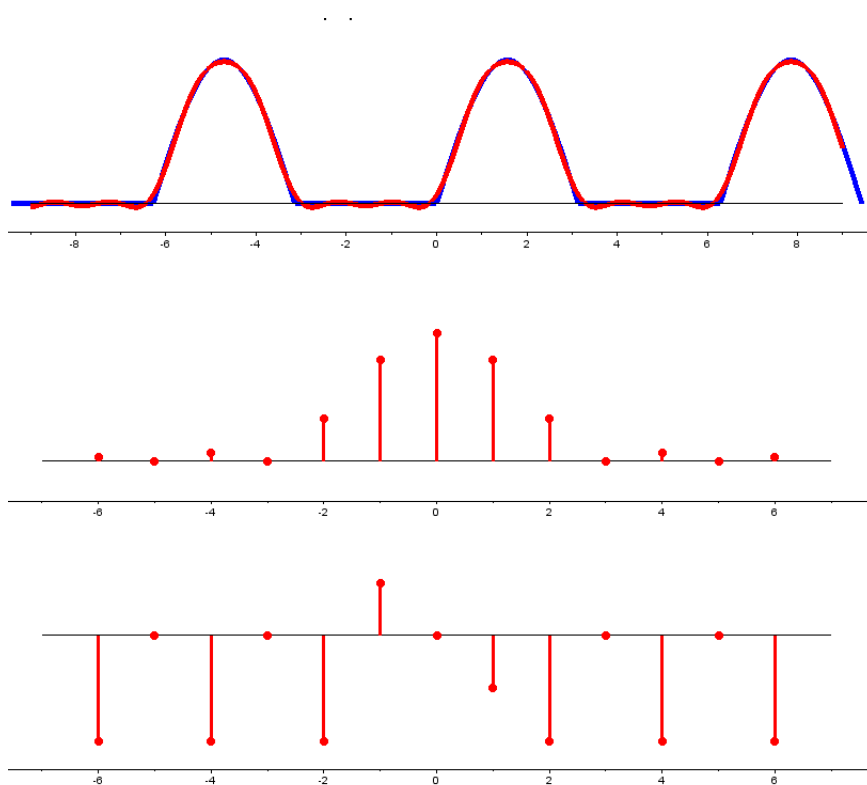


MTMM.00.341
Kõrgem matemaatika 2



2018

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{aligned}(Const)' &= 0 & (\sin x)' &= \cos x & (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^\alpha)' &= \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' &= -\sin x & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' &= e^x & (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' &= a^x \ln a & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{aligned}(1) \int 0 dx &= C & (9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\ (2) \int dx &= x + C & (10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\ (3) \int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\ (4) \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C & (12) \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C \\ (5) \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & (13) \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C \\ (6) \int e^x dx &= e^x + C & (14) \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C \\ (7) \int \sin x dx &= -\cos x + C & (15) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} &= \operatorname{th} x + C \\ (8) \int \cos x dx &= \sin x + C & (16) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} &= -\operatorname{cth} x + C\end{aligned}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1	Vektorruum ja alamruum	1
1.1	Vektorruum	1
1.2	Alamruum	2
2	Vektorite lineaarne sõltumatus	4
2.1	Lineaarne sõltumatus	4
3	Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid	6
3.1	Baas ja vektori koordinaadid	6
3.2	Vektori koordinaadid uuel baasil	7
4	Arvread	8
4.1	Arvread	8
4.2	Geomeetiline rida	9
5	Harmoonilised read, positiivsed arvread	10
5.1	Harmooniline rida ja integraaltunnus	10
5.2	Positiivsete arvride võrdluslause	11
6	Arvride koondumine	12
6.1	Absoluutne koondumus	12
6.2	Tingimisi koondumine	13
7	Astmeread. Taylori read	14
7.1	Astmeread, koonduvusraadius	14
7.2	Astmeritta arendamine	15
7.3	Taylor'i read	16
8	Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond	17
8.1	Fourier' read	17
8.2	Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond	19
9	Piirväärtus ja pidevus	21
9.1	Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	21
10	Osatuletised. Puutujatasand.	24
10.1	Esimest järku osatuletised	24
10.2	Pinna puutujatasand ja normaal	26
10.3	Kõrgemat järku osatuletised	26
11	Kontrolltöö nr 1	28
11.1	Kontrolltöö ülesannete teemad	28
11.2	Kontrolltöö näidisülesanded	28

12 Täisdiferentsiaal. Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil	30
12.1 Täisdiferentsiaal	30
12.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine	31
12.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	33
13 Ekstreemumid. Optimiseerimine	34
13.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	34
13.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas	35
13.3 Optimiseerimine	36
13.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis	37
13.5 Taylorigi valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *	38
14 Lagrange'i kordajate meetod. Liitfunktsiooni osatuletised	39
14.1 Lagrange'i kordajate meetod	39
14.2 Liitfunktsiooni osatuletised	40
14.3 Gradient	41
14.4 Funktsiooni tuletis antud suunas	42
14.5 Vähimruutude meetod *	43
15 Kahekordse integraali arvutamine	45
15.1 Kahekordse integraali arvutamine	45
16 Muutujate vahetus kahekordses integraalis. Üleminek polaarkoordinaatidele	47
16.1 Muutujate vahetus kahekordses integraalis	47
16.2 Üleminek polaarkoordinaatidele	48
17 Kahekordse integraali rakendused	50
17.1 Kahekordse integraali geomeetriselised rakendused	50
17.1.1 Tasandilise kujundi pindala	50
17.1.2 Keha ruumala. Ruumilise pinnatüki pindala	50
17.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused	53
17.2.1 Tasandilise kujundi mass	53
17.2.2 Tasandilise kujundi massikese	54
18 Kolmekordsed integraalid	55
18.1 Kolmekordse integraali arvutamine	55
18.2 Üleminek silinderkoordinaatidele	56
19 Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused	57
19.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele	57
19.2 Kolmekordse integraali rakendusi	57
19.2.1 Keha ruumala leidmine	57
19.2.2 Keha mass ja massikese.	58
20 Joonintegraalid	60
20.1 Esimest liiki joonintegraalid	60
20.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendusi	61
20.2 Teist liiki joonintegraalid*	61
20.2.1 Teist liiki joonintegraali rakendusi	63
21 Kontrolltöö 2	64
21.1 Kontrolltöö ülesannete teemad	64
21.2 Kontrolltöö näidisülesanded	64

22 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	66
22.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend	66
22.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine	67
22.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	68
23 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid. Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid	70
23.1 Homogeensed funktsioonid	70
23.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid	70
23.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid	71
24 Bernoulli diferentsiaalvõrrand. Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid. Numbrilised meetodid	72
24.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrand	72
24.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid	72
24.3 Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine	73
25 Teist järku diferentsiaalvõrrandid	75
25.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel	75
25.2 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine	76
26 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	77
27 Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	79
28 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	81
28.1 Lineaarsed kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid	81
28.2 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine	82
28.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	83
29 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	84
29.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	84
29.2 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	84
30 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	86
31 Kontrolltöö nr. 3	87
31.1 Kontrolltöö ülesannete teemad	87
31.2 Kontrolltöö näidisülesanded	87
32 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Eksami näidisülesanded	89
32.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	89
32.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II	90
32.2.1 Eksami teooria osa	90
32.2.2 Eksami ülesannete teemad	90
32.3 Eksami näidisülesanded	90
33 Vastused	91

Praktikum 1

Vektorruum ja alamruum

1.1 Vektorruum

Definitsioon 1.1

Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks** üle reaalarvude \mathbb{R} , kui on defineeritud kujutused $V \times V \rightarrow V$, $(a, b) \mapsto a + b$, ja $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(k, a) \mapsto ka$, nii et

VR1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ iga $a, b, c \in V$ korral;

VR2. leidub element $\theta \in V$ nii, et iga $a \in V$ korral $a + \theta = a = \theta + a$;

VR3. iga elemendi $a \in V$ korral leidub element $-a \in V$ nii, et $a + (-a) = \theta = (-a) + a$;

VR4. $a + b = b + a$ iga $a, b \in V$ korral;

VR5. $k(a + b) = ka + kb$ iga $a, b \in V$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral;

VR6. $(k + l)a = ka + la$ iga $a \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$ korral;

VR7. $(kl)a = k(la)$ iga $a \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$ korral;

VR8. $1a = a$ iga $a \in V$ korral.

Ülesanne 1.1. Olgu a vektorruumi element ja $k \in \mathbb{R}$ skalaar. Tõestage, et $ka = 0$ parajasti siis, kui $k = 0$ või $a = 0$.

Ülesanne 1.2. Olgu a, b vektorruumi elemendid ja $k, l \in \mathbb{R}$ skalaarid. Tõestage, et $ka + lb = la + kb$ parajasti siis, kui $k = l$ või $a = b$.

Ülesanne 1.3. (!) Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid arvude liitmise ja korrutamise suhtes?

(a) \mathbb{N}

(c) \mathbb{Q}

(e) \mathbb{C}

(b) \mathbb{Z}

(d) \mathbb{R}

(f) \mathbb{R}^+

Ülesanne 1.4. Defineerime hulgal $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$r \oplus s = rs, \quad r, s \in \mathbb{R}^+$$

$$k \otimes r = r^k, \quad k \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+.$$

Tõestage, et selliste tehete suhtes on hulk \mathbb{R}^+ vektorruum.

Ülesanne 1.5. (!) Defineerime hulgal $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, \dots, a_n) = (ka_1, \dots, ka_n), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Tõestage, et selliste (n.ö. komponenthaaval defineeritud) tehete suhtes on hulk \mathbb{R}^n vektorruum.

Ülesanne 1.6. (!) Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \\ k(a_1, a_2) &= (ka_1, a_2),\end{aligned}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. Kas V on vektorruum?

Ülesanne 1.7. (!) Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid maatriksite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes.

- | | |
|--|---|
| (a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk | (f) $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ |
| (b) kõigi n -ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk | (g) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (c) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk | (h) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (d) $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ | (i) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ |
| (e) $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$ | |

Ülesanne 1.8. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiivisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid.

- (a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
- (b) kõigi ülimalt n . astme polünoomfunktsioonide hulk $\mathbb{R}_n[x]$
- (c) kõigi n -astme polünoomfunktsioonide hulk
- (d) lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}$
- (e) lõigul $[a, b]$ k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}^{(k)}$, kus $k = 0, 1, \dots$
- (f) lõigul $[a, b]$ integreeruvate funktsioonide hulk

1.2 Alamruum

Definitsioon 1.2

Vektorruumi V mittetühja alamhulka U nimetatakse vektorruumi V **alamruumiks**, kui

AR1. iga $a, b \in U$ korral $a + b \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V liitmise suhtes);

AR2. iga $a \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral $ka \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V skalaariga korrutamise suhtes);

Definitsioon 1.3

Vektorruumi V elementide a_1, a_2, \dots, a_s **lineaarseteks katteks** nimetatakse hulka

$$L(a_1, a_2, \dots, a_s) = \{k_1 a_1 + \dots + k_s a_s \mid k_1, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}.$$

Ülesanne 1.9. (!) Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi \mathbb{R}^4 alamruumid.

- (a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$

Ülesanne 1.10. (!) Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V alamruumid.

- (a) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk
- (b) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk
- (c) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk
- (d) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk
- (e) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- (f) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R}), \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (g) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (h) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}$
- (i) $V = \mathbb{R}^5, \{(a, b, c, d, e) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a + e = b + d\}$

Ülesanne 1.11. Leidke vektorruumi \mathbb{R}^4 vektorite a_1, \dots, a_s lineaarne kate, kui

- (a) $a_1 = (1, 0, 0, -1), a_2 = (2, 1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 1), a_4 = (1, 2, 3, 4), a_5 = (0, 1, 2, 3)$
- (b) $a_1 = (1, 2, 1, 2), a_2 = (2, 1, 2, 1), a_3 = (0, 3, 0, 3), a_4 = (1, 1, 1, 1)$
- (c) $a_1 = (1, 1, 1, 2), a_2 = (2, 0, 1, 1), a_3 = (4, 2, 3, 5), a_4 = (0, 2, 1, 3)$

Ülesanne 1.12. < * > Leidke hulgast $\{(0, 0)\}$ ja tühjast hulgast erinevad pärisalamhulgad S_1, S_2 ja S_3 vektorruumis \mathbb{R}^2 nii, et

- (a) $S_1 + S_1 \subsetneq S_1$ (pole võrdne!),
- (b) $S_2 \subsetneq S_2 + S_2$ (pole võrdne!),
- (c) $S_3 + S_3 = S_3$.

Praktikum 2

Vektorite lineaarne sõltumatus

2.1 Lineaarne sõltumatus

Definitsioon 2.1

Vektorruumi V vektorite süsteemi a_1, a_2, \dots, a_s nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mis tahes $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{R}$ korral võrdusest

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s = 0$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0.$$

Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Teoreem 2.1

Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi vähemalt üks vektor avaldub lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest.

Ülesanne 2.1. (!) Olgu a, b, c vektorruumi V vektorid. Kui vektorruumi elemendid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorruumi elemendid $a + b, b + c$ ja $c + a$ on lineaarselt sõltumatud?

Ülesanne 2.2. (!) Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.3. (!) Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.4. (!) Näidake, et vektorruumi V vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$

(b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $f_3(x) = x^2 + 16x + 13$

(c) $V = \mathbb{C}$, $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$

(d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = 1$

Ülesanne 2.5. (!) Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V on lineaarselt sõltumatud:

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$
- (b) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (x, y, 3)$, $a_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$, $y \neq \frac{9}{2}$
- (c) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.6. (!) Uurige, kas järgmised vektorite süsteemid funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mitte-triviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:

- (a) $x + 2$, $x - 2$
- (b) $6x + 9$, $8x + 12$
- (c) 1 , $(x - 1)^2$, $x - 1$
- (d) $4 - x$, $2x + 3$, $6x + 8$
- (e) $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$
- (f) $\sin x$, $\cos x$
- (g) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$
- (h) x^2 , $x|x|$

Ülesanne 2.7. < * > Olgu V n -mõõtmeline vektorruum. Olgu antud r -mõõtmeline alamruum $W \subset V$, kusjuures $r < n$. Tõestage, et $W = Y$, kus

$$Y = \bigcap \{U : U \text{ on } V \text{ alamruum, } \dim U = n - 1, W \subset U\}.$$

Näpunäide: Sisalduvuse $W \supset Y$ tõestamisel näidake, et elemendi $v \in Y \setminus W$ olemasolu viib vastuoluni.

Ülesanne 2.8. < * > Vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorid f_1 ja f_2 on sellised, et iga $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ korral funktsioon $c_1 f_1 + c_2 f_2$ säilitab märki, st.

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \geq 0 \quad \vee \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \leq 0).$$

Tõestage, et vektorite süsteem f_1, f_2 on lineaarselt sõltuv.

Praktikum 3

Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid

3.1 Baas ja vektori koordinaadid

Definitsioon 3.1

Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks**, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.

Definitsioon 3.2

Vektorruumi **baasiks** nimetatakse selle vektorruumi lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.

Lause 3.1

n -mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem baas.

Definitsioon 3.3

Olgu V vektorruum, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tema baas ja $a \in V$. Kui $a = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n$, siis skalaare $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektori a **koordinaatideks** baasi e suhtes.

Ülesanne 3.1. (!) Leidke vektorruumi \mathbb{C} vektori $-5 + 4i$ koordinaadid baasi $e = \{-1 + 2i, 2 + i\}$ suhtes.

Ülesanne 3.2. (!) Tooge näide vektorruumi \mathbb{R}^4

- (a) baasist
- (b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas
- (c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas
- (d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem

Ülesanne 3.3. (!) Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ vektorite $A =$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

suhtes.

Ülesanne 3.4. (!) Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi \mathbb{R}^3 baasid ning leidke vektori $a = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:

- (a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

(b) $a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1)$

(c) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$

Ülesanne 3.5. (!) On antud vektorruumi \mathbb{R}^3 vektorid $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ ja $e_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

3.2 Vektori koordinaadid uuel baasil

Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ vektorruumi V kaks baasi ning olgu vektor $a \in V$.

$$a = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad a = x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n.$$

Seosed koordinaatide vahel uuel ja vanal baasil on

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kus A on baasiteisenduse maatriks ja on teada seosed

$$e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n$$

$$e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n$$

...

$$e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$$

Ülesanne 3.6. Leidke üleminekumaatriks vektorruumi V baasilt $\{e_1, \dots, e_n\}$ baasile $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ja leidke vektori a koordinaadid nende baaside suhtes, kui

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$, $e'_1 = (3, 1, 4)$, $e'_2 = (5, 2, 1)$, $e'_3 = (1, 1, -6)$, $a = (9, 4, -1)$

(b) $V = \mathbb{C}$, $e_1 = 1 - i$, $e_2 = 1 + i$, $e'_1 = 2$, $e'_2 = 2i$, $a = 2 + 2i$

(c) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad e'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 3.7. Olgu $\{e_1, e_2, e_3\}$ 3-mõõtmelise vektorruumi V baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e'_1 = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_3 = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.

Praktikum 4

4.1 Arvread

Definitsioon 4.1

Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ nimetatakse **koonduvaks**, kui tema osasummade jada $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ koondub, s.t. kui eksisteerib lõplik püüväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = S.$$

Arvu S nimetatakse rea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ summaks. Arvrida, mis ei koondu, nimetatakse **hajuvaks**.

Lause 4.1

Koondumise tarvilik tingimus (arvrea hajumise tunnus). Kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0, \tag{4.1}$$

siis rida $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hajub.

Ülesanne 4.1. (!) Leidke järgmiste ridade osasummade jadad (S_n) ja summad S .

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

Ülesanne 4.2. Leidke read, mille osasummad on järgmised.

(a) $S_n = \ln(n+2)$

(c) $S_n = \frac{1}{n+1}$

(e) $S_n = \frac{n^2}{n^2+2}$

(b) $S_n = \frac{n+3}{n+1}$

(d) $S_n = n+1$

(f) $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ülesanne 4.3. (!) Näidake hajuvuse tunnuse abil, et järgmised arvread hajuvad.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n)^{-1/n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Ülesanne 4.4. $\langle * \rangle$ Leidke rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ osasummade jaded (S_n) ja summa.

4.2 Geomeetriline rida

Geomeetriline rida,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Koondub, kui $|q| < 1$ ja hajub muul juhul. Kui $|q| < 1$, siis rea summa on $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Ülesanne 4.5. (!) Tehke kindlaks, kas järgmised geomeetrised read koonduvad või hajuvad. Koondumise korral leidke rea summa S .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{7^n} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 + 2^n}{4^{n+2}}$

Ülesanne 4.6. Pall kukub 2 meetri kõrguselt ja põrkab igal põrgatusel $\frac{2}{5}$ kõrgusele tagasi (võrreldes oma viimase kõrgusega).

Leidke palli poolt läbitud vertikaalne vahemaa.

Ülesanne 4.7. Esitage lõpmatu perioodiline kümnendmurd $7.(36)$ hariliku murruna (kahe täisarvu jagatisena).

Ülesanne 4.8. (IT) Kahendsüsteemi arv teisendatakse kümnendsüsteemi arvuks järgmise valemi abil:

$$b_0, b_1 b_2 b_3 \dots |_2 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots$$

Esitage kahendarv $1, 101010 \dots |_2$ ühe kümnendsüsteemi murruna (ratsionaalarvuna).

Ülesanne 4.9. (F) 2008. aasta alguse seisuga olid maailma naftavarud hinnanguliselt 1950 miljardit barrelit.

2008. aasta jooksul tarvitati ära u. 29.3 miljardit barrelit. Arvestades, et iga aastaga on naftatoodang tõusnud 1%, siis nende andmete põhjal, mitu aastat naftat jätkub?

Ülesanne 4.10. $\langle * \rangle$ Tudeng alustab ühikast teekonda loengusse. Kui ta on läbinud $\frac{3}{4}$ teekonnast, otsustab ta ümber mõelda, keerab otsa ringi ja alustab teekonda tagasi ühika suunas.

Läbinud $\frac{3}{4}$ tagasiteest, keerab ta ringi ja liigub nüüd loengusse. Siis jälle keerab otsa ringi ja liigub ühika poole. Kui selline liikumine jätkub (keerates alati $\frac{3}{4}$ läbitud teel otsa ringi ja liikudes vastassuunas), siis millisesse kahte punkti tuleks rajada ööklubi, et tudengi tegevus muutuks mingilgi moel mõttekaks? Kui ühikas on punktis A ja loeng punktis B ning vahepealne muutuv punkt $P \in (A, B)$, siis $\frac{3}{4}$ tuleb võtta alati kas lõigust $[A, P]$ või $[P, B]$.

Praktikum 5

Harmonilised read, positiivsed arvread

5.1 Harmoniline rida ja integraaltunnus

Lause 5.1

Üldine harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots \quad (5.1)$$

koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Definitsioon 5.1

Positiivseks arvreaks nimetatakse arvrida $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, kus $u_n \geq 0$ iga $n = 0, 1, 2, \dots$ korral.

Lause 5.2

Rea koonduvuse integraaltunnus. Kui f on pidev monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas $[a, \infty)$ ja $u_n = f(n)$, siis positiivne rida $\sum_{n=a}^{\infty} u_n$ ja päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x) dx$ koonduvad (hajuvad) samaaegselt.

Ülesanne 5.1. (!) Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(-4)^{n+1}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-0.9}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{6^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$

Ülesanne 5.2. (!) Uurige järgmiste ridade koonduvust integraaltunnuse abil.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

Ülesanne 5.3. Näidake, et kehtib võrratuste ahel

$$\ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1.$$

Kasutades toodud ahelat, hinnake harmoonilise rea osasummade suurust $n = 1000$, $n = 1000000$ ja $n = 1000000000$ korral. Mitu rea liiget on vaja, et harmoonilise rea osasumma $S_n > 100$?

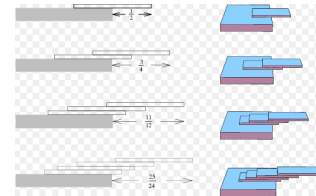
Ülesanne 5.4. $\langle * \rangle$ Tudeng sai kontrolltöös 1 punkti 10-st (10%). Iga järeltöö maksimaalsed punktide arvu suurendatakse 10 võrra.

Tudengi eelmise töö saadud punktid kantakse üle protsentides tehtava töö maksimaalsest võimalikust. Kui tudeng saab igas töös 1 punkti juurde, siis mitu järeltööd läheb vaja, et tudeng saaks lõpuks kokku 50% järeltöö punktidest? Kas on võimalik kogusummana saada ka täispunktid?

Selgituseks: II töös on tudengil ees 2 punkti 20-st (10%), ta saab ühe juurde ja kokku $2+1=3$. III töös on tudengil ees $\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{9}{2}$ p. 30-st (15%), ta saab ühe juurde ja kokku $\frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ jne.

Ülesanne 5.5. Paigutame n kaarti järgmiselt: ülalt teine kaart toetab ülemist poole pealt, ülalt kolmas kaart eelmist $3/4$ pealt,

neljas kaart eelmist $5/6$ pealt (üldiselt $(2n-1)/(2n)$ pealt) jne. Teoreetiliselt jääb selline kaardipakk tasakaalu. Kui kaugemale lauast on võimalik n kaardist koosneva paki ülemist äärt viia? Proovige kodus järgi! Lihtsam on paigutada kergeid õhukesti plaate, kui näiteks raskeid raamatuid (joonis: <http://mathworld.wolfram.com/>).



5.2 Positiivsete arvridade võrdluslause

Lause 5.3

I võrdluslause. Kui positiivsete arvridade $\sum u_n$ ja $\sum v_n$ korral mingist indeksist k alates kehtib võrratus

$$u_n \leq v_n, \quad \text{iga indeksi } n > k \text{ korral,}$$

siis rea $\sum v_n$ koonduvusest järeldub $\sum u_n$ koonduvus ja rea $\sum u_n$ hajuvusest järeldub $\sum v_n$ hajuvus.

Lause 5.4

II võrdluslause. Kui leidub $c > 0$ nii, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = c$, siis mõlemad read $\sum u_n$ ja $\sum v_n$ koonduvad või hajuvad üheaegselt.

Ülesanne 5.6. (!) Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{9n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^3+3}}$

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^{4/3}}$

(l) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$

Ülesanne 5.7. (M) Olgu $u_n > 0$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = 0$. Näidake, et siis rida $\sum u_n$ koondub.

Ülesanne 5.8. (M) Näidake, et rida $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^q(n)}{n^p}$ koondub iga $-\infty < q < \infty$ ja $p > 1$ korral.

Praktikum 6

Arvridade koondumine

6.1 Absoluutne koonduvus

Definitsioon 6.1

Rida $\sum u_n$ nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rida $\sum |u_n|$ koondub.

Omadus 6.1

D'Alembert'i tunnus:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|.$$

Rida koondub absoluutselt, kui $D < 1$. Rida hajub, kui $D > 1$. Kui $D = 1$, siis ei saa otsustada.

Omadus 6.2

Cauchy tunnus:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}.$$

Rida koondub absoluutselt, kui $C < 1$. Rida hajub, kui $C > 1$. Kui $C = 1$, siis ei saa otsustada.

Ülesanne 6.1. (!) Uurige D'Alembert'i tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{5^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{n+1}$

(j) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-e)^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+3)!}{n!5^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n3^n}{(2n+1)\ln(n)}$

Ülesanne 6.2. (!) Uurige Cauchy tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+5)^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n\sqrt{n}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{4n+2}\right)^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1.5^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ülesanne 6.3. (M) < * > Uurige rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + n!}{(2n)!}$ koonduvust.

Ülesanne 6.4. (M) < * > Milliste b väärtuste korral koondub rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(b+1)(b+2)\dots(b+k)}?$$

6.2 Tingimisi koondumine

Definitsioon 6.2

Rida, mis koondub, kuid ei koonu absoluutselt, nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Lause 6.1

Leibniz'i tunnus Kui $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ jaoks on täidetud tingimused

1. $u_n \geq u_{n+1} > 0$ (üldliikmete jada on monotoonselt kahanev);
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$,

siis vahelduvate märkidega rida koondub,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n \cdot u_n + \dots \quad (6.1)$$

Ülesanne 6.5. (!) Uurige järgmiste ridade koonduvust.

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$ | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$ |
| (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-0.99)^n$ | (f) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{\ln(n^2)}$ |

Ülesanne 6.6. (!) Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad?

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ | (i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ | (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n3^n}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ | (h) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$ |

Ülesanne 6.7. (M) $\langle * \rangle$ Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub.

Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub.

Ülesanne 6.8. (M) $\langle * \rangle$ Leidke kõik a väärtused, mille korral rida koondub ning kõik need a väärtused, mille korral rida koondub absoluutselt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}.$$

Praktikum 7

Astmeread. Taylori read

7.1 Astmeread, koonduvusraadius

Definitsioon 7.1

Astmereaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid f_n , kus $f_n(x) = a_n x^n$, s.t. rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (7.1)$$

või üldisemalt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots \quad (7.2)$$

Definitsioon 7.2

Astmerea (7.1) koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A defineeritakse järgnevalt:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ koondub} \right\} \quad (7.3)$$

ja

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{arvrida } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ koondub absoluutselt} \right\}. \quad (7.4)$$

Teoreem 7.1

Cauchy-Hadamard'i teoreem. Kui $R > 0$, siis astmerida $\sum a_n x^n$ koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$ ja hajub piirkonnas $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Juhul $R = 0$ koondub ta vaid punktis $x = 0$.

Definitsioon 7.3

Arvu R nimetatakse astmerea **koonduvusraadiuseks**, vahemikku $(-R, R)$ astmerea (7.1) koonduvusvahemikuks.

Lause 7.1

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ või $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ siis koonduvusraadiust R saab leida vastavalt järgmiste valemite abil:

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{või} \quad R = \frac{1}{C} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (7.5)$$

Ülesanne 7.1. (!) Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadius R , koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A .

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+3} & \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n & \text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)! x^n \\
 \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x-1)^n & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n} & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n+1}}{n!} \\
 \text{(c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n-1} x^n & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} (2x+5)^n & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n \\
 \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} (x-4)^n & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n & \text{(l)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n
 \end{array}$$

7.2 Astmeritta arendamine

Lause 7.2

Kui $x \in (-R, R)$, siis astmerea summa $S(x) = \sum a_n x^n$ on pidev funktsioon vahemikus $(-R, R)$, kusjuures astmerida võib liikmeti diferentseerida igas punktis $x \in (-R, R)$ ja iga osalõigu $[a, b] \subset (-R, R)$ korral võib astmerida liikmeti integreerida.

Ülesanne 7.2. (!) Arendage järgmised funktsioonid astmeritta.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} f(x) = \frac{1}{1+x} & \text{(c)} f(x) = \ln(1+x) \\
 \text{(b)} f(x) = \frac{x}{1-x^3} & \text{(d)} F(x) = \int \arctan(x^2) dx
 \end{array}$$

Ülesanne 7.3. Avaldise $\frac{1}{(1-x^2)}$ ritta arendamiseks diferentseerige rida

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Rakendades tööstuses statistilist kvaliteedikontrolli, valitakse tooteid liinilt juhuslikult. Jagame iga toote “terveks” ja “praagiks”. Kui toode on “terve” tõenäosusega p ja “praak” tõenäosusega $q = 1 - p$, siis tõenäosus, et “praak” toode esineb esmalt alles n . valiku korral, on $p^{n-1}q$. Selliselt valitud toodete arvu (kuni esimese “praagini”) keskmine on $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Arvutage see summa, eeldades et $0 < p < 1$. Sama teooria kehtib näiteks kahe täringu korruga viskamisel. Siis summa 7 tõenäosus on $p = 1/6$. Arvutage keskmine vajaminev visete arv, et 7 tuleks esimest korda.

Ülesanne 7.4. Kuidas leida rea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ summat?

Selleks avaldage $\frac{1}{1-x}$ geomeetrilise rea kaudu, seejärel diferentseerige võrrandi mõlemat poolt, korrutage võrrandi pooled läbi muutujaga x . Seejärel diferentseerige veelkord ning korrutage mõlemad pooled muutujaga x . Kui omistada $x = \frac{1}{2}$, siis millise tulemuse saate?

Ülesanne 7.5. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' = 2y$, $y(0) = 1$, lahend.

Ülesanne 7.6. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' - y = x$, $y(0) = 1$, lahend.

7.3 Taylor'i read

Definitsioon 7.4

Kui iga $x \in X = (c - R, c + R)$ korral

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \quad (7.6)$$

s.t. funktsioon f on vaadeldava astmerea summa, siis öeldakse, et funktsioon f on vahemikus X arendatud astmerekaks. Sel juhul astmerea kordajad a_n avalduvad valemitega

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.7)$$

kusjuures $0! = 1$ ja $f^{(0)}(c) = f(c)$.

Definitsioon 7.5

Rida (7.6), mille kordajad a_n on antud valemitega (7.7), nimetatakse funktsiooni f **Taylor'i reaks**. Erijuhul, kui $c = 0$, siis **Maclaurin'i reaks**.

Ülesanne 7.7. (!) Arendage järgmised funktsioonid Taylor'i ritta punktis $c = 0$.

- | | | | |
|----------------------|-----------------------|---------------------------|---------------------------------|
| (a) xe^{2x} | (c) $\frac{1}{1+x^3}$ | (e) $e^x + \frac{1}{1+x}$ | (g) $\cos \frac{x^2}{\sqrt{3}}$ |
| (b) $\frac{1}{1-3x}$ | (d) $\ln(1+x^2)$ | (f) $\cos x - \sin x$ | (h) $e^{\pi x/2}$ |

Ülesanne 7.8. Arendage integraalimärgi all olev avaldis Taylor'i ritta (astmeritta) ning integreerides liikmeti, arvutage nende integraalide väärtused täpsusega 10^{-8} .

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| (a) $\int_0^{0.2} \sin(x^2) dx$ | (c) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$ | (e) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan(x)}{x} dx$ |
| (b) $\int_0^{0.1} \frac{\sin(x)}{x} dx$ | (d) $\int_0^{0.5} e^{-x^3} dx$ | (f) $\int_0^1 x \sin(x^3) dx$ |

Ülesanne 7.9. Arendades siinuse Taylor'i ritta, leidke kõik a ja b väärtused, mille korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{2a}{x^2} - b \right) = 0.$$

Ülesanne 7.10. Näidake, et funktsiooni $f(x) = \arctan(x)$ Taylor'i rida hajub iga $|x| > 1$ korral.

Ülesanne 7.11. (M) < * > Funktsiooni f Maclaurin'i rida avaldub seosega

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}.$$

Leidke $f^{(k)}(0)$ kõigi $k \in \mathbb{N}$ jaoks.

Praktikum 8

Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond

8.1 Fourier' read

2π -perioodiline funktsioon f ,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$2L$ -perioodiline funktsioon f , $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2L$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)],$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega x) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

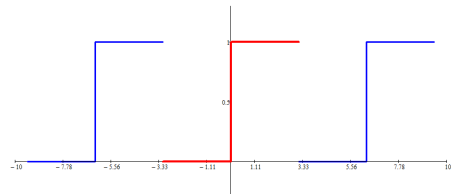
Teoreem 8.1

Dirichlet' teoreem. Kui funktsioon f on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$, kusjuures

1. $S(x) = f(x)$ funktsiooni f pidevuspunktides;
2. $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ funktsiooni f katkevuspunktides;
3. $S(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$;
4. $S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$.

Ülesanne 8.1. (!) Leidke 2π -perioodilise ruutlaine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$



Ülesanne 8.2. Astmeridades võisime tuletise võtta liikmeti.

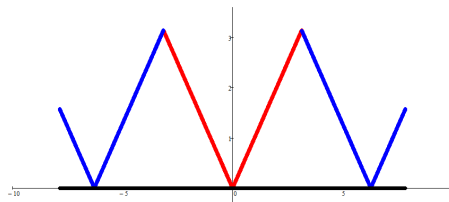
Osutub, et Fourier' ridade korral see enam alati läbi ei lähe. Veenduge, et

$$2x = 4 \sin(x) - \frac{4}{2} \sin(2x) + \frac{4}{3} \sin(3x) - \frac{4}{4} \sin(4x) + \dots, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Võtke mõlemast poolest tuletis x -järgi ja veenduge, et punktis $x = 0$ saadud võrdus ei kehti.

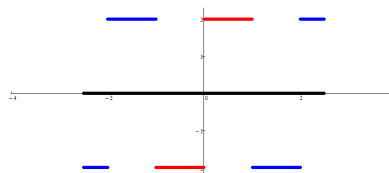
Ülesanne 8.3. (!) Leike 2π -perioodilise kolmnurkse laine $f(x) = |x|$ Fourier' rida

ja uurige selle koonduvust, $x \in [-\pi, \pi]$.



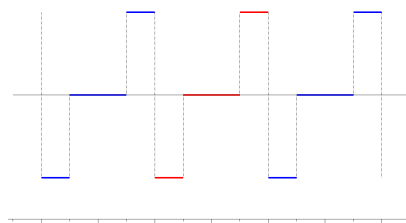
Ülesanne 8.4. (!) Leidke 2-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



Ülesanne 8.5. (!) Leidke 4-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$



Ülesanne 8.6. < * > Leidke 2-perioodilise laine $f(x) = x^2$ Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, $x \in [-1, 1]$.

Kasutades argumenti väärtust $x = 1$, näidake, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ülesanne 8.7. (F) Dirac'i deltafunktsioon defineeritakse selliselt, et see on nullist erinev ainult nullpunktis ning on täidetud tingimus

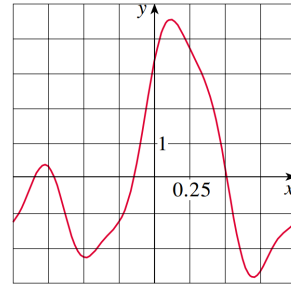
$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = f(0), \quad a < 0 < b,$$

iga pideva "heade omadustega" funktsiooni f korral. Veenduge, et $\delta(x)$ jaoks kehtivad lõigus $[-\pi, \pi]$ seosed $a_n = 1/\pi$ ja $b_n = 0$. NB! Tegelikult $\delta(x)$ ei ole matemaatilises mõttes funktsioon, vaid selle üldistus: distributsioon. Füüsikas kasutatakse seda ideaalse punktmassi, punktlaengu jne modelleerimiseks. Sisuliselt on tegemist lõpmatult kitsa ja lõpmatult pika "piigiga".

Ülesanne 8.8. (M) < * > Näidake, et trigonomeetriline rida $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ on koonduv lõigus $[0, 2\pi]$, kuid see ei osutu Fourier' reaks.

Ülesanne 8.9. $\langle * \rangle$ Joonisel on toodud teatud signaal ühe perioodi jaoks.

Kasutades integraalide ligikaudseks leidmiseks trapetsmeetodit, arvutage selle signaali Fourier' kordajad a_0, a_1, a_2 ja b_1, b_2 . Kirjutage välja Fourier' osasumma $S_2(x)$ ning koostage selle joonis.

**8.2 Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond****Definitsioon 8.1**

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Kui igale punktile $P = (x_1, \dots, x_m)$ hulgast \mathcal{D} on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv u , siis öeldakse, et hulgal \mathcal{D} on määratud m muutuja funktsioon ja kirjutatakse

$$u = f(x_1, \dots, x_m) \quad \forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}$$

või

$$u = f(P) \quad \forall P \in \mathcal{D}.$$

Hulka \mathcal{D} nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**. Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse hulka

$$Gr(f) = \{Q = (x_1, \dots, x_m, u) : P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}, u = f(P)\}.$$

Olgu $f: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{R}_1$ ja $g: \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{R}_2$ kaks m muutuja funktsiooni. Siis $f = g$ parjasti siis, kui $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ ja $f(P) = g(P)$ iga $P \in \mathcal{D}_1 (= \mathcal{D}_2)$ korral.

Ülesanne 8.10. (!) Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad \mathcal{D} ja joonistage need.

(a) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$;

(d) $f(x, y) = \ln(x + y)$;

(e) $f(x, y) = \ln(x + y) + \frac{1}{\ln x}$;

(f) $f(x, y) = 3 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

(g) $f(x, y) = x + e + \arccos y$;

(h) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}$;

(j) $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + \sin x$;

(k) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

(l) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + x)}{\ln(1 + y)}$;

(m) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;

(n) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(o) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$;

(p) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2 - 3)$;

(q) $f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x^2 + y^2)}$;

(r) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;

(s) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$;

(t) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} + \sqrt{4 - |x - 4|} + \sqrt{16 - (y - 4)^2}$.

Ülesanne 8.11. Millistes järgmistes paarides on samad funktsioonid ja millistes erinevad?

- (a) $f(x, y) = |xy|$,
 $g(x, y) = xy \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y$;
- (b) $f(x, y) = \ln x + \ln y$, $g(x, y) = \ln(xy)$;
- (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 y}$, $g(x, y) = x\sqrt{y}$;
- (d) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 y^2}$, $g(x, y) = \frac{1}{xy}$;
- (e) $f(x, y) = \ln(x^2 |y|)$,
 $g(x, y) = 2 \ln |xy|$;
- (f) $f(x, y) = \ln(x^2 y)$,
 $g(x, y) = 2 \ln(|x|\sqrt{y})$;
- (g) $f(x, y) = |xy|$, $g(x, y) = e^{\ln |xy|}$.

Ülesanne 8.12. Määrake määramispiirkonnad \mathcal{D} nii, et järgmistes paarides oleksid samad funktsioonid.

- (a) $f(x, y) = \ln x^2 + \ln y$,
 $g(x, y) = 2 \ln x + \ln y$;
- (b) $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$, $g(x, y) = \sqrt{xy}$;
- (c) $f(x, y) = xy e^x e^y$, $g(x, y) = xy e^{xy}$.

Ülesanne 8.13. (!) Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A , B ja C .

- (a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$, $A = (2, 1)$;
- (b) $f(x, y) = \frac{\arctan(x - y)}{\arctan(y - x)}$, $B = (2, 1)$;
- (c) $f(x, y) = \ln(\sin x \cos y)$, $C = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

Ülesanne 8.14. (!) Joonistage järgmiste funktsioonide graafikud.

- (a) $f(x, y) = 1 - x - y$, kus $0 \leq y \leq x \leq 1$;
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, kus $f(x, y) \leq 4$;
- (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$, kus $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$;
- (d) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$, kus $f(x, y) \geq 0$.

Ülesanne 8.15. Leidke $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ ja $\frac{1}{f(x, y)}$, kui $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.

Ülesanne 8.16. Leidke $f(1, \frac{1}{y})$ ja $f(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$, kui $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$.

Ülesanne 8.17. (!) Leidke järgmiste kolme muutuva funktsioonide määramispiirkonnad E .

- (a) $f(x, y, z) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$;
- (b) $f(x, y, z) = \sqrt{x(z^2 + 1)} - \sqrt{ye^z}$;
- (c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln z$;
- (d) $f(x, y, z) = \arcsin x - \arccos(yz)$;
- (e) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$;
- (f) $f(x, y, z) = \frac{1}{3 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z}$.

Ülesanne 8.18. (!) Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A , B ja C .

- (a) $f(x, y, z) = \frac{\arctan(x + y + z)}{\arctan(x - y - z)}$, $A = (\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1 - \sqrt{3}}{2})$;
- (b) $f(x, y) = u^w + w^{u+v}$, $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x - y$, $w(x, y) = xy$, $B = (-1, 2)$;
- (c) $f(x, y, z) = \sin(uv) + \cos(vw)$, $u(x) = \arcsin x$, $v(y) = \ln y$, $w(z) = \arccos z$, $C = (1, e, -1)$.

Praktikum 9

Piirväärtus ja pidevus

9.1 Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $A = (a_1, \dots, a_m)$ hulga \mathcal{D} kuhjumispunkt (igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavas hulk kuuluv punkt).

Definitsioon 9.1

Kui argumendi $P = (x_1, \dots, x_m)$ tõkestamatu lähenemine punktile A toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(P)$ tõkestamatu lähenemise arvule c , siis ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $P \rightarrow A$ on arv c ja märgime seda

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = c$$

või

$$\lim_{x_1, \dots, x_m \rightarrow a_1, \dots, a_m} f(x_1, \dots, x_m) = c.$$

Kui funktsioonil $u = f(P)$ on punktile A mööda kahte erinevat lähenemisteed erinevad piirväärtused, siis piirväärtust $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$ ei leidu.

Kõik ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse omadused – piirväärtuse monotoonsus, ühesus, aritmeetika, lause tõkestatud ja hääbuva suuruse korrutisest ning keskmise muutuja omadus – on põhimõtteliste muutusteta ümber kirjutatavad mitme muutuja juhule.

Definitsioon 9.2

Funktsiooni $u = f(P)$ nimetatakse **pidevaks** punktis A , kui

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A).$$

Vastasel korral nimetatakse funktsiooni **katkevaks** punktis A .

Ülesanne 9.1. (!) Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} x^2 y;$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1};$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (2x+3y);$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2};$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x + \sin \pi x}{y};$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2};$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x};$

(i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x};$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y};$

(j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow 0^+}} \frac{\ln(xy)}{x \sin y};$

(m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy}{\tan xy};$

(k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y};$

(n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,10)} \frac{\sin 5x}{xy};$

(l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{3}{xy};$

(o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}};$

(p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$

Ülesanne 9.2. (!) Näidake, et järgmiseid piirväärtusi ei eksisteeri.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y};$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y - x^2}.$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2 + xy};$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{x^2 y}{1 + xy^2}$

Ülesanne 9.3. Näidake, et lähenedes punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = kx$ võime võtta k valiku puhul funktsiooni $z = \frac{ax+by}{cx+dy}$ piirväärtuseks punktis $(0,0)$ saada mistahes etteantud arvu.

Ülesanne 9.4. Missugust sirget mööd tuleks läheneda punktile $(0,0)$, et funktsiooni $\frac{5x-y}{2x+3y}$ piirväärtus punktis $(0,0)$ võrduks arvuga 1?

Ülesanne 9.5. Millist tingimust peavad rahuldama positiivsed arvud m, n ja p , et eksisteeriks piirväärtus $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$? Põhjendage oma vastust.

Ülesanne 9.6. (!) Leidke korduvad piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) =: A$ ja $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) =: B$ järgmistest funktsioonidest märgitud punktis $P_0 = (a, b)$.

(a) $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x+y}, P_0 = (0, 0);$

(b) $f(x, y) = \frac{\ln(1+x+y)}{x+\sin y}, P_0 = (0, 0);$

Ülesanne 9.7. (!) Näidake, et järgmistel funktsioonidel leidub punktis $(0,0)$ piirväärtus, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ei eksisteeri.

(a) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y};$

(b) $f(x, y) = (x - y) \cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}.$

Ülesanne 9.8. (!) Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{\sin x + e^y};$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(b) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\ln z};$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

Ülesanne 9.9. (!) Millised järgmistest funktsioonidest on punktis $\mathbf{A} = (0, 0)$ pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 1, & \text{kui } |x| + |y| = 0; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \sqrt{2y - x^2 - y^2}; \\ & & \text{(e)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{\ln |xy|}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ülesanne 9.10. (!) Leidke järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{x+y}{x^3 + y^3}; \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{kui } x + y \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x + y = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \sin \frac{1}{xy}; \\ & & \text{(e)} \quad f(x, y, z) &= \frac{1}{xyz}; \\ & & \text{(f)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{\ln |1 - x^2 - y^2|}. \end{aligned}$$

Ülesanne 9.11. Kõrvaldage järgmistel funktsioonidel katkevus märgitud hulgas D , s.t. lisage funktsioonile f katkevuspunktid sellised väärtused, et f oleks pidev kogu hulgas D .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin xy}{x}, \quad D = \mathbb{R}^2; & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \frac{e^{x-y}}{3 + \cot^2(x-y)}, \quad D = \mathbb{R}^2; \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \frac{\sin x + \cos y}{\ln |x+y|}, & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \frac{2 - \sqrt{12 - x - 2y}}{(x+2y)^2 - 64}, \\ & D = \{(x, y) : |x + y| < 1\}; & & D = \{(x, y) : -7 \leq x + 2y \leq 12\}. \end{aligned}$$

Ülesanne 9.12. Uurige arvuti ja graafikapaketi abil funktsiooni $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$ graafikut piirkonnas $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Kuidas te kirjeldaksite funktsiooni käitumist punkti $(0, 0)$ ümbruses?

Ülesanne 9.13. < * > Tõestage, et funktsioon $f(x, y)$ on pidev lahtisel hulgal D , kui

1° $g(x) = f(x, y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral,

2° $h(y) = f(x, y)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, s.o. leidub konstant $L > 0$, et

$$|h(y) - h(y')| \leq L|y - y'|$$

suvaliste punktide $(x, y) \in D$ ja $(x, y') \in D$ korral.

Ülesanne 9.14. < * > Näidake, et piirväärtust $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + y \sin \frac{1}{y}}{x + y}$ ei eksisteeri.

Praktikum 10

Osatuletised, puutujatasand ja normaal Kõrgemat järku osatuletised

10.1 Esimest järku osatuletised

Definitsioon 10.1

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ning $P = (x_1, \dots, x_m)$ määramispiirkonna \mathcal{D} sisepunkt. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i}$$

nimetatakse funktsiooni f **osatuletiseks muutuja x_i järgi** punktis P ja tähistatakse $f_{x_i}(x_1, \dots, x_m)$ või $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m)$.

Funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_m)$ osatuletise leidmisel muutuja x_i järgi kasutatakse ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirju, lugedes muutujad x_k , kus $k \neq i$, konstantideks.

Ülesanne 10.1. (!) Leidke definitsiooni kasutades järgmiste funktsioonide osatuletised.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2;$ | (c) $f(x, y) = y^2;$ | (f) $f(x, y) = e^{2x+3y};$ |
| (b) $f(x, y) = \sqrt{3x-y};$ | (d) $f(x, y) = \ln(x^2y);$ | (g) $f(x, y, z) = xy^2z;$ |
| | (e) $f(x, y) = \frac{1}{x-y};$ | (h) $f(x, y, z) = \frac{x^2y}{z}.$ |

Ülesanne 10.2. (!) Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = 3x - y^2;$ | (g) $f(x, y) = (x + 2y)^5$ | (n) $f(x, y) = x^y;$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 + y^2;$ | (h) $f(x, y) = \frac{2x}{y} + 4;$ | (o) $f(x, y) = (x + y)^y;$ |
| (c) $f(x, y) = e^{2x+3y};$ | (i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^4};$ | (p) $f(x, y) = (1 + xy)^{xy};$ |
| (d) $f(x, y) = x^3y + 2x;$ | (j) $f(x, y) = \cos(4x - y);$ | (q) $f(x, y) = x^{\sin y};$ |
| (e) $f(x, y, z) = x^3yz^2 + 7y;$ | (k) $f(x, y) = x \sin y;$ | (r) $f(x, y, z) = x^2 + y^z,$ |
| | (l) $f(x, y) = \tan \frac{x}{y};$ | (s) $f(x, y, z, t) = \frac{x-y}{z-t},$ |
| (f) $f(x, y, z) = \ln(xz) + \ln(yz);$ | (m) $f(x, y) = \arctan \frac{1}{xy};$ | (t) $f(x, y, z, t) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \Bigg _{\substack{x=2 \\ y=-3}}.$ |

Ülesanne 10.3. Olgu antud $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$. Arvutage $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \Bigg|_{\substack{x=2 \\ y=-3}}.$

Ülesanne 10.4. (!) Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x \sin \frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2), & \Delta \neq 0, \\ 0, & \Delta = 0, \end{cases} \\ & & & \text{kus } \Delta = x^2 + y^2; \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & |x| + |y| = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ülesanne 10.5. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^3 y^3 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0; \end{cases} & \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 y^2 \sin \frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

Ülesanne 10.6. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ osatuletised on olemas, kuid ta on katkev selles punktis.

Seega mitmemõõtmelisel juhul ei järeldu koheselt osatuletiste leidumisest funktsiooni pidevus, vastupidiselt ühemõõtmelisele juhule.

Ülesanne 10.7. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ osatuletised $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$ eksisteerivad, kuid ta on katkev selles punktis.

Ülesanne 10.8. (Maj) Teatava Lõuna-Ameerika riigi tootmisfunktsiooniks on

$$f(x, y) = 20x^{3/4}y^{1/4},$$

kus x on tööjõud ja y kapital.

Leidke tööjõu ja kapitali piirtootlikused (st vastavate osatuletiste väärtused), kui kulutused tööjõule ja kapitalile on vastavalt 256 ja 16 ühikut. Kas riik peaks toodangu suurendamiseks antud olukorras suurendama kulutusi tööjõule või investeerima kapitali?

Ülesanne 10.9. (K) Ideaalse gaasi olekuvõrrand esitatakse lihtsamalt sageli kujul $PV = NkT$ või $E = \frac{3}{2}NkT$, kuid originaalis on see tegelikult kujul

$$E = \frac{3h^2 N}{4\pi m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} e^{2S/(3Nk) - 5/3}.$$

Kasutades teadmist, et $T = \frac{\partial E}{\partial S}$ ja $P = -\frac{\partial E}{\partial V}$, tuletage lihtsustatud valemid esialgselt. Siin k on Boltzmann'i konstant, h on Planck'i konstant, m on ühe aatomi mass, $E = E(S, V, N)$ on siseenergia, S on entroopia, V on ruumala, P on rõhk, T on temperatuur.

Ülesanne 10.10. < * > Näidake, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsioonil

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on olemas osatuletised f_x ja f_y , mis katkevad punktis $(0, 0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$. Näidake, et punkti $(0, 0)$ ümbruses funktsiooni

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)^{-1}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

osatuletised g_x ja g_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0, 0)$ on nende katkevuspunkt), kuid siiski funktsioon g on diferentseeruv selles punktis $(0, 0)$.

10.2 Pinna puutujatasand ja normaal

Pinna $z = f(x, y)$ **puutujatasand** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub võrrandiga

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \quad (10.1)$$

Pinna $z = f(x, y)$ **normaal** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a + t f_x(a, b), \\ y = b + t f_y(a, b), \\ z = f(a, b) - t. \end{cases} \quad (10.2)$$

Pinna $z = f(x, y)$ **normaal** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}. \quad (10.3)$$

Ülesanne 10.11. (!) Leidke puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis.

- | | |
|--|---|
| (a) $z = x \cos y - y e^x$ punktis $(0, 0, 0)$, | (f) $z = x^2 - y^2$ punktis, kus $x = -2$ ja $y = 1$, |
| (b) $z = \ln(x^2 + y^2)$ punktis $(1, 0, 0)$, | (g) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ punktis, kus $x = 1$ ja $y = 2$, |
| (c) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ punktis $(0, 0, 1)$, | (h) $z = \sin(xy)$ punktis, kus $x = \pi/3$ ja $y = -1$, |
| (d) $z = \sqrt{y - x}$ punktis $(1, 2, 1)$, | (i) $z = \cos(x/y)$ punktis, kus $x = \pi$ ja $y = 4$. |
| (e) $z = 4x^2 + y^2$ punktis $(1, 1, 5)$, | |

Ülesanne 10.12. Leidke järgmistel pindadel kõik punktid, kus puutujatasand on horisontaalne.

- | | |
|--|--|
| (a) $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$, | (c) $z = x^4 - 4xy + 6y^2 - 2$, |
| (b) $z = 3xy - x^3 - y^3$, | (d) $z = xy + a^3 x^{-1} + b^3 y^{-1}$. |

10.3 Kõrgemat järku osatuletised

Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame **teist järku osatuletised**

$$f_{x_i x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (f_{x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Juhul $i \neq k$ nimetatakse seda teist järku osatuletist **segatuletiseks**. Veel kõrgemat järku osatuletised ja segatuletised defineeritakse analoogiliselt.

Teoreem 10.1

Kui m muutuja funktsiooni f segatuletised on pidevad mingis punktis, siis selles punktis kehtib võrdus

$$f_{x_i x_k} = f_{x_k x_i}, \quad \forall i, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Ülesanne 10.13. (!) Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

(a) $f(x, y) = x^2 + y;$

(f) $f(x, y) = x^y;$

(b) $f(x, y) = x^3y - y^3x;$

(g) $f(x, y) = \ln(x + y^2);$

(c) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y};$

(h) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy};$

(d) $f(x, y) = x \sin(x + y);$

(i) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x + y + z);$

(e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y};$

(j) $f(x, y, z) = \sin(1 + xyz).$

Ülesanne 10.14. (!) Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0, 0)$ segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

Ülesanne 10.15. (!) Leidke järgmiste funktsioonide segaosatuletised f_{xy} .

(a) $f(x, y) = x^x + y \sin x;$

(c) $f(x, y) = y \cos y + e^{x+y}.$

(b) $f(x, y) = x^{10} \cos x + y^2 \ln x;$

Ülesanne 10.16. (F) Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse harmooniliseks, kui ta rahuldab Laplace'i soojusjuhtivuse võrrandit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Analoogiliselt saab Laplace'i võrrandit vaadelda suurema arvu muutujate korral. Võrrandit kasutatakse näiteks temperatuuri jaotamise modelleerimiseks ruumis, vedelike voolamise, elektri- ja magnetväljade potentsiaali uurimisel jne. Harmoonilistel funktsioonidel on palju häid matemaatilisi omadusi. Näidake, et funktsioonid $e^{\omega x} \cos(\omega y)$ ja $e^{\omega x} \sin(\omega y)$ on harmoonilised funktsioonid suvalise reaalarvu ω korral.

Ülesanne 10.17. (!) Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

(a) $f(x, y) = x + x \ln(xy), \quad f_{xxy} = ?;$

(b) $f(x, y, z) = e^{xy} + e^{xyz}, \quad f_{xyz} = ?;$

(c) $f(x, y) = y^2 + x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad f_{xxxyyy} = ?.$

Ülesanne 10.18. < * > Olgu

$$f(x, y, u, v) = \frac{x^2 + e^y v}{3y^2 + \ln(2 + u^2)}.$$

Millise osatuletiste võtmise järjekorraga saab kõige kiiremini leida $f_{uvxyvu}(x, y, u, v)$? Põhjendage. Leidke $f_{uvxyvu}(x, y, u, v)$.

Praktikum 11

Kontrolltöö nr 1

11.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Vektorruumid. Vektorite lineaarne sõltumatus

- 1.1. Vektorruum, vektorruumi alamruum
- 1.2. Vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus
- 1.3. Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid

2. Arvread

- 2.1. Arvrea osasummad
- 2.2. Arvrea koondumine (hajumine)
- 2.3. Geomeetrilise rea koondumise tingimus
- 2.4. Harmoonilise rea koondumise tingimus
- 2.5. Positiivsed arvread, võrdluslaused, integraaltunnus
- 2.6. D'Alembert'i, Cauchy ja Leibniz'i koonduvustunnused

3. Astmereal

- 3.1. Astmerea koonduvusraadius, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond
- 3.2. Funktsiooni arendamine Tayloriga ritta punktis $c = 0$

4. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

- 4.1. Näidata, et funktsiooni piirväärtust ei leidu
- 4.2. Piirväärtuse leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele
- 4.3. Kahe muutuja funktsiooni pidevus

11.2 Kontrolltöö näidisülesanded

Ülesanne 11.1. (!) Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi \mathbb{R}^3 alamruumid.

$$(a) V = \{(a, 0, 3b) : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (b) V = \{(a, b^2, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ülesanne 11.2. (!) Tehke kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorid $x^2 - 3x$ ja $2x - x^2$ on lineaarselt sõltuvad.

Jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Ülesanne 11.3. (!) On antud vektorruumi \mathbb{R}^3 elemendid $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (-1, 0, 1)$ ja $e_3 = (0, 1, 2)$. Näidake, et süsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baasiks ning leidke elemendi $a = (0, 3, 2)$ koordinaadid sellel baasil.

Ülesanne 11.4. (!) Leidke vektorruumi \mathbb{C} vektori $-3 + 7i$ koordinaadid baasi $\{1 + i, 3 - 2i\}$ suhtes.

Ülesanne 11.5. (!) Põhjendage järgmiste arvridade koonduvust või hajuvust.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 7n^3}{n^3 + 3} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{5^n}.$$

Ülesanne 11.6. (!) Uurige, millised järgmistest ridadest on hajuvad, tingimisi koonduvad või absoluutselt koonduvad.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+4)3^n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3n}\right) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2}.$$

Ülesanne 11.7. (!) Leidke astmerea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n - 1}$$

koonduvusraadius R , koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A .

Ülesanne 11.8. (!) Arendage funktsioon

$$f(x) = \sin 3x$$

Taylori ritta punktis 0.

Ülesanne 11.9. (!) Näidake, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Ülesanne 11.10. (!) Näidake, et piirväärtust

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y - 2x}{5y + x}$$

ei leidu.

Praktikum 12

Täisdiferentsiaal Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil

12.1 Täisdiferentsiaal

Olgu

$$\Delta f = f(P) - f(P_0)$$

funktsiooni f muut punktide $P_0 = (x_1, \dots, x_m)$ ja $P = (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$ vahel.

Definitsioon 12.1

Funktsiooni f nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis P_0 , kui tema muut punkti P_0 ümbruses avaldub kujul

$$\Delta f = f_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + \dots + f_{x_m}(P_0)\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m,$$

kus $\alpha_1, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$, kui $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$.

Definitsioon 12.2

Avaldist

$$df(P_0) = f_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + \dots + f_{x_m}(P_0)\Delta x_m = f_{x_1}(P_0)dx_1 + \dots + f_{x_m}(P_0)dx_m$$

nimetatakse funktsiooni f **täisdiferentsiaaliks** punktis P_0 .

Erijuhul $z = f(x, y)$ on täisdiferentsiaal kujul

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Lause 12.1

Kui funktsioonil $u = f(x_1, \dots, x_m)$ on pidevad osatuletised punktis $P = (x_1, \dots, x_m)$, siis see funktsioon on diferentseeruv punktis P .

Ülesanne 12.1. (!) Leidke järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid.

(a) $f(x, y) = x + 3y$;

(f) $f(x, y) = -\cos(xy)$;

(b) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy$;

(g) $f(x, y) = y^x$;

(c) $f(x, y) = xy$;

(h) $f(x, y, z) = \tan(x - 2y + 3z)$;

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$;

(i) $f(x, y, z) = \cos(x^2yz)$;

(e) $f(x, y) = e^{1+xy}$;

(j) $f(x, y, z) = \exp(2x^2yz^2)$.

Ülesanne 12.2. Näidake, et funktsioon

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

on pidev punktis $(0, 0)$ ja omab osatuletisi $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$, kuid ei ole diferentseeruv selles punktis.

Ülesanne 12.3. Näidake, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev ja ta osatuletised f_x ja f_y on lõplikud, kuid funktsioon ei ole diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

Ülesanne 12.4. (!) Arvutage funktsioonide muudud ja täisdiferentsiaalid etteantud väärtustel.

(a) $u = x^2 - 3xy + 2y^2$, kui $x = 6$, $y = 2$, $\Delta x = 0.3$, $\Delta y = 0.2$;

(b) $u = x^2z - 2yz^2 + 3xyz$, kui $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$, $\Delta z = -0.2$.

Ülesanne 12.5. < * > Olgu $z = \ln(ax + by)$. Tõestage võrdused

(a) $d^3z = 2dz^3$

(b) $d^n z = (-1)^{n-1}(n-1)!dz^n$

kus $d^n z := d(d^{n-1}z)$ on n -ndat järku täisdiferentsiaal ja $dz^n = (dz)^n$.

12.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine

Kui funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_m)$ argumentide muudud $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ on küllalt väikesed, siis

$$\Delta u \approx du$$

ehk

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m) \approx f_{x_1}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_1 + \dots + f_{x_m}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_m.$$

Erijuhul $z = f(x, y)$ on funktsiooni muut kujul

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz$$

Ülesanne 12.6. (!) Leidke järgmiste funktsioonide ligikaudsed muudud argumenti märgitud muutuse korral.

(a) $u = 4x^2 - xy$, punktist $(1, 2)$ punkti $(1.01, 2.02)$;

(d) $u = 2xe^{-y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(b) $u = x^{2/3}y^{1/2}$, punktist $(8, 9)$ punkti $(7.97, 9.03)$;

(e) $u = xe^{xy} - y^2$, punktist $(-1, 0)$ punkti $(-0.97, 0.03)$;

(c) $u = \frac{x}{x-y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(f) $u = \ln(xy)^{1/2}$, punktist $(5, 10)$ punkti $(5.05, 9.95)$.

Ülesanne 12.7. (!) Ristküliku küljepikkusteks mõõdetakse 100 m ja 150 m.

Mõõtmisel võidi eksida ühe meetriga. Milline on võimalik viga selle ristküliku pindala arvutamisel? Milline on viga pindala arvutamisel, kui mõõtmise viga on 0.5 m?

Ülesanne 12.8. Kahe linna elanike arv (tuhandetes) on vastavalt x ja y , telefonikõnede hulk päevas nende vahel avaldub kujul $12xy$.

Hinnake ühes päevas tehtavate telefonikõnede arvu kasvu, kui elanike arv linnades kasvab vastavalt 40 tuhandelt ja 60 tuhandelt 1000 inimese võrra mõlemas linnas.

Ülesanne 12.9. (!) Püstsilindri kõrgust suurendatakse 12 sentimeetrilt 12.2 sentimeetrini ja põhja raadiust vähendatakse 8 sentimeetrilt 7.7 sentimeetrimini.

Hinnake selle silindri ruumala ja kogupindala muute.

Ülesanne 12.10. (Maj) Elektroonikafirma, mis toodab päevas x DVD-mängijat ja y Blu-Ray-mängijat, kasum (eurodes) avaldub funktsioonina $P(x, y)$.

Kui praegu toodab firma päevas 200 DVD-mängijat ja 300 Blu-Ray-mängijat, siis hinnake kasumi kasvu kui päevas toota viis DVD-mängijat ja neli Blu-Ray-mängijat rohkem.

$$(a) \quad P(x, y) = 2x^2 - 3xy + 3y^2$$

$$(b) \quad P(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2$$

Ülesanne 12.11. (!) Risttahuka kujuline kinnine kast kaetakse värviga.

Hinnake kastil oleva värvi kogust, kui kasti küljepikkused on 1.2, 0.9 ja 0.6 meetrit ning värvikihi paksus on 1 mm.

Ülesanne 12.12. Hinnake risttahuka ruumala arvutamisel tehtavat viga, kui iga külje pikkuse mõõtmisel tehti viga 1%.

Ülesanne 12.13. (F) Tuulekülm on temperatuur, mida inimene õues olles tunneb ja sõltub õhutemperatuurist t (ühik °C) ning tuule kiirusest w (ühik km/h).

Tuulekülma arvutamiseks kasutatakse valemit $C(t, w) = 13.12 + 0.6215t - 11.37w^{0.16} + 0.3965tw^{0.16}$. Hinnake tajutava temperatuuri muutust, kui temperatuur langeb -10 kraadilt kaks kraadi ja tuule kiirus tõuseb 18 kilomeetrilt tunnis 21.6 kilomeetrini tunnis.

Ülesanne 12.14. (F) Vere kogus liitrites, mis pumbatakse läbi kopsude minutis arvutatakse valemist $C = \frac{x}{y-z}$, kus x on kopsudes omastatud hapniku kogus (milliliitrit minutis), y ja z on hapniku kontsentratsioon veres (ml hapniku liitri vere kohta) vastavalt vahetult pärast ja enne kopsude läbimist.

Tüüpilised mõõtetulemused on $x = 250$, $y = 160$ ja $z = 150$. Hinnake südame väljundi arvutamisel tehtavat viga, kui iga näitaja mõõtmisel võidi eksida viie ühikuga.

Ülesanne 12.15. (K) Ideaalse gaasi ühe mooli rõhk, ruumala ja temperatuur on seoses $PV = 8.31T$, kus P on rõhk kilopaskalites, V on ruumala liitrites ja T on temperatuur °K.

Hinnake rõhu muutust, kui mahtu suurendatakse 12 liitrit 12.3 liitrile ja temperatuur väheneb 310 kraadilt 305 kraadini.

Ülesanne 12.16. (M) Neli suvalist positiivset arvu, mis on väiksemad kui 50, ümardatakse kümnendikeni ja korrutatakse seejärel.

Hinnake sellest ümardamisest tulenevat viga korrutises.

12.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ on küllalt väikesed, siis $f(P) \approx f(P_0) + df(P_0)$ ehk

$$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) \approx f(x_1, \dots, x_m) + f_{x_1}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_1 + \dots + f_{x_m}(x_1, \dots, x_m)\Delta x_m.$$

Erijuhul kui $z = f(x, y)$, siis $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

Ülesanne 12.17. (!) Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $1.03^{4.05}$;

(e) $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$;

(b) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$;

(f) $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$;

(c) $2.01^3 - 0.97^2$;

(g) $(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{24})$;

(d) $1.04^{1.99} + \ln 1.02$;

(h) $\sin(\frac{6}{7}\pi) \cos(\frac{1}{5}\pi)$.

Ülesanne 12.18. (Maj) Cobb'i-Douglas'i tootmisfunktsioon on kujul $Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$, kus K on kapitalikulud ja L on tööjõukulud.

On teada, et $Q(10000, 625) = 20000$. Leidke ligikaudu $Q(10010, 623)$ väärtus.

Ülesanne 12.19. (F) Päriselus ei ole meil paljude asjade kohta funktsionaalseid seoseid, kuid ka siis saab teatud väärtusi arvutada või lähendada.

Tehased toodavad soovitud paksusega lehtmetsa rulle valtsides neid suurte rullide vahel. Metallilehe paksus sõltub valtside vahest, valtsirullide pöörlemise kiirusest ning metalli temperatuurist. Eeldame, et teatud metalli korral saame paksuse 4 mm temperatuuril 900° valtside vahega 4 mm ja -kiirusega 10 m/s. Katsed on näidanud, et kiiruse suurendamine 0.2 m/s võrra suurendab metalli lehe paksust 0.06 mm võrra ning temperatuuri tõus 10° võrra vähendab paksust 0.04 mm võrra. Hinnake ligikaudu metalli lehe paksust valtsimisel kiirusega 10.1 m/s ja temperatuuril 880° .

Praktikum 13

Ekstreemumid Optimiseerimine

13.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 13.1

Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne maksimum** punktis (a, b) , kui leidub selle punkti ümbrus U nii, et

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in U \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne miinimum** punktis (a, b) , kui leidub selle punkti ümbrus U nii, et

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in U \text{ korral.}$$

Definitsioon 13.2

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f_x = f_y = 0$ ja punkte, kus funktsiooni f mingi osatuletis ei ole lõplik või ei leidu, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.

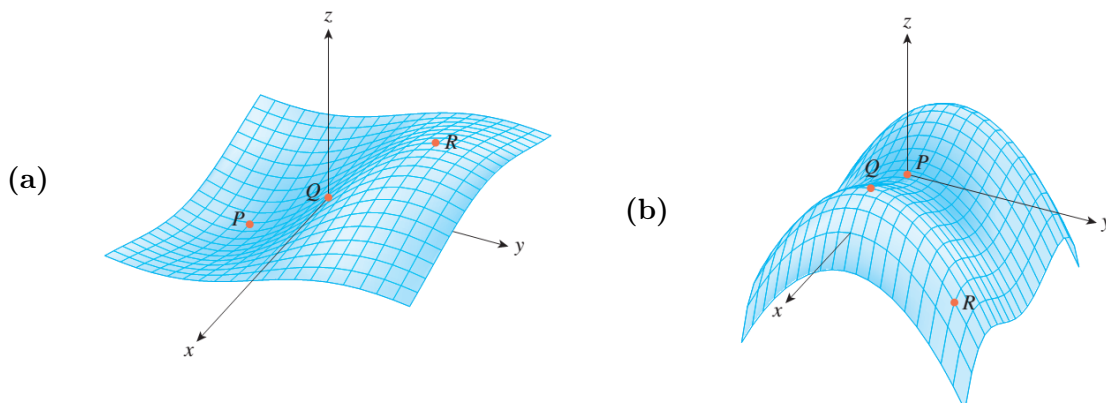
Lause 13.1

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv oma statsionaarses punktis (a, b) . Tähistame

$$D = D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2.$$

- (a) Kui $D > 0$ ja $f_{xx}(a, b) > 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne miinimum.
- (b) Kui $D > 0$ ja $f_{xx}(a, b) < 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne maksimum.
- (c) Kui $D < 0$, siis punktis (a, b) ei ole lokaalset ekstreemumit.
- (d) Kui $D = 0$, siis ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks.

Ülesanne 13.1. (!) Klassifitseerige joonistel märgitud punktid.



Ülesanne 13.2. (!) Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - y^2;$

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy;$

(b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x;$

(g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1};$

(c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2;$

(h) $f(x, y) = x^2 + y - 2 \ln(xy).$

(d) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};$

(i) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y),$
 $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq \pi\};$

(e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y;$

(j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

Ülesanne 13.3. < * > Funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Leidke funktsiooni f kõik lokaalsed ekstreemumid. Leidke (koos põhjendusega!) funktsiooni f suurim ja vähim väärtus.

13.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas

Ülesanne 13.4. (!) Leidke toodud funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max f$ ja $\min f$.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\};$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\};$

(c) $f(x, y) = x - 2y - 1, (x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\};$

(d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, (x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\};$

(e) $f(x, y) = (2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$

Ülesanne 13.5. (!) Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2, (x, y) \in \{(x, y) : -5 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 1\}$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

Ülesanne 13.6. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ on lõpmata palju lokaalseid maksimume ja mitte ühtegi lokaalset miinimumi.

Ülesanne 13.7. (!) Alleelid A, B ja O määravad neli veregruppi: A (AA või AO), B (BB või BO), O (OO) ja AB. Hardy–Weinbergi seaduse kohaselt on kahte alleeli kandvate inimeste osakaal populatsioonis

$$P \approx 2pq + 2pr + 2rq,$$

kus p, q ja r on vastavalt A, B ja O osakaalud populatsioonis. Kasutades fakti, et $p + q + r = 1$, näidake, et P väärtus on kõige rohkem $\frac{2}{3}$.

Ülesanne 13.8. $\langle * \rangle$ Olgu antud kaks korda diferentseeruv funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Tähistame iga punkti $u \in \mathbb{R}^2$ korral talle vastavat funktsiooni

$$\Phi_u(l_1, l_2) = f_{xx}(u) \cdot l_1^2 + 2f_{xy}(u) \cdot l_1 \cdot l_2 + f_{yy}(u) \cdot l_2^2.$$

Olgu iga u korral Φ_u *positiivselt määratud*, see tähendab, iga punkti u ja iga $(l_1, l_2) \neq 0$ korral $\Phi_u(l_1, l_2) > 0$, ehk iga u korral $f_{xx}(u) > 0$ ja $\begin{vmatrix} f_{xx}(u) & f_{xy}(u) \\ f_{xy}(u) & f_{yy}(u) \end{vmatrix} > 0$. Tõestage, et funktsioonil f on **ülimalt üks** statsionaarne punkt (see tähendab, punkt u , kus $f_x(u) = f_y(u) = 0$).

13.3 Optimiseerimine

Ülesanne 13.9. (!) Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

Ülesanne 13.10. (!) Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

Ülesanne 13.11. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?

Ülesanne 13.12. Leidke antud perimeetriga $2p$ ristkülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

Ülesanne 13.13. (Maj) Elektroonikafirma toodab kahte mudelit kõlareid: Tubli Tilluke ja Kindel Kõrge.

Mõlema kõlari nõudlus sõltub osaliselt teise kõlari hinnast. Kui üks on kallis, siis ostetakse rohkem teist mudelit. Olgu p_1 ja p_2 on vastavalt Tubli Tillukese ja Kindel Kõrge hind. Siis avalduvad Tubli Tillukese ja Kindel Kõrge nõudlused (st aastaga müüdavad hulgad) vastavalt kujul

$$q_1(p_1, p_2) = 100000 - 100p_1 + 10p_2 \quad \text{ja} \quad q_2(p_1, p_2) = 150000 + 10p_1 - 100p_2.$$

Leidke nende kõlarimudelite hinnad, mis annavad maksimaalse käibe.

Ülesanne 13.14. (Maj) Autotootja müüb ühte mudelit Ameerikas ja Euroopas erineva hinnaga. Ameerikas müüdavate autode hind (tuhandetes dollarites) on $p = 20 - 0.2x$ (kus $0 \leq x \leq 100$) ning Euroopas küsitakse hinda $q = 16 - 0.1y$ (kus $0 \leq y \leq 160$).

Siin x ja y on päevas müüdavate autode arv vastavalt Ameerikas ja Euroopas. Autotootja kulu-funktsioon on $C = 20 + 4(x + y)$. Leidke autotootja tulufunktsioon (st käive miinus kulu). Mitu autot ja millise hinnaga tuleks kummalgi turul müüa, et teenida võimalikult suurt tulu?

Ülesanne 13.15. (!) Laborikatsed näitasid, et x mg ravimi A ja y mg ravimi B koostoime avaldub funktsioonina $f(x, y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100x + 60y$ (kus $0 \leq x \leq 55$, $0 \leq y \leq 60$).

Leidke mõlema ravimi kogused, mis tagavad suurima toime.

Ülesanne 13.16. (!) Psühholoogilises eksperimendis osaleja, kes harjutab uut oskust x tundi ja puhkab y tundi, katse tulemused avalduvad funktsioonina $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 11x - 4y + 120$ (kus $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 4$).

Leidke harjutamiseks ja puhkamiseks kuluv aeg, mis tagab võimalikult kõrge katse tulemuse.

Ülesanne 13.17. (!) Neli linna ühendavad ressursid soovides ehitada ühise telemasti.

Leidke selline punkt $A(x, y)$, kus masti kauguste ruutude summa linnadest oleks minimaalne, kui linnad asuvad punktides $(-5, 0)$, $(1, 7)$, $(9, 0)$ ja $(0, -8)$.

Ülesanne 13.18. (F) Koosnegu süsteem tasandil kolmest laengukandjast: elektrilisest dipoolist ja vabast osakesest. Asugu elektrilise dipooli osakesed punktides $(2, 0)$ ja $(-2, 0)$ ning olgu nende laengud vastavalt q ja $2q$.

Tasandil vabalt liikuva vaba laengukandja laeng olgu samuti q ning selle asukoht $X = (x, y)$. Potentsiaalne energia on

$$U(X) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1(X)} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2(X)} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2},$$

kus $r_1(X) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ja $r_2(X) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ on vaba laengukandja kaugused dipooli osakestest. Leidke potentsiaalse energia ekstremaalsed väärtused, kui vaba osake asub piirkonnas $D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4\}$. Näpunäide. Esitage U funktsiooni $V(X) = \frac{1}{r_1(X)} + \frac{2}{r_2(X)} + \frac{1}{2}$ kaudu ja leidke funktsiooni V ekstremaalsed väärtused.

13.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis

Valem 13.1

Olgu diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$ antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kui F, F_x, F_y on pidevad punktis (x, y) ja $F_y(x, y) \neq 0$, siis

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (13.1)$$

Ülesanne 13.19. (!) Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y' .

- | | |
|-----------------------------|---|
| (a) $y + \sin y + e^x = 0,$ | (e) $1 + \ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x},$ |
| (b) $x + y = e^{x-y},$ | (f) $xe^y + ye^x - 2x^2y = 0,$ |
| (c) $y^2 + 2xy - 2 = 0,$ | (g) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a = \text{const}),$ |
| (d) $x^2 - 2xy + y^4 = 4,$ | (h) $x \cos(xy) + y \cos x = 2.$ |

Ülesanne 13.20. (!) Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised märgitud punktis P .

- | | |
|---|--|
| (a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad P = (1, 1),$ | (c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad P = (1, 2),$ |
| (b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad P = (-1, 1),$ | (d) $xe^y + \sin(xy) + y - \ln 2 = 0, \quad P = (0, \ln 2).$ |

Ülesanne 13.21. Klaasist lääts lõigatakse välja kerast raadiusega r ruumalaga $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Siin h on kera segmendi kõrgus. Leidke $\frac{dr}{dh}$, kui $V = \frac{8\pi}{3}$.

13.5 Taylori valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *

Valem 13.2

Polünoomi

$$P_n(x, y) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ m \geq 0 \\ k+m \leq n}} \frac{\partial^{k+m} f(a, b)}{\partial x^k \partial y^m} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{(y-b)^m}{m!} \quad (13.2)$$

ehk

$$P_n(x, y) = f(A) + f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b) +$$

$$\frac{1}{2!} [f_{xx}(A)(x-a)^2 + 2f_{xy}(A)(x-a)(y-b) + f_{yy}(A)(y-b)^2] + \dots +$$

$$\frac{1}{n!} \left[\binom{n}{0} \frac{\partial^n f(A)}{\partial x^n} (x-a)^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f(A)}{\partial x^{n-1} \partial y} (x-a)^{n-1} (y-b) + \dots + \binom{n}{n} \frac{\partial^n f(A)}{\partial y^n} (y-b)^n \right]$$

 nimetatakse funktsiooni f n -astme **Taylori polünoomiks** P_n punktis $A = (a, b)$. Valemite

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y) \quad (13.3)$$

 nimetatakse funktsiooni f **Taylori valemiks**, funktsiooni R_n aga Taylori valemi **jääkliikmeks**.

Valem 13.3

 Kui funktsioonil f on punkti (a, b) mingis ümbruses pidevad osatuletised vähemalt järguni $n+1$, siis funktsiooni f Taylori valemi (13.3) jääkliikmeks Lagrange'i kujul nimetatakse funktsiooni

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\binom{n+1}{0} \frac{\partial^{n+1} f(\alpha, \beta)}{\partial x^{n+1}} (x-a)^{n+1} + \binom{n+1}{1} \frac{\partial^{n+1} f(\alpha, \beta)}{\partial x^n \partial y} (x-a)^n (y-b) + \dots + \binom{n+1}{n+1} \frac{\partial^{n+1} f(\alpha, \beta)}{\partial y^{n+1}} (y-b)^{n+1} \right], \quad \text{kus } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (13.4)$$

 ning punkt (α, β) asub punkte (x, y) ja (a, b) ühendaval sirgel. Erijuhul $n = 2$, saame

$$R_2(x, y) = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 f(A)}{\partial x^3} (x-a)^3 + 3 \frac{\partial^3 f(A)}{\partial x^2 \partial y} (x-a)^2 (y-b) + 3 \frac{\partial^3 f(A)}{\partial x \partial y^2} (x-a) (y-b)^2 + \frac{\partial^3 f(A)}{\partial y^3} (y-b)^3 \right].$$

Ülesanne 13.22. Leidke järgmiste funktsioonide Taylori polünoomid punktis (a, b) .

(a) $f(x, y) = (x+y)^3$, $n = 3$, $(a, b) = (0, 0)$,

(f) $f(x, y) = \frac{1}{1+xy}$, $n = 3$, $(a, b) = (0, 0)$,

(b) $f(x, y) = (x+y)^3$, $n = 3$, $(a, b) = (1, 1)$,

(g) $f(x, y) = \tan(2x-y)$, $n = 2$, $(a, b) = (\pi/4, \pi/4)$,

(c) $f(x, y) = \cos x \cos y$, $n = 2$, $(a, b) = (0, 0)$,

(h) $f(x, y) = \cos(x^2 y)$, $n = 2$, $(a, b) = (0, 0)$,

(d) $f(x, y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y^2}$, $n = 2$, $(a, b) = (1, 3)$,

(i) $f(x, y) = \sqrt{2+xy}$, $n = 2$, $(a, b) = (1, 2)$,

(e) $f(x, y) = y \ln x - \sin(xy)$, $n = 1$, $(a, b) = (1, \pi)$,

(j) $f(\theta, v) = 1 - \cos \theta + \frac{1}{2} v^2$, $n = 2$, $(a, b) = (\pi, 0)$.

Ülesanne 13.23. Esitage funktsioon $f(x, y) = \arctan(xy)$ avaldiste $(x-1)$ ja $(y-1)$ astmete lineaarse kombinatsioonina kuni ruutliikmeteni.

 Saadud avadist kasutades leidke $f(1.1, 0.8)$.

Praktikum 14

Lagrange'i kordajate meetod Liitfunktsiooni osatuletised

14.1 Lagrange'i kordajate meetod

Valem 14.1

Funktsiooni $f(x, y, \dots)$ tingliku (lokaalse või globaalse) ekstreemumi leidmiseks lisatingimusel $g(x, y, \dots) = 0$ Lagrange'i kordajate meetodil moodustame **Lagrange'i funktsiooni**

$$\Phi(x, y, \dots, \lambda) = f(x, y, \dots) + \lambda g(x, y, \dots),$$

kus λ on mingi kordaja, ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 0, \Phi_y = 0, \dots, \Phi_\lambda = g(x, y, \dots) = 0.$$

Ülesanne 14.1. (!) Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0)$ jooneni $x^2y = 16$.

Ülesanne 14.2. (!) Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0, 0)$ tasandini $x + 2y + 2z = 3$.

Ülesanne 14.3. (!) Leidke Lagrange'i meetodiga järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 2;$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2};$

(c) $f(x, y) = 6 - 4x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 1;$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
 $(x, y, z > 0);$

(e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9;$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6,$
 $x - y = 0;$

(g) $f(x, y, z) = xy + xz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3,$
 $y + z = 2.$

Ülesanne 14.4. (F) Sõjalaevalt lastakse rakett välja horisontaalse algkiirusega V_x ja vertikaalse algkiirusega V_y .

Raketi laskekaugus on

$$R(V_x, V_y) = \frac{2V_x V_y}{g},$$

kus g on raskuskiirendus. Raketi kineetiline energia on fikseeritud:

$$\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} = E.$$

Leidke raketi maksimaalne laskekaugus.

14.2 Liitfunktsiooni osatuletised

Lause 14.1

Kui funktsioonidel $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$, on lõplikud osatuletised muutujate x_1, \dots, x_n järgi punktis P ja funktsioon $z = f(u_1, \dots, u_m)$ on diferentseeruv punktis $Q = (u_1(P), \dots, u_m(P))$, siis liitfunktsiooni

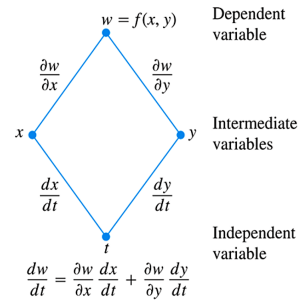
$$z = F(P) = f[u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)]$$

lõplikud osatuletised punktis P avalduvad kujul

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (14.1)$$

Erijuhul $w = f(x, y)$, $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ avaldub tuletis kujul

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$



Ülesanne 14.5. (!) Leidke järgmiste liitfunktsioonide tuletised.

- | | |
|--|---|
| (a) $z = e^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = \frac{1}{3} \cos t$; | (f) $z = \arctan(xy)$, $y = e^x$; |
| (b) $z = \ln(1 - xy)$, $x = t^2$, $y = t^3$; | (g) $u = e^x(y - z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$; |
| (c) $u = xyz$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2t$; | (h) $u = u(x, y, z)$, $x = 2t$, $y = \ln t$,
$z = t + 1$; |
| (d) $z = t^2 + x^2 + y^2$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$; | (i) $z = f(x, y) = x^2 \ln y$, $x = 1 - t^2$,
$y = e^{\sin t}$. |
| (e) $z = \tan(t + x^2 - y)$, $x = t^2$, $y = t^5$; | |

Ülesanne 14.6. (!) Leidke järgmiste liitfunktsioonide osatuletised.

- | | |
|---|---|
| (a) $z = u^2v$, $u = x \cos y$, $v = x \sin y$; | (d) $z = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$; |
| (b) $z = u \ln v$, $u = \frac{1}{x+y}$, $v = e^{x+y}$; | (e) $w = u^v$, $u = x^2 + z^2$, $v = yz$; |
| (c) $z = ue^v$, $u = x^2$, $v = x \ln y$; | (f) $w = xye^{uv}$, $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$. |

Ülesanne 14.7. Leidke osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

- | | | |
|-------------------------|----------------------|--------------------|
| (a) $z = f(x) + g(y)$; | (c) $z = f(x)g(y)$; | (e) $z = f(x/y)$. |
| (b) $z = f(x + y)$; | (d) $z = f(xy)$; | |

Ülesanne 14.8. Soopart ujub ühikringjoonel $x = \cos(t)$ ja $y = \sin(t)$, kus t on aeg.

Vee temperatuur muutub seaduse $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$ alusel. Leidke temperatuuri muutumise kiirus $\frac{dT}{dt}$ ajahetkel t kahel erineval moel: kasutades liitfunktsiooni osatuletise leidmise reeglit ja eraldi ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise reeglit (asendades x ja y temperatuuri T avaldisse).

Ülesanne 14.9. Temperatuur punktis (x, y) on $T(x, y)$.

Putukas asub t sekundi möödumisel punktis $x = \sqrt{1+t}$, $y = 3 + \frac{1}{3}t$. Temperatuurifunktsioon rahuldab tingimusi $T_x(2, 4) = 4$ ja $T_y(2, 4) = 3$. Kui kiiresti tõuseb temperatuur putuka teekonnal 3 sekundi pärast?

Ülesanne 14.10. (F) Tähistame kääbusplaneet Pluuto atmosfääri rõhu $\rho = \rho(x, y, z)$ ruumipunktis (x, y, z) .

Kosmoselaev liigub ajas t seaduse $(x(t), y(t), z(t))$ alusel. Esitage valem rõhu muutumise kiiruse $\frac{d\rho}{dt}$ leidmiseks.

Ülesanne 14.11. (F) Patarei tühjenemisel väheneb lihtsas vooluringis pinge V .

Takisti soojenemisel tõuseb takistus R aeglaselt. Kasutades Ohmi seadust ($V = IR$), leidke kuidas muutub voolutugevus I hetkel, kui $R = 400 \Omega$, $I = 0.08 \text{ A}$, $dV/dt = -0.01 \text{ V/s}$ ja $dR/dt = 0.03 \Omega/s$.

Ülesanne 14.12. (K) Ühe mooli ideaalse gaasi rõhk ja temperatuur kasvavad vastavalt kiirusega 0.05 kPa/s ja 0.15 K/s .

Kasutades seost ülesandest 12.13, leidke kui kiiresti muutub ruumala, kui rõhk on 20 kPa ja temperatuur on 320 K .

14.3 Gradient

Valem 14.2

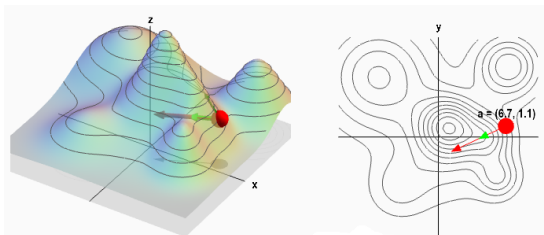
Igas punktis (x, y) , kus leiduvad funktsiooni $f(x, y)$ esimest järku osatuletised, saame vaadelda funktsiooni f **gradienti**

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = (f_x(x, y), f_y(x, y)),$$

kus $i = (1, 0)$ ja $j = (0, 1)$.

Omadus 14.1

- Gradient on igas punktis risti pinna ni-voojoonega.
- Gradient näitab pinna kiireima tõusu suunda ning suurima tõusu arvvärtus on $|\nabla f(x, y)|$.
- Gradiendi vastandvektor $-\nabla f(x, y)$ näitab pinna kiireima languse suunda ning suurima languse arvvärtus on $|\nabla f(x, y)|$.



Joonis : <http://mathinsight.org/>

Ülesanne 14.13. (!) Leidke funktsiooni gradient antud punktis.

- $f(x, y) = 3x^4 - 2x + y^2 - 5$, $P(1, -2)$;
- $f(x, y) = \cos(x + y)$, $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$;
- $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $P(1, -1, -1)$;

(d) $f(x, y, z) = (x + 2y - z)e^{xyz}$, $P(1, -1, 0)$;

(e) $f(x, y, z) = xye^z$, $P(e, e, -1)$;

(f) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy + 3$, $P(1, -1)$.

Ülesanne 14.14. (!) Leidke funktsiooni suurim kasvukiirus antud punktis.

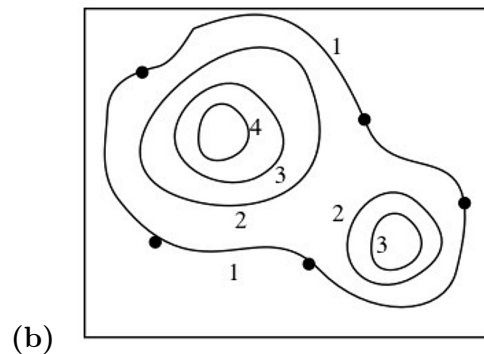
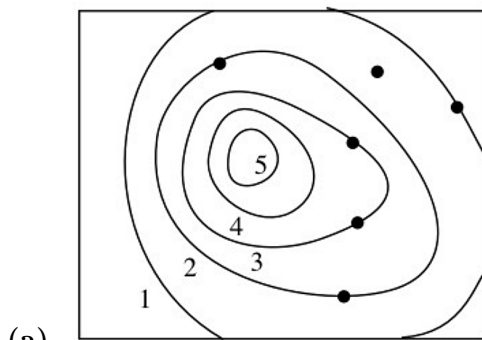
(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P(2, -1)$;

(c) $f(x, y) = e^{xy}$, $P(2, 0)$;

(b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $P(1, 1)$;

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $P(1, -2)$.

Ülesanne 14.15. Näidake gradiendi suunad kontuurkaardil märgitud punktides. Milline on kiireima tõusuga trajektoor igast märgitud punktist?



Ülesanne 14.16. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi °C) igas punktis xy -tasandil on $T(x, y) = x^2e^{-y}$. Millises suunas kasvab temperatuur punktis $(2, 1)$ kõige kiiremini?

Mis on see suurim kasvukiirus selles punktis?

14.4 Funktsiooni tuletis antud suunas

Definitsioon 14.1

Olgu $u = (\alpha, \beta)$ ühikvektor, s.t. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Funktsiooni $f(x, y)$ tuletiseks punktis (a, b) suunas u nimetatakse suurust

$$D_u f(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h\alpha, b + h\beta) - f(a, b)}{h}.$$

Valem 14.3

Kui f on diferentseeruv punktis (a, b) ja $u = (\alpha, \beta)$ on ühikvektor, siis kehtib valem

$$D_u f(a, b) = u \cdot \nabla f(a, b) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b).$$

Ülesanne 14.17. (!) Leidke funktsiooni $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ muutumiskiirus punktis $(0, 1)$ ja suunas u , kui

(a) $u = (1, 2)$;

(c) $u = (3, 0)$;

(b) $u = (1, -2)$;

(d) $u = (1, 1)$.

Ülesanne 14.18. Matkaja seisab mäe nõlval oja ääres ja uurib oma kaarti. Maastiku kõrgus (meetrites) igas punktis (x, y) on antud funktsiooniga

$$h(x, y) = \frac{20000}{3 + x^2 + 2y^2},$$

kus x ja y (kilomeetrites) on koordinaadid matkaja kaardil. Matkaja asub punktis $(3, 2)$. Millises suunas voolab ojas vesi punktis $(3, 2)$? Kui kiiresti laskub vesi allamäge matkaja asukohas?

Ülesanne 14.19. Millises suunas on punktis $(2, 0)$ funktsiooni $f(x, y) = xy$ muutumiskiirus -1 ? Kas on suundi, kus muutumiskiirus on -3 või -2 ?

Ülesanne 14.20. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi $^{\circ}C$) igas punktis xy -tasandil on $T(x, y) = x^2 - 2y^2$. Mis suunas peab punktis $(2, -1)$ olev sipelgas liikuma, et võimalikult kiiresti maha jahtuda?

Ülesanne 14.21. (F) Temperatuur T metallkuulis on pöördvõrdelises seoses kera keskpunkti, milleks loeme punkti $(0, 0, 0)$. Temperatuur punktis $(1, 2, 2)$ on $120^{\circ}C$.

- (a) Leidke temperatuuri T muutumiskiirus punktis $(1, 2, 2)$ suunas $(2, 1, 3)$;
 (b) Näidake, et mis tahes metallkuuli punktis suurim temperatuuri kasv leiab aset nullpunkti $(0, 0, 0)$ suunas.

Ülesanne 14.22. $\langle * \rangle$ Leidke funktsiooni $f(x, y, z) = xy + z^2$ suurim ja vähim väärtus keral $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Ülesanne 14.23. $\langle * \rangle$ Olgu α, β ja γ kolmnurga sisenurgad. Tõestage, et

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Milliste kolmnurkade puhul on tegemist võrdusega?

14.5 Vähimruutude meetod *

Valem 14.4

Olgu meil antud komplekt andmeid $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, kus $n \in \mathbb{N}$. **Vähimruutude meetodiga** otsime sellist funktsiooni f , mis minimiseeriks funktsiooni

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2.$$

Näiteks, kui soovime antud andmeid lähendada sirgega $f(x) = ax + b$, siis vähimruutude meetodiga tuleks minimiseerida funktsioon

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Ülesanne 14.24. Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$; (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;
 (b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$; (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.25. Leidke parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$; (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;
 (b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$; (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.26. Leidke eksponentsiaalne funktsioon $f(x) = ae^{bx}$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(1, 16), (3, 17), (5, 18), (7, 20), (10, 22)$; (b) $(2, 13), (4, 9), (6, 6), (8, 4), (10, 3)$.

Ülesanne 14.27. Firma toote müüginumbrid (miljonites eurodes) esimese viie aasta jooksul on antud tabelina.

Aasta	1	2	3	4	5
Müük	0,9	1,5	1,9	2,4	3,0

- (a) Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud andmeid;
 (b) Ennustage leitud sirge abil firma kuuenda aasta müüginumbrid.

Ülesanne 14.28. Viie tööstusrajooni piirkonnas viidi läbi uurimus, kus mõõdeti teatud heitgaasi keskmist kogust õhus ja hingamisteede haiguste keskmist arvu (100 000 inimese kohta).

Heitgaasi kogus	3,4	4,6	5,2	8,0	10,7
Haiguste arv	48	52	58	76	96

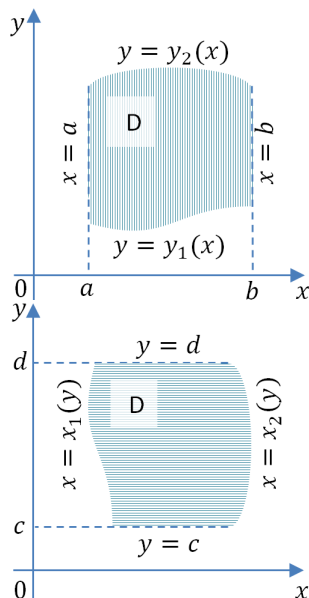
- (a) Joonistage saadud andmed graafikule ja otsustage, mis tüüpi funktsioon võiks neid andmeid kõige paremini kirjeldada;
 (b) Prognoosige vähimruutude meetodiga keskmist haiguste arvu piirkonnas, kus keskmine heitgaasi kogus on 7,3 ühikut.

Praktikum 15

Kahekordse integraali arvutamine

15.1 Kahekordse integraali arvutamine

Valem 15.1



Kui $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (15.1)$$

Kui $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (15.2)$$

Ülesanne 15.1. (!) Joonistage järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetage integreerimisrajad kahekordses integraalis valemite (15.1) ja (15.2) järgi.

- (a) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$;
- (b) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$;
- (c) D on ristkülik tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$;
- (d) D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$;
- (e) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$;
- (f) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$.

Ülesanne 15.2. (!) Muutke integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

(a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy;$

(e) $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x, y) dy;$

(b) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy;$

(c) $\int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(f) $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx +$
 $+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$

(d) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy;$

$$(g) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy;$$

$$(h) \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy;$$

$$(i) \int_1^3 dx \int_{1+\sqrt{-x^2+4x-3}}^3 f(x, y) dy.$$

Ülesanne 15.3. (!) Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \iint_D x dx dy, \text{ kus } D \text{ on kolmnurk tippudega } (0, 0), (1, 1) \text{ ja } (0, 1);$$

$$(b) \iint_D y dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = 0, x = 1 \text{ ja } y = x^2;$$

$$(c) \iint_D \sin(x + y) dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = -x, y = 0 \text{ ja } x = \pi;$$

$$(d) \iint_D \cos(x - y) dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = 0, y = x \text{ ja } x = \pi;$$

$$(e) \iint_D e^{x-y} dx dy, \text{ kus } D \text{ on ristkülik } D = [0, \ln 4] \times [0, \ln 2];$$

$$(f) \iint_D \frac{\ln x}{xy} dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = 1, y = x \text{ ja } x = e;$$

$$(g) \iint_D \frac{1}{x} dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = 0, y = \ln x \text{ ja } x = e;$$

$$(h) \iint_D x \sin(1 + x^2) \cos(1 + y^2) dx dy, \text{ kus } D \text{ on ristkülik } D = [-1, 1] \times [-1, 0];$$

$$(i) \iint_D (y - 2x^2) dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud kinnise joonega } |x| + |y| = 1;$$

$$(j) \iint_D xy dx dy, \text{ kus } D \text{ on piiratud joontega } y = x, y = 2x \text{ ja } x + y = 2.$$

Ülesanne 15.4. Määratud integraali arvutamine kahekordse integraali abil.

Arvutage integraal

$$\int_0^2 (\arctan \pi x - \arctan x) dx,$$

esitades integraalialune funktsioon integraali kujul.

Praktikum 16

Muutujate vahetus kahekordses integraalis Üleminek polaarkoordinaatidele

16.1 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Valem 16.1

Kui $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, kus $(u, v) \in \Delta$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (16.1)$$

kus $J(u, v)$ on teisenduse jakobiaan, $J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

Ülesanne 16.1. (!) Leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iint_D (2x + y - 2)^2 dx dy$, kus $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, -1 \leq 2x + y \leq 2\}$;
- (b) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ ja $3x + 4y = 6$;
- (c) $\iint_D (y - x) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$ ja $y = -\frac{x}{3} + 4$;
- (d) $\iint_D dx dy$, kus D on piirkond, mis asub esimeses veerandis ja on piiratud joontega $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$ ja $y = x$.

Ülesanne 16.2. < * > Kahekordset integraali kasutades leidke piirväärtus

$$\lim_{a, b \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^a \sum_{n=1}^b \frac{1}{ab} \frac{n^2}{b^2} \sin \frac{kn}{ab} \quad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Ülesanne 16.3. < * > Leidke integraal

$$\iint_D y^2 dx dy,$$

kus D on piiratud x -teljega ja tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaarega, kui $0 \leq t \leq 2\pi$ ja $a > 0$.

Ülesanne 16.4. $\langle * \rangle$ Tähistagu U kolmnurka tippudega $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$.

Tõestage, et

$$\iint_U e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \frac{\text{sh } 1}{2},$$

kus $\text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ (hüperboolne siinus).

16.2 Üleminek polaarkoordinaatidele

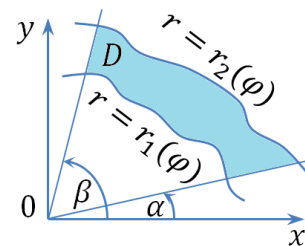
Valem 16.2

Üleminek polaarkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \Delta = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

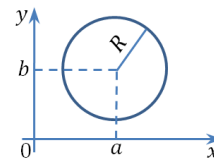
teisenduse jakobiaan $J(r, \varphi) = r$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \quad (16.2)$$

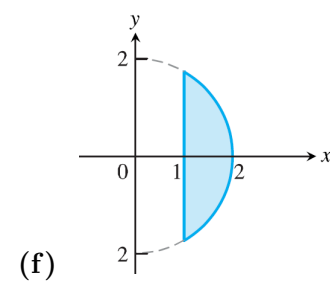
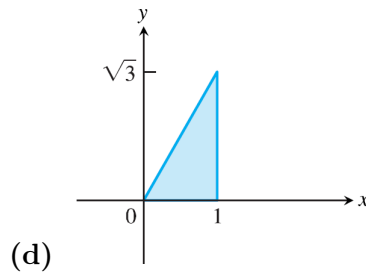
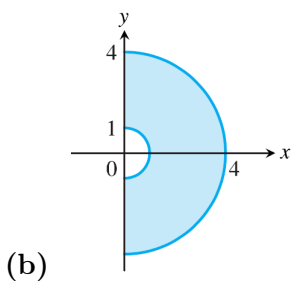
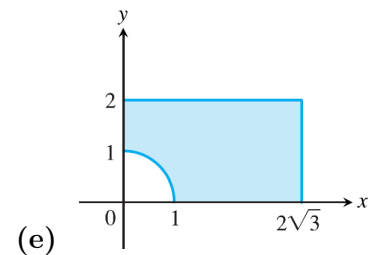
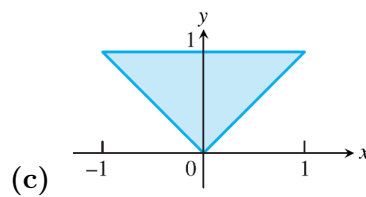
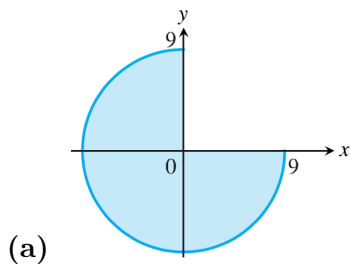


Valem 16.3

Ringjoone võrrand: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$



Ülesanne 16.5. (!) Esitage järgmised piirkonnad polaarkoordinaatides.



Ülesanne 16.6. (!) Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele.

(a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$;

(d) $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $\iint_D dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{2}\}$;

(e) $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$;

(c) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;

(f) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Ülesanne 16.7. (!) Leidke järgmised integraalid.

(a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

$$D = \{(x, y) : x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$$

(b) $\iint_D x dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$;

(e) $\iint_D y dx dy$, kus $D = \{(x, y) : 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$;

(c) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
 $D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$;

(f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = x$,
 $x^2 + y^2 = 2x, y = -x (y \leq -x)$;

(d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus

(g) $\iint_D dx dy$, kus D on piiratud joontega
 $y = 0, y = \sqrt{2 - x^2}, x = y^2 (x \geq y^2)$.

Praktikum 17

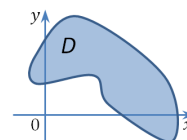
Kahekordse integraali rakendused

17.1 Kahekordse integraali geomeetriselised rakendused

17.1.1 Tasandilise kujundi pindala

Valem 17.1

Tasandilise kujundi D pindala: $S_D = \iint_D dx dy$



Ülesanne 17.1. (!) Leidke xy -tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega.

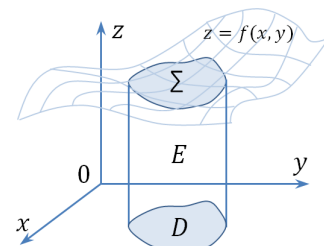
- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $y = x^3, y = 1, x = 0$; | (g) $r = a \cos \varphi, r = b \cos \varphi, (b > a > 0)$; |
| (b) $y = e^x, y = e^{-x}, y = e$; | (h) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioid); |
| (c) $y = 2^x, y = 2^{-x}, y = 4$; | (i) $r = 2 \cos 4\varphi$ (kaheksaleheline roos); |
| (d) $xy = 4, x + y = 5$; | (j) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$; |
| (e) $3x^2 = 25y, 5y^2 = 9x$; | (k) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli lemniskaat); |
| (f) $x^2 + y^2 = 16$; | (l) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$. |

17.1.2 Keha ruumala. Ruumilise pinnatüki pindala

Valem 17.2

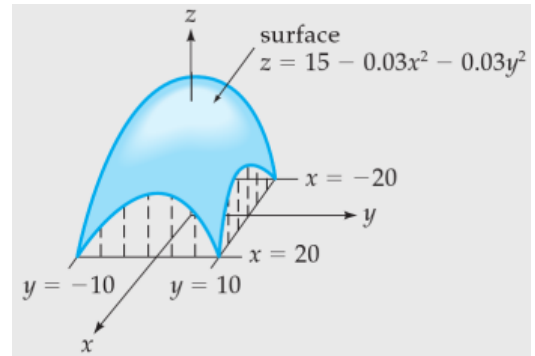
Keha E ruumala: $V_E = \iint_D f(x, y) dx dy$

Ruumilise pinnatüki Σ pindala: $S_\Sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$



Ülesanne 17.2. (!) Külgeintegreeritud kuppel on konstrueeritud joonisel näidatud funktsiooni järgi.

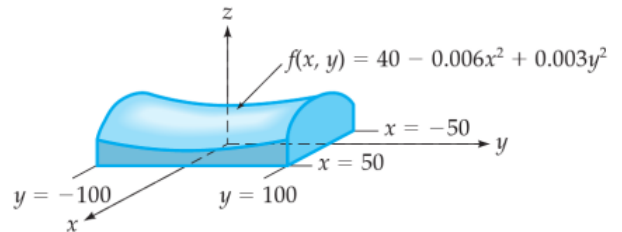
Et projekteerida ventilatsiooni- ja küttesüsteemi, on tarvis teada telgi ruumala. Leidke kuppel telgi ruumala, kui tema põhjaks on joonisel märgitud ristkülik (kõik mõõtmed on antud jalgades, $1 \text{ ft} \approx 0,3 \text{ m}$).



Ülesanne 17.3. (!) Konverentsikeskusel on lookas katus kõrgusega

$$f(x, y) = 40 - 0,006x^2 + 0,003y^2.$$

Ehitise põhjaks on ristkülik $[-50, 50] \times [-100, 100]$. Leidke maja ruumala. (Kõik suurused on antud meetrites.)



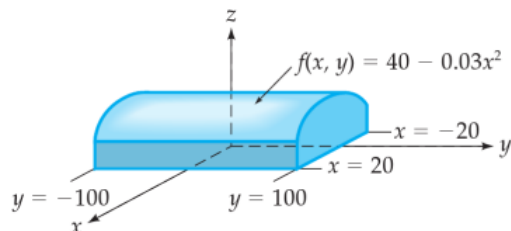
TEIST JÄRKU PINNAD

Ellipsoid	Elliptiline paraboloid	Hüperboolne paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$
Ühekattene hüperboloid	Kahekattene hüperboloid	Elliptiline koonus
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Ülesanne 17.4. (!) Lennukite angaar on kumera katusega, mille kuju on määratud funktsiooniga

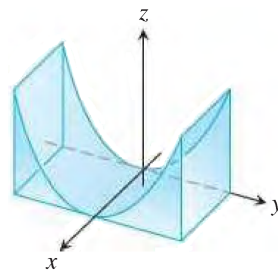
$$f(x, y) = 40 - 0,03x^2.$$

Leidke angaari ruumala, kui tema põhjaks on ristkülik $[-20, 20] \times [-100, 100]$. (Kõik suurused on antud meetrites.)

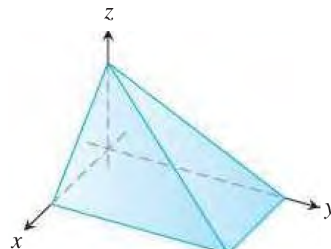


Ülesanne 17.5. (!) Leidke keha E ruumala, kui see on tõkestatud järgmiste pindadega.

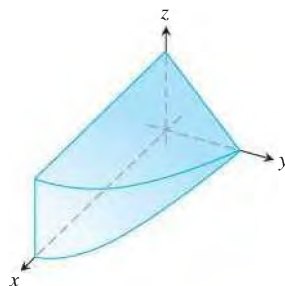
(a) $z = y^2, x = 0, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0$



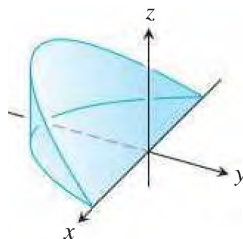
(b) $x + z = 1, y + 2z = 2 \quad (x, y, z \geq 0)$



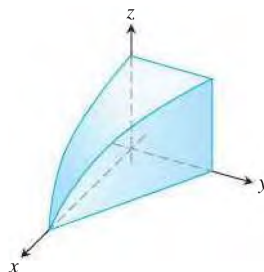
(c) $y + z = 2, x = 4 - y^2 \quad (x, y, z \geq 0)$



(d) $x^2 + y^2 = 1, z = -y, z = 0$



(e) $y = 1 - x, z = \cos(\pi x/2), 0 \leq x \leq 1$



(f) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, x + z = 3$



Ülesanne 17.6. (!) Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E .

- (a) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.
- (b) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$ ja $y = 4$ ning pöördparaboloid $z = x^2 + y^2 + 1$.
- (c) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y = 1$ ning elliptiline paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$.
- (d) Tasandid $z = 0$ ja $x + z = 6$ ning silindrid $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$.
- (e) Tasand $z = 0$, pöördparaboloid $z = x^2 + y^2$ ja silinder $x^2 + y^2 = 1$.
- (f) Koordinaattasandid, silinder $x^2 + y^2 = 1$ ja pind $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, kus $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.
- (g) Tasandid $x = 1$, $y = 0$ ja $z = 0$ ning hüperboolne paraboloid $z = x^2 - y^2$.
- (h) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + 3y = 12$ ning silinder $y^2 = 2z$.
- (i) Tasandid $z = 1$ ja $z = 12 - 3x - 4y$ ning elliptiline silinder $x^2 + 4y^2 = 4$.
- (j) Sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ja pöördparaboloid $2z = x^2 + y^2$.
- (k) Silindrid $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 1$.
- (l) Pöördparaboloidid $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $2z = 2 + x^2 + y^2$.
- (m) Silinder $x^2 + y^2 = 3$ ja kahekatteline hüperboloid $z^2 = x^2 + y^2 + 3$.
- (n) $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$ ja $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 17.7. Leidke järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad.

- (a) Tasandi $6x + 3y + 2z = 12$ osa, kus $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$.
- (b) Pinna $z = xy$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 1$ sees.
- (c) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis on silindri $x^2 + y^2 = b^2$ ($b < a$) sees.
- (d) Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mille eraldab temast silindriline pind $z^2 = 2y$.
- (e) Silindri $z^2 = 4x$ osa, mille eraldavad temast silinder $y^2 = 4x$ ja tasand $x = 1$.
- (f) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mille lõikab temast välja silinder $x^2 + y^2 = ax$.
- (g) Koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 2$ sees.

Ülesanne 17.8. < * > Leidke joonega $y^4 = a^2(y^2 - 2x^2)$ piiratud kujundi pindala.

17.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused

17.2.1 Tasandilise kujundi mass

Valem 17.3

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$. Kujundi D mass avaldub valemiga

$$m_D = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

Ülesanne 17.9. (!) Leidke ringi mass, kui ringi raadius on 10 cm.

Ringjoonel on pindtihedus $1,2 \text{ g/cm}^2$ ning see on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist.

Ülesanne 17.10. (!) Leidke ruudukujulise plaadi mass, kui plaadi külje pikkus on $2a$ cm.

Plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning on ruudu tippudes 1 g/cm^2 .

Ülesanne 17.11. Funktsioon

$$f(x, y) = \frac{10000e^y}{1 + \frac{|x|}{2}} \frac{\text{bakter}}{\text{cm}^2}$$

kirjeldab mingi bakteri populatsiooni tihedust xy -tasandil, kus x ja y mõõdetakse sentimeetrites.

Leidke bakterite arv ristkülikul $[-5, 5] \times [-2, 0]$.

Ülesanne 17.12. Elektrilaengu pindtihedus kettal raadiusega R meetrit on $\rho(r, \varphi) = kr(1 - \sin \varphi) \text{ C/m}^2$ (siin k on konstant).

Integreerige pindtiheduse funktsiooni üle ketta, et leida elektrilaeng Q .

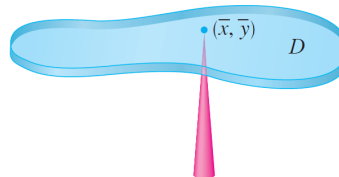
17.2.2 Tasandilise kujundi massikese

Valem 17.4

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Kujundi D massikese asub punktis $C = (\bar{x}, \bar{y})$, kus

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{m_D} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ \bar{y} = \frac{1}{m_D} \iint_D y \rho(x, y) dx dy \end{cases}$$



Ülesanne 17.13. Leidke bumerangi kujulise piirkonna massikese, kui see asub xy -tasandil paraboolide $y^2 = -4(x - 1)$ ja $y^2 = -2(x - 2)$ vahel.

Ülesanne 17.14. (!) Leidke xy -tasandil asetsevate homogeensete kujundite massikesme $C = (\bar{x}, \bar{y})$ koordinaadid, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega

- | | |
|--|--|
| (a) Ringjoon $x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) ja sirgjoon $y = 0$. | (d) Kardioid $r = 2(1 + \cos \varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$. |
| (b) Sinusoid $y = \sin x$ ja sirged $x = 0$, $x = \pi/4$ ja $y = 0$. | (e) x -telg ja tsükloid $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ kaar, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. |
| (c) Jooned $y = x^2$ ja $x + y = 2$. | |

Ülesanne 17.15. Leidke ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ massikesme koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega punktist $(2, 0)$.

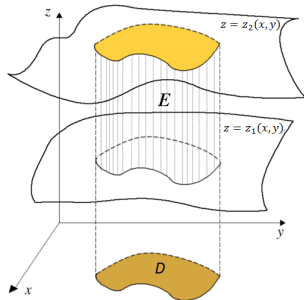
Ülesanne 17.16. Leidke poolringi $x^2 + y^2 \leq 1$ massikesme koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega ruuduga punktist $(1, 0)$.

Praktikum 18

Kolmekordsed integraalid

18.1 Kolmekordse integraali arvutamine

Valem 18.1

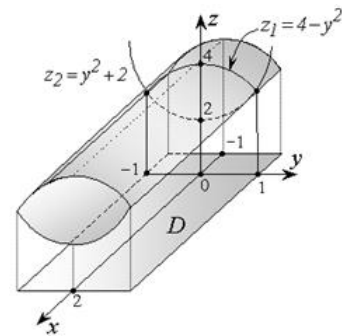


Kui $E = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$, siis

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (18.1)$$

Ülesanne 18.1. (!) Leidke integraal $\iiint_E xz dx dy dz$,

kus piirkond E on piiratud silindriliste pindadega $z_1 = 4 - y^2$, $z_2 = y^2 + 2$ ja tasanditega $x = -1$, $x = 2$.



Ülesanne 18.2. (!) Leidke järgmised integraalid.

- $\iiint_E x^2 y z^2 dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$;
- $\iiint_E y dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y\}$;
- $\iiint_E (z + 4) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$;
- $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4\}$;
- $\iiint_E (1 - x^2) \sqrt{1 - y^2} dx dy dz$, kus $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$;
- $\iiint_E xy^2 z^3 dx dy dz$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$;

- (g) $\iiint_E (2x + 3y - z) dx dy dz$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ ja $x + y = 2$.

Ülesanne 18.3. $\langle * \rangle$ Tõestage, et iga lõigus $[0, a]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^a (a - z)^2 f(z) dz.$$

Ülesanne 18.4. $\langle * \rangle$ Tõestage, et iga lõigus $[0, 2]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

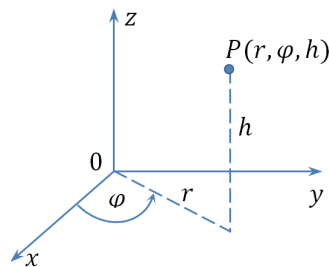
$$2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz = \int_0^1 (2 - z^2) f(z) dz + \int_1^2 (2 - z)^2 f(z) dz.$$

18.2 Üleminek silinderkoordinaatidele

Valem 18.2

Üleminek silinderkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = h \end{cases}, \text{ teisenduse jakobiaan } J(r, \varphi, h) = r$$



Ülesanne 18.5. (!) Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = 2$;
- (b) $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 + (z - 1)^2}$, kus $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$;
- (c) $\iiint_E xz dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ ja $y = x\sqrt{3}$;
- (d) $\iiint_E y dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, tasandiga $z = 0$ ja paraboloidiga $z = x^2 + y^2$;
- (e) $\iiint_E z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$ ($y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = c$ ja $y = 0$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$;

Praktikum 19

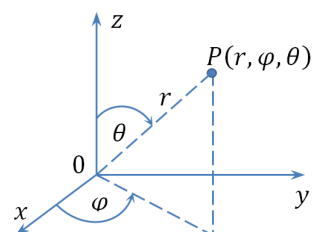
Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused

19.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele

Valem 19.1

Üleminek sfäärkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \text{ teisenduse jakobiaan } J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$$



NB! $0 \leq \theta \leq \pi$

Ülesanne 19.1. (!) Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($y \geq 0, z \geq 0$) ja tasanditega $y = 0$ ja $z = 0$;
- (b) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$;
- (c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$;
- (d) $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- (e) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z) : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

19.2 Kolmekordse integraali rakendusi

19.2.1 Keha ruumala leidmine

Valem 19.2

Keha E ruumala V_E avaldub valemiga

$$V_E = \iiint_E dx \, dy \, dz. \quad (19.1)$$

Ülesanne 19.2. (!) Leidke kehade ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pindadega.

- (a) Silindrid $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasandid $x = -1$ ja $x = 5$;
- (b) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$ ning silinder $x^2 + y^2 = 1$;
- (c) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = x^2 + 2y^2$ ning tasandid $x = 1$, $y = x$ ja $y = 2x$;
- (d) Silindrid $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasandid $z = 0$ ja $z = 9$;
- (e) Hüperboolne paraboloid $z = xy$ ning tasandid $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ja $x + y = z$;
- (f) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$, silinder $y = x^2$ ning tasand $y = x$;
- (g) Pind $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z$, $a > 0$;

Ülesanne 19.3. Poolkerakujuline tass on täidetud piimaga nii, et ülemise servani jääb puudu 3 cm.

Kui palju piima (liitrides) on tassis?

Ülesanne 19.4. Ringbasseini diameeter on 15 meetrit.

Kui palju vett mahub sellesse basseini, kui põhjast lõunasse on tema sügavus on konstantne ja läänest itta kahaneb lineaarselt kahest meetrist seitsmeni?

Ülesanne 19.5. Kauss on funktsiooni $z = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 25$) graafiku kujuga.

Teie planeerite kalibreerida kaussi nii, et teha sellest sadememõõturit. Milline kõrgus vastab 2 cm sademete hulga? 6 cm sademete hulga?

19.2.2 Keha mass ja massikesk.

Valem 19.3

Olgu keha tihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in E$.

Keha E mass võrdub $m_E = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz$.

Keha E massikesk $C = (x_c, y_c, z_c)$ asub punktis

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E x \rho(x, y, z) dx dy dz \\ y_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E y \rho(x, y, z) dx dy dz \\ z_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E z \rho(x, y, z) dx dy dz \end{cases} .$$

Ülesanne 19.6. (!) Leidke kuubi $E = [0, 10]^3$ mass, kui kuubi tihedus igas punktis on $\rho(x, y, z) = z$.

Ülesanne 19.7. Leidke risttahuka $E = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui tihedus igas tema punktis on $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Ülesanne 19.8. (!) Leidke tasanditega $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.

Ülesanne 19.9. Leidke kera mass, kui kera raadius on a ja kera igas punktis tiheduse ruut $\rho^2 = a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Ülesanne 19.10. Leidke silindri $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq c\}$ mass, kui tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.

Ülesanne 19.11. Leidke kera kihi $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist $(0, 0, 0)$.

Ülesanne 19.12. On teada, et kerakujulise planeedi raadius on R ja tema mass on m .

Planeedi tihedus on sümmeetriline kera keskupunkti suhtes ning kahaneb lineaarselt planeedi pinna suunas. Millega võrdub tihedus keskpunktis, kui planeedi pinnal on see võetud võrdseks nulliga?

Ülesanne 19.13. Kerakujuline planeet raadiusega R omab atmosfääri tihedusega $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, kus h on kõrgus planeedi pinna kohal, μ_0 on tihedus merepinnal ja c on positiivne konstant.

Leidke selle planeedi atmosfääri mass.

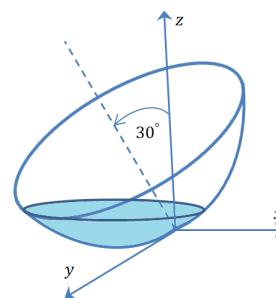
Ülesanne 19.14. (!) Leidke homogeensete kehade massikeskme koordinaadid, kui kehad on piiratud järgmiste pindadega.

- (a) $x + y + z = 4, x = 0, y = 0, z = 0;$ (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x > 0, y > 0,$
 (b) $z^2 = xy, x = 1, y = 1, z = 0;$ $z > 0), x = 0, y = 0, z = 0.$

Ülesanne 19.15. Leidke poolkera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 (z \geq 0)$ massikeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

Ülesanne 19.16. < * > Paraboolse satelliiditaldriku laius on 2 m ja sügavus on 0,5 m.

- (a) Tema sümmeetriatelg on kallutatud 30 kraadi püstasendist. Konstrueerige (mitte arvutage!) kolmekordne integraal taldrikusse mahtuva vee ruumala arvutamiseks.



- (b) Mis on minimaalne taldriku kalle, mille korral vesi temasse ei kogune?

20.1 Esimest liiki joonintegraalid

Omadus 20.1

Esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimistee AB läbimise suunast.

Valem 20.1

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (18.1)$$

$$AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2} dy \quad (18.2)$$

$$AB : r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (18.3)$$

$$AB : x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad (18.4)$$

Valem 20.2

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$$AB : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(t) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \quad (18.5)$$

Ülesanne 20.1. (!) Arvutage järgmised integraalid

(a) $\int_{AB} \frac{ds}{x-y}$, $AB : y = x/2 - 2$, $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$;

(b) $\int_{AB} \frac{2x+y}{y} ds$, $AB : 2x + y + 1 = 0$, $A = (1, -3)$, $B = (0, -1)$;

(c) $\int_{AB} xy ds$, $AB : x = \cos t, y = \sin t$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$;

(d) $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, $AB : x^2 + y^2 = a^2 (x > 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, a)$;

(e) $\int_L (x-y) ds$, $L : x^2 + y^2 = 2x$;

(f) $\int_L xy ds$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 2)$, $D = (0, 2)$;

(g) $\int_L \frac{3z^2 ds}{x^2 + y^2}$, kus L on krüvijoone esimene keerd: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Ülesanne 20.2. $\langle * \rangle$ Leidke joonintegraal $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kus joon L antud võrrandiga $(x^2 + y^2)^{1/2} = a^2 (x^2 - y^2)$, ($a > 0$).

20.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendusi

Valem 20.3

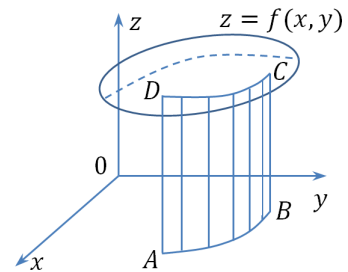
Joone kaare pikkus: $\ell_{AB} = \int_{AB} ds$

Valem 20.4

Silinderpinna pindala:

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x, y) ds,$$

kus $f(x, y) \geq 0$ joonel AB



Ülesanne 20.3. (!) Leidke järgmiste joonte pikkused

(a) $r = e^\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$;

(b) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, A = (0, 0, 0), B = (3, 3, 2)$.

Ülesanne 20.4. (!) Leidke vertikaalsete silinderpindade pindala, kui pindade alumised servad asetsevad xy -tasandil ja ülemine serv on järgmiste pindade lõikejoon

(a) $y + x = 1$ ($x \geq 0$), $z = y$;

(c) $x^2 + y^2 = 16, z = y$.

(b) $x^2 + y^2 = 4, 2z = x^2 + 4$;

Ülesanne 20.5. Leidke silinderpinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.

Ülesanne 20.6. $\langle * \rangle$ Olgu $a > b > 0$. Tõestage, et ellipsi $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ pikkus on võrdne sinusoidi $y = c \sin \frac{x}{b}$ ühe täisvõnke kaarepikkusega, kui $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

20.2 Teist liiki joonintegraalid*

Omadus 20.2

Teist liiki joonintegraal muudab märki integreerimistee läbimissuuna muutmisel:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

Definitsioon 20.1

L_+ - kinnise joone L läbimise **positiivne suund** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ kellaosuti liikumisele vastupidine suund (kui vaadata z -telje positiivselt poolelt xy -tasandile)

Valem 20.5

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx \quad (18.6)$$

$$AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy \quad (18.7)$$

$$AB : x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) x'(t) dt \quad (18.8)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) y'(t) dt \quad (18.9)$$

Valem 20.6

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$$AB : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) x'(t) dt \quad (18.10)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) y'(t) dt \quad (18.11)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) z'(t) dt \quad (18.12)$$

Ülesanne 20.7. Arvutage integraalid

(a) $\int_{AB} xy dx$, $AB : y = \sin x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$;

(b) $\int_{AB} y dx$, $AB : 2y + x = 4$, $A = (4, 0)$, $B = (0, 2)$;

(c) $\int_{AB} y dx$, $AB : x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

(d) $\int_L x dy$, L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 2)$;

(e) $\int_{L-} (x^2 + y^2) dx$, L on kontuur, mille moodustavad sirged $x = 1$, $x = 5$, $y = 1$, $y = 3$;

(f) $\int_{AB} \cos y dx + \sin x dy$, $AB : y = x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, \pi)$;

(g) $\int_L y dx + x dy$, $L : x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

21.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Osatuletised ja rakendused

- 1.1. Mitme muutuja funktsiooni esimest ja kõrgemat järku osatuletised
- 1.2. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali leidmine, funktsiooni muudu ja funktsiooni väärtuse ligikaudne leidmine täisdiferentsiaali abil
- 1.3. Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, optimeerimine
- 1.4. Gradiendi leidmine, funktsiooni suurima kasvukiiruse ja suurima langemiskiiruse leidmine gradiendi abil

2. Kahekordsed integraalid

- 2.1. Kahekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele
- 2.2. Tasandilise kujundi pindala ja keha ruumala leidmine kahekordse integraali abil

3. Kolmekordsed integraalid

- 3.1. Kolmekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek silinderkoordinaatidele
- 3.2. Keha ruumala leidmine kolmekordse integraali abil

21.2 Kontrolltöö näidisülesanded

Ülesanne 21.1. (!) Leidke segatuletis $f_{xy}(x, y)$ funktsioonile

$$f(x, y) = \cos(\pi - 2x^3y^2) + e^{x^2-1}.$$

Ülesanne 21.2. (!) Arvutage täisdiferentsiaali abil ligikaudu

$$(3,12^2 - 6,05)^3.$$

Ülesanne 21.3. (!) Kinnise silindrilise konservikarbi kõrgus on 10 cm ja läbimõõt 4 cm.

Leidke **täisdiferentsiaali** abil ligikaudu konservikarbi tegemiseks vajaliku materjali kogus, kui seinte paksus on 0,05 cm ja põhi ning kaas on tehtud 0,1 sentimeetri paksusest materjalist.

Ülesanne 21.4. (!) Leidke funktsiooni

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

kõik lokaalsed ekstreemumid, leidke ekstreemumi liik ja funktsiooni väärtused ekstreemumpunktides.

Ülesanne 21.5. (!) Leidke funktsiooni

$$f(x, y, z) = y^3(z^2 + x) + (x^2 - 4y + z)^3$$

gradient punktis $P(2, 1, -1)$. Leidke on funktsiooni suurim kasvukiirus ja langemiskiirus punktis P .

Ülesanne 21.6. (!) Leidke integraal

$$\iint_D \sin(x + y) \, dx \, dy,$$

kus D on piiratud sirgetega $y = 0$, $y = 2x$ ja $x = \frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 21.7. (!) Leidke integraal

$$\iint_D \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

kus piirkond $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Ülesanne 21.8. (!) Leidke integraal

$$\iiint_E x^2 y z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kus piirkond $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$.

Ülesanne 21.9. (!) Kolmekordse integraali abil leidke keha ruumala, kui keha on piiratud

silindritega $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasanditega $x = -1$ ja $x = 5$.

Ülesanne 21.10. (!) Leidke integraal

$$\iiint_E y \, dx \, dy \, dz,$$

kus E on paraboloidi $z = 4 - x^2 - y^2$ esimeses oktandis asuv osa (st. $x, y, z \geq 0$).

Praktikum 22

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitava funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 22.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon $y = f(x)$ sõltub ühest argumendist x .

22.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 22.3

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Ülesanne 22.1. (!) Näidake, et antud funktsioon on temale järgneva diferentsiaalvõrrandi lahendiks.

(a) $y = x, y' = y + 1 - x$

$$x(\ln(x) - \ln(y))dy - ydx = 0$$

(b) $y = \frac{\sin(x)}{x}, xy' + y = \cos(x)$

(f) $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(p) \\ y = \sin(p) \end{array} \right\}, x + y \frac{dy}{dx} = 0$

(c) $y = e^{\arcsin(2x)}, xy' = y \tan(\ln(y))$

(d) $x = y \int_0^y \frac{\sin(t)}{t} dt, y \frac{dx}{dy} = x + y \sin(y)$

(g) $\left\{ \begin{array}{l} x = \ln(p) + \sin(p) \\ y = p(1 + \sin(p)) + \cos(p) \end{array} \right\},$

(e) $x = ye^{y+1},$

$$x = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Ülesanne 22.2. (!) Leidke antud võrrandite i) ja ii) ühised lahendid.

(a) i) $y' = y + 1$, ii) $y' = e^x$

(b) i) $y' = y^2 + 2x - x^4$, ii) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

(c) i) $y' = x$, ii) $y' = y + x$

22.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 22.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles dx kordaja $f(x)$ sõltub ainult muutujast x ja dy kordaja $g(y)$ sõltub ainult muutujast y .

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$. Võrrandi lahend ilmutamata kujul on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant

Definitsioon 22.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

milles dx ja dy kordajad on kahe antud funktsiooni korrutised, millest üks sõltub ainult muutujast x ja teine sõltub ainult muutujast y .

Muutujate eraldamiseks jagame võrrandi mõlemad pooli järgmise avaldisega (tuleb jagada läbi dx kordajaga $g_1(y)$, sest ta sõltub muutujast y ja dy kordajaga $f_2(x)$, sest ta sõltub muutujast x ehk nende funktsioonide korrutisega, mis sisaldavad teist muutujat, kui on diferentsiaal)

$$| : g_1(y) \cdot f_2(x)$$

Saame eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Erilahendi saamiseks asendame üldlahendisse algtingimuse ja avaldame saadud võrdusest konstandi C .

Ülesanne 22.3. (!) Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' = e^{2x-y}$

(d) $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$

(b) $2x\sqrt{1-y^2} + yy' = 0$

(e) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$

(c) $y' = \frac{y-1}{x+1}$

(f) $\sin x dy - y \cos x dx = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ülesanne 22.4. (K) Leida raadiumi massi muutumise seadus sõltuvalt ajast, kui ajamomendil $t = 0$ on raadiumi mass m_0 .

Olgu ajamomendil t raadiumi mass m , ajamomendil $t + \Delta t$ vastavalt $m + \Delta m$.

Ajavahemikus Δt lagunenu raadiumi mass on Δm . Suhe $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ on keskmine raadiumi lagunemiskiirus. Selle suhte piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

on raadiumi lagunemise kiirus ajamomendil t . Radioaktiivse aine lagunemise seadus ütleb, et lagunemise kiirus on võrdeline (veel lagunemata) aine hulga m .

Lahendage raadiumi lagunemisele vastav diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kus $k > 0$ on võrdetegur. Miinusmärk näitab, et aja kasvades raadiumi mass kahaneb.

Ülesanne 22.5. (F) Leidke, palju jääb soola 1000 liitris mahutis olevasse soolvesi lahusesse 40 minuti pärast.

Olgu algselt soola soolalahuses 50 kilogrammi. Lahusele lisatakse konstantse kiirusega 10 liitrit minutis soolvett, mis sisaldab 10 grammi soola liitri vee kohta.

Samal ajal voolab lahus ka mahutist välja kiirusega 10 liitrit minutis, lahus segatakse mahutis ja lahuse hulk mahutis on püsivalt 1000 liitrit. Olgu otsitav soola kogus kilogrammides ajahetkel t tähistatud $x(t)$, siis soola on ajahetkel t mahutis $\frac{x(t)}{1000}$ kilogrammi liitri kohta.

22.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.6

Lineaarset esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.

Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on antud pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) ja $y = y(x)$ on otsitav. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldlahend** avaldub valemiga

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Lahendamiseks on kaks erinevat meetodit:

1) **Muutuja vahetus:**

$$y = u \cdot v, \quad \frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Lahendus taandub kahe eralduvate muutujatega võrrandi lahendamisele:

$$a) \frac{du}{dx} + P(x)u = 0, \quad b) u \frac{dv}{dx} = Q(x).$$

2) **Konstandi varieerimise meetod:** lahendada vastav homogeenne võrrand, saadud üldlahendis vaadelda integreerimiskonstanti C , kui otsitavat argumendi x funktsiooni $C(x)$.

$$a) \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \quad b) y_h = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Integreerimisteguri kasutamine

1. Korrutame võrrandi läbi nullist erineva funktsiooniga $\mu = \mu(x)$,

$$\mu y' + (\mu P)y = \mu Q.$$

2. Paneme tähele, et vasak pool oleks korrutise $\mu \cdot y$ tuletis $(\mu \cdot y)'$, kui kehtiks $\mu \cdot P = \mu'$. Kuna μ on suvaline funktsioon, siis võimegi nõuda, et ta oleks selline, et ta rahuldaks diferentsiaalvõrrandit

$$\mu'(x) = \mu(x) \cdot P(x).$$

3. Eelmisest võrrandist leiame μ ja sel juhul võrrandist $(\mu \cdot y)' = \mu \cdot Q$ saame mõlemat poolt integreerides lahendi

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) \cdot Q(x) dx.$$

Ülesanne 22.6. (!) Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - y = x - 1$

(g) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(b) $xy' + y = 3x^2$

(h) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $x^2 y' + xy = -1$

(i) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

(d) $x(\ln|x|)y' - y \ln|x| = x$

(j) $(xy + e^x)dx = xdy$

(e) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

(k) $y' + y \cos x = \cos x, y(0) = 1$

(f) $y' - y \cot x = 2x \sin x$

(l) $x(\ln x)y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0$

Ülesanne 22.7. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktioonipool induktiivsusega L .

Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktioonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Ülesanne 22.8. < * > Kas järgnevatel mittelineaarsetel diferentsiaalvõrranditel on lahendeid? Põhjendage oma otsust ja nimetage leiduvad lahendid.

(a) $(y')^2 + y^2 = 0$

(b) $(y')^2 + y^2 + 1 = 0$

Praktikum 23

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid

23.1 Homogeensed funktsioonid

Definitsioon 23.1

Olgu D mingi piirkond xy -tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$. Sellises piirkonnas määratud funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse **k -astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x, y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

kus k on reaalarv ja $t > 0$.

Ülesanne 23.1. (!) Leidke järgmiste funktsioonide jaoks homogeensuse aste k .

(a) $f(x, y) = \frac{x + y}{y - x}$

(c) $z = x^2 + y^2 - xy$

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \log \frac{x}{y}$

(d) $z = x^2 \sqrt{y} - y^{\frac{5}{2}}$

(e) $z = \frac{x + y}{x^2 - y^2}$

23.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 23.2

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit $y' = f(x, y)$, kui $f(x, y)$ on 0-astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand taandub eralduvate muutujatega võrrandiks muutuja vahetusega

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = z \cdot x,$$

kus

$$z = z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}.$$

Ülesanne 23.2. (!) Leidke antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $y(x - y)dx = x^2 dy$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$

(b) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

(f) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

(c) $xyy' = x^2 + y^2$

(d) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

Ülesanne 23.3. (F) Päikesekiirte koondamise ülesanne. Leidke, millise kujuga peegel peegeldab paralleelsed kiired ühte punkti.

Tegemist on pöördpinnaga, mille telg on paralleelsete kiirte sihiline. Valime koordinaatteljestiku nii, et kiired tuleksid x telje suunast ja ning peegelduksid koordinaatide algusesse. Leidke joon $y = y(t)$, mille pöörlemisel ümber x telje tekib kõnealune pöördpind, kui vastav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

23.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y' = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis võrrand on homogeenne võrrand.

Võrrand teisendub homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks, kui determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Muutuja vahetus on järgmine:

$$x = X + u, y = Y + v,$$

Diferentsiaalid on $dx = dX, dy = dY$. Saadud võrrand on homogeenne muutujate X ja Y suhtes. Konstandid u ja v leiame eeldusel, et vabaliikmed oleksid nullid:

$$\begin{aligned} a_1u + a_2v + a_3 &= 0; \\ b_1u + b_2v + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Kui $D = 0$, siis muutuja vahetusega $z = a_1x + a_2y$ teisendub võrrand eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks

Ülesanne 23.4. (!) Lahendage antud homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks teisenduvad võrrandid.

(a) $(x + y + 1)dx - (x - 1)dy = 0$

(c) $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$

(b) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$

(d) $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$

Ülesanne 23.5. < * > Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$$

Ülesanne 23.6. < * > Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.

$$(y' + 1) \ln\left(\frac{y + x}{x + 3}\right) = \frac{y + x}{x + 3}$$

Praktikum 24

Bernoulli diferentsiaalvõrrand Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid Numbrilised meetodid

24.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 24.1

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^a,$$

kus P ja Q on teadaolevad argumendi x funktsioonid, mis on pidevad vahemikus (c, d) ning a on mingi reaalarv, $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest siis on võrrand lineaarne).

Bernoulli võrrand on teisendatav lineaarseks võrrandiks järgmiselt:

a) jagame võrrandit suurusega $| : y^a$

b) teeme muutuja vahetuse $z = y^{1-a}$; $z' = (1-a)y^{-a}y'$

Ülesanne 24.1. (!) Leidke antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi üldlahend (taandada lineaarseks võrrandiks).

(a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

(b) $3y^2y' + y^3 = 1$

(c) $y' + 2y = y^2e^x$

(d) $(x+1)(y' + y^2) = -y$

(e) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

(f) $y' = (y + y^2) \cos x$

(g) $y' = y^4 \cos^3 x + y \tan x$

(h) $xy^2dy = (x^2 + y^3)dx$

(i) $xydy = (y^2 + x)dx$

Ülesanne 24.2. < * > Leidke Bernoulli diferentsiaalvõrrandi $(xy + x^2y^3)dy = dx$ üldlahend.

24.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 24.2

Diferentsiaalvõrrandit kujul

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

nimetatakse **eksaktseks** ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, nii et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Kui teadaolevad funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D , siis võrrandi eksaktsuseks piirkonnas D on tarvilik ja piisav, et iga $(x, y) \in D$ korral kehtib võrdus

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul $du(x, y) = 0$, millest $u(x, y) = C$.

Leiame funktsiooni $u(x, y)$ nii, et kehtivad võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Lahendus:

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y),$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y . Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud ka teine pool seosest, ehk

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Ülesanne 24.3. (!) Leidke antud eksaktse diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(h) $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$

(b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

(i) $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

(c) $(y^3 - x)y' = y$

(j) $(y^3 - x)dy = ydx$

(d) $\int_0^{\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}} dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right) dy =$

(k) $\int_0^{\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1} dx - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} dy =$

(e) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

(f) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$

(l) $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(g) $xdx + ydy = \frac{-ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

(m) $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy$

Ülesanne 24.4. < * > Leidke tingimus, millal võrrand $y' = e^{x+f(y)}$ on eksaktne

24.3 Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (24.1)$$

Tahame teada funktsiooni väärtust punktis $x = b$, otsitavaks funktsiooniks on $y = y(x)$.

Euleri meetod.

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

kus $h = x_i - x_{i-1}$

Euleri meetodil leitavad suurused on Cauchy ülesande lähisväärtused $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) korral.

Runge-Kutta 4. järku meetod.

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad k_2 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3).$$

Ülesanne 24.5. (!) Leidke Euleri meetodi abil diferentsiaalvõrrandi lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel $x_i = x_0 + 0.1i$ ($i = 1, 2, 3$).

(a) $y' = \frac{y}{x}, y(1) = 1$

(d) $y' = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1$

(b) $y' = 1 + x + y^2, y(0) = 1$

(c) $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0$

(e) $y' = y^2 + \frac{y}{x}, y(2) = 4$

Ülesanne 24.6. < * > Leidke Runge-Kutta 4. järku meetodi abil diferentsiaalvõrrandi $y' = 1 + x^2 + y^2, y(1) = 0$ lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel $x_i = x_0 + 0.1i$ ($i = 1, 2, 3$).

Praktikum 25

Teist järku diferentsiaalvõrrandid

25.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y'' = f(x)$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right),$$

siis integreerides saame

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

ja analoogiliselt teist korda integreerides jõuame otsitava lahendini y .

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y', y'') = 0$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järgu alandamisel muutuja vahetusega

$$y' = u; \quad y'' = u'.$$

Originaalse diferentsiaalvõrrandi lahendi y leidmiseks on vaja leida muutuja vahetusega saadud diferentsiaalvõrrandi lahend u , asetada ta võrrandisse $y' = u$ ning saadud uus diferentsiaalvõrrand lahendada.

Ülesanne 25.1. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandid kaks korda järjest integreerides.

(a) $xy'' = 1$

(b) $\cos^2(x)y'' = 1$

(c) $xy'' = 1 + x^2$

(d) $y'' + (x + 1)^{-3} = (x - 1)^{-3}$

(e) $4y'' = 4e^x + 3x^{-5/2}$

(f) $y'' = \ln(x)$

Ülesanne 25.2. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandid järgu alandamise teel.

(a) $(x - 1)y'' = y'$

(b) $x^2y'' + xy' = 1$

(c) $y' = xy'' + (y'')^2$

(d) $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$

(e) $xy'' = y'$

(f) $xy'' = -y'$

(g) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$

(h) $xy'' = y' + x^2$

(i) $y' = x \ln(x)y''$

(j) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

(k) $x^2y'' = (y')^2$

25.2 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 25.1

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

kus a, b on konstandid.

Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarse homogeenne võrrandi lahendid, siis on lahendiks ka nende erialhendite lineaarne kombinatsioon $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on **lineaarselt sõltumatud erilahendid**, siis on $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ antud lineaarse võrrandi **üldlahend**.

Antud konstantsete kordajatega lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on vaja leida sellele vastav **karakteristlik võrrand**

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid k_1, k_2 ja suurus $D = a^2 - 4b$ määravad antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi kuju:

$$D > 0, y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \quad (25.1)$$

$$D = 0, y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x), \quad (25.2)$$

$$D < 0, y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}. \quad (25.3)$$

Ülesanne 25.3. (!) Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed homogeenne diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 2y$

(h) $2y'' + 3y' = 2y$

(b) $y'' = 2y'$

(i) $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$

(c) $y'' = 4y' - 5y$

(j) $y'' + 9y = 0$

(d) $y'' + 4y = 0$

(k) $y'' + 7y' + 17y = 0$

(e) $y'' = 2y' - y$

(l) $y'' + 4y' - 5y = 0; y(-1) = 0; y'(-1) = 1$

(f) $y'' - 7y' = 0$

(g) $3y'' = 5y'; y(0) = 2; y'(0) = \frac{5}{3}$

(m) $y'' = 2(3y' - 5y); y(0) = 1; y'(0) = 4$

Ülesanne 25.4. (M) < * > Leidke diferentsiaalvõrrandi $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = 2$ üldlahend. Määrake millise parameetri α väärtuse korral üldlahend läheneb nullile protsessis $x \rightarrow \infty$.

Ülesanne 25.5. (M) < * > Leidke diferentsiaalvõrrandi $4y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \beta$ üldlahend. Määrake millise parameetri β väärtuse korral üldlahend läheneb nullile protsessis $x \rightarrow \infty$.

Praktikum 26

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 26.1

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = F(x),$$

kus a, b on konstandid ja $F(x)$ on argumendi x funktsioon.

Antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldlahend** on esitatav kujul

$$y = y_* + Y,$$

kus y_* on vastava **homogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

üldlahend ja Y on antud **mittehomogeense võrrandi üks erilahend**.

Ülesanne 26.1. (!) Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 3x^2$

(f) $y'' + y = x \sin(x)$

(b) $y'' + y' = 3$

(g) $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$

(c) $y'' - y = 4e^x$

(h) $y'' - y' = e^x + x$

(d) $y'' + y = 4xe^x$

(i) $y'' + 4y' + 3y = x$

(e) $y'' + y = 4 \sin(x)$

(j) $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

Ülesanne 26.2. (!) Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' - 7y' + 12y = x$

(h) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}$

(b) $y'' + y' = 8x^3 + 24x^2 - 10x$

(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$

(c) $y'' - 3y' + 9x^2 + 6x - 13 = 0$

(j) $y'' - 4y' - y = \sin(x)$

(d) $y'' - 4y' - 5y = x^3 + 1$

(k) $y'' + 9y = \sin(3x)$

(e) $y'' + 4y = 2x + 3$

(l) $y'' + y' - 2y = 8 \sin(2x)$

(f) $y'' - y' - 2y = 4e^{2x}$

(m) $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$

(g) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

Ülesanne 26.3. Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ülesanne 26.4. Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-t/2}.$$

Ülesanne 26.5. Näidake Euleri võrduse abil, et

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ülesanne 26.6. (!) Leidke Cauchy ülesande

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

lahend y .

Ülesanne 26.7. (M) < * > Näidake, et kui a , b ja c on positiivsed konstandid, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad nullile protsessis $x \rightarrow \infty$.

Ülesanne 26.8. (M) < * > Näidake, et kui a ja c on positiivsed konstandid ning $b = 0$, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid on tõkestatud protsessis $x \rightarrow \infty$.

Ülesanne 26.9. (M) < * > Näidake, et kui a ja b on positiivsed konstandid ning $c = 0$, siis kõik diferentsiaalvõrrandi

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad kindlale konstantile protsessis $x \rightarrow \infty$, mis sõltub diferentsiaalvõrrandi algtingimustest. Leidke vastav konstant, kasutades diferentsiaalvõrrandi algtingimusi $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Praktikum 27

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 27.1

Teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ on argumendi x funktsioonid.

Teist järku lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand omab kuju

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x),$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ ja $F(x)$ on argumendi x funktsioonid.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeenne diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üks erilahend y_1 , siis saab antud diferentsiaalvõrrandi alandada esimest järku diferentsiaalvõrrandiks **Liouville'i-Ostrogradski valemi** abil:

$$y'y_1 - y_1'y = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

Ülesanne 27.1. (!) Lahendage järgmised teist järku lineaarsed homogeenne diferentsiaalvõrrandid, kasutades Liouville'i-Ostrogradski valemit.

(a) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0; y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(h) $y'' - \frac{2y}{\cos^2(x)} = 0; y_1 = \tan(x)$

(b) $xy'' + 2y' - xy = 0; y_1 = \frac{e^x}{x}$

(i) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

(c) $y'' - 2(1 + \tan^2(x))y = 0; y_1 = \tan(x)$

(j) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

(d) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0; y_1 = e^x - 1$

(k) $x^2y'' \ln(x) - xy' + y = 0$

(e) $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0; y_1 = e^{\sin(x)}$

(l) $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$

(f) $y'' + y'(\tan(x) - 2 \cot(x)) + 2y \cot^2(x) = 0; y_1 = \sin(x)$

(m) $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

(g) $x^2y'' - 2xy' + (3x^2 + 2)y = 0; y_1 = x \cos(2x)$

(n) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(o) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$

Kui on teada **homogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üldlahend $y_* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ja **mittehomogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x)$$

üks erilahend Y , siis **mittehomogeense võrrandi üldlahend** y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Ülesanne 27.2. (!) Lahendage järgmised teist järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}; y_1 = \cos(e^{-x})$

(e) $xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3e^{x^2}$

(b) $y'' + y' + e^{2x}y = xe^{2x} - 1; y_1 = \sin(e^x)$

(f) $y'' - 2y' \tan(x) = 1$

(c) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}; y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(g) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, 0 < x < 1$

(d) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4; y_1 = \frac{1}{x}$

(h) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, x > 0$

Ülesanne 27.3. (!) Lahendage Cauchy ülesanded.

(a) $(x+2)^5y'' = 1, 12y(-1) = 1, 4y'(-1) = -1$

(c) $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, 5y(1) = \sqrt{2}, 2y'(1) = \sqrt{2}$

(b) $y'' = e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = 1$

(d) $(x^2+1)y'' = 2xy', y(0) = 1, y'(0) = 3$

Ülesanne 27.4. (!) Skitseerige Cauchy ülesande

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x+3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

lahendi graafik.

Ülesanne 27.5. (M) < * > Olgu meil diferentsiaalvõrrand

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kus p ja q pidevad funktsioonid ning y_1 ja y_2 on diferentsiaalvõrrandi lahendid vahemikus (a, b) . Näidake, et kui leidub punkt vahemikus (a, b) , kus y_1 ja y_2 on samaaegselt võrdsed nulliga, siis nad ei saa olla antud diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid.

Ülesanne 27.6. (M) < * > Olgu y_1 ja y_2 diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

fundamentaallahendid. Näidake, et funktsiooni y_1 kahe järjestikuse nullkoha vahel leidub üks ja ainult üks funktsiooni y_2 nullkoht.

Praktikum 28

Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

28.1 Lineaarsed kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 28.1

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

kus p_1, \dots, p_n on pidevad funktsioonid.

Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

kus p_1, \dots, p_n ja f on pidevad funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeenne võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x), \dots, y_n(x)$, siis selle võrrandi üldlahendiks on

$$y_* = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x) = \sum_{k=1}^n C_ky_k(x).$$

Kui on teada lineaarsele mittehomogeennele võrrandile vastava lineaarse homogeenne võrrandi üldlahend y_* ja mittehomogeenne võrrandi üks erilahend Y , siis mittehomogeenne võrrandi üldlahend y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + \sum_{k=1}^n C_ky_k(x).$$

Lineaarne homogeenne võrrandi järku võime vähendada asendusega

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

jne. Tuleb märkida, et sellisel juhul ei pruugi saadud võrrand enam lineaarne olla. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis asendustega

$$y = y_1z, \quad z' = u,$$

saame madalamat järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi.

Ülesanne 28.1. (!) Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' - 8y = 0$

(d) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$

(b) $y^{(4)} - y = 0$

(e) $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$

(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(f) $y''' - y' = 2\sin(x)$

Definitsioon 28.2

Diferentsiaalvõrrandit

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse n -järku hariliku diferentsiaalvõrrandi **üldkujuks**.

28.2 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Üks meetod kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on **järgu alandamine**. Sõltuvalt võrrandi kujust on mõningatel juhtudel võimalik leida originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend, kasutades madalama järguga diferentsiaalvõrrandi lahendit. Vastav meetodika sõltub originaalse diferentsiaalvõrrandi kujust. Toome järgnevalt mõned erijuhud.

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y^{(n)} = F(x)$.

Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}y^{(n-1)}(x),$$

siis integreerides saame

$$y^{(n-1)} = \int F(x)dx + C_1$$

ja analoogiliselt $n - 1$ korda jätkates jõuame otsitava lahendini y .

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.

Antud juhul teeme diferentsiaalvõrrandis asenduse $y^{(k)} = z$ ja loeme $z = z(x)$ uueks otsitavaks funktsiooniks. Seega saame uue, $n - k$ -järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Lahendades selle võrrandi oleme leidnud funktsiooni $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, kus C_1, \dots, C_{n-k} on konstandid. Seose $z = y^{(k)}$ tõttu jääb veel lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

mille lahend y on ka originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend.

Ülesanne 28.2. (!) Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' + \cos(x) = 0$

(f) $xy^{(5)} = y^{(4)}$

(b) $x^3y''' = 2$

(g) $y''' = (y'')^2$

(c) $y^{(4)} = \operatorname{ch}(x)$

(h) $y''' = 2(y'' - 1) \cot(x)$

(d) $2y''' + (y'')^3 = 0$

(e) $y''' = ((y'')^2 + 1)^{1/2}$

(i) $xy''' = y'' - xy''$

Ülesanne 28.3. (M) $\langle * \rangle$ Selgitage, kas diferentsiaalvõrrandi

$$y''' = x + y^2$$

kahe lahendi graafikud võivad teineteisega lõikuda xy -tasandi mingis punktis.

28.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 28.4. (!) Näidake, et antud funktsioonide süsteem on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks.

(a) $y = -x^{-2}$, $z = -x \ln x$; $y' = 2xy^2$, $z' = zx^{-1} - 1$

(b) $y = x$, $z = 2e^x$; $y' = e^{x-y}$, $z' = 2e^y$

(c) $y = x + e^{-x}$, $z = e^x$; $y' = 1 - z^{-1}$, $z' = (y - x)^{-1}$

Ülesanne 28.5. (M) Näidake, et süsteemi $y' = -z$, $z' = y$ üldlahendiks on

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad z = C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x),$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Ülesanne 28.6. (M) < * > Näidake, et süsteemi

$$y' = \frac{y^2}{z^2}, \quad z' = \frac{y}{z}$$

üldlahendiks on

$$y = C_1(C_1x + C_2), \quad z = C_1x + C_2,$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid, mis ei ole korraga võrdsed nulliga.

Ülesanne 28.7. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

(a) $y' = z$, $z' = -y$

(d) $y' = z$, $z' = \frac{z^2}{y}$

(b) $y' = z + 1$, $z' = y + 1$

(e) $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $z' = y + x - \frac{z}{x}$

(c) $y' = 1 - \frac{1}{z}$, $z' = \frac{1}{y-x}$

(f) $y' = \frac{x}{z}$, $z' = -\frac{x}{y}$

Praktikum 29

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

29.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 29.1. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

- | | |
|---|---|
| (a) $y' = \frac{y^2}{z-x}, z' = y + 1$ | (j) $\frac{dx}{dt} = z - y, \frac{dy}{dt} = z, \frac{dz}{dt} = z - x$ |
| (b) $y' = \frac{z}{x}, z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$ | (k) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x, \frac{dz}{dt} = x + y + z$ |
| (c) $y' = y^2 z, z' = x^{-1} z - y z^2$ | (l) $\frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \frac{dy}{dt} = 2y - z, \frac{dz}{dt} = z$ |
| (d) $y' = 2xy, z' = (z - x)x^{-1}$ | (m) $\frac{dx}{dt} = -9y, \frac{dy}{dt} = x$ |
| (e) $y' = 1 + z^{-1}, z' = z^2$ | (n) $\frac{dx}{dt} = y + t, \frac{dy}{dt} = x - t$ |
| (f) $y' = z^2 + \sin(x), z' = y(2z)^{-1}$ | (o) $\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0;$
$x(0) = 1, y(0) = 4$ |
| (g) $y' = y + z, z' = -5z$ | (p) $\frac{dx}{dt} = x + 5y, \frac{dy}{dt} = -x - 3y, x(0) = -2,$
$y(0) = 1$ |
| (h) $4y' - z' + 3y = \sin(x), y' + z = \cos(x)$ | |
| (i) $\frac{dx}{dt} = y + z, \frac{dy}{dt} = x + z, \frac{dz}{dt} = x + y$ | |

Ülesanne 29.2. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

- | | |
|--|--|
| (a) $y' = y^2 + z^2, z' = 2yz$ | (e) $\frac{dx}{dt} = \sin(x) \cos(y), \frac{dy}{dt} = \cos(x) \sin(y)$ |
| (b) $y' = \frac{z}{(z-y)^2}, z' = \frac{y}{(z-y)^2}$ | (f) $e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$ |
| (c) $y' = \frac{y}{z}, z' = \frac{z}{y}$ | (g) $\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{2x(x^2-y^2-1)}, \frac{dy}{dt} = \frac{x^2-1}{2y(x^2-y^2-1)}$ |
| (d) $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}$ | (h) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}$ |

Ülesanne 29.3. (F) Joonisel kujutatud vooluahelat kirjeldab diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \quad (29.1)$$

kus $I(t)$ on allika voolutugevus. Eeldades, et $I(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, leidke süsteemi (29.1) lahend algtingimusel $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

29.2 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 29.1

Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**.

Kahe muutuja x ja y korral on esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni $u(x, y)$, mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi samasuseks. Kui hariliku esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub argumentidest ja ühest suvalisest konstandist, siis esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi korral võib lahend sõltuda ühest suvaliselt funktsioonist. Geomeetriselt vastab võrrandile $u = u(x, y)$ pind ruumis, seda pinda nimetatakse integraalpinnaks.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Ülesanne 29.4. (!) Näidake, et $u(x, t) = 3x^2 - 2x\alpha t + 3\alpha^2 t^2$ on lainevõrrandi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ lahend.

Ülesanne 29.5. (!) Näidake, et $u(x, t) = a \sin(bx) \cos(\alpha bt)$: (i) on lainevõrrandi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ lahend, (ii) omab kuju $u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$.

Ülesanne 29.6. (M) < * > Leidke funktsioonid $V = V(x)$, mille korral $u(x, t) = V(x)e^{Ct}$ ($C = \text{const}$) on difusioonivõrrandi $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($D = \text{const}$) lahenditeks.

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks: otsitava erilahendi jaoks on vaja teada ruumilist kõverat, millest vastav integraalpind läbi läheb. Selle kõvera võrrandid võivad olla antud ristkoordinaatides

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

või parameetrisel kujul: leida integraalpind, mis läbib kõverat $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $u = \chi(t)$, kus parameeter t muutub mingis vahemikus (t_1, t_2) . Tuleb leida selline võrrandi lahend, mille korral

$$\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = 0.$$

Algtingimused

$$u(x, y_0) = f(x), \quad u(x_0, y) = g(y).$$

Ülesanne 29.7. (!) Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandite Cauchy ülesanded.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0; u(x, 1) = x^2$

(c) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y; u(1, y) = y^2$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = xy; u = 1; x^2 + y^2 = 1$

(d) $x \frac{\partial u}{\partial x} = 0; u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y$

Praktikum 30

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon $u = u(x, y)$ on kahe muutuja funktsioon, siis **lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju** on

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (30.1)$$

Võrrandi (30.1) lahendamiseks tuleb lahendada harilik diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dx}{p(x, y)} = \frac{dy}{q(x, y)}. \quad (30.2)$$

Osatuletistega võrrandi (30.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi(x, y)),$$

kus ψ on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi (30.2) esimene integraal ja $\Psi(z)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 30.1. (!) Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y)$.

(a) $y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$

(b) $y \frac{\partial u}{\partial x} = u$

(c) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$

(d) $2x \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0$

(e) $xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = yu$

(f) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$

(g) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = ux$

(h) $(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0$

(i) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$

(j) $xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = x$

(k) $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$

(l) $\cos(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \cos(x) \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x) \cos(y)$

(m) $\frac{1}{\cos(x)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u + \cot(y)$

(n) $\sin^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \tan(u) \frac{\partial u}{\partial y} = \cos^2(u)$

31.1 Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

1.1. **Homogeensed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole murdlineaarset funktsiooni sisaldavat võrrandit, mis taandub homogeenseks võrrandiks)

1.2. Esimest järku **lineaarsed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole Bernoulli võrrandit, mis taandub lineaarseks võrrandiks)

1.3. **Eksaktsed** diferentsiaalvõrrandid

2. Teist järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

2.1. Teist järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid

3. Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

3.1. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine **järgu alandamise teel**

3.2 Kõrgemat järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid

4. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

4.1. Diferentsiaalvõrrandisüsteemi lahendi kontrollimine

4.2. Diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamine **ühele võrrandile taandamise teel** (töös ei ole integreeruvate kombinatsioonide leidmise meetodit vajavaid süsteeme)

5. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

5.1. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi kontrollimine

31.2 Kontrolltöö näidisülesanded

Ülesanne 31.1. (!) Lahendage homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$\frac{y}{x}y' - 1 = \frac{y^2}{x^2}.$$

Ülesanne 31.2. (!) Leidke esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{xe^x}$$

lahend, mis rahuldab algtingimust $y(1) = 0$.

Ülesanne 31.3. (!) Lahendage eksaktne diferentsiaalvõrrand

(näidake, et on eksaktne!)

$$(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0.$$

Ülesanne 31.4. (!) Lahendage teist järku lineaarne konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrand

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$$

Ülesanne 31.5. (!) Leidke teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y'' + 3y' = 9x^2 - 81.$$

Ülesanne 31.6. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = 2x + z \\ z' = x^2 - 2e^x \end{cases}$$

kus otsitavateks funktsioonideks on $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Ülesanne 31.7. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' + 2x = z - 3 \cos(2x) \\ z' = -y + 2 \end{cases},$$

kus otsitavateks funktsioonideks on $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Ülesanne 31.8. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrand järgu alandamise teel

$$y''' = \frac{1-x}{x}y''.$$

Ülesanne 31.9. (!) Näidake, et funktsioon $u(x, y) = x^2 + y^2$

on osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lahendiks.

Praktikum 32

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid Eksami näidisülesanded

32.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon $u = u(x, y, z)$ on kolme muutuja funktsioon, siis lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$p(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (32.1)$$

Võrrandi (32.1) lahendamiseks tuleb lahendada sümmeetriline harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y, z)} = \frac{dy}{q(x, y, z)} = \frac{dz}{k(x, y, z)}. \quad (32.2)$$

Osatuletistega võrrandi (32.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (30.2) sõltumatud esimesed integraalid ja $\Psi(z_1, z_2)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 32.1. (!) Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y, z)$.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(d) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} = xy$

(b) $(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(e) $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 u \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(c) $(x - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

Ülesanne 32.2. (!) Leidke antud võrrandi selline integraalpind $u = u(x, y)$, mis läbib antud joont.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}; y = 1, u = 2x$

(g) $yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy; x = a, y^2 + u^2 = a^2, a = \text{const}$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0; x = 0, u = y$

(h) $(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u; x - y = 2, u + 2x = 1$

(c) $2\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}; x = 1, u = y^2$

(d) $(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0; x = 0, u = y^2$

(e) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u; y = x, u = x^3$

(i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{u}, u(2, y) = y$

(f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u; x = 2, u = y - 4$

(j) $xy \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0; u = 0, xy = a^2, a = \text{const}$

32.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II

Eksam koosneb teooria ja ülesannete osast.

32.2.1 Eksami teooria osa

1. Mõisted, näited mõiste kohta
2. Valemi tuletamine või tõestus

32.2.2 Eksami ülesannete teemad

Diferentsiaalvõrrandid

1. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid
2. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

32.3 Eksami näidisülesanded

Ülesanne 32.3. (!) Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = z + e^{2x} \\ z' = 4y + 8 \end{cases},$$

kus otsitavateks funktsioonideks on $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Ülesanne 32.4. (!) Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial y} - xy = 0, u(x, 2) = x^2,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$.

Ülesanne 32.5. (!) Leidke lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$(1 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} + yx \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

selline lahend $u = u(x, y)$, mis rahuldab tingimust $u(x, 0) = x^2$.

Ülesanne 32.6. (!) Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$(y - ze^z) \frac{\partial u}{\partial x} + ze^z \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u(x, y, z)$.

Ülesanne 32.7. (!) Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y^2} - 1 \quad (x, y > 0),$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$

Praktikum 33

Vastused

Praktikum 1

Vastus 1.3. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) ei

Vastus 1.6. ei

Vastus 1.7. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) jah (g) jah (h) ei (i) jah

Vastus 1.8. (a) jah (b) jah (c) ei (d) jah (e) jah (f) jah

Vastus 1.9. (a) on (b) ei ole (c) on (d) on

Vastus 1.10. (a) on (b) on (c) on (d) on (e) on (f) ei ole (g) on (h) ei ole (i) on

Vastus 1.11. (a) $L(a_1, \dots, a_5) = \{(x + 2y + z, y + 2z, y + 3z, -x + 4z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (b) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, 2x + y, x + 2y, y + 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (c) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, x, x + y, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Praktikum 2

Vastus 2.1. jah

Vastus 2.2. $k^3 - 2k = 0$

Vastus 2.3. $(k - l)(k - m)(l - m) = 0$

Vastus 2.4. (a) $-5a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$ (b) $-5f_1 + 4f_2 + f_3 = 0$ (c) $-5z_1 + 4z_2 + z_3 = 0$ (d) $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

Vastus 2.6. (a) lineaarselt sõltumatu (b) $4(6x + 9) - 3(8x + 12) = 0$ (c) lineaarselt sõltumatu (d) $2(4 - x) - 32(2x + 3) + 11(6x + 8) = 0$ (e) lineaarselt sõltumatu (f) lineaarselt sõltumatu (g) lineaarselt sõltumatu (h) lineaarselt sõltumatu

Praktikum 3

Vastus 3.1. $(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5})$

Vastus 3.2. Olgu $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 2, 1, 0)$ ja $a_5 = (1, 0, 0, 0)$. Siis (a) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (b) $\{a_1, a_2, a_3\}$ (c) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (d) $\{a_1, a_2, a_5\}$

Vastus 3.3. A koordinaadid on $(3, 4, -2)$ ja B koordinaadid on $(2, 5, 0)$

Vastus 3.4. (a) on baas, koordinaadid on $(3, 7, 13)$ (b) on baas, koordinaadid on $(-4, -6, 13)$ (c) on baas, koordinaadid on $(1, 1, 1)$

Vastus 3.5. Suvalise vektori (x_1, x_2, x_3) koordinaadid uue baasi suhtes on $(-3x_1 - 8x_2 - 5x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Seega vektori $(6, 2, -7)$ koordinaadid uue baasi suhtes on $(1, 1, 1)$.

Vastus 3.6. (a) Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ ja $a = -139e_1 + 38e_2 + 24e_3$, $a = e'_1 + e'_2 + e'_3$ (b)

Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $a = 0e_1 + 2e_2$, $a = e'_1 + e'_2$ (c) Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja

$$a = 2e_1 + 4e_2 + 5e_3 - 3e_4, a = 5e'_1 + 2e'_2 - 8e'_3 + 3e'_4$$

Vastus 3.7. Vektori a koordinaadid uue baasi suhtes on $(-13, 6, -27)$

Praktikum 4

Vastus 4.1. (a) $S_n = \frac{n}{n+1}$, $S = 1$ (b) $S_n = \frac{1}{3} \frac{n}{n+1}$, $S = \frac{1}{3}$ (c) $S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{11}{18}$ (d) $S_n = \frac{2n+2}{2n+3}$, $S = 1$ (e) $S_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $S = 1$ (f) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S \rightarrow \infty$ (g) $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S \rightarrow \infty$. Rea summa võib tuletada kuupide järgi: $\sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^n (k+1)^3 - (n+1)^3$ (h) $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, $S = 1$ (i) $S_n = \frac{4}{3} (1 - (-1/2)^{n+1})$, $S = \frac{4}{3}$

Vastus 4.2. (a) $S_1 = \ln 3$, $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1}$ (b) $S_1 = 2$, $a_n = \frac{-2}{n^2+n}$ (c) $S_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{-1}{n^2+n}$ (d) $S_1 = 2$, $a_n = 1$ (e) $S_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{2n-1}{(n^2+2)(n^2-2n+3)}$ (f) $S_1 = 1$, $a_n = n^3$

Vastus 4.3. (a) Piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ ei leidu. Lisaks võib märgata, et $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-2)^n| = \infty \neq 0$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n)^{-1/n} = 1 \neq 0$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = -7 \neq 0$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} = 1 \neq 0$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e \neq 0$

Vastus 4.5. (a) koondub, $S = \frac{15}{2}$ (b) hajub (c) hajub, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (d) koondub, $S = \frac{8e^4}{e-2}$ (e) koondub, $S = \frac{9}{8}$ (f) koondub, $S = \frac{11}{24}$

Vastus 4.6. $10/3$ ehk $3.33(3)$ m.

Vastus 4.7. $\frac{81}{11}$

Vastus 4.8. $5/3$ ehk $1.66(6)$

Vastus 4.9. Umbes 51 aastaks ja 106 päevaks.

Praktikum 5

Vastus 5.1. (a) koondub kui geomeetriline rida, $S = 3$ (b) hajub kui harmooniline rida, $\alpha = 1$ (c) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{e}{e-1}$ (d) hajub, kui geomeetriline rida, $q = \frac{5}{4} > 1$ (e) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ (f) koondub, kui geomeetriline rida, $S = 2$ (g) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = -0.9 \leq 1$ (h) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{2}{3}$

Vastus 5.2. (a) koondub (b) hajub (c) hajub (d) koondub (e) hajub (f) koondub

Vastus 5.6. (a) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (b) koondub, kuna (reast suurem) geomeetriline rida teguriga $q = 1/4$ koondub (c) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (d) koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub (e) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (f) hajub, kuna (reast väiksem) harmooniline rida hajub (g) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (h) koondub, kuna (reast suurem)

harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ koondub **(i)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub **(j)** koondub, kuna näiteks (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub **(k)** koondub, kuna näiteks ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 3 > 1$ koondub **(l)** koondub, kuna ekvivalentne geomeetriline rida teguriga $q = 2/5 < 1$ koondub

Praktikum 6

Vastus 6.1. **(a)** $D = 0 < 1$, koondub **(b)** $D = 2 > 1$, hajub **(c)** $D = \frac{1}{4} < 1$, koondub **(d)** $D = \frac{2}{5} < 1$, koondub **(e)** $D = 1$, tunnus ei tööta, hajub kui harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{1}{2}$ **(f)** $D = \frac{2}{3} < 1$, koondub **(g)** $D = 1$, tunnus ei tööta, koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega 2 koondub **(h)** $D = \frac{1}{e} < 1$, koondub **(i)** $D = 4 > 1$, hajub, (või siis näidata, et $u_n \rightarrow \infty$) **(j)** $D = 3 > 1$, hajub **(k)** $D = \frac{1}{25} < 1$, koondub **(l)** $D = \frac{3}{2} > 1$, hajub

Vastus 6.2. **(a)** $C = 0 < 1$, koondub **(b)** $C = \frac{3}{4} < 1$, koondub **(c)** $C = 2 > 1$, hajub **(d)** $C = \frac{3}{2} > 1$, hajub **(e)** $C = 1$, tunnus ei tööta, koondub kui harmooniline rida astmega $\alpha = 1.5$ **(f)** $C = \frac{e}{3} < 1$, koondub **(g)** $C = \frac{1}{2} < 1$, koondub **(h)** $C = 2 > 1$, hajub **(i)** $C = 0 < 1$, koondub **(j)** $C = 0 < 1$, koondub **(k)** $C = 0 < 1$, koondub **(l)** $C = \frac{1}{e} < 1$, koondub

Vastus 6.5. **(a)** koondub **(b)** koondub **(c)** koondub (kahanemist on lihtsam näidata läbi funktsiooni tuletise) **(d)** koondub **(e)** tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow \infty$ **(f)** tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow 1/2$

Vastus 6.6. **(a)** koondub absoluutselt **(b)** koondub tingimisi **(c)** koondub absoluutselt **(d)** koondub tingimisi **(e)** koondub absoluutselt **(f)** koondub tingimisi **(g)** koondub tingimisi **(h)** koondub tingimisi (siinus tuleks lahti kirjutada korrutiste summaks) **(i)** hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ **(j)** koondub absoluutselt **(k)** hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ **(l)** hajub, kui $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; koondub tingimisi $a = -1$ korral; koondub absoluutselt $a \in (-1, 1)$ korral

Praktikum 7

Vastus 7.1. **(a)** $R = 1$, $A = (-1, 1)$ ja $X = (-1, 1]$ **(b)** $R = \frac{1}{5}$, $A = X = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ **(c)** $R = 1$, $A = X = (-1, 1)$ **(d)** $R = 8$, $A = X = (-4, 12)$ **(e)** $R = \frac{1}{4}$, $A = X = (-\frac{1}{2}, 0)$ **(f)** $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$ **(g)** $R = \frac{1}{2}$, $A = X = (-3, -2)$ **(h)** $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$ **(i)** $R = 0$, $A = X = \{0\}$ **(j)** $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$, rida $\sum \frac{y^n}{n!}$ koondub iga $y \in \mathbb{R}$ korral, järelikult ka esialgne rida $((x+4)^2 = y)$ **(k)** $R = 0$, $A = X = \{3\}$ **(l)** $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$

Vastus 7.2. **(a)** Kasutame geomeetrilist rida $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, kui $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad X = (-1, 1)$$

(b)

$$\frac{x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}, \quad X = (-1, 1)$$

(c) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x} = \ln|x+1| + C$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad X = (-1, 1]$$

(d) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$,

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}, \quad X = [-1, 1]$$

Vastus 7.5. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ ehk $y = e^{2x}$

Vastus 7.6. $y = 1 + x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ehk $y = 2e^x - x - 1$

Vastus 7.7. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right) x^n$ (f) $1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{3^n (2n)!}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n x^n}{2^n n!}$

Vastus 7.8. (a) 0.00266636, reast $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n-1) \cdot (2n-1)! \cdot 5^{4n-1}}$ piisab võtta kaks esimest liiget (b) 0.09994446 (c) 0.100001 (d) 0.48491714 (e) 0.48722236 (f) 0.18533015

Praktikum 8

Vastus 8.1. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.3. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$, $x \in \mathbb{R}$

Vastus 8.4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Vastus 8.5. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, $x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.10. (a) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq 0\}$, $\partial\mathcal{D} = \{(x, y) : y = 0\}$; (b) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$; (c) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$; (d) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y\}$; (e) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y, x > 0, x \neq 1\}$; (f) $\mathcal{D} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$; (g) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$; (h) $\mathcal{D} = [-1, 1]^2$; (i) $\mathcal{D} = \{(x, y) : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; (j) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 > y\}$; (k) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y^2 > x \geq 0\}$; (l) $\mathcal{D} = (-1, \infty) \times ((-1, \infty) \setminus \{0\})$; (m) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 3\}$; (n) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 3\}$; (o) $\mathcal{D} = (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \times [0, \infty)) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] \times (-\infty, 0])$; (p) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$; (q) $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2n\pi\}$; (r) $\mathcal{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x, y) : 2n\pi \leq x^2 + y^2 \leq (2n+1)\pi\}$; (s) $\mathcal{D} = \{(x, y) : |y| \leq |x|, x \neq 0\}$; (t) $\mathcal{D} = [0, 8]^2 \cap \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}} ([2m, 2m+1] \times [2n, 2n+1] \cup [2m+1, 2m+2] \times [2n+1, 2n+2])$.

Vastus 8.11. (a) Samad; (b) erinevad; (c) erinevad; (d) samad; (e) erinevad; (f) samad; (g) erinevad, sest g ei ole punktis $(0, 0)$ määratud.

Vastus 8.12. (a) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$; (b) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$; (c) $\mathcal{D} = \{(x, y) : xy = x + y\}$.

Vastus 8.13. (a) $\frac{5}{4}$; (b) -1 ; (c) 0 .

Vastus 8.15. $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$, $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Vastus 8.16. $1 + y, x + \frac{1}{y}$.

Vastus 8.17. (a) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$; (b) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\}$; (c) $E = \{(x, y, z) : xy > 0, z > 0\}$; (d) $E = \{(x, y, z) : x, yz \in [-1, 1]\}$; (e) $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; (f) E on kogu xyz -ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud.

Vastus 8.18. (a) $\frac{3}{4}$; (b) $1, 25$; (c) 0 .

Praktikum 9

Vastus 9.1. (a) 4; (b) 16; (c) 1; (d) 0; (e) 0; (f) 2; (g) $\frac{1}{8}$; (h) 0; (i) 0; (j) $-\infty$; (k) ei leidu; ülesandele k); (l) 0; (m) 1, võtta $u = xy$ ja arvestada, et $u \rightarrow 0$ korral $\tan u \sim u$; (n) $\frac{1}{2}$; (o) 1; (p) 1, arvestada, et $\lim u = \lim e^{\ln u} = e^{\lim \ln u}$.

Vastus 9.6. (a) $A = 0, B = 1$; (b) $A = 1, B = 1$;

Vastus 9.7. (a) 0; (b) 0.

Vastus 9.8. (a) Pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas; (b) pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Vastus 9.9. (a) Pidev, pidev x ja y järgi; (b) ei ole pidev, pidev x ja y järgi; (c) ei ole pidev, pidev x järgi, ei ole pidev y järgi; (d) pidev, ei ole pidev x järgi, pidev y järgi; (e) pidev, ei ole pidev x ega y järgi.

Vastus 9.10. (a) $(0, 0)$; (b) katkeb sirgel $x + y = 0$; (c) katkeb sirgel $y + x = 0$; (d) katkeb koordinaattelgedel; (e) katkeb koordinaattelgedel; (f) katkeb punktis $(0, 0)$ ning ringjoontel $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + y^2 = 2$.

Vastus 9.11. (a) Lisada $f(0, y) = y$; (b) lisada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = 0$; (c) lisada $f(x, y) = 0$, kui $x + y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$; (d) lisada $f(x, y) = \frac{1}{64}$, kui $x + 2y = 8$.

Praktikum 10

Vastus 10.1. (a) $f_x = 2x - y, f_y = 4y - x$; (b) $f_x = \frac{3}{2\sqrt{3x-y}}, f_y = \frac{-1}{2\sqrt{3x-y}}$; (c) $f_x = 0, f_y = 2y$; (d) $f_x = 2/x, f_y = 1/y$; (e) $f_x = \frac{-1}{(x-y)^2}, f_y = \frac{1}{(x-y)^2}$; (f) $f_x = 2e^{2x+3y}, f_y = 3e^{2x-3y}$; (g) $f_x = y^2z, f_y = 2xyz, f_z = xy^2$; (h) $f_x = \frac{2xy}{z}, f_y = \frac{x^2}{z}, f_z = -\frac{x^2y}{z^2}$.

Vastus 10.2. (a) $f_x = 3, f_y = -2y$; (b) $f_x = 2x, f_y = 2y$; (c) $f_x = 2e^{2x+3y}, f_y = 3e^{2x+3y}$; (d) $f_x = 3x^2y+2, f_y = x^3$; (e) $f_x = 3x^2yz^2, f_y = x^3z^2 + 7, f_z = 2x^3yz$; (f) $f_x = \frac{1}{x}, f_y = \frac{1}{y}, f_z = \frac{2}{z}$; (g) $f_x = 5(x+2y)^4, f_y = 10(x+2y)^4$; (h) $f_x = \frac{2}{y}, f_y = -\frac{2x}{y^2}$; (i) $f_x = \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}, f_y = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}$; (j) $f_x = -4\sin(4x-y), f_y = \sin(4x-y)$; (k) $f_x = \sin y, f_y = x \cos y$; (l) $f_x = \frac{1}{y \cos^2 \frac{x}{y}}, f_y = -\frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}$; (m) $f_x = -\frac{y}{1+x^2y^2}, f_y = -\frac{x}{1+x^2y^2}$; (n) $f_x = xy^{y-1}, f_y = x^y \ln x$; (o) $f_x = y(x+y)^{y-1}, f_y = f[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}]$; (p) $f_x = a^{xy}[y \ln a + \frac{xy^2}{a}], f_y = a^{xy}[x \ln a + \frac{y^2x^2}{a}]$, kus $a = 1 + xy$. Osatuletise f_y saame osatuletisest f_x vahetades x ja y kohtadega. (q) $f_x = \sin y \sin^{y-1}, f_y = f \ln x \cos y$; (r) $f_x = 2x, f_y = zy^{z-1}, f_z = y^z \ln y$; (s) $f_x = \frac{1}{z-t}, f_y = \frac{-1}{z-t}, f_z = \frac{y-x}{(z-t)^2}, f_t = \frac{x-y}{(z-t)^2}$; (t) $f_x = y^2z^3t^4, f_y = 2xyz^3t^4, f_z = 3xy^2z^2t^4, f_t = 4xy^2z^3t^3$.

Vastus 10.4. (a) Kui $x \neq 0$, siis $f_x = \sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}, f_y = \cos \frac{y}{x}$; kui $x = 0$, siis $f_y(0, y) = 0, f_x(0, 0) = 0$. Kui $y \neq 0$, siis osatuletis $f_x(0, y)$ ei eksisteeri. (b) Kui $x \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - \frac{yx^2}{a}, f_y = \frac{x^3}{a}$, kus $a = x^2 + y^2$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0, f_y(0, y) = 0$. (c) Kui $a = x^2 + y^2 \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \ln a + \frac{2x^3y^2}{a}$. Et funktsioonid x ja y paiknevad sümmeetriliselt, siis vahetades x ja y kohtadega, saame arvutamata $f_y = 2yx^2 \ln a + \frac{2y^3x^2}{a}$. Kui $a = 0$, s.o. punktis $(0, 0)$, on $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$. (d) Kui $|x| + |y| \neq 0$, siis $f_x = \frac{2xy^3}{a^2}, f_y = \frac{x^2(x^2-y^2)}{a^2}$, kus $a = x^2 + y^2$; $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$.

Vastus 10.5. (b) Kui $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - y, f_y = x - 2y \arctan \frac{x}{y}$; kui $x = 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x(0, y) = -y, f_y(0, y) = 0$; kui $x \neq 0$ ja $y = 0$, siis $f_y(x, 0) = x, f_x(x, 0) = 0$; kui $x = y = 0$, siis $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$. (a) Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = xy^2[3x \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}], f_y = yx^2[3y \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}]$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0, f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0, f_y(x, 0) = 0$. (c) Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \sin \frac{1}{b} - y \cos \frac{1}{b}, f_y = 2yx^2 \sin \frac{1}{b} - x \cos \frac{1}{b}$; kui $x = 0$, siis $f_x(0, y) = 0, f_y(0, y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x, 0) = 0, f_y(x, 0) = 0$.

Vastus 10.8. $f_x = 7.5, f_y = 40$, seega riik peaks investeerima kapitali

Vastus 10.11. (a) puutuja on $z = x - y$; (b) puutuja on $z = 2(x - 1)$, normaal on $x = 1 + 2t$, $y = 0$, $z = -t$; (c) puutuja on $z = 1$, normaal $x = 0$, $y = 0$, $z = 1 - t$; (d) puutuja on $z = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{2}$, normaal on $-2(x - 1) = 2(y - 2) = -(z - 1)$; (e) puutuja on $z = 5 + 8(x - 1) + 2(y - 1)$, normaal on $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$; (f) puutuja on $z = -4x - 2y - 3$, normaal on $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$; (g) puutuja on $z = 2/5 + 3x/25 - 4y/25$, normaal on $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-25}$; (i) puutuja on $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{x-\pi}{4} + \frac{\pi}{16}(y-4))$, normaal on $\frac{x-\pi}{-1/(4\sqrt{2})} = \frac{y-4}{\pi/(16\sqrt{2})} = \frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$.

Vastus 10.12. (a) $(-4, 1, -31)$; (b) $(0, 0, 0)$ ja $(1, 1, 1)$; (c) $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ ja $(-1, -1, 1)$; (d) $(a^2/b, b^2/a, 3ab)$.

Vastus 10.13. (a) $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = f_{xy} = 0$; (b) $f_{xx} = -f_{yy} = 6xy$, $f_{xy} = 3(x^2 - y^2)$; (c) $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$, $f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$; (d) $f_{xx} = 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y)$, $f_{yy} = -x \sin(x + y)$, $f_{xy} = \cos(x + y) - x \sin(x + y)$; (e) $f_{xx} = -4y(x + y)^{-3}$, $f_{yy} = 4x(x + y)^{-3}$, $f_{xy} = 2(x - y)(x + y)^{-3}$; (f) $f_{xx} = y(y - 1)x^{y-2}$, $f_{yy} = x^y \ln^2 x$, $f_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x)$ ($x > 0$); (h) $f_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $f_{xy} = 0$ ($xy \neq 1$); (i) $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -s$, $f_{xy} = z - s$, $f_{xz} = y - s$, $f_{yz} = x - s$, kus $s = (x + y + z)^{-2}$; (j) $f_{xx} = -y^2 z^2 \sin v$, $f_{yy} = -x^2 z^2 \sin v$, $f_{zz} = -x^2 y^2 \sin v$, $f_{xy} = z \cos v - xy z^2 \sin v$, $f_{xz} = y \cos v - xy^2 z \sin v$, $f_{yz} = x \cos v - x^2 y z \sin v$, kus $v = 1 + xyz$.

Vastus 10.15. (a) $f_{xy} = f_{yx} = \cos x$; (b) $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2y}{x}$; (c) $f_{xy} = e^{x+y}$.

Vastus 10.17. (a) $f_{xxy} = 0$; (b) $f_{xyz} = f_{zxy} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$; (c) $f_{xxxyyy} = -6(\cos x + \cos y)$.

Praktikum 12

Vastus 12.1. (a) $df = dx + 3dy$; (b) $df = 4(x - y)dx - 4xdy$; (c) $df = ydx + xdy$; (d) $df = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; (e) $df = e^{1+xy}(ydx + xdy)$; (f) $df = \sin(xy)(ydx + xdy)$; (g) $df = y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy$; (h) $df = \frac{dx - 2dy + 3dz}{\cos^2(x - 2y + 3z)}$; (i) $df = -\sin(x^2 yz)(2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz)$; (j) $df = 2xz(2yz dx + xz dy + 2xy dz)f$.

Vastus 12.4. (a) $du(P) = -0.2$, $\Delta u = -0.21$; (b) $du(P) = 2.5$, $\Delta u = 2.504$.

Vastus 12.6. (a) 0.04; (b) -0.01; (c) -0.1; (d) -0.18; (e) 0.06; (f) -0.1401.

Vastus 12.7. 125 m²; 250 m².

Vastus 12.8. 1200.

Vastus 12.9. vähenevad vastavalt 44.8 cm³ ja 13.6π cm².

Vastus 12.10. (a) 4300 eurot; (b) 8000 eurot.

Vastus 12.11. 4680 cm³.

Vastus 12.12. 3%.

Vastus 12.13. Umbes -3.28° C.

Vastus 12.14. 0.5 liitrit minutis.

Vastus 12.15. Rõhk langeb umbes 8.83 kPa.

Vastus 12.16. Ümardamisel tehtav viga on kuni 0.05, korrutise viga on kuni 25000.

Vastus 12.17. (a) 1.12; (b) -0.03; (c) 7.18; (d) 1.1; (e) 3.037; (f) $22\frac{249}{352}$; (h) $\frac{\sqrt{2}}{14}\pi$.

Vastus 12.19. 4.11 mm.

Praktikum 13

Vastus 13.1. (a) P on lokaalne miinimum, Q ei ole ekstreemumpunkt, R on lokaalne maksimum; (b) P on sadulpunkt, Q on lokaalne maksimum, R ei ole ekstreemumpunkt.

Vastus 13.2. (a) $\text{locmax}f = f(-1, 0) = 1$; (b) $\text{locmin}f = f(1, 0) = -2$, kriitilises punktis $(-1, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (c) kriitilises punktis $(0, 1)$ ekstreemumit ei ole; (d) $\text{locmax}f = f(0, 0) = 1$; (e) $\text{locmin}f = f(1, 0) = -1$ (f) $\text{locmin}f = f(1, 1) = -1$, kriitilises punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (g) $\text{locmin}f = f(0, 0) = 2$; (h) $\text{locmin}f = f(1, 2) = 3 - \ln 4$, punkt $(-1, 2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda; (i) $\text{locmax}f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\text{locmin}f = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; (j) Punktides $(1, 1)$ ja $(-1, -1)$ $\text{locmin}f = -2$. Punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, mida näitab funktsiooni väärtuste võrdlus sirgetel $y = x$ ja $y = -x$ punkti $(0, 0)$ läheduses.

Vastus 13.4. (a) $\text{max}f = f(0, -1) = 2$, $\text{min}f = f(0, \frac{1}{2}) = -0,25$; (b) $\text{max}f = f(-1, 0) = f(1, 0) = 3$, $\text{min}f = f(0, 1) = f(0, -1) = 1$; (c) maksimumi ei leidu, $\text{min}f = f(0, 1) = -3$; (d) $\text{max}f = f(-1, 0) = f(1, 0) = f(0, -1) = f(0, 1) = 1$, $\text{min}f = f(0, 0) = 0$; (e) $\text{max}f = f(0, 1) = f(0, -1) = \frac{3}{e}$, $\text{min}f = f(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \approx -0.82$.

Vastus 13.5. Punktis $(0, 0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0, 0) = 0$, kuid näiteks punktis $(5, 0)$ on $f(5, 0) = 25$. Seega punkt $(0, 0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt. Osatuletised on nullid ka punktis $(2, 2)$, kuid see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.

Vastus 13.7. Rajaks on sirged $q = 0$, $r = 0$ ja $q + r = 1$.

Vastus 13.9. $10 + 10 + 10$.

Vastus 13.10. Kuup.

Vastus 13.11. $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$, $z = \frac{(2V)^{\frac{1}{3}}}{2}$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus.

Vastus 13.12. Ristküliku küljed on $\frac{2p}{3}$ ja $\frac{p}{3}$.

Vastus 13.13. $p_1 = 580.81$ ja $p_2 = 808.08$.

Vastus 13.14. $P = -0.2x^2 + 16x - 0.1y^2 + 12y - 20$, 40 autot Ameerikas hinnaga 12000 \$, 60 autot Euroopas hinnaga 10000 \$.

Vastus 13.16. 6 tundi harjutamist ja 1 tund puhkust.

Vastus 13.17. $A = (5/4, -1/4)$

Vastus 13.19. (a) $y' = -\frac{e^x}{1+\cos y}$; (b) $y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$; (c) $y' = -\frac{y}{y+x}$; (d) $y' = \frac{x-y}{x-2y^3}$; (e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; (f) $y' = -\frac{e^y+ye^x-4xy}{xe^y+e^x-2x^2}$; (g) $y' = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$; (h) $y' = \frac{\cos(xy)-xy\sin(xy)-y\sin x}{x^2\sin(xy)-\cos x}$.

Vastus 13.20. (a) $4/3$; (b) 2 ; (c) $-4/5$; (d) $-(2 - \ln 2)$.

Vastus 13.22. (c) $P_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; (d) $P_2(x, y) = 9 + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + \frac{1}{3}(y-3)^2$; (e) $P_2(x, y) = 2\pi(x-1) + (y-\pi) - \frac{\pi(x-1)^2}{2} + (x-1)(y-\pi)$; (f) $P_3(x, y) = 1 - xy$; (g) $P_2(x, y) = 1 + 4(x-\pi/4) - 2(y-\pi/4) + 8(x-\pi/4)^2 - 8(x-\pi/4)(y-\pi/4) + 2(y-\pi/4)^2$.

Vastus 13.23. $\arctan(xy) \approx \pi/4 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$, $f(1.1, 0.8) \approx 0.7229$.

Praktikum 14

Vastus 14.1. Vähiim kaugus on $2\sqrt{3}$

Vastus 14.2. Vähiim kaugus on 1

Vastus 14.3. (a) $f_{\min} = 2$ punktis (1, 1) ja $\lambda = -2$, (b) $f_{\max} = 1$ punktis (2, 2) ja $\lambda = -1$; $f_{\min} = -1$ punktis (-2, -2) ja $\lambda = 1$, (c) $f_{\min} = 1$ punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ja $\lambda = \frac{5}{2}$, (d) $f_{\min} = 9$ punktis (3, 3, 3) ja $\lambda = 9$, (e) $f_{\min} = -9$ punktis (-1, 2, -2) ja $\lambda = \frac{1}{2}$; $f_{\max} = 9$ punktis (1, -2, 2) ja $\lambda = -\frac{1}{2}$, (f) $f_{\min} = 6$ punktis (1, 1, 2) ja $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$,

Vastus 14.4. Maksimaalne laskekaugus on $\frac{2E}{mg}$

Vastus 14.5. (a) $z'_t = e^{\sin t - \cos t}(\cos t + \sin t)$; (b) $z'_t = \frac{5t^4}{t^5 - 1}$; (c) $u'_t = 2t \cos 2t + \sin 2t$; (d) $z'_t = 2t + 4t^3 + 1$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = t^2 + x^2 + y^2$, $t = t$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$ ja kasutada valemit $z'_t = z_t t'_t + z_x x'_t + z_y y'_t$; (e) $z'_t = \cos^{-2}(t + t^4 - t^5)(1 + 4t^3 - 5t^4)$; (f) $z'_x = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2 e^{2x}}$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = \arctan(xy)$, $x = x$, $y = e^x$ ja kasutada valemit $z'_x = z_x x'_x + z_y y'_x$; (g) $u'_x = 2e^x \sin x$; (h) $u'_t = u_x x'_t + u_y y'_t + u_z z'_t = 2u_x + \frac{u_y}{t} + u_z$; (i) $z'_t = (f_x x^2 \ln y + f_x x \ln y)(-2t) + (f_y x^2 \ln y + \frac{f_y x^2}{y})e^{\sin t} \cos t$, kus $x = 1 - t^2$, $y = e^{\sin t}$.

Vastus 14.6. (a) $z_x = z_u u_x + z_v v_x = 3x^2 \cos^2 y \sin y$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = x^3 \cos y(1 - 3 \sin^2 y)$; (b) $z_x = 0$, $z_y = 0$; (c) $z_x = y^x(2x + x^2 \ln y)$, $z_y = x^3 y^{x-1}$; (d) $z_x = 0$, $z_y = -1$; (e) $w_x = 2xv u^{v-1}$, $w_y = z u^v \ln u$, $w_z = 2z v u^{v-1} + y u^v \ln u$, kus $u = x \sin y$, $v = x \cos y$; (f) $w_x = e^{uv}(y - \frac{v}{xz} + uy)$, $w_y = e^{uv}(x - \frac{v}{yz} + ux)$, $w_z = -\frac{e^{uv}v}{z^2}$, kus $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$.

Vastus 14.7. (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = g'(y)$; (b) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+y)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+y)$; (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(y)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y)$; (d) $\frac{\partial z}{\partial x} = y f'(xy)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = x f'(xy)$; (e) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x/y)}{y}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x f'(x/y)}{y^2}$.

Vastus 14.9. 2 kraadi sekundis.

Vastus 14.11. $dI/dt = -0.000031$ A/s.

Vastus 14.12. -0.27 liitrit sekundis.

Vastus 14.13. (a) $\nabla f(1, -2) = (10, -4)$, (b) $\nabla f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, (c) $\nabla f(1, -1, -1) = (-1, 2, 3)$, (d) $\nabla f(1, -1, 0) = (1, 2, 0)$, (e) $\nabla f(e, e, -1) = (1, 1, e)$, (f) $\nabla f(1, -1) = (4, -4)$.

Vastus 14.14. (a) $|\nabla f(2, -1)| = 2\sqrt{5}$, (b) $|\nabla f(1, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $|\nabla f(2, 0)| = 2$, (d) $|\nabla f(2, -1)| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Vastus 14.15. Kiireima tõusuga trajektoor igast punktist on sirge, mis on risti selle kontuurjoonega, millel see punkt asetseb.

Vastus 14.16. Temperatuur kasvab kõige kiiremini suunas (1, -1) ja suurim kasvukiirus on $\frac{4\sqrt{2}}{e}$ ($^{\circ}C$ kraadi pikkusühiku kohta).

Vastus 14.17. Muutumiskiirused on (a) $2\sqrt{5}$, (b) $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$, (c) 2 ja (d) $3\sqrt{2}$.

Vastus 14.18. Vesi voolab suunas (3, 4) ja kiirusega 0,5 meetrit ühe horisontaalse meetri kohta.

Vastus 14.19. Suundades $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ on muutumiskiirus -1. Suunda, kus muutmiskiirus on -3 ei leidu. Suunas (0, -1) on muutumiskiirus on -2.

Vastus 14.20. Kiireim suund on $(-4, -4)$.

Vastus 14.21. Algingimusest saame, et $T(x, y, z) = \frac{360}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **(a)** Muutumiskiirus on $-\frac{200\sqrt{14}}{21}$. **(b)** Seda on võimalik näha, kas T avaldisest või gradiendi abil.

Vastus 14.24. **(a)** $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ **(b)** $f(x) = -0,2857x + 1,8571$ **(c)** $f(x) = 3$ **(d)** $f(x) = 0,5116x + 1,1163$

Vastus 14.25. **(a)** $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}x + 1$ **(b)** $f(x) = -0,3x^2 + 1,9x - 0,6$ **(c)** $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{4}{3}$ **(d)** $f(x) = 0,0844x^2 + 0,7727x + 1,026$

Vastus 14.26. **(a)** $f(x) = 18,7e^{-0,001x}$ **(b)** $f(x) = 7,1993e^{-0,008x}$

Vastus 14.27. **(a)** $f(x) = 0,51x + 0,41$ **(b)** Kuuenda aasta müüginumbrid on 3,47 miljonit eurot

Vastus 14.28. **(a)** $f(x) = 0,2878x^2 + 2,8847x + 34,281$, sest $R^2 = 0,9977$ **(b)** Keskmiste haiguste arv on ligikaudu 71

Praktikum 15

Vastus 15.1. **(a)** $\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 f(x, y) dx$ **(b)** $\int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$
(c) $\int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx$ **(d)** $\int_{-1}^1 dx \int_{-a}^a f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-b}^b f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ ja $b = \sqrt{1-y^2}$ **(e)**
 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-c}^c f(x, y) dx$, kus $c = \sqrt{y}$ **(f)** $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}} f(x, y) dx$.

Vastus 15.2. **(a)** $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$ **(b)** $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx$ **(c)** $\int_0^1 dx \int_{1-x}^a f(x, y) dy$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ **(d)** $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx +$
 $\int_{\frac{4}{2}}^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ **(e)** $\int_{-1}^0 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{-a}^{1-y} f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{y+1}$ **(f)** $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ **(g)**
 $\int_0^1 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx$, kus $a = \arccos y$ **(h)** $\int_0^1 dy \int_b^{\pi-b} f(x, y) dx$, kus $b = \arcsin y$.

Vastus 15.3. **(a)** $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{1}{10}$ **(c)** π **(d)** 2 **(e)** $\frac{3}{2}$, arvestada, et $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ **(f)** $\frac{1}{3}$ **(g)** $\frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{-2}{3}$ **(j)** $\frac{13}{81}$

Praktikum 16

Vastus 16.1. **(a)** 6; **(b)** 3,5; **(c)** -6; **(d)** $\frac{3}{2} \ln 2$.

Vastus 16.5.

- (a)** $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq 9, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$
(b) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq 4, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$
(c) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \varphi}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$
(d) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$
(e) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq \frac{2\sqrt{3}}{\cos \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \text{ ja } 1 \leq r \leq \frac{2}{\sin \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$
(f) $D = \left\{ (r, \varphi) : \frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

Vastus 16.6. **(a)** $\frac{4\pi}{3}$ **(b)** $3\pi + 2$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$ **(d)** $\frac{2\pi}{3}$ **(e)** $\pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2)$ **(f)** $\frac{\pi^2}{16}$

Vastus 16.7. (a) $\frac{32}{9}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{32}{9}$ (d) 24π (e) 7

Praktikum 17

Vastus 17.1. (a) $\frac{3}{4}$ (b) 2 (c) $16 - \frac{6}{\ln 2}$ (d) $7,5 - 8 \ln 2$ (e) 5 (f) $\pi 16$ (g) $\frac{\pi(b^2 - a^2)}{4}$ (h) $\frac{3\pi a^2}{2}$ (i) 2π (j) 1, minna üle polaarkoordinaatidele (k) 2, minna üle polaarkoordinaatidele (l) $\frac{5\pi}{8}$

Vastus 17.2. 8000 ft^3 ehk u. 216 m^3

Vastus 17.3. 90000 m^3

Vastus 17.4. 288000 m^3

Vastus 17.5. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{20}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{4}{\pi^2}$ (k) 12π

Vastus 17.6. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{560}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$ (g) $\frac{1}{6}$ (h) 16 (i) 22π (j) $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$ (k) $\frac{16}{3}$ (l) 3π (m) $4\pi(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$ (n) π

Vastus 17.7. (a) 14 (b) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$ (c) $14\pi a[a - \sqrt{a^2 - b^2}]$ (d) $2\pi\sqrt{2}$ (e) $\frac{16(\sqrt{8}-1)}{3}$ (f) $2a^2(\pi - 2)$ (g) 4π , võtke integreerimise piirkond yz -tasandil.

Vastus 17.9. 80π

Vastus 17.10. $4a^2/3$

Vastus 17.11. $4000(1 - e^{-2}) \ln 3, 5 \approx 4332, 88$

Vastus 17.12. $Q = \frac{2k\pi R^3}{3} C$

Vastus ??. 868 000 sipelgat

Vastus 17.13. $(0, 6/5)$

Vastus 17.14. (a) $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$ (b) $\left(\left(1 - \frac{\pi}{8}\right)(1 + \sqrt{2}), \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\right)(2 + \sqrt{2})\right)$ (c) $(-1/2, 8/5)$ (d) $\left(\frac{5}{3}, \frac{32}{9\pi}\right)$ (e) $(4\pi, 2\pi/3)$

Vastus 17.15. $(-2/5, 0)$

Vastus 17.16. $\left(-\frac{64+15\pi}{80+40\pi}, 0\right)$

Praktikum 18

Vastus 18.1. 24

Vastus 18.2. (a) 6 (b) 4 (c) $\frac{40}{3}$ (d) $10 \ln \frac{4}{5}$ (e) $\frac{8\pi}{3}$ (f) $\frac{1}{364}$ (g) 11

Vastus 18.5. (a) $\frac{\pi}{2}$; (b) $\frac{\pi^2}{4}$; (c) $\frac{a^3}{12}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; (d) 0; (e) $\frac{8c^2}{9}$; (f) $\frac{4\pi(b^5 - a^5)}{15}$.

Praktikum 19

Vastus 19.1. (a) $\frac{\pi}{8}$; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{10}$; (d) $\frac{2\pi}{3}$, osa lahendusest: minnes üle sfäärkoordinaatidele, saame

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi \frac{d(r^2 - 4r \cos \theta + 4)}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \pi \int_0^1 r dr (\sqrt{(r+2)^2} - \sqrt{(r-2)^2}) =$$

$\pi \int_0^1 r dr (r+2 - |r-2|)$. Et $r-2 < 0$, siis edasi arvestame, et $|r-2| = -(r-2)$. (e) $\frac{4\pi a^5}{15}$; (f) $\frac{8\pi(b^5 - c^5)}{15}$.

Vastus 19.2. (a) 128; (b) $\frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{7}{12}$; (d) 16; (e) $\frac{7}{24}$; (f) $\frac{3}{35}$; (g) $\frac{\pi a^3}{3}$, minna üle sfäärkoordinaatidele, arvestades kujundi sümmeetriat.

Vastus 19.3. $\frac{\pi(27 - 9R^2 + 2R^3)}{3000}$ liitrit, kus R on tassi raadius.

Vastus 19.6. 5000

Vastus 19.7. $abc(a+b+c)/2$

Vastus 19.8. $a^4/24$

Vastus 19.9. $\pi 2a^4/4$

Vastus 19.10. $\pi k \pi a^4 c/2$, kus k on võrdetegur

Vastus 19.11. $6k\pi a^2$, kus k on võrdetegur

Vastus 19.14. (a) (1, 1, 1) (b) (3/5, 3/5, 9/32) (c) (3/8, 3/8, 3/8)

Vastus 19.15. (0, 0, 4/5)

Praktikum 20

Vastus 20.1. (a) $\sqrt{5} \ln 2$, (b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \ln 3$, (c) $1/2$, (d) $\pi a^2/2$, (e) 2π , (f) 24, (g) $8a\pi^3\sqrt{2}$.

Vastus 20.3. (a) $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$, (b) 5.

Vastus 20.4. (a) $\sqrt{2}/2$, (b) 12π , (c) 32.

Vastus 20.5. 16

Vastus 20.7. (a) π , (b) -4 , (c) $-\pi/4$, (d) 3, (e) 32, (f) 2, (g) 0, (h) -4π .

Vastus 20.9. (a) πab , (b) $1/3$, (c) $3\pi a^2/8$, (d) $3\pi a^2/2$.

Praktikum 22

Vastus 22.3. (a) $2e^y - e^{2x} = C$ (b) $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, $y = \pm 1$ (c) $y = 1 + C(x+1)$, $x \neq -1$ (d) $y = \tan x + C$, $C = 0$
(e) $y^2 = 2 \ln |1 + e^x| + C$, $C = 1 - 2 \ln 2$ (f) $y = C \sin x$, $C = 1$

Vastus 22.4. $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Vastus 22.5. ≈ 36.8 kg. Näpunäide: Soolakoguse muutumise kiirus on võrdne vahega sissevoolava lahuse ja väljavoolava lahuse soola koguste kiirustest. Soola lisamise kiirus on $10 \text{ g/l} \cdot 10 \text{ l/min} = 100 \text{ g/min}$, see on $1/10 \text{ kg/min}$. Kuna välja voolab lahust 10 l/min , siis soola voolab välja lahusest kiirusega $10x/1000 \text{ kg/min}$.

Vastus 22.6. (a) $y = Ce^x - x$ (b) $y = x^2 + C/x$ (c) $xy = C - \ln|x|$ (d) $y = Cx + x \ln|\ln|x||$ (e) $y = e^{-\sin x}(x + C)$
 (f) $y = (x^2 + C) \sin x$ (g) $y = C \cos x + \sin x$ (h) $y = x(C + \sin x)$ (i) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$ (j) $y = e^x(C + \ln|x|)$, $x = 0$ (k)
 $y = 1$ (l) $y = \ln|x| - 1/\ln|x|$

Vastus 22.7. $I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{aR}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t) - \frac{a\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t)$

Praktikum 23

Vastus 23.2. (a) $e^{\frac{y}{x}} = Cx$ (b) $1/2 \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = C$ (c) $y^2 = 2x^2(\ln|x| + C)$ (d) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ (e) $y = \frac{1}{4} \left(2 \ln \left| 1 - \frac{y}{x} \right| - \ln \left| \frac{y^2}{x^2} + 1 \right| + 2 \arctan \frac{y}{x} \right) = \ln|x| + C$ (f) $y = C(x^2 + y^2)$

Vastus 23.3. $y^2 = C(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Vastus 23.4. (a) $y + 2 = (x - 1)(\ln|x - 1| + C)$ (b) $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)$ (c) $8y - 4x + \ln|4x + 8y + 5| = C$ (d)
 $\ln(2x - 3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$

Vastus 23.5. $(y + x - 1)^5(y - x - 1)^2 = C$

Vastus 23.6. $\ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = 1 + \frac{C}{x+y}$

Praktikum 24

Vastus 24.1. (a) $y^2 = Cx^2 - x$ (b) $y^3 = 1 + Ce^{-x}$ (c) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$, $y = 0$ (d) $y(x + 1)(\ln|x + 1| + C) = 1$, $y = 0$
 (e) $y = x^4(C + \ln|x|)^2$, $y = 0$ (f) $y(Ce^{-\sin x} - 1) = 1$, $y = 0$ (g) $y^{-3} = (C + 3x)\cos^3 x$, $y = 0$ (h) $y^3 = Cx^3 - 3x^2$, $x = 0$
 (i) $y^2 = Cx^2 - 2x$, $x = 0$

Vastus 24.2. $x(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2) = 1$, $x = 0$

Vastus 24.3. (a) $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$ (b) $2y^2 - xy + x^3 = C$ (c) $y^4 = 4xy + C$ (d) $\ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$ (e) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$
 (f) $\ln|x + y| - \frac{x}{x+y} = C$ (g) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - xy = C$ (h) $x^2(y^2 + 1) + y^4 = C$ (i) $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$ (j) $y^4 = 4xy + C$ (k)
 $\sqrt{x^2 - y^2} - x = C$ (l) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$ (m) $xe^{-y} - y^2 = C$

Vastus 24.5. (a) $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.2$, $y_3 = 1.3$ (b) $y_1 = 1.2$, $y_2 = 1.45$, $y_3 = 1.78$ (c) $y_1 = 0$, $y_2 = 0.001$, $y_3 = 0.005$ (d)
 $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.18$, $y_3 = 1.25$ (e) $y_1 = 5.8$, $y_2 = 9.44$, $y_3 = 18.78$

Praktikum 25

Vastus 25.1. (a) $y = C_1x + C_2 + x \ln|x|$ (b) $y = C_1x + C_2 - \ln|\cos x|$ (c) $y = C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6} + x \ln|x|$ (d) $y = C_1x + C_2 + \frac{1}{x^2+1}$
 (e) $y = e^x - x^{-1/2} + C_1x + C_2$ (f) $y = C_1x + C_2 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln|x|$

Vastus 25.2. (a) $y = C_1 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + C_2$ (b) $y = C_1 \ln|x| + C_2 + \frac{\ln^2|x|}{2}$ (c) $y = C_1 \left(C_1x + \frac{x^2}{2} \right)^2 + C_2$ (d) $y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right)^2 + C_2$ (e) $y = C_1x^2 + C_2$ (f) $y = C_1 \ln|x| + C_2$ (g) $y = C_1e^{x^2} + C_2$ (h) $y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$ (i)
 $y = C_1(x \ln|x| - x) + C_2$ (j) $y = e^{e^{C_1x-2C_1+1}}(e^{C_1x} - 1) + C_2$ (k) $y = -\frac{x}{C_1} - \frac{\ln|1-C_1x|}{C_1^2} + C_2$

Vastus 25.3. (a) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ (b) $y = C_1 e^{2x} + C_2$ (c) $y = C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x$ (d) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$
 (e) $y = C_1 e^x + C_2 e^{e^x}$ (f) $y = C_1 e^{7x} + C_2$ (g) $y = e^{\frac{5x}{3}} + 1$ (h) $y = C_1 e^{x/2} + C_2 e^{-2x}$ (i) $y = C_1 e^{-x/4} + C_2 e^{-x/4}$
 (j) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ (k) $y = C_1 e^{-\frac{7x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{19}x}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{7x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{19}x}{2}\right)$ (l) $y = \frac{1}{6} e^{-5(x+1)} (e^{6x+6} - 1)$ (m)
 $y = e^{3x} (\sin x + \cos x)$

Praktikum 26

Vastus 26.1. (a) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x$ (b) $y = 3x + C_1 + C_2 e^{-x}$ (c) $Y = 2xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (d)
 $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (2x - 2)e^x$ (e) $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - 2x \cos(x)$ (f) $y = (C_1 - x^2/4) \cos(x) + (C_2 + x/4) \sin(x)$
 (g) $y = e^x - 1 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$ (h) $y = C_1 + C_2 e^x + x e^x - x(1 + x/2)$ (i) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + ((3x - 4)/9)$ (j)
 $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + e^{3x}(x^2/18 - x/27 + 5/81)$

Vastus 26.2. (a) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} + x/12 + 7/144$ (b) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x(2x^3 - 5x + 10)$ (c) $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^3 + 2x^2 - 3x$
 (d) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - x^3/5 + 12/25x^2 - 126/125x - 499/625$ (e) $C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(2x) + x/2 + 3/4$ (f) $y = C_1 e^{2x} +$
 $C_2 e^{-x} + 4/3 e^{2x}$ (g) $y = e^{-x}(3/2x^2 + C_1 + C_2 x)$ (h) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 1/2 e^{-5x}$ (i) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + 5/74 \sin(x) +$
 $7/74 \cos(x)$ (j) $y = C_1 e^{(2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(2-\sqrt{5})x} - 1/10 \sin(x) + 1/5 \cos(x)$ (k) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - 1/6x \cos(3x)$
 (l) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 1/5(6 \sin(2x) + 2 \cos(2x))$ (m) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 1/3(x - 4/3 + 1/5 e^{2x})$

Praktikum 27

Vastus 27.1. (a) $y = \frac{C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)}{x}$ (b) $y = \frac{C_1 e^{-x} + C_2 e^x}{x}$ (c) $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (d) $y = C_1(e^x -$
 $1) + C_2(e^x + 1)^{-1}$ (e) $y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$ (f) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$ (g) $y = C_1 x \cos(2x) + C_2 x \sin(2x)$ (h)
 $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (i) $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ (j) $y = C_1(1 + x \ln|x|) + C_2 x$ (k) $y = C_1 x + C_2(\ln|x| + 1)$ (l)
 $y = C_1(2x+1) + C_2 e^{2x}$ (m) $y = C_1(x^2+1) + C_2(x+(x^2+1) \arctan x)$ (n) $y = C_1 x + C_2 \sqrt{x^2+1}$ (o) $y = C_1 e^{2x} + C_2(3x+1)e^{-x}$

Vastus 27.2. (a) $y = C_1 \cos(e^{-x}) + C_2 \sin(e^{-x}) + e^{-x}$ (b) $y = C_1 \cos e^{-x} + C_2 \sin e^x + x$ (c) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$ (d)
 $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3 + x^4$ (e) $y = C_1 e^{x^2} + C_2 + (x^2 - 1)e^{x^2}$ (f) $y = C_1 + C_2 \tan x + \frac{1}{2}(1 + x \tan x)$ (g) $y = C_1 e^x + C_2 x - \frac{1}{2}(2x - 1)e^{-x}$
 (h) $y = C_1 x + C_2 x e^x - 2x^2$

Praktikum 28

Vastus 28.1. (a) $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \sin(\sqrt{3}x) + C_3 \cos(\sqrt{3}x))$ (b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin(x) + C_4 \cos(x)$ (c)
 $y = C_1 e^x x^2 + C_2 e^x x + C_3 e^x$ (d) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_6 x + x^4/24 + e^x x^2/2 - 4e^x x$ (e) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x + x \ln(x)$
 (f) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + \cos(x)$

Vastus 28.2. (a) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \sin(x)$ (b) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ln(x)$ (c) Vigane ülesanne (d) $y =$
 $C_1 + C_2 x \pm 4/3 \sqrt{(c_1 + x)^3}$ (e) $y = C_1 + C_2 x + \cosh(C_3) \sinh(x) + \sinh(C_3) \cosh(x)$ (f) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^5$
 (g) $y = C_1 + C_2 x - C_3 \ln(C_3 + x) - x \ln(C_3 + x)$ (h) $y = C_1 + C_2 x + C_3(x^2 + \cos^2(x)) + 1/4(x^2 - \cos^2(x))$ (i) $y =$
 $C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}(x + 2)$

Praktikum 29

Vastus 29.1. (a) $y = C_2 e^{C_1 x}$, $z = x + C_2 C_1^{-1} e^{C_1 x}$, $y = 0$, $z = x + C$ (b) $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$, $z = \frac{(C_2-C_1)x}{(x+C_2)^2}$ (c) $y = C_2 e^{C_1 x^2}$,
 $z = 2C_1 C_2^{-1} x e^{-C_1 x^2}$, $y = 0$, $z = Cx$ (d) $y = C_1 e^{x^2}$, $z = x(C_2 - \ln|x|)$ (e) $y = C_1 x + C_2 - \frac{x^2}{2}$, $z(C_1 - x - 1) = 1$
 (f) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{\cos(x)}{2}$, $z^2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - \frac{\sin(x)}{2}$ (g) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$, $z = -6C_2 e^{-5x}$ (h) $y = C_1 e^{-x} +$

C_2e^{-3x} , $z = C_1e^{-x} + 3C_2e^{-3x} + \cos(x)$ (j) $x = (C_1 - C_2)\cos(t) + (C_1 + C_2)\sin(t)$, $y = C_1\sin(t) - C_2\cos(t) + C_3e^t$,
 $z = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + C_3e^t$ (m) $x = 3C_1\cos(3t) - 3C_2\sin(3t)$, $y = C_2\cos(3t) + C_1\sin(3t)$ (n) $x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1$,
 $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1$ (o) $x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}$, $y = e^{-t} + 3e^{-7t}$ (p) $x = (\sin(t) - 2\cos(t))e^{-t}$, $y = e^{-t}\cos(t)$

Vastus 29.7. (a) $u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}$; $C(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$ (b) $u = y\frac{x^2}{2} + C(y)$; $C(y) = 1 - y\frac{1-y^2}{2}$ (c) $u = y\ln|x| + C(y)$; $C(y) = y^2$
 (d) $u = C(y)$; $C(y) = y$

Praktikum 30

Vastus 30.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

(a) $u = f(x^2 + y^2)$ (b) $u = e^{\frac{x}{y}}f(y)$ (c) $u = f(x^2 - y^2) + y - x$ (d) $x^2 - 4u = f\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right)$ (e) $u = xf(x^2 + y^2)$ (f)
 $u = xy + f(x^2 - y^2)$ (g) $u = yf(x^2 - y^2)$ (h) $v\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{u}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{u}\right) = 0$ (i) $u = xy + f(x^2 + y^2)$ (j) $u^2 = 2x + f\left(\frac{y}{x}\right)$ (k)
 $u = f\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - \frac{1}{y}}$ (l) $u = \sin(y) + f(\sin(x) - \sin(y))$ (n) $v(\tan(u) + \cot(x), 2y - \tan^2(u)) = 0$

Praktikum 32

Vastus 32.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

(a) $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ (b) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ (c) $v\left(u, (x - y)^{\frac{2}{z}-1}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right) = 0$ (d) $v\left(\frac{x}{y}, xy - 2u, \frac{z+u-xy}{x}\right) = 0$
 (e) $v\left(u, \frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right) = 0$ (f) $v\left(u, \frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right) = 0$

Vastus 32.2. (a) $u = 2xy$ (b) $u = ye^x - e^{2x} + 1$ (c) $u = y^2e^{2\sqrt{x}-2}$ (d) $u(x^2 + 1) = y^2$ (e) $u = x^2y$ (f) $u = y - x^2$ (g)
 $2x^2 - y^2 - u^2 = a^2$ (h) $(x - y)(3x + y + 4u) = 4u$ (i) $4yx - x^3y + x^2u^2 = 4y^2$ (j) $xy + u^2 = a^2$