

Praktikum 10: Analüütiliste funktsioonide nullkohad.
Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiibid.

1. Leida funktsiooni $F(z) = z^6 + 15iz + 8$ nullkohtade arv piirkondades:
 - a) $B(0, \frac{1}{2})$; b) $B(0, \frac{3}{5}) \setminus \overline{B(0, \frac{1}{2})}$; c) $B(0, \sqrt{2}) \setminus \overline{B(0, \frac{3}{5})}$; d) $B(0, 2) \setminus \overline{B(0, \sqrt{2})}$; e) $\mathbf{C} \setminus \overline{B(0, 2)}$.
 2. Kasutades Rouché teoreemi, tõestada algebra põhiteoreem: igal n astme polünoomil on komplekstasandil n nullkohta, loetud koos kordsustega.
 3. Kas leidub selline ühikringis regulaarne funktsioon, mis rahuldab iga $n \in \mathbb{N}$ korral seost
 - a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$; b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$?
 4. Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajani Γ . Olgu $|f(z)| \geq M$, kui $z \in \Gamma$ ning olgu $|f(z_0)| < M$ mingi $z_0 \in D$ korral. Näidata, et funktsioonil f on vähemalt üks nullkoht piirkonnas D .
 5. Tõestada Schwarzi lemma: Olgu f regulaarne ühikringis $B(0, 1)$, olgu $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leq 1$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Näidata, et siis $|f(z)| \leq |z|$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. (Näpunäide: vaadelda funktsiooni $h(z) = f(z)/z$, kui $0 < |z| < 1$).
- N.*** (2 p.) Olgu antud $R > 0$. Näidata, et leidub $N > 0$ nii, et $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \neq 0$ kõigi $z \in B(0, R)$ ja $n \geq N$ korral.
- O.*** (2 p.) Näidata, et võrrandi $z \sin z = 1$ kõik lahendid komplekstasandil on reaalsed.

Praktikum 11: Harmoonilised funktsioonid. Analüütiline jätkamine.

1. Leida antud harmoonilise funktsiooni kaasharmooniline funktsioon.
 - a) $u(x, y) = xy + x + 2y$; b) $u(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$, $y > 0$; c) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$.
 2. Tõestada järgmine teoreem (kompleksse potentsiaali olemasolu): kui u on harmooniline funktsioon ühelisidusas piirkonnas $D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$, siis leidub vastavas komplekstasandi piirkonnas D regulaarne funktsioon f nii, et $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x, y)$, $(x, y) \in D_{\mathbb{R}}$. (Näpunäide: kui selline f leidub, siis f' saab avaldada u kaudu.)
 3. Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajani Γ . Olgu $\operatorname{Re} f(z) = 1$, kui $z \in \Gamma$. Mida saab öelda funktsiooni f kohta piirkonnas D ?
 4. Olgu funktsioon f regulaarne ühikringis ning rahuldagu seost $f(x) = f(x+1)$ iga $x \in (-1, 0)$ korral. Näidata, et funktsiooni f saab jätkata regulaarseks funktsiooniks ribas $|\operatorname{Im} z| < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 5. Missuguseks hulgaks kujutab funktsioon $f(z) = \frac{2iz}{z+3}$ ringi $B(1, 2)$?
 6. Leida regulaarne funktsioon, mis kujutab ühikringi ühikringiks, kusjuures punkt z_0 , $|z_0| < 1$ kujutub nullpunktiks ning tasandi pööre punktis z_0 on $\alpha \in \mathbb{R}$ (s.t. $\alpha \in \operatorname{Arg} f'(z_0)$).
- P.*** (3 p.) Euleri gammafunktsioon on defineeritud valemiga $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, kui $\operatorname{Re} z > 0$.
- a) Näidata, et Γ on regulaarne parempoolsel pooltasandil.
 - b) Näidata, et gammafunktsiooni saab jätkata kogu komplekstasandile, välja arvatud punktid $0, -1, \dots$, kus on 1. järku poolused.
 - c) Leida $\operatorname{res}[\Gamma(z), -n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$.
- Q.*** (3 p.) Olgu f regulaarne ühikringis ning olgu $|f(z)| \leq 1$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Näidata, et siis $\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Näpunäide: kasutada Schwarzi lemmat ja ülesandes 6 defineeritud kujutust.