots, 111$.

c) Paigutage ringjoonele kaheksa numbrit 0 ja kaheksa numbrit 1 nii, et tekkiv ringjärjend sisaldab kõiki neljakohalisi kahendarve $0000, 0001, \ldots, 1111$.

215. Suunatud graafi G tippudeks on kõik kahendarvud pikkusega n. Igast tipust $b_1 b_2 \ldots b_n$ viib kaar igasse tippu $b_2 b_3 \ldots b_n b_{n+1}$. Tõestage, et graafis G leidub:

a) kinnine suunatud ahel, mis läbib kõik kaared täpselt üks kord;

b) kinnine suunatud ahel, mis läbib kõik tipud täpselt üks kord.

216. Linnas kehtib osal tänavatel kahesuunaline liiklus, ülejäänutel aga ühesuunaline. Igalt tänavalt on võimalik pääseda igale teisele. Remondi tõttu kehtestatakse kahesuunalise liiklusega tänavatel ühesuunaline liiklus, ühesuunalise liiklusega tänavatel aga kahesuunaline. Osutub, et ka nüüd on võimalik pääseda igalt tänavalt igale teisele. Tõestage, et kõigil tänavatel saab kehtestada ühesuunalise liikluse nii, et igalt tänavalt on võimalik pääseda igale teisele.

217. Riigis on n linna, $n > 5$. Igat kahte linna ühendab tee. Väljaspool linnu teed ei lõiku (kasutatakse viadukte). Tõestage, et teedel saab kehtestada ühesuunalise liikluse nii, et igast linnast võib pääseda igasse teise linna, sõites kas mööda neid kahte linna ühendavat teed või läbi mingi kolmanda linna.

218. Kahe teineteisega vaenujalal oleva kindluse rüütlid istuvad ümmarguse laua taga ja peavad rahuläbirääkimisi. Nende rüütlite arv, kelle paremal käel istub sõber, võrdub nende rüütlite arvuga, kelle paremal käel istub vaenlane. Tõestage, et rüütlite koguarv jagub 4-ga.

219. Suunatud graafi *tuumaks* nimetatakse tippude hulka S, mille puhul 1) hulga S tippude vahel pole ühtegi kaart ja 2) igast tipust, mis ei kuulu hulka S, viib kaar mingisse hulga S tippu. Olgu G tsükliteta suunatud graaf.

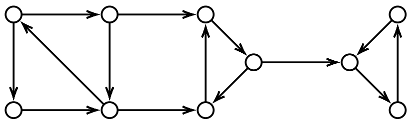
a) Tõestage, et graafil G on olemas üheselt määratud tuum.

b) Leidke ülesande 210 graafi tuum.

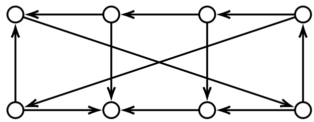
c) Vaatleme mängu, kus kaks mängijat nihutavad kordamööda nuppu mööda graafi G tippe, järgides kaarte suundi, ning kaotab see, kes enam käiku teha ei saa. Millise algseisu puhul leidub alustajal võitev strateegia? Millise algseisu puhul leidub võitev strateegia alustaja vastasel?

29. Tugev sidusus

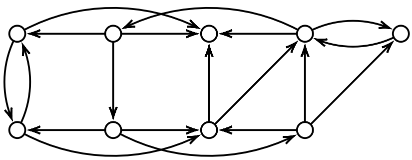
220. Leidke järgmiste graafide tugevalt sidusad komponendid.



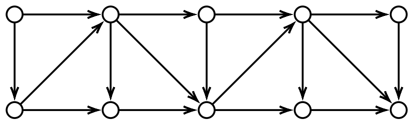
a)



b)

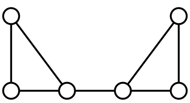


c)

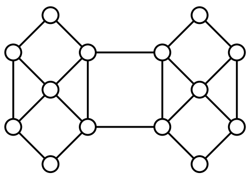


d)

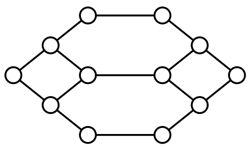
221. Suunamata graafi orienteerimine tähendab graafi servadele suundade omistamist nii, et tulemuseks saadav suunatud graaf on tugevalt sidus. Kui suunamata graafi servadele saab niimoodi suunad omistada, siis nimetame graafi orienteeritavaks. Tehke kindlaks, kas järgmised suunamata graafid on orienteeritavad.



a)



b)



c)

222. Tõestage, et tugevalt sidusas graafis kuulub iga kaar mingisse suunatud tsüklisse.

223. Tõestage, et kõik tipud, mida läbib suunatud ahel, mis ühendab suunatud graafis kahte samasse tugevalt sidusasse komponenti kuuluvat tippu, kuuluvad samuti sellesse tugevalt sidusasse komponenti.

224. Kas kehtib väide, et kui silmusteta suunatud graafi alusgraaf on sidus ning iga tipu juures leidub sisenev ja väljuv kaar, siis on see graaf ka tugevalt sidus? Tõestage või tooge kontranäide.

225. Suunatud graaf koosneb n sidusast komponendist (nõrga sidususe mõttes), kusjuures kõik komponendid eraldi võetuna on tugevalt sidusad. Milline on vähim arv kaari, mida tuleb sellele graafile lisada, et tulemuseks saadav graaf muutuks tugevalt sidusaks?

226. Võrkpalliturniiril osaleb n võistkonda, kellest igaüks mängib iga ülejäänuga ühe mängu. Viike ei ole. Tõestage, et pärast turniiri lõppemist saab võistkonnad järjestada nii, et esimene võistkond on võitnud teist, teine kolmandat, jne kuni eelviimane viimast.

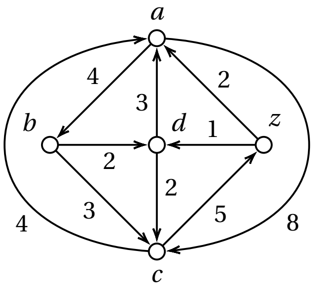
227. Olgu G suunatud täisgraaf ja v tema suurima väljundastmega tipp. Tõestage, et graafi G igasse ülejäänud tippu viib tipust v suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

228. Tõestage, et igas suunatud graafis G leidub tippude hulk S, mille tippude vahel pole ühtegi kaart (*stabiilne hulk*), kuid igasse tippu, mis ei kuulu hulka S, viib hulga S mõnest tipust suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

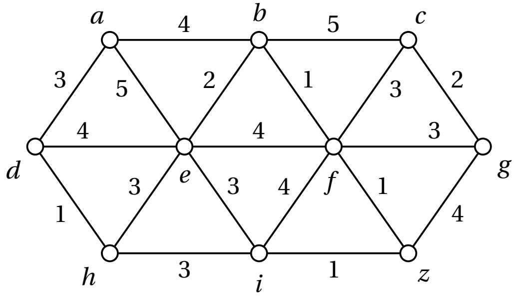
229. Tõestage, et suunatud graaf G on tugevalt sidus parajasti siis, kui graafi G tippude hulga ükskõik millise mittetühja pärisalamhulga X jaoks leidub graafis G kaar uv, et $u \in X$ ja $v \notin X$.

30. Suunatud ahelad ja tsüklid

230. Leidke järgmistes kaalutud graafides tippude a ja z vahelise lühima tee pikkus (esimene on suunatud, teine suunamata graaf).



a)



b)

231. Kas suunatud graafi tippude vaheline lühim ahel on üheselt määratud, kui graafis on kõigi kaarte kaalud erinevad?

232. Olgu G suunatud graaf, milles mingist tipust a viib mingisse tippu b kaks erinevat lühimat suunatud ahelat.

a) Eeldame, et nendel ahelatel leidub ühine tipp c, mis erineb tippudest a ja b. Tõestage, et esimese ahela osa $a \ldots c$ ja teise ahela osa $a \ldots c$ on võrdse kaaluga.

b) Olgu d esimesel ahelal esimene tipule a järgnev tipp, mis kuulub ka teise ahelasse. Tõestage, et ükski teise ahela tipp, mis asub tippude a ja d vahel, ei kuulu esimesse ahelasse.

233. Lühima tee algoritmide juures eeldasime, et iga kaare kaal on mittenegatiivne. Vastasel juhul ei tarvitse algoritmid anda õiget tulemust. Tooge näide negatiivsete kaaludega graafist, mille puhul

a) Dijkstra algoritm;

b) Floydi-Warshalli algoritm

ei anna vastuseks vähima kaaluga lihtahela pikkust ühest tipust teise.

234. Olgu $G = (V, E)$ sidus suunatud graaf ning $w\colon E \to \mathbb{R}$ funktsioon, mis omistab igale kaarele reaalarvulise kaalu. Funktsiooni w *potentsiaaliks* nimetatakse funktsiooni $p\colon V \to \mathbb{R}$, kui iga kaare $e = uv$ puhul kehtib $w(e) = p(v) - p(u)$. Tõestage, et funktsiooni w potentsiaal eksisteerib parajasti siis, kui iga tsükliline ringkäik mööda kaari (mitte tingimata suundi arvestades), kus kaare suunas tehtav samm lisab summasse selle kaare kaalu ja vastupidises suunas tehtav samm kaalu vastandarvu, lõpeb summaga 0.

235. Muusikapala võib sisaldada järgmist tüüpi osi: *allegro*, *moderato*, *andante* ja *vivo*. Kehtivad järgmised kompositsioonipõhimõtted: *andante*-osa ei või vahetult järgneda *moderato*-osale ega vastupidi ning *vivo* ei või järgneda *allegro*-osale.

a) Mitu 5-osalist muusikapala saab nendel tingimustel koostada?

b) Mitu 5-osalist muusikapala saab koostada siis, kui lisaks nõuda, et selles esineks vähemalt üks *allegro*-osa?

236. Tasandil on märgitud teatud arv punkte ning tõmmatud teatud arv vektoreid, kusjuures iga vektor algab mingis märgitud punktis ja lõpeb mingis teises märgitud punktis. Igas punktis algab samapalju vektoreid, kuipalju lõpeb. Tõestage, et kõigi vektorite summa on nullvektor.

237. Tõestage, et iga graafi servad saab orienteerida nii, et ühegi tipu sisendaste ja väljundaste ei erine rohkem kui ühe võrra.

238. Konstrueerige kaalutud suunatud graaf, kus iga tippu vähemalt üks kord külastava kinnise ahela kogukaal on vähim sellise kinnise ahela puhul, mis külastab mõnda tippu rohkem kui üks kord.

239. Tõestage, et ülesande leida vähima kogukaaluga kinnine ahel, mis külastab kaalutud graafi iga tippu vähemalt üks kord, saab taandada ülesandele leida vähima kogukaaluga kinnine ahel, mis külastab kaalutud graafi iga tippu täpselt üks kord.

31. Graafide kordamine

240. a) Millega võrdub graafi naabrusmaatriksi ühe rea elementide summa suunamata graafi puhul? Suunatud graafi puhul?

b) Millega võrdub graafi naabrusmaatriksi ühe veeru elementide summa suunamata graafi puhul? Suunatud graafi puhul?

241. Graafil on 495 serva. Osa tippe on astmega 3, ülejäänud astmega 5, seejuures tippe astmega 3 on kaks korda rohkem kui tippe astmega 5. Leidke graafi tippude arv.

242. Graafil G on 9 tippu, kusjuures iga tipu aste on 5 või 6. Tõestage, et graafis G leidub vähemalt 5 tippu astmega 6 või vähemalt 6 tippu astmega 5.

243. Tõestage, et igas graafis leidub igast paaritu astmega tipust ahel mingisse teise paaritu astmega tippu.

244. Graafis G leidub iga kahe tipu vahel kaks lihtahelat, mis ei sisalda ühiseid servi. Tõestage, et graafis G pole sildu.

245. Olgu G graaf, kus iga tipp kuulub mingisse tsüklisse. Tõestage, et kui graafis leidub selline tsükkel C, et graafi igal ülejäänud tsüklil on tsükliga C mõni ühine tipp, siis graaf G on sidus.

246. 200-tipulise puu kõik sisetipud (st tipud, mis pole lehed) on astmega 4. Leidke puu lehtede arv.

247. Kas leidub 75-tipuline puu, mille ühegi tipu aste pole suurem kui 3 ja mille kõigi lehtede eemaldamisel jääb järele 35-tipuline puu?

248. Graafi G kohta on teada kaks fakti:

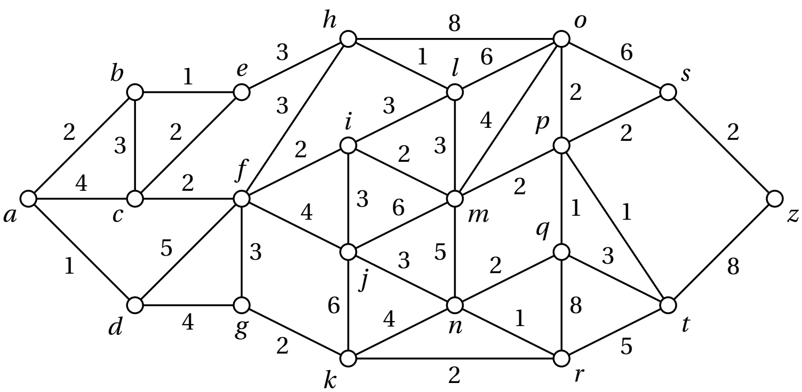
- ükskõik millise serva eemaldamisel jääb järele mittesidus graaf;
- ükskõik millise kahe tipu vahele serva lisamisel tekib tsükkel, mis sisaldab seda serva.

Tõestage, et graaf G on puu.

249. Koosnegu graaf G kahest sidusast komponendist, mis on puud. Kaks erinevates komponentides asuvat tippu ühendatakse servaga. Tõestage, et saadud graaf on puu.

250. Olgu G suvaline n-tipuline puu. Tõestage, et iga graaf H, mille kõigi tippude astmed on vähemalt $n-1$, sisaldab alamgraafi, mis on isomorfne puuga G.

251. Leidke järgmises graafis vähima kaaluga toespuu ja lühim tee tipust a tippu z.



252. Olgu G suunatud graaf ning u ja v kaks tippu. Tõestage, et tippu u sisaldav tugevalt sidus komponent ja tippu v sisaldav tugevalt sidus komponent kas langevad kokku või ei sisalda ühtegi ühist tippu.

253. Tõestage, et n-tipulise täisgraafi servad saab orienteerida nii, et tulemuseks saadud suunatud graafis ei leidu ühtegi kinnist suunatud ahelat.

254. Olgu G nõrgalt sidus suunatud graaf ning $a \in G$ selline tipp, et $G \setminus a$ on tugevalt sidus. Tõestage, et iga kahe tipu $u, v \in G$ puhul leidub suunatud ahel tipust u tippu v või suunatud ahel tipust v tippu u.

255*. Digitaalse pildi mõõtmete muutmiseks on olemas mitmesuguseid meetodeid, millest kõige levinumad on lõikamine ja skaleerimine. Selles ülesandes vaatleme meetodit, mis erinevalt nimetatutest suudab pildi mõõtmete muutmisel arvestada pildi kujutatud objekte.

Meetodi aluseks on idee, et olulist pildiinfot kannavad enamasti need pikslid, mille läheduses pildi värv kiiresti muutub. Iga piksli jaoks arvutame nö *piksli energia*, mis võtab arvesse värvi muutumise kiirust selle piksli ümbruses. Kiiremini muutuva värvi puhul on energia suurem. Seejärel leiame kõige väiksema koguenergiaga tee pildi ülaääre mingist punktist alaääre mingisse punkti, valides igas reas ühe piksli, mis puutub eelmise rea piksliga kokku külge- või nurkapidi. Leitud teekonna pikslid eemaldame, millega pildi laius muutub ühe piksli võrra väiksemaks. Seda võtet korrates saab pildi laiust vähendada ükskõik millise arvu pikslite võrra.

Kirjutage programm, mis selle meetodi abil vähendab etteantud .png formaadis pildi laiust etteantud arvu pikslite võrra.

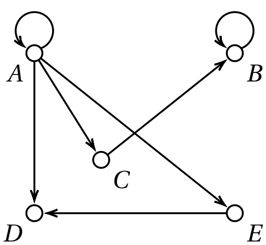
Pikslite energia arvutamine ja vähima energiaga teekonna leidmine toimub järgnevalt.

Koordinaadid on suunatud nagu arvutiekraanil tavaliselt: x-koordinaat paremale ja y-koordinaat alla. Iga piksli värv koosneb kolmest komponendist: punasest, rohelisest ja sinisest, iga komponent on täisarv 0-st 255-ni. Märgime piksli (x,y) värvi tähisega $V_{x,y} = (p_{x,y}, r_{x,y}, s_{x,y})$. Piksli (x,y) energia avaldub valemiga $E(x,y) = \sqrt{\Delta_x(x,y)^2 + \Delta_y(x,y)^2}$, kus $\Delta_x(x,y)^2 = (p_{x+1,y} - p_{x-1,y})^2 + (r_{x+1,y} - r_{x-1,y})^2 + (s_{x+1,y} - s_{x-1,y})^2$ ja analoogiliselt $\Delta_y(x,y)^2 = (p_{x,y+1} - p_{x,y-1})^2 + (r_{x,y+1} - r_{x,y-1})^2 + (s_{x,y+1} - s_{x,y-1})^2$. Siin kirjeldab x-gradient $\Delta_x(x,y)$ värvide erinevust punktide $(x-1,y)$ ja $(x+1,y)$ vahel, y-gradient $\Delta_y(x,y)$ aga värvide erinevust punktide $(x,y-1)$ ja $(x,y+1)$ vahel. Pildi äärel asuvate punktide energiaks loeme 1000, mis on suurem kui iga sisepunkti energia.

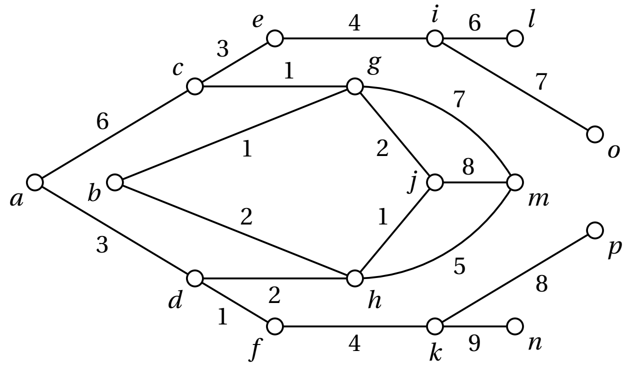
Vähima energiaga teekonna leidmiseks moodustame graafi, kus tipud on pildi pikslid ning igast pikslist (x,y), mis ei asu viimases reas, viivad kaared pikslitesse $(x-1,y+1)$, $(x,y+1)$ ja $(x+1,y+1)$. Rea vasakul otspunktil puudub neist esimene kaar ja paremal otspunktil viimane. Seejärel leiame vähima kaaluga suunatud ahela mingist ülemise ääre pikslist mingi alumise ääre pikslini, kus ahela kaaluks loeme tippude energiate summa. Selle ahela pikslid kustutame.

32. **Kontrolltöö.** Näidis 2017. aastast.

1. Koostada järgmise graafi naabrusmaatriks.



2. (a) Leida graafi vähima kaaluga toespuu sobiva kursusel käsitletud algoritmiga.



Tulemuseks saadud puus märkida iga serva puhul, mitmendana see serv tulemusse valitakse.

(b) Mitu erinevat vähima kaaluga toespuud sellel graafil leidub? Põhjendada.

3. Puus on 60 tippu, neist 25 on lehed. Ülejäänud on kas astmega 2 või 3. Mitu tippu on astmega 2 ja mitu astmega 3?

4. Olgu G (suunamata) graaf ning a ja b tipud, mille vahel serva ei ole. Igast ülejäänud tipust leidub ahel tippu a või tippu b. Tõestada, et kui mingi tipp, millest viib ahel tippu a, ja mingi tipp, millest viib ahel tippu b, on omavahel ühendatud ahelaga, siis graaf G on sidus.

5. Olgu G suunatud graaf, mis on saadud suunamata täisgraafi kõigile servadele suunda omistades. Olgu v graafi G suurima väljundastmega tipp. Tõestada, et tipust v viib igasse ülejäänud tippu suunatud lihtahel pikkusega ülimalt 2.

Soovitus: kasutada vastuväitelist tõestust.