KLASSIKALISED RUUMID

I Lõplikumõõtmelised ruumid

Olgu $X = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ ja $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in X$.
Normeeritud ruumid on:

1) $m_n = \ell_\infty^n = X$ normiga
$$\|x\| = \max_{1 \le k \le n} |\xi_k|,$$
2) $\ell_p^n = X$, $1 \le p < \infty$, normiga
$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Ruumis ℓ_1^n on summanorm $\|x\| = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$.

Ruumis $\ell_2^n = \mathbb{K}^n$ on eukleidiline norm $\|x\| = (\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2)^{1/2}$.

II Jadaruumid

Elementideks on arvjadad $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty = (\xi_k)$, $\xi_k \in \mathbb{K}$.

1) Kõigi jadade ruum $s = \{(\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ on meetriline ruum kaugusega
$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad x = (\xi_k),\ y = (\eta_k).$$

Normeeritud ruumid on järgmised:

2) Tõkestatud jadade ruum
$$m = \ell_\infty = \{(\xi_k) : \sup_k |\xi_k| < \infty\}$$
normiga
$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|.$$
3) Koonduvate jadade ruum
$$c = \{(\xi_k) : \exists \lim_k \xi_k \in \mathbb{K}\}$$
ruumi m normiga.
4) Nulliks koonduvate jadade ruum
$$c_0 = \{(\xi_k) : \lim_k \xi_k = 0\}$$
ruumi m (või ruumi c) normiga.
5) Astmega p, $1 \le p < \infty$, summeeruvate jadade ruum
$$\ell_p = \{(\xi_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty\}$$
normiga
$$\|x\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Absoluutselt summeeruvate jadade ruumi ℓ_1 norm on
$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|.$$

III Funktsiooniruumid

Normeeritud ruumid on:

1) Lõigus $[a,b]$ tõkestatud funktsioonide ruum

$$M[a,b] = \{x = x(t) : \sup_{a \le t \le b} |x(t)| < \infty\}$$

normiga

$$\|x\| = \sup_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

2) Lõigus $[a,b]$ pidevate funktsioonide ruum $C[a,b]$ normiga

$$\|x\| = \max_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

3) Lõigus $[a,b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruum $C^n[a,b]$ (või $C^{(n)}[a,b]$) normiga

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|,$$

kus $x^{(0)}(t) = x(t)$.

4) Lebesgue'i ruumid $L_p(a,b)$, $1 \le p < \infty$:

$$L_p(a,b) = \{x = x(t) : \exists \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \text{ (Lebesgue'i mõttes)}\}$$

normiga

$$\|x\| = \Big(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\Big)^{1/p}.$$

Ruumis $L_p(a,b)$ on võrdus $x = y$ defineeritud funktsioonide $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ võrdumisena peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$. Seega on ruumi $L_p(a,b)$ elementideks peaaegu kõikjal ühtivate funktsioonide klassid.

Integreeruvate funktsioonide ruumi $L_1(a,b)$ norm on

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| \, dt.$$

Integreeruva ruuduga funktsioonide ruumi $L_2(a,b)$ norm on

$$\|x\| = \Big(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt\Big)^{1/2}.$$