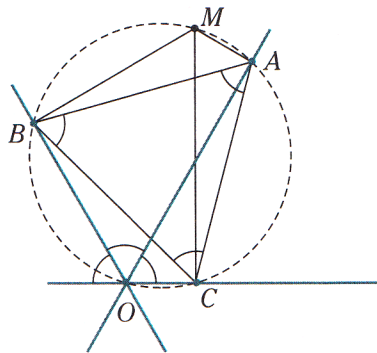


Nüüd näeme, et  $\angle ABC = \angle AOC$ , sest mõlemad nurgad toetuvad ühele ja samale kaarele. Seega  $\angle ABC = 60^\circ$ . Täpselt samuti  $\angle ACB = \angle AOB = 60^\circ$ . Sellest järeldub, et kolmnurga  $ABC$  kõik nurgad on  $60^\circ$ , st see kolmnurk on võrdkülgne. ■

Kõige tähtsam lause, mis annab lahenduse võtme, on: „Märgime, et punktid... asetsevad ühel ringjoonel.” See lause esineb paljudes ülesannetes, mida lahendatakse äsja vaadeldud meetodi abil.



Joonis 153

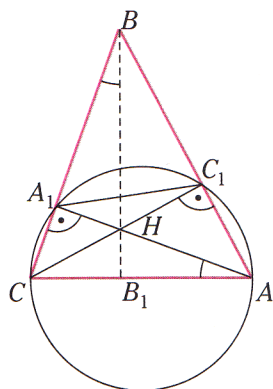
### ★ Teoreem kõrgustest\*

Tõestame sellesama meetodi abil ühe planimeetria tähtsa teoreemi. Hiljem pöördume selle teoreemi juurde veel kord tagasi ja käsitleme seda üksikasjalikumalt. Praegu aga vaatleme seda kui huvitavat näidet, mis vaadeldavat meetodit illustreerib. Seepärast me isegi ei sõnasta seda teoreemina, vaid esitame ülesandena.

**Ülesanne 2.** Tõestage, et kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis.

Enne tõestamise juurde asumist märgime, et ülesande sõnastust tuleb mingil määral täpsustada. Loeme lubatavaks, et kõrguste lõikepunkt võib asetseda ka kõrguste pikendustel.

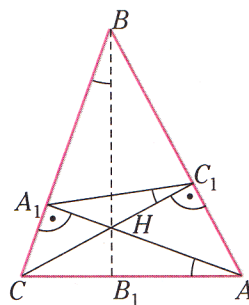
**Lahendus.** Vaatleme algul teravnurkse kolmnurga juhtu. Tõmbame sellises kolmnurgas kõrgused  $AA_1$  ja  $CC_1$  ning tähistame nende lõikepunkti tähega  $H$  (joonis 154), sirgete  $AC$  ja  $BH$  lõikepunkti tähistame  $B_1$ . Tuleb näidata, et nurk  $BB_1A$  on täisnurk.



Joonis 155

Märgime, et punktid  $A, C, A_1$  ja  $C_1$  asetsevad ringjoonel diameetriga  $AC$  (joonis 155).

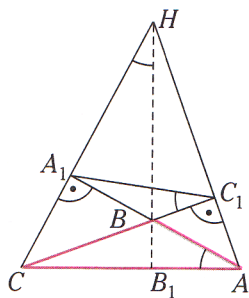
Järelikult  $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$ , sest mõlemad toetuvad abiringjoone ühele ja samale kaarele.



Joonis 154

Nüüd paneme tähele, et punktid  $B, H, A_1$  ja  $C_1$  asetsevad ringjoonel diameetriga  $BH$ . Järelikult  $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$ . Niisiis saame, et kolmnurkadel  $CAA_1$  ja  $CBB_1$  on üks nurk ühine ning  $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ . Järelikult on võrdsed ka ülejäänud nurgad:  $\angle BB_1C = \angle AA_1C = 90^\circ$ , mida oligi tarvis tõestada. ■

\* Siin ja edaspidi tähendab ★, et vastava punkti materjal pole kohustuslik.



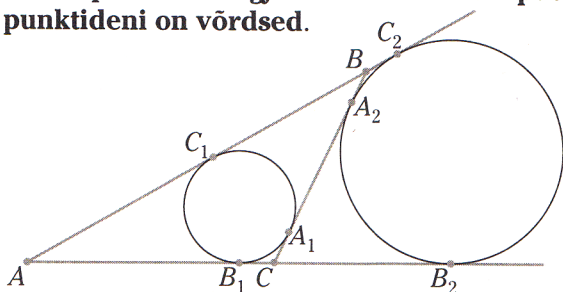
*Joonis 156*

Joonis 156 illustreerib juhtu, kus kolmnurga  $ABC$  üks nurk (nurk  $B$ ) on nürinurk. Arutlus jääb täpselt samasuguseks. Ainult punktid  $B$  ja  $H$  nagu vahetaksid oma kohad. Osutub, et sel juhul asetseb kõrguste lõikepunkt kolmnurgast väljaspool.

Täisnurkse kolmnurga puhul on kõrguste lõikepunktiks täisnurga tipp.

## Ringjooned ja puutujad

Vaatleme nüüd ülesandeid, milles esinevad ringjooned ja neid puutuvad sirged. Selliste ülesannete lahendamise saab sageli rajada väga lihtsale ja meile tuntud faktile: **antud punktist ringjoonele tõmmatud puutujate lõigud antud punktist puutepunktideni on võrdsed.**



Joonis 157

Näitena vaatleme joonisel 157 kujutatud juhtu: on antud nurk tipuga  $A$  ja kaks mittelõikuvat ringjoont puutuvad nurga kummagi haaraga joonisel näidatud punktides ning kolmas sirge puutub samuti nende ringjoontega ja lõikab nurga haarsid punktides  $B$  ja  $C$ .

Märgime, et nurga haarad on ringjoonte **ühised välised puutujad**, sirge  $BC$  aganende **ühine seesmine puutuja**.<sup>\*</sup> Neil ringjoontel on veel üks ühine seesmine puutuja, kuid seda pole joonisel näidatud.

Mõnel juhul mõtleme ringjoonte ühiste väliste puutujate all nende puutujate lõike ühest puutepunktist teiseni. Näiteks väide, et kahe ringjoone ühised välised puutujad on omavahel võrdsed, tähendab, et vastavad lõigud on võrdsed. Meie tähistustes tähendab see võrdust  $C_1 C_2 = B_1 B_2$ .

Tähistame kolmnurga  $ABC$  küljed ja ümbermõõdu nagu tavaliselt:

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c, \quad 2p = a + b + c.$$

Nüüd sõnastame ülesande.

**Ülesanne 3.** Vaatleme kõikvõimalikke lõike jooniselt 157, mis asetsevad ühel joonestatud kolmest sirgest ning mille üheks otspunktiks on puutepunkt ja teiseks otspunktiks kas samuti puutepunkt või üks kolmnurga  $ABC$  tippudest. Avaldage nende lõikude pikkused kolmnurga  $ABC$  külgede pikkuste kaudu.

\* Kahe ringjoone ühist puutujat nimetatakse väliseks, kui mõlemad ringjooned jäävad ühte ja samasse puutuja poolt määratud pooltasandisse. Puutujat nimetatakse seismiseks, kui need ringjooned jäävad erinevatesse puutuja poolt määratud pooltasanditesse.



## 8.1. Kolmnurga tähelepanuväärsed punktid

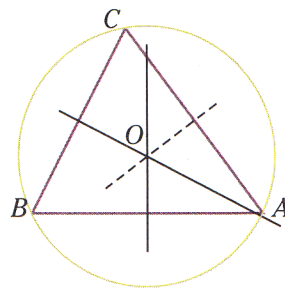
Iga kolmnurgaga on seotud mitu punkti, millel on palju huvitavaid ja tähelepanuväärseid omadusi. Neid nimetataksegi kolmnurga **tähelepanuväärseteks punktideks**. Mõnega neist olete juba tutvunud. Selline on näiteks kolmnurga ümberringjoone keskpunkt – punkt, milles lõikuvad kolmnurga külgede keskristsirged. Kolmnurga sisenurkade poolitajate lõikepunkt on kolmnurga siseringjoone keskpunkt. Me teame ka, et kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis. Need punktid on tähelepanuväärsed juba selle poolest, et neis lõikuvad kolm kindlat sirget.

Meenutame, kuidas me vastavaid väiteid tõestasime.

### Kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone keskpunkt Arutluse põhiidee

Meie arutlused, mis puudutasid kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone keskpunkte, olid teineteisega üsna sarnased. Need toetusid vastavate geomeetriliste kohtade omadustele.

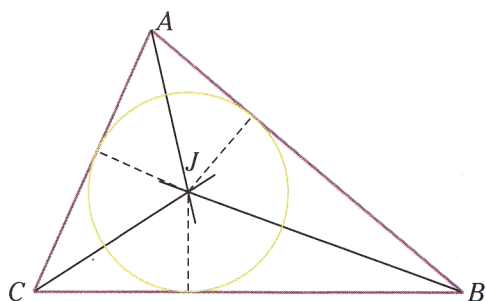
Nagu teame, kujutab lõigu keskristsirge endast lõigu otspunktidest võrdsetel kaugustel olevate punktide geomeetrilist kohta. Seepärast, kui tõmbame kolmnurga  $ABC$  kahe külje  $AB$  ja  $BC$  keskristsirged (joonis 198), peavad need kindlasti lõikuma (miks?) ja nende lõikepunkt on võrdsetel kaugustel nii punktidest  $A$  ja  $B$  kui ka punktidest  $B$  ja  $C$ . Seega on tekkinud lõikepunkt  $O$  võrdsetel kaugustel kolmnurga tippudest ning ringjoon, mille keskpunkt on  $O$  ja raadiuseks lõigu  $OA$  pikkus, läbib kolmnurga kõiki tippe ja on selle ümberringjoon. On arusaadav, et läbi punkti  $O$  peab minema ka külje  $AC$  keskristsirge.



Joonis 198

Vastupidi, kui mingi punkt on kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta külgede  $AB$  ja  $BC$  keskristsirgetel, st ühtib punktiga  $O$ .





Joonis 199

Vaatleme nüüd siseringjoone keskpunkti. Arutleme analoogiliselt. Nurgapoolitaja on nende punktide geomeetriline koht, mis on nurga haaradest võrdsetel kaugustel. (Vaatleme ainult nurga sees olevaid punkte.) Tähistame kolmnurga  $ABC$  nurkade  $A$  ja  $B$  poolitajate lõikepunkti tähega  $J$  (joonis 199). See punkt on võrdsetel kaugustel külgedest  $AB$  ja  $AC$  ning samuti külgedest  $BA$  ja  $BC$ . Tähendab, ta on võrdsetel kaugustel kolmnurga külgedest, seepärast leidub ringjoon keskpunktiga  $J$ , mis puutub kolmnurga kõiki kolme külge, st on kolmnurga  $ABC$  siseringjoon. Peale selle peab punkti  $J$  läbima ka nurga  $C$  poolitaja.

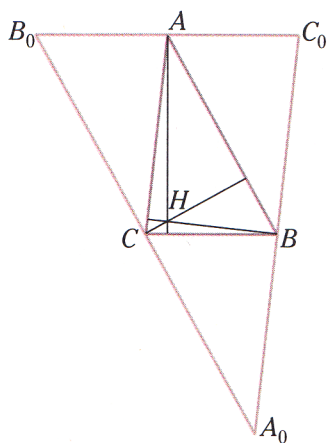
Nii nagu eelmiselgi juhul, saame arutleda ka vastupidiselt. Kui mingi ringjoon puutub kolmnurga kõiki külge, siis peab tema keskpunkt olema nurkade  $A$  ja  $B$  poolitajatel, järelikult ta ühtib punktiga  $J$ .

Paragrahvis 5.4 tõestasime, et kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis. Seal kasutasime abiringjoone meetodit. Nüüd esitame selle fakti jaoks teise, samuti üsna huvitava tõestuse, millest tulenevad teooria jaoks tähtsad järeldused.

### Teoreem kõrgustest. Teine tõestus

#### Teoreem 8.1.

- Kolmnurga kolm kõrgust lõikuvad ühes punktis.



Joonis 200

**Tõestus.** Vaatleme kolmnurka  $ABC$  (joonis 200). Tõmbame läbi tema tippude sirged, mis on paralleelsed kolmnurga vastaskülgedega. Need kolm sirget moodustavad kolmnurga  $A_0B_0C_0$ . Kolmnurga  $ABC$  küljed on kolmnurga  $A_0B_0C_0$  kesklõikudeks. Tõepoolest, nelinurk  $ACBC_0$  on rööpkülik. Tähendab  $AC_0 = CB$ . Analoogiliselt saame  $AB_0 = CB$ . Järelikult on punkt  $A$  lõigu  $C_0B_0$  keskpunkt. Vastav väide on õige ka teiste tippude  $B$  ja  $C$  jaoks.

Tõmbame nüüd kolmnurgas  $ABC$  kõrgused. Sirged, millel kõrgused asetsevad, on kolmnurga  $A_0B_0C_0$  külgede keskristsirged ja järelikult nad lõikuvad ühes punktis. Seejuures on nende sirgete lõikepunkt kolmnurga  $A_0B_0C_0$  ümberringjoone keskpunkt. ■

Kolmnurkade  $ABC$  ja  $A_0B_0C_0$  tekitatud „pilt” lubab teha veel terve rea huvitavaid järeldusi.



## Teoreem kolmnurga mediaanidest. Euleri sirge

### Teoreem 8.2.

- Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab iga mediaani suhtes  $2:1$  (tipust alates).
- Kolmnurga kolm tähelepanuväärset punkti – ümberringjoone keskpunkt, mediaanide lõikepunkt ja kõrguste lõikepunkt – asetsevad ühel sirgel.

Seda sirget nimetatakse maailma ühe suurima matemaatiku Leonhard Euleri\* järgi kolmnurga **Euleri sirgeks**.

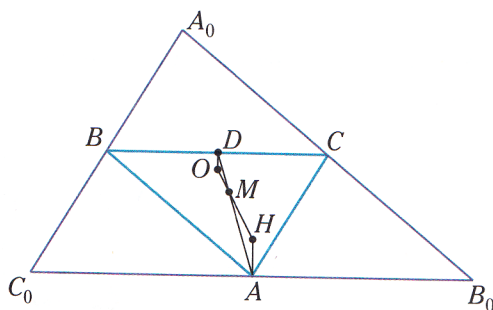
Teaduse arengut mõjutanud teadustööde arvult pole Leonhard Eulerile maailmas võrdset. Kuigi Leonhard Euler sündis Šveitsis, elas ta pikki aastaid Venemaal, kus ta kirjutas enamiku oma töödest ja seal ta ka suri.

**Tõestus.** Olgu  $D$  kolmnurga  $ABC$  külje  $BC$  keskpunkt,  $O$  selle kolmnurga ümberringjoone keskpunkt ja  $H$  selle kolmnurga kõrguste lõikepunkt (joonis 201). Joonestame kolmnurga  $A_0B_0C_0$ , nagu tegime seda eelmises teoreemis. Eelmisest arutlusest teame, et  $H$  on saadud kolmnurga ümberringjoone keskpunkt (joonis 201). Kuid kolmnurk  $A_0B_0C_0$  on sarnane kolmnurgaga  $ABC$  ja vastav sarnasustegur on 2. Kolmnurga  $A_0B_0C_0$  punktile  $H$  vastab kolmnurga  $ABC$  punkt  $O$ . Lõigud  $AH$  ja  $OD$  on nende kolmnurkade vastavad lõigud. Tähendab  $AH = 2OD$ . Peale selle on  $AH$  ja  $OD$  paralleelsed.

Tähistame sirgete  $AD$  ja  $OH$  lõikepunkti tähega  $M$ . Kolmnurkade  $AHM$  ja  $DOM$  sarnasuse põhjal saame, et  $2OM = HM$ .

Niisiis jaotab punkt  $M$  lõigu  $OH$  suhtes  $2:1$ , mediaan  $AD$  aga läbib punkti  $M$  ja viimane jaotab lõigu  $AD$  samuti suhtes  $2:1$ .

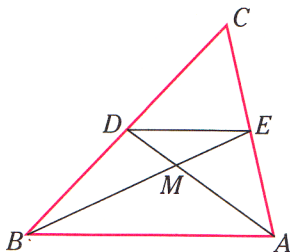
Samasugused arutlused kehtivad kolmnurga iga mediaani kohta. See tähendab, et kõik kolm mediaani läbivad lõigu  $OH$  ühte ja sama punkti  $M$ , st nad lõikuvad ühes punktis, ja nagu me näitasime, jaotab see punkt nad suhtes  $2:1$ . Seega on teoreemi kõik kolm väidet tõestatud. ■



Joonis 201

\* L. Euler (1707–1783) sündis Šveitsis Baselis, töötas Venemaal Peterburi Teaduste Akadeemias ja Preisi Teaduste Akadeemias. Kirjutas palju teadustöid ja raamatuid matemaatika, füüsika ja astronoomia alalt. Ta oli üks diferentsiaalarvutuse ja integraalarvutuse rajajaid. Diferentsiaal- ja integraalarvutuse alustega tutvute XI ja XII klassis.

Anname veel ühe tõestuse teoreemile, et kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis. See on äsja vaadeldud tõestusest lihtsam, kuid sellest ei tulene nii palju geomeetrilisi järeldusi.



Joonis 202

Vaatleme kolmnurka  $ABC$ . Olgu  $D$  ja  $E$  külgede  $BC$  ja  $AC$  keskpunktid (joonis 202). Tähistame sirgete  $AD$  ja  $BE$  lõikepunkti tähega  $M$ . Kuna  $ED$  on kolmnurga  $ABC$  kesk-lõik, siis kesklõigu omadustest järeldub, et kolmnurgad  $ABM$  ja  $DEM$  on sarnased. Vastav sarnasustegur on 2, sest  $\frac{AB}{DE} = 2$ .

Seega mis tahes kahe mediaani lõikepunkt jaotab kum-magi neist suhtes 2 : 1, kuna  $\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{AB}{DE} = 2$ .

Sellest järeldub, et kõik kolm mediaani lõikuvad ühes punktis punktis  $M$ . (Kui tõmbame mediaani tipust  $C$ , siis see jaotab lõigu  $AD$  samas suhtes 2 : 1, st läbib punkti  $M$ ). ■

### ★ Üks punkt kolmes rollis

Niisiis tegime kindlaks, et punkt  $H$  (vt joonis 201) on kolmnurga  $ABC$  kõrguste lõi-kepunktiks ja kolmnurga  $A_0B_0C_0$  ümberringjoone keskpunktiks. Kuid sellega pole tema omadused kaugeltki ammendatud.

Peatükis 5 esitasime järgmise ülesande.

**Ülesanne.** Tõestage, et teravnurkse kolmnurga kõrguste lõikepunkt on nende kõr-guste aluspunktide poolt määratud kolmnurga siseringjoone kesk-punkt.

Kui te varem selle ülesandega hakkama ei saanud või vahele jätsite, pole midagi katki, esitame nüüd selle lahenduse.

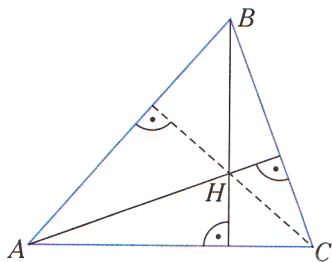


Anname seda väidet kasutades veel kolmanda tõestuse teoreemile kolmnurga kõrgustest.

### Teoreem kolmnurga kõrgustest. Kolmas tõestus

#### Teoreem 8.4.

- Kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.



Joonis 223

**Tõestus.** Vaatleme kolmnurka  $ABC$ . Lõikugu tippudest  $A$  ja  $B$  väljuvad kõrgused punktis  $H$  (joonis 223).

Sirged  $AH$  ja  $BH$  on risti vastavalt sirgetega  $BC$  ja  $AC$ , seepärast vastavalt ristseisu tingimusele kehtivad võrdused

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2,$$

$$BA^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2.$$

Lahutades ühe võrduse teisest, saame

$$CB^2 - CA^2 = HB^2 - HA^2,$$

st sirged  $HC$  ja  $AB$  on risti. Teoreem on tõestatud (juba kolmandat korda!). ■

#### ★ Ülesanded, iseseisvad tööd, küsimused

- T** 1. Sõnastage tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kolmnurk oleks võrdhaarne.
- T** 2. Sõnastage Pythagorase teoreemi väide ja pöördväide üheainsa teoreemina.
3. Tooge näiteid tarvilike ja piisavate tingimuste kohta, mida tunnete geomeetria kursusest.
- K** 4. Nelinurga kolm külge nende ringjärjestuses on 7, 1 ja 4. Leidke selle nelinurga neljanda külje pikkus, kui on teada, et tema diagonaalid on risti.
5. Vaatleme kahte erinevat nelinurka, mille küljed on vastavalt võrdsed. Tõestage, et kui ühel neist on diagonaalid risti, siis on diagonaalid risti ka teisel.
- R** 6. Nelinurga  $ABCD$  küljed on  $AB = 12$ ,  $BC = 9$ ,  $CD = 1$ ,  $DA = 8$ . Tipud  $A$  ja  $B$  jäävad paigale, tipud  $C$  ja  $D$  aga liiguvad nii, et selle nelinurga külgede pikkused ei muutu. Millise joone kirjeldab sellise liikumise puhul nelinurga diagonaalide lõikepunkt?
- R** 7. Antud on kaks ringjoont keskpunktidega  $O_1$  ja  $O_2$  ning raadiustega  $R$  ja  $r$ . Vaatleme nende punktide  $M$  geomeetrilist kohta, millest kummalegi ringjoonele tõmmatud puutujate puutujalõikude pikkused on võrdsed. Tõestage, et selleks geomeetriliseks kohaks on sirgega  $O_1O_2$  ristuv sirge või niisuguse sirge osa. Millistel juhtudel on selleks geomeetriliseks kohaks kogu sirge?





### Pindalade meetod

On huvitav, et pindalade meetod on lähedases „suguluses” sarnasusmeetodiga. Igal juhul asendavad nad paljudes teoreemides ja ülesannetes edukalt teineteist.

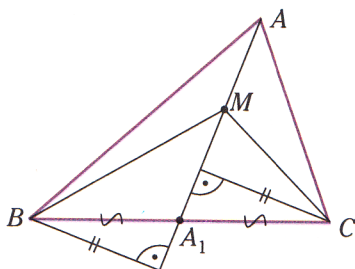
Vaadake, kuidas tõestatakse pindalade meetodil teoreemi kolmnurga mediaanidest.

### Teoreem kolmnurga mediaanidest. Teine tõestus

#### Teoreem

- Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis ja see lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes 2 : 1 kolmnurga tipust alates.

**Tõestus.** Arutlus, mille praegu esitame, on rajatud punktide geomeetrilise koha mõistele ja sarnaneb nende arutlustega, mida kasutasime, kui tõestasime teoreemi kolmnurga külgede keskristsirgetest, nurgapoolitajatest ja kõrgustest.



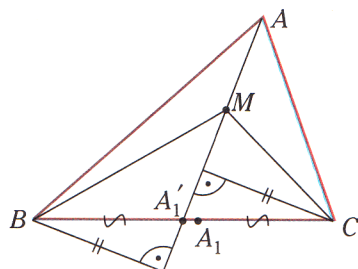
Joonis 265

Punktide geomeetrilise koha mõiste seisukohalt on kolmnurga  $ABC$  mediaan  $AA_1$  nende kolmnurga sees asetsevate punktide  $M$  geomeetriline koht, mille jaoks kolmnurgad  $ABM$  ja  $ACM$  on pindvõrdsed (vt paragrahv 9.2 ülesanne 8).

Tõepoolest, kuna kolmnurgad  $BAA_1$  ja  $CAA_1$  on pindvõrdsed, siis on võrdsed ka nende ühisele küljele  $AA_1$  joonestatud kõrgused (joonis 265). Seepärast on ka iga lõigul  $AA_1$  asetseva punkti  $M$  korral võrdsed kolmnurkade  $BAM$  ja  $CAM$  küljele  $AM$  tõmmatud kõrgused ja järelikult on need kolmnurgad punkti  $M$  igasuguse valiku puhul pindvõrdsed.

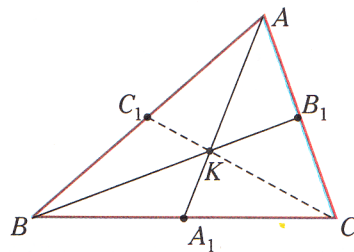
Täpselt samuti toimub arutus ka vastassuunas. Kui  $M$  on selline kolmnurga  $ABC$  sees asetsev punkt, et kolmnurgad  $ABM$  ja  $ACM$  on pindvõrdsed, siis on võrdsed ka nende kolmnurkade ühisele küljele  $AM$  tõmmatud kõrgused.

Lõigaku sirge  $AM$  külge  $BC$  punktis  $A_1'$  (joonis 266). Kolmnurgad  $BAA_1'$  ja  $CAA_1'$  on pindvõrdsed, sest neil on ühine külg  $AA_1'$  ja sellele küljele tõmmatud kõrgused on neil võrdsed. Kolmnurkade  $BAA_1'$  ja  $CAA_1'$  pindvõrdsusest järeldeb siis, et  $A_1'$  on külje  $BC$  keskpunkt, st punkt  $A_1'$  ühtib punktiga  $A_1$ .



Joonis 266

Joonestame nüüd kolmnurga  $ABC$  mediaanid  $AA_1$  ja  $BB_1$  ning tähistame nende lõikepunkti tähega  $K$  (joonis 267). Punkt  $K$  asetseb vastavatel mediaanidel, seepärast on pindvõrdsed kolmnurgad  $ABK$  ja  $ACK$  ning samuti kolmnurgad  $BAK$  ja  $BCK$ . Seega on ka kolmnurgad  $BCK$  ja  $ACK$  pindvõrdsed ning punkt  $K$  asetseb mediaanil  $CC_1$ . Seega on  $K$  kõigi kolme mediaani lõikepunkt.



Joonis 267

Edasi, kolmnurga  $BAK$  pindala moodustab  $\frac{1}{3}$  kolmnurga  $ABC$  pindalast ning kolmnurga  $ABA_1$  pindala võrdub poolega kolmnurga  $ABC$  pindalast. Järelikult on kolmnurga  $ABK$  pindala  $\frac{2}{3}$  kolmnurga  $ABA_1$  pindalast ja seega  $AK$  pikkus moodustab  $\frac{2}{3}$  lõigu  $AA_1$  pikkusest ning kehtib  $AK : KA_1 = 2 : 1$ .

Teoreemi väide on täielikult tõestatud. ■

### Teoreem kolmnurga sisenurga poolitajast. Teine tõestus

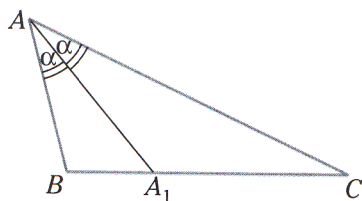
Kasutades kolmnurga pindala valemit (1) paragrahvist 9.2, võib samal viisil tõestada ka teoreemi kolmnurga sisenurga poolitajast.

#### Teoreem

- Kui  $AA_1$  on kolmnurga  $ABC$  sisenurga  $A$  poolitaja, siis kehtib võrdus

$$BA_1 : A_1C = BA : AC.$$

**Tõestus.** Olgu kolmnurga  $ABC$  nurga  $A$  suurus  $2\alpha$ . Vaatleme kolmnurki  $BAA_1$  ja  $CAA_1$  (joonis 268). Nende pindalade suhe võrdub lõikude  $BA_1$  ja  $A_1C$  pikkuste suhtega, sest vastavatel kolmnurkadel on vaadeldavatele külgedele tõmmatud kõrgus ühine.



Joonis 268

Teiselt poolt, kasutades nende kolmnurkade pindalade arvutamiseks valemit (1), saame

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BAA_1}}{S_{CAA_1}} = \frac{\frac{1}{2} BA \cdot AA_1 \sin \alpha}{\frac{1}{2} AC \cdot AA_1 \sin \alpha} = \frac{BA}{AC}. \blacksquare$$

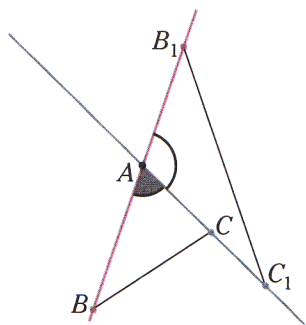
(Vt ka ülesannet 6 käesoleva paragrahvi lõpus.)

Nagu näha, kasutasime kummagi teoreemi tõestamisel ühte väga lihtsat fakti: **kui kahel kolmnurgal on ühine tipp ja selle tipu vastasküljed asetsevad ühel sirgel, siis nende kolmnurkade pindalade suhe võrdub nende ühel sirgel asetsevate külgede pikkuste suhtega.**

See fakt on erijuht ühest üldisemast väitest, mis on samuti tarvis meelde jätta.

### Üks tähtis ülesanne

**Ülesanne 1.** Lõikugu kaks sirget punktis A. Olgu B ja B<sub>1</sub> kaks suvalist ühel sirgel ning C ja C<sub>1</sub> kaks teisel sirgel asetsevat punkti. Tõestage, et



Joonis 269

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}.$$

**Lahendus.** Väide tuleneb kolmnurga pindala valemist (1) paragrahvist 9.2. Kolmnurkadel AB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> ja ABC on juurgad tipu A juures kas võrdsed või täiendavad teineteist 180°-ni, kuid nende siinused on kummalgi juhul võrdsed. Järelikult

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AB_1 \cdot AC_1 \sin \angle B_1AC_1}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}. \blacksquare$$

### Veel üks pindala mõistele toetuv meetod

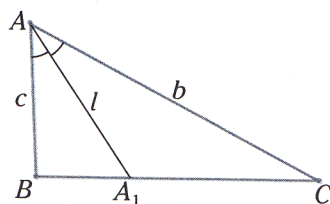
**Ülesanne 2.** Tõestage, et kolmnurga ABC nurgapoolitaja AA<sub>1</sub> pikkuse l saab arvutada valemist

$$l = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b+c},$$

kus  $b = AC$ ,  $c = AB$  ja  $A$  on nurga  $BAC$  suurus (joonis 270).

**Lahendus.** Lähtume ilmselt kehtivast võrdusest

$$S_{BAC} = S_{BAA_1} + S_{CAA_1}$$



Joonis 270