

Praktikum 14-15: Laplace'i ja Fourier' teisendus.

1. Leida järgmiste funktsioonide Laplace'i teisendid:
 - a) $f(t) = \sin \omega t, \omega \in \mathbf{C};$
 - b) $f(t) = \cos \omega t, \omega \in \mathbf{C};$
 - c) $f(t) = e^{\omega t} t^n, \omega \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N};$
 - d) $g(t) = \int_0^t f(s) ds \text{ (} F(p) \text{ kaudu).}$
 - e) $f(t) = t^a, a > 0.$
2. Leida järgmiste funktsioonide Laplace'i pöördteisendid:
 - a) $F(p) = \frac{1}{p(p+1)},$
 - b) $F(p) = \frac{p+2i}{p^2+1},$
 - c) $F(p) = \frac{p+1}{(p-3)^3},$
 - d) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1}.$
3. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y'' + 2y' + y = H(t-1)(t-1)e^{-t}$, kui $t > 0$, algtingimustega $y(0) = 1$ ja $y'(0) = -2$ Laplace'i teisenduse abil.
4. Lahendada I liiki Volterra integraalvõrrand $\int_0^t \sin(t-s)u(s)ds = \sin^2 t, t > 0.$
5. Tõestada järgmised Fourier' teisenduse omadused:
 - a) $\mathcal{F}[f(x-y)](s) = e^{-isy} \hat{f}(s), y \in \mathbf{R},$
 - b) $\hat{f}(s-\sigma) = \mathcal{F}[f(x)e^{i\sigma x}](s), \sigma \in \mathbf{R}.$
6. Leida järgmiste funktsioonide Fourier' teisendid:
 - a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$
 - b) $f(x) = e^{-a|x|}, a > 0,$
 - c) $f(x) = e^{-ax^2}, a > 0.$
7. Fourier' teisenduse abil lahendada soojusjuhtivuse võrrand $\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$ kus u_0 on etteantud reaalteljel absoluutselt integreeruv funktsioon.
- 8*. (5 p.) Lõigus $(0, 2\pi)$ määratud ning absoluutselt integreeruva funktsiooni Fourier' rida komplekskujul on $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, kus $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.
 - a) Olgu f 2π -perioodiline ja regulaarne ribas $D_\delta = \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Im} z| < \delta\}$, kus $\delta > 0$, ning pidev kuni rajani. Näidata, et siis funktsiooni f Fourier' kordajad rahuldavad võrratust $|c_n| \leq M e^{-|n|\delta}$ iga $n \in \mathbf{Z}$ korral, kus $M = \max_{|\operatorname{Im} t| \leq \delta} |f(t)|$.
 - b) Olgu f 2π -perioodiline ja regulaarne ribas D_δ , välja arvatud punktides $z_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, kus on m järku poolus. Mida saab siis öelda funktsiooni f Fourier' kordajate kohta?
 - c) Olgu f 2π -perioodiline ja regulaarne ribas D_δ , välja arvatud punktides $z_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, kus võib olla ka hargnemispunkt. Eeldame, et punkti z_0 ümbruses kehtib võrratus $|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0|^\alpha$, kus $\alpha > 0$. Mida saab siis öelda funktsiooni f Fourier' kordajate kohta?
 - d) Mis juhtub, kui osas c) olev võrratus asendada võrratusega $|f(z)| \leq C|z - z_0|^{-\alpha}$, kus $\alpha > 0$?
- 9*. (3 p.) a) Olgu f reaalteljel määratud tükiti pidev funktsioon. Eeldame, et leiduvad $a > 0$ ja $C > 0$ nii, et $|f(x)| < C e^{-a|x|}$ iga $x \in \mathbf{R}$ korral. Näidata, et siis funktsiooni f Fourier' teisend on regulaarne ribas $|\operatorname{Im} \zeta| < a$.
 - b) Olgu f regulaarne ribas $|\operatorname{Im} z| < a$ mingi $a > 0$ korral ning pidev kuni rajani. Eeldame, et iga $y \in [-a, a]$ korral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)| dx < \infty$ ja $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \max_{y \in [-a, a]} |f(x+iy)| = 0$. Näidata, et siis leidub $C > 0$ nii, et funktsiooni f Fourier' teisend rahuldab tingimust $|\hat{f}(s)| \leq C e^{-a|s|}$ iga $s \in \mathbf{R}$ korral.
- 10*. (3 p.) Olgu f selline kogu reaalteljel määratud absoluutselt integreeruv pidev funktsioon, et tema Fourier' teisend rahuldab tingimust $\hat{f}(s) = 0$, kui $s \in \mathbf{R}, |s| > a$, kus $a > 0$. Näidata, et siis kehtib valem $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax - n\pi)}{ax - n\pi} \quad \forall x \in \mathbf{R}$, kus $\frac{\sin x}{x}$ väärtuseks punktis 0 loeme 1.

Näpunäide: $\hat{f}(s)$ võib arendada Fourier' ritta lõigul $[-a, a]$.
- 11*. (4 p.) Olgu f tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv $[0, \infty)$.
 - a) Näidata, et $\max_{\operatorname{Re} p \geq 0} |\mathcal{L}[f](p)| = \max_{\operatorname{Re} p = 0} |\mathcal{L}[f](p)| \leq \int_0^\infty |f(t)| dt$.
 - b) Kas leidub $C > 0$ nii, et $\int_0^\infty |f(t)| dt \leq C \max_{\operatorname{Re} p = 0} |\mathcal{L}[f](p)|$ iga tükiti pideva ja vahemikus $[0, \infty)$ absoluutselt integreeruva f korral?