Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Rainis Haller, Eve Oja ja Märt Põldvere

# Funktsionaalanalüüs I
# Ülesannete kogu

Teine, parandatud ja ümbertöötatud trükk

Tartu, 2012

Väljaandja: Eesti Matemaatika Selts, J. Liivi 2, 50409 Tartu

ISBN 978-9949-9180-4-1

Trükikoda: AS Control, Narva mnt 4, 51009 Tartu

# SISUKORD

# EESSÕNA

Funktsionaalanalüüs on intensiivselt arenev fundamentaalne matemaatikaharu, mis leiab rakendamist arvutusmatemaatikas, diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teoorias, teoreetilises füüsikas, tõenäosusteoorias jm.

Käesolev ülesannetekogu pakub lahendamiseks valiku ülesandeid funktsionaalanalüüsi traditsioonilise ülikoolikursuse algusosa — "Funktsionaalanalüüs I" — juurde.

Oleme püüdnud ülesandeid sisu poolest järjestada nii, et lahendajate tööd võimalikult hõlbustada (kui nad muidugi lahendavad ülesandeid siinesitatud järjekorras, mida me soojalt soovitame).

Osale ülesannetest on lisatud sümbol *. Need on kõrgema raskuskategooria ülesanded, mis eeldavad, võrreldes tavaülesannetega, rohkem iseseisvat mõtlemist ja nutikaid ideesid. *Ülesannete lahendamine pole põhikursuse omandamise juures tarvilik, küll aga on soovitav, et igaüks nende sisuga tutvuks ning pisut nende üle ka mõtiskleks.

Ülesannetekogu algab sisukorraga, mis annab ülevaate ülesannete temaatikast, ning klassikaliste ruumide "tabeliga". See tabel tutvustab funktsionaalanalüüsi ja tema rakenduste jaoks olulisemaid konkreetseid ruume, mille kohta on ka ülesannetekogus üsnagi palju ülesandeid.

Käesoleva ülesannetekogu eelkäijaks on samade autorite samanimeline raamatuke, mis ilmus Eesti Matemaatika Seltsi väljaandena 2010. aastal.

Nii mõnedki üliõpilased ja õppejõud mõtlesid välja ja annetasid meie ülesannetekogule üksikuid ülesandeid. Olgu siinkohal tänatud Toomas Krips, Rauni Lillemets, Martin Menert ja Silja Treialt ning Evely Leetma ja Peeter Oja.

Tartus 2012. a.

Autorid

# KLASSIKALISED RUUMID

Tähistagu sümbol $\mathbb{K}$ kas kõigi reaalarvude hulka $\mathbb{R}$ või kõigi kompleksarvude hulka $\mathbb{C}$.

## Lõplikumõõtmelised ruumid

Olgu $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \colon \xi_k \in \mathbb{K}\}$ ja $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$.
Normeeritud ruumid on:

1) $m_n = \ell_\infty^n = X$ normiga

$$\|x\| = \max_{1 \le k \le n} |\xi_k|,$$

2) $\ell_p^n = X$, $1 \le p < \infty$, normiga

$$\|x\| = \Big( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \Big)^{1/p}.$$

Ruumis $\ell_1^n$ on summanorm

$$\|x\| = \sum_{k=1}^n |\xi_k|.$$

Ruumis $\ell_2^n = \mathbb{K}^n$ on eukleidiline norm

$$\|x\| = \Big( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \Big)^{1/2}.$$

Kõik need ruumid on Banachi ruumid ehk täielikud normeeritud ruumid.

## Jadaruumid

Elementideks on arvjadad $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} = (\xi_k)$, $\xi_k \in \mathbb{K}$.

1) Kõigi jadade ruum $s = \{(\xi_k) \colon \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on meetriline ruum kaugusega

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad x = (\xi_k),\ y = (\eta_k).$$

Normeeritud ruumid on järgmised:

2) Tõkestatud jadade ruum

$$m = \ell_\infty = \{(\xi_k) \colon \sup_k |\xi_k| < \infty\}$$

normiga

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|.$$

3) Koonduvate jadade ruum

$$c = \{(\xi_k) \colon \exists \lim_k \xi_k \in \mathbb{K}\}$$

ruumi $m$ normiga.

4) Nulliks koonduvate jadade ruum

$$c_0 = \{(\xi_k) \colon \lim_k \xi_k = 0\}$$

ruumi $m$ (või ruumi $c$) normiga.

5) Astmega $p$, $1 \leq p < \infty$, summeeruvate jadade ruum

$$\ell_p = \{(\xi_k) \colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}$$

normiga

$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Absoluutselt summeeruvate jadade ruumi $\ell_1$ norm on

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

Ruum $s$ on täielik meetriline ruum, ruumid $m = \ell_\infty$, $c$, $c_0$ ja $\ell_p$ on Banachi ruumid.

## Funktsiooniruumid

Normeeritud ruumid on:

1) Lõigus $[a, b]$ tõkestatud funktsioonide ruum

$$M[a, b] = \{x = x(t) \colon \sup_{a \le t \le b} |x(t)| < \infty\}$$

normiga

$$\|x\| = \sup_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

2) Lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide ruum $C[a, b]$ normiga

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

3) Lõigus $[a, b]$ $n$ korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruum $C^n[a, b]$ (või $C^{(n)}[a, b]$) normiga

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|,$$

kus $x^{(0)}(t) = x(t)$.

4) Lebesgue'i ruumid $L_p(a, b)$, $1 \le p < \infty$:

$$L_p(a, b) = \{x = x(t) \colon \exists \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \text{ (Lebesgue'i mõttes)}\}$$

normiga

$$\|x\| = \Big(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\Big)^{1/p}.$$

Integreeruvate funktsioonide ruumi $L_1(a, b)$ norm on

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| \, dt.$$

Integreeruva ruuduga funktsioonide ruumi $L_2(a,b)$ norm on

$$\|x\| = \Big(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

Ruumis $L_p(a,b)$ on võrdus $x = y$ defineeritud funktsioonide $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ võrdumisena peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$. Seega on ruumi $L_p(a,b)$ elementideks peaaegu kõikjal ühtivate funktsioonide klassid.

Kõik need funktsiooniruumid on Banachi ruumid.

# ÜLESANDED

## Meetrilise ruumi mõiste

**Ülesanne 1** (loomuliku kauguse kohta arvude hulgas)**.** Tõestada, et $\mathbb{K}$ on meetriline ruum kauguse

$$\varrho(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{K},$$

suhtes.

**Ülesanne 2.** Olgu $X$ suvaline hulk. Tõestada, et $X$ on meetriline ruum kauguse

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y, \end{cases}$$

suhtes.

**Definitsioon.** Ruumi $X$ ülesandest 2 nimetatakse *diskreetseks* meetriliseks ruumiks.

**Ülesanne 3.** Kas $\varrho$ on kaugus reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$, kui $x,y \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \varrho(x,y) = x^2 - y^2, \\
&\text{b)} \quad \varrho(x,y) = |x^2 - y^2|, \\
&\text{c)} \quad \varrho(x,y) = |x - y^2|, \\
&\text{d)} \quad \varrho(x,y) = |x+y| + |x-y|, \\
&\text{e)} \quad \varrho(x,y) = \cos(x-y), \\
&\text{f)} \quad \varrho(x,y) = |e^x - e^y|, \\
&\text{g)} \quad \varrho(x,y) = |x^3 - y^3|, \\
&\text{h)} \quad \varrho(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \\
&\text{i)} \quad \varrho(x,y) = (x-y)^2, \\
&\text{j)} \quad \varrho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \\
&\text{k)} \quad \varrho(x,y) = \min\{1, |x-y|\}?
\end{aligned}$$

**Ülesanne 4.** Kas funktsiooni $z = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, abil saab defineerida kaugust $\varrho$ reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ nii, et

$$\varrho(x,y) = f(x) - f(y)?$$

Võrrelda ülesandega 3 a).

**Ülesanne 5.** Leida tarvilikud ja piisavad tingimused, mida peaks rahuldama funktsioon $z = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, selleks, et

$$\varrho(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

kujutaks endast kaugust hulgas $\mathbb{R}$. Võrrelda ülesannetega 3 b), 3 f), 3 g).

**Ülesanne 6.** Kas $\varrho$ on kaugus hulgas $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, kui $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ korral

a) $\varrho(x,y) = \max\{|\xi_1 - \xi_2|, |\eta_1 - \eta_2|\}$,

b) $\varrho(x,y) = \min\{|\xi_1 - \eta_1|, |\xi_2 - \eta_2|\}$,

c) $\varrho(x,y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|} + |\xi_2 - \eta_2|$,

d) $\varrho(x,y) = \min\{1, |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|\}$?

**Ülesanne 7.** Tõestada, et naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ on meetriline ruum kauguse

$$\varrho(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{kui } n = m, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m}, & \text{kui } n \neq m, \end{cases}$$

suhtes.

**Ülesanne 8.** Tõestada, et $\varrho$ on kaugus reaalarvude poollõigus $[0,p)$ $(p > 0)$, kui $x, y \in [0,p)$ korral

$$\varrho(x,y) = \min\{|x-y|, p - |x-y|\}.$$

**Ülesanne 9.** Tõestada, et $\varrho$ on kaugus hulgas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, kui $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral

$$\varrho(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

**Ülesanne 10.** Kas $\varrho$ on kaugus kõigi arvjadade hulgas $\{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \colon \xi_k \in \mathbb{K}\}$, kui tema elementide $x = (\xi_k)$ ja $y = (\eta_k)$ korral

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = y, \\ 1/k, & \text{kui } x \neq y \text{ ning } k \text{ on vähim indeks,} \\ & \text{mille korral } \xi_k \neq \eta_k? \end{cases}$$

**Ülesanne 11.** Tõestada, et kõigi tõkestatud arvjadade hulk

$$\{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \colon \xi_k \in \mathbb{K}, \text{ leidub } M \in \mathbb{R} \text{ nii, et iga } k \text{ korral } |\xi_k| \leq M\}$$

on meetriline ruum, kui kaugus $\varrho$ tema elementide $x = (\xi_k)$ ja $y = (\eta_k)$ vahel defineerida võrdusega

$$\varrho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\xi_k - \eta_k|.$$

**Ülesanne 12.** Tõestada, et jadade hulk

$$X = \{(\xi_0, \xi_1, \dots) \colon \xi_k \in \mathbb{K}, \ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_{k-1}| < \infty\}$$

on meetriline ruum kauguse

$$\varrho(x,y) = |\xi_0 - \eta_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |(\xi_k - \eta_k) - (\xi_{k-1} - \eta_{k-1})|,$$
$$x = (\xi_k), \ y = (\eta_k),$$

suhtes.

**Ülesanne 13.** Kas $\varrho$ on kaugus kõigi lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulgas, kui

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \varrho(x,y) = \inf_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)|,\\
&\text{b)} \quad \varrho(x,y) = \sup_{a\le t_1,t_2\le b} |x(t_1)-y(t_2)|,\\
&\text{c)} \quad \varrho(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt,\\
&\text{d)} \quad \varrho(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt?
\end{aligned}
$$

**Ülesanne 14.** Olgu pidev kahe muutuja funktsioon $f = f(u,v)$, $u, v \in \mathbb{R}$, kaugus reaalarvude hulgas. Tõestada, et

$$\varrho(x,y) = \int_a^b f(x(t),y(t))\,dt$$

on kaugus kõigi lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulgas.

**Ülesanne 15.** Olgu $\varrho$ kaugus hulgas $X$. Kas

$$d(x,y) = \min\{1, \varrho(x,y)\}, \quad x,y \in X,$$

on kaugus hulgas $X$? Võrrelda ülesannetega 3 k) ja 6 d).

**Ülesanne 16.** Olgu $\varrho$ kaugus hulgas $X$. Kas

$$d(x,y) = \ln(1+\varrho(x,y)), \quad x,y \in X,$$

on kaugus hulgas $X$?

**Ülesanne 17.** Olgu $\varrho$ kaugus hulgas $X$ ja $\sigma$ kaugus hulgas $Y$. Tõestada, et hulgas $X \times Y$ võime kauguse $d$ defineerida järgmiselt

$$
\begin{aligned}
&d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \varrho(x_1,x_2) + \sigma(y_1,y_2),\\
&\qquad x_1,x_2 \in X,\ y_1,y_2 \in Y.
\end{aligned}
$$

**Ülesanne 18.** Tõestada, et kauguse definitsioonis on teine ja kolmas aksioom (sümmeetria aksioom ning kolmnurga võrratus) asendatav ühe tingimusega: mistahes elementide $x, y, z$ korral

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(y,z).$$

**Ülesanne 19.** Ringleb rahvajutt matemaatikatudengist, kes kirjutas doktoriväitekirja "antimeetriliste ruumide" omadustest, kus antimeetriline ruum defineeritakse meetrilise ruumi mõiste eeskujul, kuid kauguse asemel vaadeldav samasuse ja sümmeetria aksioomi rahuldav "antikaugus" $\varrho$ rahuldab kolmnurga võrratuse asemel tingimust

$$\varrho(x,y) \geq \varrho(x,z) + \varrho(z,y).$$

Miks ei ole niisugune doktoriväitekiri tõsiseltvõetav?

***Ülesanne 20.** Tõestada, et kui $\varrho$ on kaugus hulgas $X$, siis ka

$$d(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}, \quad x, y \in X,$$

on kaugus hulgas $X$.

***Ülesanne 21.** Kas $\varrho$ on kaugus kõigi lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulgas, kui

$$\varrho(x,y) = \int_a^b \frac{\sqrt{|x(t)-y(t)|}}{1+\sqrt{|x(t)-y(t)|}}\,dt?$$

***Ülesanne 22.** Kas $\varrho$ on kaugus kõigi lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide hulgas, kui

$$\varrho(x,y) = \inf\{\lambda > 0\colon \int_a^b (e^{\frac{|x(t)-y(t)|}{\lambda}} - 1)\,dt \leq 1\}?$$

N ä p u n ä i d e. Kui $\lambda, \mu \in (0,1)$, $\lambda + \mu = 1$ ja $s, t \in \mathbb{R}$, siis

$$e^{\lambda s + \mu t} \leq \lambda e^s + \mu e^t,$$

s.t. funktsioon $e^t$, $t \in \mathbb{R}$, on kumer.

## Koonduvus meetrilises ruumis

**Ülesanne 23.** Olgu meetrilises ruumis vähemalt kaks elementi. Tuua selles meetrilises ruumis näide koonduvast jadast ning mittekoonduvast (hajuvast) jadast.

**Ülesanne 24.** Kirjeldada koonduvust arvude ruumis.

**Ülesanne 25.** Kirjeldada koonduvust diskreetses meetrilises ruumis.

**Ülesanne 26.** Kirjeldada koonduvust ülesandes 7 kirjeldatud meetrilises ruumis.

**Ülesanne 27.** Tõestada, et kui jada $x_n = (\xi_k^n) = (\xi_k^n)_{k=1}^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, koondub ülesandes 11 kirjeldatud meetrilises ruumis elemendiks $x = (\xi_k)$, siis

$$\xi_k^n \underset{n}{\longrightarrow} \xi_k \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

(s.t. leiab aset koordinaatide koonduvus).

**Ülesanne 28.** Uurida jadade $x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 2^n, 0, 0, \dots)$ ja $y_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots)$ koonduvust ülesandes 11 kirjeldatud meetrilises ruumis. (Kasutada ülesannet 27.)

**Ülesanne 29.** Tõestada, et kui jada $x_n = (\xi_k^n) = (\xi_k^n)_{k=0}^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, koondub ülesandes 12 kirjeldatud meetrilises ruumis elemendiks $x = (\xi_k)$, siis

$$\xi_k^n \underset{n}{\longrightarrow} \xi_k \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

(s.t. leiab aset koordinaatide koonduvus).

**Ülesanne 30.** Uurida jadade $x_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \dots)$ ja $y_n =$

$(\underbrace{0,\dots,0}_{n},\frac{1}{n},0,0,\dots)$ koonduvust ülesandes 12 kirjeldatud meetrilises ruumis. (Kasutada ülesannet 29.)

**Ülesanne 31.** Näidata, et kui meetrilise ruumi definitsioonis samasuse aksioom asendada nõrgema tingimusega: *iga elemendi $x$ korral* $\varrho(x,x)=0$, siis võib jadal olla mitu piirväärtust.

### Normeeritud ruum kui meetriline ruum

**Ülesanne 32.** Tõestada, et normeeritud ruumis $X\neq\{0\}$ leidub element $x\in X$ nii, et $\|x\|=1$. Veelgi enam, iga reaalarvu $c>0$ korral leidub element $x_c\in X$ nii, et $\|x_c\|=c$.

**Ülesanne 33.** Olgu $X\neq\{0\}$ normeeritud ruum ja $a\in X$. Tõestada, et iga arvu $d>0$ korral leidub element $b\in X$ nii, et $\|a-b\|=d$.

**Ülesanne 34.** Olgu $X\neq\{0\}$ vektorruum ning olgu ta diskreetne meetriline ruum kaugusega $\varrho$. Näidata, et $X$ ei ole normeeritud ruum, s.t. ruumi $X$ ei saa muuta normeeritud ruumiks nii, et tema norm defineeriks ruumi $X$ kauguse, s.t. rahuldaks tingimust

$$\|x-y\|=\varrho(x,y).$$

N ä p u n ä i d e. Kasutada ülesannet 32.

**Ülesanne 35.** Kas ülesannetes 3 j), 3 k), 7 kirjeldatud meetrilised ruumid on normeeritud ruumid?

**Ülesanne 36.** Kas ülesannetes 3 f), 3 g), 3 h), 11, 12, 13 c) kirjeldatud meetrilised ruumid on normeeritud ruumid?

**Ülesanne 37.** Tõestada, et normeeritud ruumi elementide $x$ ja $y$ korral kehtib võrratus

$$\|x\|\le\max\{\|x+y\|,\|x-y\|\}.$$

**Ülesanne 38.** Tõestada, et normeeritud ruumi elementide $x$ ja $y$ korral kehtib võrratus

$$\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|x+2y\|\}.$$

**Ülesanne 39.** Kas lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruvate funktsioonide vektorruumis võib funktsiooni $x = x(t)$ normi defineerida järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|,\\
&\text{b)} \quad \max_{a\leq t\leq b} |x'(t)|,\\
&\text{c)} \quad \int_a^b |x(t)|\,dt + \max_{a\leq t\leq b} |x'(t)|,\\
&\text{d)} \quad |x(b)-x(a)| + \max_{a\leq t\leq b} |x'(t)|,\\
&\text{e)} \quad |x(a)| + \max_{a\leq t\leq b} |x'(t)|?
\end{aligned}$$

***Ülesanne 40.** Kas iga vektorruumi saab muuta normeeritud ruumiks?

***Ülesanne 41.** Olgu $x_0$ ja $x_1$ normeeritud ruumi $X$ elemendid ja $\lambda \in (0,1)$. Tõestada, et jada

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1-\lambda)x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

koondub ruumis $X$.

## Lõplikumõõtmelised ruumid

**Ülesanne 42.** Olgu $x = (0, \frac{1}{2}, 1, 0)$ ja $y = (-1,-1,-1,1)$. Leida elementide $x$ ja $y$ vaheline kaugus $\varrho(x,y)$ ruumides $m_4$, $\ell_1^4$ ja $\ell_2^4$.

**Ülesanne 43.** Olgu $x = (1,i)$ ja $y = (0,-i)$. Leida $\varrho(x,y)$ ruumides $m_2$, $\ell_1^2$, $\ell_2^2$ ja $\ell_5^2$.

**Ülesanne 44.** Kas $X = \{(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})\colon \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on normeeritud ruum, kui

$$\left\|(\xi_k)_{k=1}^{2n}\right\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{2k-1}|^3\Big)^{\frac{1}{3}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_{2k}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}?$$

N ä p u n ä i d e. Ruumid $\ell_p^n$, $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on normeeritud ruumid.

**Ülesanne 45.** Tõestada, et jada koonduvus ruumis $m_n$ ja $\ell_p^n$ on samaväärne koordinaatide koonduvusega, s.t. jada $x_m = (\xi_1^m, \ldots, \xi_n^m)$ koondub elemendiks $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ parajasti siis, kui $\xi_k^m \underset{m}{\longrightarrow} \xi_k$ iga indeksi $k$ korral.

**Ülesanne 46.** Kas jada $x_n = (\frac{1}{n}, 1)$ koondub ruumis $m_2$?

**Ülesanne 47.** Kas jada $x_n = (\frac{1}{n}, 1, \frac{1}{n^2}, \sqrt[n]{n})$ koondub ruumis $\ell_p^4$?

***Ülesanne 48.** Tähistagu $\|x\|_\infty$ vektori $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ normi ruumis $m_n$ ja $\|x\|_p$ vektori $x$ normi ruumis $\ell_p^n$. Tõestada, et

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

## Jadaruumid

**Ülesanne 49.** Näidata, et meetriline ruum $s$ ei ole normeeritud ruum, s.t. ruumi $s$ ei saa muuta normeeritud ruumiks nii, et tema norm defineeriks ruumi $s$ kauguse.

**Ülesanne 50.** Kas kõigi arvjadade hulk $X = \{(\xi_k)\colon \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on meetriline ruum kauguse

$$\varrho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{(k+1)^2 + |\xi_k - \eta_k| k^2}, \quad x = (\xi_k),\ y = (\eta_k),$$

suhtes?

N ä p u n ä i d e. Uurida, kuidas kontrollitakse, et $s$ on meetriline ruum.

**Ülesanne 51.** Tõestada, et koonduvate ridade vektorruum

$$cs = \{(\xi_k)\colon \xi_k \in \mathbb{R}, \text{ rida } \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ koondub}\}$$

on normeeritud ruum normi

$$\|(\xi_k)\| = \sup_n \Big| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Big|$$

suhtes.

**Ülesanne 52.** Olgu $x = (i, 0, i, 0, \dots)$ ja $y = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Leida elementide $x$ ja $y$ vaheline kaugus $\varrho(x, y)$ ruumides $m$ ja $s$.

**Ülesanne 53.** Tõestada, et jada koonduvusest ruumis $m$, $c$, $c_0$, $\ell_p$ $(p \geq 1)$ või $s$ järeldub selle jada koonduvus koordinaaditi, s.t. kui jada $x_n = (\xi_k^n)_{k=1}^{\infty}$ koondub elemendiks $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, siis $\xi_k^n \underset{n}{\longrightarrow} \xi_k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

**Ülesanne 54.** Näidata, et jada $e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^{\infty}$ koondub koordinaatide kaupa. Kas jada $(e_n)$ koondub ruumis $m$, $c$, $c_0$, $\ell_p$ $(p \geq 1)$ või $s$?

**Ülesanne 55.** Näidata, et jada

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots),\ x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots),\ x_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \dots$$

koondub ruumides $s$ ja $m$, kuid ei koondu ruumis $\ell_1$.

**Ülesanne 56.** Näidata, et ülesande 55 jada $(x_n)$ koondub ruumis $\ell_p$, $p > 1$.

**Ülesanne 57.** Kas jada $x_n = (1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \dots)$ koondub ruumis $c$?

**Ülesanne 58.** Kas jada $x_n = (\frac{n}{2^n}, \frac{n}{3^n}, \dots)$ koondub ruumis $m$?

**Ülesanne 59.** Kas jada

$$x_n = ((-1)^1 \sqrt[n]{1}, (-1)^2 \sqrt[n]{2}, \dots, (-1)^n \sqrt[n]{n}, 0, 0, \dots)$$

koondub ruumis $m$?

**Ülesanne 60.** Olgu $1 \le p < q \le \infty$.

a) Tõestada, et $\ell_p \subset \ell_q$.

b) Tõestada, et jada, mis koondub ruumis $\ell_p$, koondub ka ruumis $\ell_q$.

c) Olgu $x_n = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, 0, 0, \dots\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Veenduda, et jada $(x_n)$ asub ruumis $\ell_p$, koondub ruumis $\ell_q$, kuid ei koondu ruumis $\ell_p$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada võrratust

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

mis kehtib, kui $1 \le p \le q < \infty$, $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

***Ülesanne 61.** Olgu $w = (w_k)$ niisugune monotoonselt kahanev positiivsete arvude jada, et $w_1 = 1$, $\lim_k w_k = 0$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \infty$. Olgu $1 \le p < \infty$. Tõestada, et

$$d(w,p) = \Big\{(\xi_k)\colon \xi_k \in \mathbb{R},\ \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} w_k |\xi_{\pi(k)}|^p < \infty\Big\}$$

on normeeritud ruum normi

$$\|(\xi_k)\| = \sup_{\pi} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} w_k |\xi_{\pi(k)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

suhtes, kus supreemum võetakse üle naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ kõigi ümberjärjestuste (s.t. bijektsioonide) $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada Minkowski võrratust.

**Definitsioon.** Ruumi $d(w,p)$ (vt. ülesanne 61) nimetatakse *Lorentzi jadaruumiks.*

***Ülesanne 62.** Olgu $M\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ niisugune kumer funktsioon, et $M(0)=0$ ja $M(t)>0$, kui $t>0$. Tõestada, et

$$\ell_M = \Big\{(\xi_k)\colon \xi_k \in \mathbb{R},\ \exists\lambda>0,\ \sum_{k=1}^{\infty} M\Big(\frac{|\xi_k|}{\lambda}\Big) < \infty\Big\}$$

on normeeritud ruum normi

$$\|(\xi_k)\| = \inf\Big\{\lambda>0\colon \sum_{k=1}^{\infty} M\Big(\frac{|\xi_k|}{\lambda}\Big) \le 1\Big\}$$

suhtes. Näidata, et kui $M(t)=t^p$, $t\in[0,\infty)$, kus $p\ge 1$, siis $\ell_M=\ell_p$, kusjuures ka nende ruumide normid võrduvad.

M e e l d e t u l e t u s. Olgu $\Delta \subset \mathbb{R}$ piirkond. Funktsiooni $M\colon \Delta \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kumeraks*, kui $M(\lambda t+\mu s) \le \lambda M(t) + \mu M(s)$, $t,s\in\Delta$, $\lambda,\mu\in(0,1)$, $\lambda+\mu=1$.

**Definitsioon.** Ruumi $\ell_M$ (vt. ülesanne 62) nimetatakse *Orliczi jadaruumiks.*

***Ülesanne 63.** Näidata, et $\big(\xi_k^n\big)_{k=1}^{\infty} \underset{n}{\longrightarrow} \big(\xi_k\big)$ ruumis $\ell_p$ parajasti siis, kui

$$\xi_k^n \underset{n}{\longrightarrow} \xi_k \quad \forall k$$

ja

$$\forall\varepsilon>0\ \exists K\in\mathbb{N} \qquad \sum_{k=K+1}^{\infty} |\xi_k^n|^p < \varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(s.o. ridade $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n|^p$ ühtlane koondumine $n$ suhtes).

## Funktsiooniruumid

**Ülesanne 64.** Leida kaugus $\varrho(x,y)$ ruumis $X$, kui

$$
\begin{array}{rl}
\text{a)} & X = C[0,1],\ x = x(t) = t^{10},\ y = y(t) = t^{20};\\
\text{b)} & X = L_1(0,1),\ x = x(t) = t^{10},\ y = y(t) = t^{20};\\
\text{c)} & X = M[1,2],\ x = x(t) = (t+1)^2,\ y = y(t) = 2t+1;\\
\text{d)} & X = L_2(0,3),\ x = x(t) = t-1,\ y = y(t) = 2;\\
\text{e)} & X = L_1(0,3),\ x = x(t) = t-1,\ y = y(t) = 2;\\
\text{f)} & X = M[0,1],\ x = x(t) = \dfrac{t^{11}}{11},\ y = 0;\\
\text{g)} & X = M[0,1],\ x = x(t) = t^{11},\ y = y(t) = t^{12};\\
\text{h)} & X = C[0,1],\ x = x(t) = t^{11},\ y = y(t) = t^{22}.
\end{array}
$$

**Ülesanne 65.** Kas jada $x_n$ koondub ruumis $C[0,1]$, kui

$$
\begin{array}{rl}
\text{a)} & x_n = x_n(t) = \dfrac{t^n}{n},\\
\text{b)} & x_n = x_n(t) = t^n - t^{n+1},\\
\text{c)} & x_n = x_n(t) = t^n - t^{2n}?
\end{array}
$$

N ä p u n ä i d e. Teame, et

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**Ülesanne 66.** Kas jada $x_n = x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ koondub ruumis

$$
\begin{array}{rl}
\text{a)} & C[0,1],\\
\text{b)} & L_2(0,1),\\
\text{c)} & C^1[0,1]?
\end{array}
$$

**Ülesanne 67.** Kas jada $y_n = y_n(t) = e^{-nt}$ koondub ruumis

a) $C[0,2]$,
b) $M[0,2]$,
c) $L_1(0,2)$,
d) $L_2(0,2)$?

**Ülesanne 68.** Tõestada, et jada, mis koondub ruumis $C[a,b]$, koondub ka ruumis $L_p(a,b)$, $p \geq 1$.

**Ülesanne 69.** Konstrueerida lõigus $[0,1]$ pidevate funktsioonide jada, mis koondub ruumis $L_1(0,1)$, kuid ei koondu ruumis $C[0,1]$.

N ä p u n ä i d e. Ülesanne 67.

***Ülesanne 70.** Olgu $1 \leq p < q < \infty$.

a) Tõestada, et $L_q(a,b) \subset L_p(a,b)$.

b) Tõestada, et jada, mis koondub ruumis $L_q(a,b)$, koondub ka ruumis $L_p(a,b)$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada fakti, et kui funktsioon $x = x(t)$ on mõõtuv lõigus $[a,b]$, eksisteerib lõplik Lebesgue'i integraal $\int_a^b y(t)\,dt$ ning $|x(t)| \leq y(t)$ peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$, siis eksisteerib lõplik Lebesgue'i integraal $\int_a^b x(t)\,dt$. Kasutada ka Rogersi-Hölderi võrratust.

## Kerad ja ümbrused

**Ülesanne 71.** Kirjeldada kerasid ruumides $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$.

**Ülesanne 72.** Kirjeldada kinnist ühikkera $\overline{B}(0,1)$ reaalsetes ruumides $\ell_1^2$, $\ell_2^2$, $m_2$, $\ell_p^2$ $(1 < p < 2$ ja $p > 2)$ ja $C[a,b]$.

**Ülesanne 73.** Kirjeldada kerasid diskreetses meetrilises ruumis.

**Ülesanne 74.** Olgu $\gamma \in (0,1)$. Joonistada ruumi $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ kinnine ühikkera, kui

$$\text{a)} \quad \|(x,y)\| = \max\{|x| + \gamma|y|, |y|\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\text{b)} \quad \|(x,y)\| = \max\{|x| + \gamma|y|, \gamma|x| + |y|\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\text{c)} \quad \|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|, \frac{|x|+|y|}{1+\gamma}\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Ülesanne 75.** Tõestada, et kui $r_1 \leq r_2$, siis $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$ ja $\overline{B}(a,r_1) \subset \overline{B}(a,r_2)$.

**Ülesanne 76.** Tuua näide meetrilisest ruumist, milles leiduvad kerad $B(a,r_1)$ ja $B(a,r_2)$ nii, et $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$, kuid $r_1 > r_2$.

**Ülesanne 77.** Näidata, et iga kinnine kera sisaldab mingit lahtist kera ning iga lahtine kera sisaldab mingit kinnist kera.

**Ülesanne 78.** Tõestada, et kahe etteantud kera korral leidub kolmas kera, mis neid mõlemaid sisaldab.

**Ülesanne 79.** Tõestada, et kui $\varrho(a_1,a_2) \leq r_2 - r_1$, siis $B(a_1,r_1) \subset B(a_2,r_2)$ ja $\overline{B}(a_1,r_1) \subset \overline{B}(a_2,r_2)$.

**Ülesanne 80.** Tuua näide meetrilisest ruumist, milles leiduvad kerad $B(a_1,r_1)$ ja $B(a_2,r_2)$ nii, et $B(a_1,r_1) \subsetneqq B(a_2,r_2)$, kuid $r_1 > r_2$.

**Ülesanne 81.** Olgu $B$ ja $C$ kerad normeeritud ruumis ning olgu $\lambda, \mu > 0$. Tõestada, et hulk $\lambda B + \mu C$ on kera.

**Ülesanne 82.** Olgu $a \neq 0$ normeeritud ruumi element. Tõestada, et selles normeeritud ruumis on järgmised väited samaväärsed:

i) $\overline{B}(a,r_1) \subset \overline{B}(a,r_2)$,

ii) $\overline{B}(0,r_1) \subset \overline{B}(0,r_2)$,

iii) $r_1 \leq r_2$.

**Ülesanne 83.** Olgu $a \neq 0$ normeeritud ruumi element. Tõestada, et selles normeeritud ruumis on järgmised väited samaväärsed:

i) $B(a, r_1) \subset B(a, r_2)$,

ii) $B(0, r_1) \subset B(0, r_2)$,

iii) $r_1 \leq r_2$.

**Ülesanne 84.** Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum. Tõestada, et kui $r_1 \neq r_2$, siis $B(a, r_1) \neq B(a, r_2)$ mistahes $a \in X$ korral.

***Ülesanne 85.** Olgu normeeritud ruumis (milles on vähemalt kaks elementi) $\overline{B}(a_1, r_1) \subset \overline{B}(a_2, r_2)$. Tõestada, et $r_1 \leq r_2$ ja $\|a_1 - a_2\| \leq r_2 - r_1$. Võrrelda ülesannetega 80 ja 79.

**Definitsioon.** Olgu $A$ mittetühi hulk meetrilises ruumis. Hulga $A$ *diameeter* defineeritakse kui

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \varrho(x, y).$$

**Ülesanne 86.** Tõestada, et $\operatorname{diam} \overline{B}(a, r) \leq 2r$.

**Ülesanne 87.** Tõestada, et normeeritud ruumis

$$\operatorname{diam}(A + \{a\}) = \operatorname{diam} A.$$

**Ülesanne 88.** Tõestada, et normeeritud ruumis (milles on vähemalt kaks elementi) kehtib võrdus

$$\operatorname{diam} \overline{B}(a, r) = 2r.$$

Järeldada sellest, et kui $\overline{B}(a_1, r_1) \subset \overline{B}(a_2, r_2)$, siis $r_1 \leq r_2$.

N ä p u n ä i d e. Alustuseks võiks vaadata kera $\overline{B}(0, r)$.

**Ülesanne 89.** Tuua näide meetrilisest ruumist, milles on vähemalt kaks elementi ning milles leidub kera $\overline{B}(a, r)$ nii, et

$$\operatorname{diam} \overline{B}(a, r) \neq 2r.$$

**Definitsioon.** Vektorruumi osahulka $A$ nimetatakse *kumeraks*, kui iga $x, y \in A$ ja $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

**Ülesanne 90.** Tõestada, et normeeritud ruumis on kerad kumerad.

**Ülesanne 91.** Olgu vektorruumi $X$ igale elemendile $x \in X$ vastavusse seatud mingi kindel mittenegatiivne reaalarv $\|x\|$ nii, et on täidetud kaks esimest normi aksioomi:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad \|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\\
&2^\circ \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|.
\end{aligned}
$$

Tõestada, et kolmnurga aksioom

$$3^\circ \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

on samaväärne ühikkera $B = \{x \in X \colon \|x\| \le 1\}$ kumerusega.

N ä p u n ä i d e. Kui $x \neq 0$, siis $\dfrac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} \in (0,1)$.

**Ülesanne 92.** Olgu $\mathcal{U}$ punkti $x$ ümbrus. Veenduda, et leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $B(x, \frac{1}{n}) \subset \mathcal{U}$.

**Ülesanne 93.** Tõestada, et punkti $x$ kahe ümbruse ühisosa on samuti punkti $x$ ümbrus.

**Ülesanne 94.** Veenduda järgmiste väidete samaväärsuses.

i) Jada $x_n$ koondub elemendiks $x$.

ii) Iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n > N$, siis $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

iii) Punkti $x$ iga ümbruse $\mathcal{U}$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n > N$, siis $x_n \in \mathcal{U}$.

***Ülesanne 95.** Olgu $Y \subset X$ normeeritud ruumi $X$ alamruum, kusjuures $Y \neq X$. Tõestada, et $Y$ ei sisalda mitte ühtegi kera.

## Lahtised ja kinnised hulgad

**Ülesanne 96.** Olgu $A$ lahtine hulk, $a \in A$ ja $x_n \to a$. Veenduda, et leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $x_n \in A$ iga $n > N$ korral.

**Ülesanne 97.** Tõestada, et mittetühjas lahtises hulgas leidub kinnine kera.

**Ülesanne 98.** Tõestada, et lahtine kera on lahtine hulk.
N ä p u n ä i d e. Kui $b \in B(a, r)$, siis $B(b, r - \varrho(b, a)) \subset B(a, r)$.

**Ülesanne 99.** Näidata, et punkti $x$ iga ümbrus sisaldab mingit lahtist ümbrust.

**Ülesanne 100.** Olgu $g \in C[a, b]$. Tõestada, et

$$\big\{f \in C[a, b] \colon f(t) < g(t) \ \forall t \in [a, b]\big\}$$

on lahtine hulk ruumis $C[a, b]$.

**Ülesanne 101.** Tõestada, et diskreetses meetrilises ruumis on kõik ühepunktilised hulgad lahtised.

**Ülesanne 102.** Tõestada, et diskreetses meetrilises ruumis on kõik hulgad lahtised.

**Ülesanne 103.** Olgu $A$ normeeritud ruumi $X$ mittetühi lahtine osahulk, $b \in X$ ja $\lambda > 0$. Näidata, et $A + \{b\}$ ja $\lambda A$ on lahtised hulgad.

**Ülesanne 104.** Tõestada, et kui üks normeeritud ruumi mittetühjadest hulkadest $A$ või $B$ on lahtine, siis ka hulk

$$A + B = \{a + b \colon a \in A,\ b \in B\}$$

on lahtine.

**Ülesanne 105.** Olgu $A$ normeeritud ruumi kinnine alamhulk. Tõestada, et kui $x \in A + B(0, \delta)$ iga $\delta > 0$ korral, siis $x \in A$.

**Ülesanne 106.** Olgu $X$ meetriline ruum ja $A \subset X$. Tõestada, et $\partial(\partial A) \subset \partial A$. Tuua näide niisugusest hulgast $A \subset \mathbb{R}$, et $\partial(\partial A) \neq \partial A$.

**Ülesanne 107.** Tõestada, et diskreetse meetrilise ruumi osahulkadel rajapunktid puuduvad.

**Ülesanne 108.** Tõestada, et diskreetses meetrilises ruumis on kõik hulgad kinnised.

**Ülesanne 109.** Tõestada, et meetrilise ruumi osahulga raja on kinnine hulk.

**Ülesanne 110.** Olgu $X$ meetriline ruum, $A \subset X$ ja $x \in X$. Tõestada, et $x$ on hulga $A$ rajapunkt parajasti siis, kui leiduvad jadad $y_n \in A$ ja $z_n \in X \setminus A$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $y_n \to x$ ja $z_n \to x$.

**Ülesanne 111.** Tõestada, et normeeritud ruumis

a) $\partial B(0,r) = \partial \overline{B}(0,r) = S(0,r)$,

b) $\partial B(a,r) = \partial \overline{B}(a,r) = S(a,r)$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada ülesannet 110.

**Ülesanne 112.** Leida näide meetrilisest ruumist ja tema kerast nii, et $\partial B(a,r) \neq S(a,r)$ ning $\partial \overline{B}(a,r) \neq S(a,r)$.
N ä p u n ä i d e. Vaadelda näiteks diskreetset meetrilist ruumi.

**Ülesanne 113.** Tõestada, et kinnine kera on kinnine hulk.

**Ülesanne 114.** Tõestada lahtise kera lahtisus niisuguse võttega, et näidata tema täiendhulga kinnisust.

**Ülesanne 115.** Tõestada, et sfäär on kinnine hulk.

**Ülesanne 116.** Tõestada, et kõik ühepunktilised hulgad on kinnised.

**Ülesanne 117.** Tõestada, et mistahes lõplik hulk on kinnine.

**Ülesanne 118.** Tõestada, et poollõik $(a, b] \subset \mathbb{R}$ pole ei lahtine ega ka kinnine hulk.

**Ülesanne 119.** Tõestada, et

$$\left\{ \left( \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \dots \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

pole ruumis $s$ ei lahtine ega ka kinnine hulk.

***Ülesanne 120.** Tõestada, et mittetühi hulk $A \subset \mathbb{R}$ on lahtine parajasti siis, kui $A$ esitub omavahel paarikaupa mittelõikuvate (tõkestatud või tõkestamata) vahemike ülimalt loenduva ühendina.

## Hulga sulund ja sisemus

**Ülesanne 121.** Olgu $X$ meetriline ruum, $A \subset X$ ja $x \in X$. Tõestada, et $x \in \overline{A}$ parajasti siis, kui punkti $x$ iga ümbrus lõikab hulka $A$.

**Ülesanne 122.** Olgu $A$ meetrilise ruumi osahulk. Tõestada, et $\partial\overline{A} \subset \partial A$.

**Ülesanne 123.** Tuua näide normeeritud ruumist $X$ ja tema osahulgast $A$ nii, et $\partial\overline{A} = \varnothing$ ja $\partial A = X$.

**Ülesanne 124.** Tõestada, et kumera hulga sulund normeeritud ruumis on kumer hulk.

**Ülesanne 125.** Tõestada, et normeeritud ruumi alamruumi sulund on alamruum.

**Ülesanne 126.** Tõestada, et

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \overline{\bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}}.$$

**Definitsioon.** Elemendi $x \in X$ *kauguseks* hulgast $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, nimetatakse arvu

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \varrho(x, a).$$

**Ülesanne 127.** Tõestada, et

$$x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad \varrho(x, A) = 0.$$

**Ülesanne 128.** Tõestada, et

$$\varrho(x, A) = \varrho(x, \overline{A}).$$

**Ülesanne 129.** Tõestada, et

$$\operatorname{diam} \overline{A} = \operatorname{diam} A.$$

**Ülesanne 130.** Olgu $X$ meetriline ruum ja $A$ tema osahulk. Tõestada, et $A^\circ = A \setminus \partial A$.

**Ülesanne 131.** Kasutades ülesannet 111 tõestada, et normeeritud ruumis

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r), \\ &\text{b)} \quad \overline{B}(a,r)^\circ = B(a,r). \end{aligned}$$

**Ülesanne 132.** Tuua näide meetrilisest ruumist ja tema kerast nii, et $\overline{B(a,r)} \neq \overline{B}(a,r)$ ja $\overline{B}(a,r)^\circ \neq B(a,r)$.

**Ülesanne 133.** Olgu $X$ meetriline ruum ja $A$ tema osahulk. Tõestada, et $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

**Ülesanne 134.** Tõestada võrdust $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ kasutades, et

a) $A^\circ$ on lahtine;

b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

c) kui $A \subset B$, siis $A^\circ \subset B^\circ$;

d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

**Ülesanne 135.** Tõestada, et

a) $\overline{A} = \bigcap\{F \colon A \subset F,\ F \text{ on kinnine hulk}\}$,

b) $A^\circ = \bigcup\{G \colon G \subset A,\ G \text{ on lahtine hulk}\}$.

**Ülesanne 136.** Tõestada, et $\overline{A}$ on vähim kinnine hulk, mis sisaldab hulka $A$, ning $A^\circ$ on suurim lahtine hulk, mis sisaldub hulgas $A$.

***Ülesanne 137.** Ülesandest 131 järeldub, et normeeritud ruumis

$$\left(\overline{B(a,r)}\right)^\circ = B(a,r).$$

Tõestada, et kui $B$ on lahtine kumer hulk normeeritud ruumis, siis

$$(\overline{B})^\circ = B.$$

***Ülesanne 138.** Tõestada, et kui $C$ on kumer hulk normeeritud ruumis , siis $\partial\overline{C} = \partial C$. Võrrelda ülesannetega 122 ja 123.

## Separaablid meetrilised ja normeeritud ruumid

**Ülesanne 139.** Tõestada, et diskreetne meetriline ruum on separaabel parajasti siis, kui tema elementide hulk on ülimalt loenduv.

**Ülesanne 140.** Tõestada, et kompleksne ruum $s$ on separaabel.

**Ülesanne 141.** Tõestada, et meetrilise ruumi separaabli alamruumi sulund on separaabel.

**Definitsioon.** Olgu $X$ meetriline ruum, $\varepsilon > 0$ ning $V \subset X$. Hulka $V$ nimetatakse ruumi $X$ *$\varepsilon$-võrguks*, kui

$$X = \bigcup_{y \in V} B(y, \varepsilon),$$

s.t. kui igale elemendile $x \in X$ leidub $y \in V$ nii, et $\varrho(x,y) < \varepsilon$.

**Ülesanne 142.** Näidata, et meetriline ruum $X$ on separaabel parajasti siis, kui tal leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral ülimalt loenduv $\frac{1}{n}$-võrk.

**Definitsioon.** Olgu $X$ normeeritud ruum ja $A$ tema osahulk. Öeldakse, et $A$ on *põhihulk* ruumis $X$, kui $\overline{\operatorname{span} A} = X$.

**Ülesanne 143.** Tõestada, et normeeritud ruum $X$ on separaabel parajasti siis, kui temas leidub ülimalt loenduv põhihulk. (Piirduda juhuga, kus $X$ on reaalne normeeritud ruum.)

**Ülesanne 144.** Olgu $X$ normeeritud ruum ning $A$ ja $B$ tema osahulgad. Näidata, et kui $A$ on põhihulk ruumis $X$ ja $A \subset \overline{\operatorname{span} B}$, siis ka $B$ on põhihulk ruumis $X$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada ülesannet 125.

**Ülesanne 145.** Olgu $X$ normeeritud ruum ning $A$ ja $B$ tema osahulgad. Näidata, et kui $A$ on põhihulk ruumis $X$ ja $A \subset \overline{B}$, siis ka $B$ on põhihulk ruumis $X$.

**Ülesanne 146.** Tõestada, et reaalne ruum $\ell_1$ on separaabel.

**Ülesanne 147.** Tõestada, et reaalne ruum $c_0$ on separaabel.

N ä p u n ä i d e (ülesannete 146 ja 147 juurde). Veenduda, et $\{e_n = (\delta_{kn})_{k=1}^{\infty} : n \in \mathbb{N}\}$ on põhihulk.

***Ülesanne 148.** Tõestada, et separaabli meetrilise ruumi alamruum on separaabel.

***Ülesanne 149.** Tõestada, et normeeritud ruum on separaabel parajasti siis, kui tema ühiksfäär on separaabel.

***Ülesanne 150.** Tõestada, et kui meetriline ruum $X$ ei ole separaabel, siis leidub mitteloenduv hulk $V \subset X$ ja $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\varrho(x, y) > \frac{1}{n} \quad \forall x, y \in V,\ x \neq y.$$

N ä p u n ä i d e. Kasutada Kuratowski-Zorni lemmat.

## Cauchy jadad ja täielikud meetrilised ruumid

**Ülesanne 151.** Kas $e_n = \big(\delta_{kn}\big)_{k=1}^{\infty}$ on Cauchy jada ruumis $m$, $c$, $c_0$, $\ell_p$ $(p \geq 1)$, $s$?

**Ülesanne 152.** Kas $y_n = y_n(t) = e^{-nt}$ on Cauchy jada ruumis $L_1(0,1)$, $L_1(-1,0)$?

**Ülesanne 153.** Näidata, et $y_n = y_n(t) = e^{-nt}$ ei ole Cauchy jada ruumis $C[0,1]$.

**Ülesanne 154.** Tõestada, et kui Cauchy jada $(x_n)$ mingi osajada koondub elemendiks $x$, siis $x_n \to x$.

**Ülesanne 155.** Tõestada, et Cauchy jada on tõkestatud.

**Ülesanne 156.** Kas diskreetne meetriline ruum on täielik?

**Ülesanne 157.** Tõestada, et ruum $\ell_1$ on täielik.

**Ülesanne 158.** Tõestada, et normeeritud ruumi $c_0$ alamruum

$$c_{00} = \{x = (\xi_k)\colon \text{mingist indeksist alates on iga } \xi_k = 0\}$$

ei ole täielik.

**Ülesanne 159.** Näidata, et meetriline ruum $\mathbb{N}$ kaugusega

$$\varrho(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{kui } m \neq n, \\ 0, & \text{kui } m = n, \end{cases}$$

on täielik.

**Ülesanne 160.** Näidata, et meetriline ruum $\mathbb{N}$ kaugusega

$$\varrho(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$$

on mittetäielik.

**Ülesanne 161.** Näidata, et kerade ühine element, millest räägib teoreem üksteisesse sisestatud keradest, on ainus.

**Ülesanne 162.** Leida näide täielikust meetrilisest ruumist ja tema üksteisesse sisestatud kinniste kerade jadast nii, et nendel keradel puuduks ühine punkt.

N ä p u n ä i d e. Vaadelda näiteks ülesande 159 meetrilises ruumis kerasid $\overline{B}(n, 1 + \frac{1}{2n})$, $n \in \mathbb{N}$.

***Ülesanne 163.** Tõestada, et kui täielikus meetrilises ruumis jada $(x_n)$ ükski osajada ei koondu, siis leiduvad $\delta > 0$ ja selle jada osajada $(y_n)$ nii, et

$$\varrho(y_m, y_n) \geq \delta \quad \forall m, n,\ m \neq n.$$

***Ülesanne 164.** Öeldakse, et meetrilisel ruumil $X$ on *Baire'i omadus*, kui loenduv ühisosa ruumi $X$ mistahes kõikjal tihedatest lahtistest hulkadest on ruumis $X$ kõikjal tihe hulk. Tõestada, et täielikul meetrilisel ruumil on Baire'i omadus.

***Ülesanne 165.** Tõestada, et lõpmatumõõtmelise Banachi ruumi algebraline baas ei ole loenduv.

## Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides

Alljärgnevates ülesannetes 166–170 on $X$, $Y$ ja $Z$ meetrilised ruumid.

**Ülesanne 166.** Tõestada, et $f\colon X \to Y$ on pidev punktis $a \in X$ parajasti siis, kui punkti $f(a)$ iga ümbruse $\mathcal{V}$ korral leidub punkti $a$ ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

**Ülesanne 167.** Olgu $f\colon X \to Y$ pidev punktis $a \in X$ ja $g\colon Y \to Z$ pidev punktis $f(a)$. Näidata, et operaatorite korrutis $gf$ on pidev punktis $a$.

**Ülesanne 168.** Olgu $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ pidevad operaatorid ning olgu hulk $A \subset X$ kõikjal tihe ruumis $X$ (s.t.

$\overline{A} = X$). Näidata, et

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in A.$$

**Ülesanne 169.** Olgu $f\colon X \to Y$ pidev operaator ja olgu $y_0 \in Y$. Tõestada, et hulk $\{x \in X : f(x) = y_0\}$ on kinnine?

**Ülesanne 170.** Olgu $f\colon X \to Y$ ja $g\colon X \to Y$ pidevad operaatorid. Tõestada, et hulk $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ on kinnine.

**Definitsioon.** Olgu $X$ ja $Y$ meetrilised ruumid. Öeldakse, et operaator $f\colon X \to Y$ rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui leidub arv $L \geq 0$ nii, et

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) \leq L\,\varrho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**Ülesanne 171.** Näidata, et Lipschitzi tingimust rahuldav operaator on pidev. Tuua näide pidevast operaatorist, mis Lipschitzi tingimust ei rahulda.

**Ülesanne 172.** Tõestada, et alljärgnevad operaatorid on pidevad:

a) $\mathcal{D}\colon C^1[a,b] \to C[a,b],\ (\mathcal{D}x)(t) = x'(t),\ t \in [a,b];$

b) $A\colon C[a,b] \to C[a,b],\ (Ax)(t) = \displaystyle\int_a^t x(s)\,ds,\ t \in [a,b];$

c) $f\colon C[0,\tau] \to \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_0^\tau \sin x(t)\,dt,\ \tau > 0;$

d) $f\colon B_{C[a,b]} \to \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_a^b x^2(t)\,dt,$

kus $B_{C[a,b]} = \{x \in C[a,b] : \|x\| \leq 1\};$

e) $f\colon C[a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_a^b x^2(t)\,dt.$

N ä p u n ä i d e. Osade a)–d) juures kasutada ülesannet 171. Osa c) juures kasutada valemit

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja võrratust $|\sin\alpha| \le |\alpha|$.

***Ülesanne 173.** Olgu $X$ ja $Y$ meetrilised ruumid. Tõestada, et $f\colon X \to Y$ on pidev punktis $a \in X$ parajasti siis, kui

$$\lim_{\delta\to 0+} \operatorname{diam} f(B(a,\delta)) = 0.$$

## Banachi püsipunkti printsiip

**Ülesanne 174.** Tõestada, et operaator $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \lambda \int_0^t x(s)\,ds + 174, \quad t \in [0,1],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

on ahendav, kui $|\lambda| < 1$.

**Ülesanne 175.** Tõestada, et operaator $B\colon C[0,\tau] \to C[0,\tau]$,

$$(Bx)(t) = \Big(\int_0^\tau \sin x(s)\,ds\Big)\,t, \quad t \in [0,\tau],\ \tau > 0,$$

on ahendav, kui $\tau^2 < 1$.

N ä p u n ä i d e. Kasutada ülesande 172 osa c) kohta käivat näpunäidet.

**Ülesanne 176.** Tõestada, et integraaloperaator $K\colon C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)x(s)\,ds + 176, \quad t \in [a,b],$$

kus $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t,s)$ on ruudus $[a,b]\times[a,b]$ pidev funktsioon, on ahendav, kui

$$\max_{a\le t\le b} \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,ds < 1.$$

**Ülesanne 177.** Tõestada, et maatriksoperaator $A\colon X \to X$, $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$, on ahendav, kui

$$\text{a)}\quad X = m_n \quad \text{ja} \quad \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1;$$

$$\text{b)}\quad X = \ell_1^n \quad \text{ja} \quad \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1;$$

$$\text{c)}\quad X = \ell_2^n \quad \text{ja} \quad \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1.$$

M e e l d e t u l e t u s. 1) Maatriksoperaator $A = \big(a_{ij}\big)$ tegutseb $n$-mõõtmelises ruumis $X$ järgmise eeskirja kohaselt:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\xi_j \end{pmatrix},$$

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$.

2) Kehtib Cauchy võrratus (Rogers–Hölderi võrratuse erijuht)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

**Ülesanne 178.** Olgu $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{\infty}$ lõpmatu maatriks. Tõestada, et eeskirjaga $Ax = y$, $x = \big(\xi_j\big)_{j=1}^{\infty} \in X$, $y = \big(\eta_i\big)_{i=1}^{\infty}$, $\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j$, $i = 1, 2, \dots$, on defineeritud ahendav operaator ruumis

$X$, kui

$$\text{a)}\quad X = m \quad \text{ja} \quad \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1;$$

$$\text{b)}\quad X = \ell_1 \quad \text{ja} \quad \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1;$$

$$\text{c)}\quad X = \ell_2 \quad \text{ja} \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1.$$

**Ülesanne 179.** Tõestada, et operaator $f\colon X \to X$ rahuldab tingimust

$$\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y), \quad x, y \in X,\ x \neq y,$$

kuid tal ei ole ainsatki püsipunkti, kui $X = [1, \infty)$ ja

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

**Ülesanne 180.** Olgu operaator $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defineeritud eeskirjaga $f(\xi_1, \xi_2) = (2\xi_2, 0)$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Veenduda, et $f$ ei ole ahendav, aga $f^2$ on ahendav operaator.

***Ülesanne 181.** Olgu $A$ kinnine mittetühi hulk täielikus meetrilises ruumis $X$. Olgu operaator $f\colon A \to A$ selline, et tema aste $f^{181}$ on ahendav operaator. Tõestada, et operaatoril $f$ on parajasti üks püsipunkt ning selleks koondub iga jada $x_n$, mis on moodustatud järgmise eeskirja järgi: $x_0 \in A$ on suvaline punkt ja $x_n = f(x_{n-1})$, kui $n = 1, 2, \ldots$.

**Ülesanne 182.** Tõestada, et võrrandil $f(x) = x$ on lõigus $[a, b]$ parajasti üks lahend, kui $f \in C^1[a, b]$, $f([a, b]) \subset [a, b]$ ja

$$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| < 1.$$

N ä p u n ä i d e (Lagrange'i keskväärtusteoreem). Kui funktsioon $f$ on pidev lõigus $[x, y]$ ja diferentseeruv vahemikus $(x, y)$, siis leidub $\theta \in (x, y)$ nii, et $f(x) - f(y) = f'(\theta)(x - y)$.

**Ülesanne 183.** Tõestada, et võrrandi $x = 0{,}2 \sin 2x + 0{,}6 \cos 0{,}6x$, $x \in \mathbb{R}$, lahend asub lõigus $[0, 1]$ ning see lahend on ainus.

**Ülesanne 184.** Tõestada, et võrrandi $x = 0{,}1 \sin x + 0{,}8 \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, lahend asub lõigus $[0, 1]$ ning see lahend on ainus.

**Ülesanne 185.** Tõestada, et võrrandi $x = 0{,}1 \sin x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, lahend asub lõigus $[0; 1{,}1]$ ning see lahend on ainus.

*Märkus.* $\sin 1{,}1 \approx 0{,}891$.

**Ülesanne 186.** Tõestada, et võrrandil $(4 + x^2)x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, on parajasti üks lahend ning leida lõik, mille pikkus poleks suurem kui 1, milles see lahend asub.

N ä p u n ä i d e. On soovitav alustada joonise visandamisest.

**Ülesanne 187.** Tõestada, et võrrandil $2xe^x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, on parajasti üks lahend ning leida lõik, mille pikkus poleks suurem kui 1, milles see lahend asub.

N ä p u n ä i d e. On soovitav alustada joonise visandamisest.

**Ülesanne 188.** Tõestada, et jada

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}({x_n}^2 - 3), \quad x_0 = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

koondub arvuks $\sqrt{3}$.

**Ülesanne 189.** Olgu $0 \leq a \leq 1$. Tõestada, et jada

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}({x_n}^2 - a), \quad x_0 = 0, \ n \in \mathbb{N},$$

koondub arvuks $\sqrt{a}$.

***Ülesanne 190.** Tõestada, et ahelmurdude jada

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\dots$$

koondub ja leida tema piirväärtus.

## Hulga tõkestatus ja kompaktsus

**Ülesanne 191.** Olgu $A$ normeeritud ruumi osahulk. Tõestada, et $A$ sisaldub mingis keras parajasti siis, kui leidub arv $M$ nii, et

$$\|x\| \leq M \quad \forall x \in A.$$

**Ülesanne 192.** Tõestada, et meetrilise ruumi osahulk on tõkestatud parajasti siis, kui on tõkestatud selle hulga sulund.

**Ülesanne 193.** Tõestada, et meetrilise ruumi mittetühi osahulk $A$ on tõkestatud parajasti siis, kui $\operatorname{diam} A < \infty$.

**Ülesanne 194.** Tõestada, et Lipschitzi tingimust rahuldav operaator teisendab tõkestatud hulgad tõkestatud hulkadeks.

***Ülesanne 195.** Näidata, et eelmises ülesandes ei saa Lipschitzi tingimust nõrgendada operaatori pidevuseks.

**Ülesanne 196.** Olgu $A$ ja $B$ tõkestatud hulgad. Tõestada, et $A \cup B$ on tõkestatud hulk.

**Ülesanne 197.** Olgu $A$ ja $B$ kompaktsed hulgad. Tõestada, et $A \cup B$ on kompaktne hulk.

**Ülesanne 198.** Olgu $X = m_n$ või $X = \ell_p^n$. Tõestada, et hulk ruumis $X$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on tõkestatud.

N ä p u n ä i d e. Koonduvus äsjanimetatud ruumides on samaväärne koordinaatide koonduvusega.

**Ülesanne 199.** Näidata, et ruumi $m$ kinnine ühikkera ei ole kompaktne.

N ä p u n ä i d e. Vaadelda näiteks jada $e_n = \big(\delta_{kn}\big)_{k=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ülesanne 200.** Olgu $X$ normeeritud ruum, $a \in X$ ja $r > 0$. Tõestada, et $\overline{B}(a,r)$ on kompaktne parajasti siis, kui $\overline{B}(0,1)$ on kompaktne.

**Ülesanne 201.** Näidata, et ruumis $m$ mitte ükski kera ei ole suhteliselt kompaktne.

**Ülesanne 202.** Näidata, et ruumis $\ell_p$ mitte ükski kera ei ole suhteliselt kompaktne.

**Ülesanne 203.** Olgu $\lambda_n$ positiivsete arvude jada. Näidata, et kui

$$\left\{ \big(\xi_n\big)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \colon \left\| \left(\frac{\xi_n}{\lambda_n}\right)_{n=1}^{\infty} \right\| \leq 1 \right\}$$

on kompaktne hulk ruumis $\ell_p$, siis $\lambda_n \to 0$. Võrrelda ülesandega 216.

**Ülesanne 204.** Näidata, et ruumi $M[0,1]$ kinnine ühikkera ei ole kompaktne.

N ä p u n ä i d e. Vaadelda näiteks jada $x_n = x_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ülesanne 205.** Tõestada, et meetrilise ruumi osahulk $A$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui tema sulund $\overline{A}$ on kompaktne.

**Ülesanne 206.** Tõestada, et kompaktne meetriline ruum on täielik.

**Ülesanne 207.** Tõestada, et suhteliselt kompaktse hulga pidev kujutis on suhteliselt kompaktne.

**Ülesanne 208.** Tõestada, et kompaktse hulga pidev kujutis on kompaktne.

**Ülesanne 209.** Olgu $f\colon X \to Y$ pidev bijektsioon kompaktsest meetrilisest ruumist $X$ meetrilisele ruumile $Y$. Tõestada, et $f^{-1}$ on pidev.

N ä p u n ä i d e. Kasutada eelmist ülesannet ning operaatori pidevuse kriteeriumit kinniste hulkade originaalide kaudu.

**Ülesanne 210.** Olgu $A$ kompaktne mittetühi hulk meetrilises ruumis $X$. Näidata, et iga elemendi $x \in X$ korral leidub element $y \in A$, mis realiseerib kauguse $\varrho(x, A)$, s.t. mille korral $\varrho(x, A) = \varrho(x, y)$.

***Ülesanne 211.** Olgu $X$ kompaktne meetriline ruum. Tõestada, et operaatoril $f\colon X \to X$, mis rahuldab tingimust

$$\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y), \quad x, y \in X,\ x \neq y,$$

on parajasti üks püsipunkt.

N ä p u n ä i d e. Kasutada kompaktsel hulgal $X$ määratud funktsionaali $\varrho(x, f(x))$, $x \in X$.

## Hausdorffi teoreem

**Ülesanne 212.** Tõestada Hausdorffi teoreemi abil, et iga suhteliselt kompaktne hulk on tõkestatud.

**Ülesanne 213.** Tõestada Hausdorffi teoreemi abil, et kompaktne meetriline ruum on separaabel.

**Ülesanne 214.** Tõestada Hausdorffi teoreemi abil, et iga kompaktset hulka $A$ saab mistahes arvu $\varepsilon > 0$ korral esitada kujul

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{diam} A_k \le \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$, ning hulgad $A_k$ on kõik kompaktsed.

***Ülesanne 215.** Tõestada, et kui meetrilise ruumi osahulgale $A$ leidub lõplik $\varepsilon$-võrk iga $\varepsilon > 0$ korral, siis hulga $A$ elementide suvaline jada sisaldab Cauchy jada.

***Ülesanne 216.** Olgu $\lambda_n$ positiivsete arvude jada. Näidata, et kui $\lambda_n \to 0$, siis

$$\Big\{ \big(\xi_n\big)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \colon \Big\| \Big(\frac{\xi_n}{\lambda_n}\Big)_{n=1}^{\infty} \Big\| \le 1 \Big\}$$

on kompaktne hulk ruumis $\ell_p$. Võrrelda ülesandega 203.

## Arzelà-Ascoli teoreem

**Ülesanne 217.** Olgu $\alpha \in (0,1]$ ja $M > 0$. Näidata, et

$$\big\{ x \colon [a,b] \to \mathbb{R} \,\big|\, x(a) = 0,\ |x(t) - x(t')| \le M|t - t'|^{\alpha},\ t, t' \in [a,b] \big\}$$

on kompaktne hulk ruumis $C[a,b]$.

**Ülesanne 218.** Arzelà-Ascoli teoreemi abil veenduda, et hulk

$$\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}, \quad x_n(t) = \sin nt,\ t \in [0, \pi],$$

ei ole suhteliselt kompaktne ruumis $C[0, \pi]$.

**Ülesanne 219.** Olgu $d$ ja $R$ positiivsed arvud ning olgu $B = \overline{B}(0, R)$ kera ruumis $C[-d, d]$. Vaatleme operaatorit $g \colon B \to C[-d, d]$, mis on defineeritud võrdusega

$$(g(y))(x) = \int_0^x f(t, y(t))\, dt, \quad y \in B,\ x \in [-d, d],$$

kus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on pidev kahe muutuja funktsioon. Näidata, et hulk $g(B)$ on suhteliselt kompaktne.

## Read normeeritud ruumides

**Definitsioon.** Öeldakse, et normid $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ vektorruumis $X$ on *ekvivalentsed* ja kirjutatakse $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$, kui leiduvad $\alpha, \beta > 0$ nii, et iga $x \in X$ korral

$$\alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta\|x\|'.$$

**Ülesanne 220.** Tõestada, et kui rida vektorruumis koondub mingi normi suhtes, siis koondub ta ka mistahes ekvivalentse normi suhtes.

**Ülesanne 221.** Tõestada, et kui rida koondub absoluutselt mingi normi suhtes, siis koondub ta absoluutselt ka mistahes ekvivalentse normi suhtes.

**Definitsioon.** Olgu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ rida normeeritud ruumis ning olgu $\pi$ naturaalarvude ümberjärjestus (s.t. $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektsioon). Rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$$

nimetatakse rea $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *ümberjärjestuseks.*

**Definitsioon.** Öeldakse, et rida normeeritud ruumis *koondub tingimatult*, kui koondub selle rea iga ümberjärjestus.

***Ülesanne 222.** Tõestada, et kui rida koondub tingimatult, siis tema kõikide ümberjärjestuste summa on sama.

**Ülesanne 223.** Tõestada, et kui rida koondub tingimatult mingi normi suhtes, siis koondub ta tingimatult ka mistahes ekvivalentse normi suhtes.

**Ülesanne 224.** Näidata, et Banachi ruumis absoluutselt koonduv rida koondub tingimatult.

N ä p u n ä i d e. Positiivse arvrea koonduvusest järeldub tema mistahes ümberjärjestuse koonduvus samaks summaks.

***Ülesanne 225.** Näidata, et ruumides $c_0$ ja $\ell_p$ $(p>1)$ rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k,$$

kus $e_k = (\overbrace{0,\dots,0,1}^{k},0,0,\dots)$, koondub tingimatult elemendiks $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$, kuid ei koondu absoluutselt.

***Ülesanne 226.** Tõestada, et Banachi ruumi $X$ osahulk $A$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui leidub jada $(x_n)\subset X$ nii, et $x_n \to 0$ ja

$$A \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \colon (a_n) \in B_{\ell_1}\}.$$

## Pidevad lineaarsed operaatorid normeeritud ruumides

**Ülesanne 227.** Veenduda, et normeeritud ruumides tegutsev lineaarne operaator on tõkestatud parajasti siis, kui ta rahuldab Lipschitzi tingimust.

**Ülesanne 228.** Tõestada, et normeeritud ruumides tegutsev lineaarne operaator on tõkestatud parajasti siis, kui ta teisendab iga tõkestatud hulga tõkestatud hulgaks.

**Ülesanne 229.** Tõestada, et operaator $f\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$ on lineaarne parajasti siis, kui leidub $a\in\mathbb{K}$ nii, et

$$f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{K}.$$

**Ülesanne 230.** Näidata, et reaalsetes normeeritud ruumides tegutsev aditiivne operaator $A$, mis on punktis 0 pidev, on pidev ja lineaarne.

N ä p u n ä i d e. Homogeensuse tõestamisel näidata vaheetapina, et $A(\lambda x) = \lambda A x$ iga ratsionaalarvu $\lambda$ korral.

**Ülesanne 231.** Olgu funktsioon $\mathcal{K}(t,s)$ pidev ruudus $[a,b] \times [a,b]$. Veenduda, et *integraaloperaator* $K\colon C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Kx)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [a,b],$$

on lineaarne.

**Ülesanne 232.** Olgu $X = C^1[a,b]$ ja $Y = C[a,b]$. Veenduda, et *diferentseerimisoperaator*

$$\mathcal{D} = \frac{d}{dt}\colon \; X \to Y, \quad (\mathcal{D}x)(t) = x'(t),$$

on lineaarne.

**Ülesanne 233.** Olgu

$$X = \big\{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\colon \xi_k \in \mathbb{K}\big\}$$

ja

$$Y = \big\{y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)\colon \eta_k \in \mathbb{K}\big\}.$$

Olgu $(a_{ij})$, kus $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $m \times n$ maatriks. Veenduda, et *maatriksoperaator* $A\colon X \to Y$,

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{mn}\xi_n \end{pmatrix},$$

on lineaarne.

**Ülesanne 234.** Näidata, et integraaloperaator ülesandest 231 on pidev.

**Ülesanne 235.** Näidata, et maatriksoperaator ülesandest 233 on pidev, kui $X = \ell_p^n$ ja $Y = \ell_q^m$.

**Ülesanne 236.** Olgu $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ lõpmatu maatriks. Tõestada, et eeskirjaga

$$Ax = y,\ x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in X,$$
$$y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty},\ \eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j,\ i = 1, 2, \ldots,$$

on defineeritud pidev lineaarne operaator ruumis $X$, kui

$$\text{a)} \quad X = m \quad \text{ja} \quad \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty,$$

$$\text{b)} \quad X = \ell_1 \quad \text{ja} \quad \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty,$$

$$\text{c)} \quad X = \ell_2 \quad \text{ja} \quad \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

**Ülesanne 237.** Kas ülesandes 236 kirjeldatud maatriksoperaator on pidev, kui

$$a_{ij} = \frac{1}{(i+j)^2}?$$

**Ülesanne 238.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning olgu $A\colon X \to Y$ pidev lineaarne operaator. Tõestada, et operaator $A$ jääb pidevaks, kui ruumide $X$ ja $Y$ normid asendada ekvivalentsete normidega.

**Ülesanne 239.** Ülesandes 238 tõestati, et kui normeeritud ruumides $X$ ja $Y$ minna üle ekvivalentsetele normidele, siis hulk $L(X, Y)$ ei muutu. Tõestada, et kui asendada ruumide $X$ ja $Y$ normid ekvivalentsete normidega, siis ruumi $L(X, Y)$ norm asendub esialgse normiga ekvivalentse normiga.

**Definitsioon.** Olgu $X$ ja $Y$ vektorruumid. Operaatori $A\colon X \to Y$ *tuum* $\ker A$ defineeritakse järgmiselt:

$$\ker A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in X\colon Ax = 0\}.$$

**Ülesanne 240.** Tõestada, et kui $X$ ja $Y$ on normeeritud ruumid ning $A\colon X \to Y$ pidev lineaarne operaator, siis $\ker A$ on ruumi $X$ kinnine alamruum.

**Ülesanne 241.** Tõestada, et mittepideva lineaarse operaatori

$$\mathcal{D}\colon \tilde{C}^1[a,b] \to C[a,b], \quad (\mathcal{D}x)(t) = x'(t),$$

kus $\tilde{C}^1[a,b]$ on ruumi $C[a,b]$ normiga varustatud ruum $C^1[a,b]$, tuum $\ker \mathcal{D}$ kujutab endast ruumi $\tilde{C}^1[a,b]$ kinnist alamruumi.

***Ülesanne 242.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid. Tõestada, et kui $X \neq \{0\}$, siis $Y$ on lineaarselt isomeetriline ruumi $L(X,Y)$ alamruumiga. Järeldada, et kui $L(X,Y)$ on täielik, siis $Y$ on täielik.

N ä p u n ä i d e. Hahn–Banachi teoreemi üks järeldusi väidab järgmist. Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum. Siis iga elemendi $x \in X$ korral leidub $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = 1$ ja $x^*(x) = \|x\|$.

## Operaatori normi arvutamine

**Ülesanne 243.** Olgu $X \neq \{0\}$ ja $Y$ normeeritud ruumid, $A \in L(X,Y)$ ning $\|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon \|x\| \leq 1\}$. Tõestada, et

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon \|x\| = 1\},\\
&\text{b)} \quad \|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\colon x \neq 0\right\},\\
&\text{c)} \quad \|A\| = \sup\{\|Ax\|\colon \|x\| < 1\}.
\end{aligned}$$

**Ülesanne 244.** Tõestada, et $A \in L(X,Y)$ või $f \in X^*$ ning arvutada $\|A\|$ või $\|f\|$, kui

a) $X = Y = C[0,1], \quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau;$

b) $X = C[-1,1], \quad f(x) = \dfrac{1}{3}[x(-1) + x(1)];$

c) $X = L_1(0,1), \quad Y = C[0,1], \quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau;$

d) $X = C[-1,1], \quad f(x) = 2[x(1) - x(0)];$

e) $X = C[-1,1], \quad Y = C[0,1], \quad Ax(t) = x(t);$

f) $X = L_2(-1,2), \quad Y = L_2(-1,1), \quad Ax(t) = x(t);$

g) $X = c, \quad f(x) = \lim x_n, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c;$

h) $X = C[-1,1], \quad Y = L_1(0,1), \quad Ax(t) = x(t);$

i) $X = c, \quad f(x) = 2x_1 + \lim x_n, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c;$

j) $X = Y = C[0,1], \quad Ax(t) = t^2 x(0);$

k) $X = Y = C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2);$

l) $X = L_1(0,1), \quad Y = L_2(0,1), \quad Ax(t) = t \displaystyle\int_0^1 x(\tau)\,d\tau;$

m) $X = Y = L_2(0,1), \quad Ax(t) = \begin{cases} x(t), & \text{kui } t \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{kui } t > \frac{1}{2} \end{cases}$

n) $X = c_0, \quad f(x) = x_1 + x_3, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0;$

o) $X = C[0,1], \quad Y = L_1(0,1), \quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\,d\tau;$

p) $X = \ell_2, \quad f(x) = x_2 + x_4, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2;$

q) $X = C[-1,1], \quad f(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 x(t)\,dt + x(0);$

r) $X = C[-1,1], \quad Y = C[0,1], \quad Ax(t) = \dfrac{1}{2}[x(t) + x(-t)];$

s) $X = m, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} x_k, \quad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in m;$

š) $X = C^1[-1,1], \quad f(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\,dt;$

z) $X = Y = \ell_1, \quad A(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots),$
kus $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots;$

ž) $X = \ell_1, \quad Y = c, \quad A(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots),$
kus $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots;$

t) $X = \ell_1, \quad Y = \ell_2, \quad A(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots),$
kus $y_1 = x_1$, $y_n = x_n - x_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots;$

u) $X = \mathbb{R}^2, \quad Y = C[a,b], \quad Ax(t) = \xi_1 + (t-a)\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{b-a},$
kus $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2;$

v) $X = C[0,1], \quad f(x) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,dt;$

w) $X = C[a,b], \quad Y = m, \quad Ax = \big(x(t_k)\big)_{k=1}^{\infty},$
kus $t_1, t_2, \dots$ on mingi etteantud jada lõigus $[a,b]$;

õ) $X = \mathbb{R}^2, \quad Y = C[0,1], \quad Ax(t) = \xi_1 t + \xi_2,$
kus $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2;$

ä) $X = \mathbb{R}^2, \quad Y = C[a,b], \quad Ax(t) = \xi_1 t + \xi_2,$
kus $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2;$

ö) $X = C[a,b], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x(t_k),$
kus $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ja $t_0 = a < t_1 < \cdots t_n = b$.

**Ülesanne 245.** Uurida, kuidas E. Oja ja P. Oja raamatus "Funktsionaalanalüüs", lk. 128, on tõestatud Luzini teoreemile tuginedes, et integraaloperaatori $K\colon C[a,b] \to C[a,b]$ (vt. ülesandeid 231 ja 234) norm avaldub kujul

$$\|K\| = \max_{a \le t \le b} \int_a^b |\mathcal{K}(t,s)|\,ds.$$

Ilma seda üldist võrdust ning Luzini teoreemi kasutamata leida $\|K\|$, kui

a) $\mathcal{K}(t,s) = t^2 + s^2$;

b) $\mathcal{K}(t,s) = t + s, \quad a = -1, \quad b = 1$;

c) $\mathcal{K}(t,s) = t + s - 2, \quad a = -1, \quad b = 1$;

d) $\mathcal{K}(t,s) = \dfrac{t}{2} + s, \quad a = -1, \quad b = 1$;

e) $\mathcal{K}(t,s) = ts, \quad a = -2, \quad b = 2$;

f) $\mathcal{K}(t,s) = \sin(t+s), \quad a = -\pi, \quad b = \pi$;

g) $\mathcal{K}(t,s) = \cos(t+s), \quad a = 0, \quad b = 2\pi$.

**Ülesanne 246.** Arvutada diferentseerimisoperaatori (vt. ülesannet 232) norm.

**Ülesanne 247.** Näidata, et maatriksoperaator $A = (a_{ij})\colon m_n \to m_n$ on pidev ning tõestada, et

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

**Ülesanne 248.** Leida maatriksoperaatori $A = (a_{ij})\colon \ell_1^n \to m_n$ norm.

**Ülesanne 249.** Näidata, et maatriksoperaatori $A = (a_{ij})\colon \ell_1^n \to \ell_1^n$ norm avaldub kujul

$$\|A\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

**Ülesanne 250.** Tõestada, et ülesande 236 a), maatriksoperaatori $A = (a_{ij})\colon m \to m$ norm avaldub kujul

$$\|A\| = \sup_{i} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

**Ülesanne 251.** Tõestada, et ülesande 236 b), maatriksoperaatori $A = (a_{ij})\colon \ell_1 \to \ell_1$ norm avaldub kujul

$$\|A\| = \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

**Ülesanne 252.** Tõestada, et $A \in L(X,Y)$ või $f \in X^*$ ja leida $\|A\|$ või $\|f\|$, kui

a) $X = C[-1,1], \quad f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt;$

b) $X = \ell_1, \quad Y = c, \quad A(x_1, x_2, \dots) =$
$$= \left((3-1)x_1, (3-\frac{1}{2})x_2, \dots, (3-\frac{1}{k})x_k, \dots\right);$$

c) $X = c_0, \quad Y = \ell_1, \quad A(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{3^2}, \dots, \frac{x_k}{3^k}, \dots\right);$

d) $X = Y = \ell_2, \quad A(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots),$
kus $y_1 = x_1,\ y_n = x_n - x_{n-1},\ n = 2, 3, \dots;$

N ä p u n ä i d e. Osa d) juures võiks kasutada kolmnurga võrratust ruumis $\ell_2$.

## Pidevate lineaarsete operaatorite korrutamine

**Ülesanne 253.** Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum ning $A, B \in L(X,X)$, kusjuures eksisteerib $B^{-1} \in L(X,X)$. Tõestada, et

$$\|AB\| \geq \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}.$$

**Ülesanne 254.** Tuua näide maatriksoperaatoritest $A$ ja $B$ ruumis $\mathbb{R}^2$, mille korral $AB \neq BA$.

**Ülesanne 255.** Olgu $X$ normeeritud ruum. Olgu $S, T \in L(X,Y)$ kommuteeruvad, s.t. $ST = TS$. Näidata, et $ST$ on bijektiivne parajasti siis, kui mõlemad operaatorid $S$ ja $T$ on bijektiivsed.

## Ühikoperaatorile lähedase operaatori pööratavus

**Ülesanne 256.** Olgu $X$ Banachi ruum ja operaator $A \in L(X, X)$ selline, et $\|A\| < 1$. Näidata, et rida $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ koondub ruumis $L(X, X)$ ning hinnata ülalt tema summa normi.

**Ülesanne 257.** Olgu $X$ Banachi ruum ja $A \in L(X, X)$. Näidata, et rida $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ koondub ruumis $L(X, X)$ ning hinnata ülalt tema summa normi.

**Ülesanne 258.** Olgu $X$ Banachi ruum, $A \in L(X, X)$ ja $\|A\| = 0,3$. Näidata, et eksisteerib $(I - 3A)^{-1}$ ja ta on pidev operaator.

**Ülesanne 259.** Olgu $X$ kompleksne Banachi ruum, $A \in L(X, X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ja $|\lambda| > \|A\|$. Tõestada, et eksisteerib $(\lambda I - A)^{-1}$ ja ta on pidev operaator.

**Ülesanne 260.** Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid ja olgu operaatorid $A, B \in L(X, Y)$ pidevalt pööratavad, s.t. eksisteerivad $A^{-1}, B^{-1} \in L(Y, X)$. Tõestada, et kui

$$\|B - A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|},$$

siis

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2 \, \|B - A\|.$$

**Ülesanne 261.** Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid. Tõestada, et ruumi $L(X, Y)$ kõigi pidevalt pööratavate operaatorite osahulk on lahtine.

***Ülesanne 262.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ja olgu operaatorid $A, B \in L(X, Y)$ pidevalt pööratavad, s.t. eksisteerivad $A^{-1}, B^{-1} \in L(Y, X)$. Tõestada, et kui

$$\|B - A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|},$$

siis

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2 \, \|B - A\|.$$

Järeldada, et pideva pöördoperaatori moodustamise kujutus on pidev operaatornormi suhtes.

## Lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid

**Ülesanne 263.** Olgu $X = \ell_1^n$ ning $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Leida konstantide $\alpha$ ja $\beta$ täpne väärtus lõplikumõõtmeliste ruumide isomorfismiteoreemis.

**Ülesanne 264.** Lahendada ülesanne 263 ruumi $X = \ell_2^n$ korral.

**Ülesanne 265.** Tõestada, et lõplikumõõtmelises vektorruumis on kõik normid omavahel ekvivalentsed.

**Ülesanne 266.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid ning olgu $A \in L(X, Y)$. Tõestada, et kui $\dim X < \infty$, siis leidub $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, nii, et

$$\|Ax\| = \|A\|.$$

***Ülesanne 267.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid, kusjuures $\dim X < \infty$. Tõestada, et mistahes lineaarne operaator $A\colon X \to Y$ on pidev.

***Ülesanne 268.** Olgu $X$ ja $Y$ normeeritud ruumid. Tõestada, et kui $X$ on lõpmatumõõtmeline ja $Y \neq \{0\}$, siis leidub lineaarne operaator $A\colon X \to Y$, mis ei ole pidev.

N ä p u n ä i d e. Sellise operaatori defineerimist alustada ruumi $X$ loenduval lineaarselt sõltumatul osahulgal. Algebrast on teada, et vektorruumi lineaarselt sõltumatut osahulka saab laiendada (algebraliseks) baasiks.

***Ülesanne 269.** Olgu

$$X = \{x \in C[0,1] \colon x(1) = 0\}$$

reaalse ruumi $C[0,1]$ alamruum ning olgu

$$Y = \left\{ x \in X \colon \int_0^1 x(t)\, dt = 0 \right\}.$$

ruumi $X$ kinnine alamruum. Tõestada, et ei leidu elementi $x \in S_X$ nii, et $\varrho(x, Y) \geq 1$.

N ä p u n ä i d e. Kui selline element $x \in S_X$ leidub, siis $|\int_0^1 x(t)\, dt| < 1$. Olgu $x_n = x_n(t) = 1 - t^n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Mingite arvude $\lambda_n$ korral $x - \lambda_n x_n \in Y$. Järelikult $\|\lambda_n x_n\| \geq 1$. Võrrelda tulemust näpunäite alguse range võrratusega.