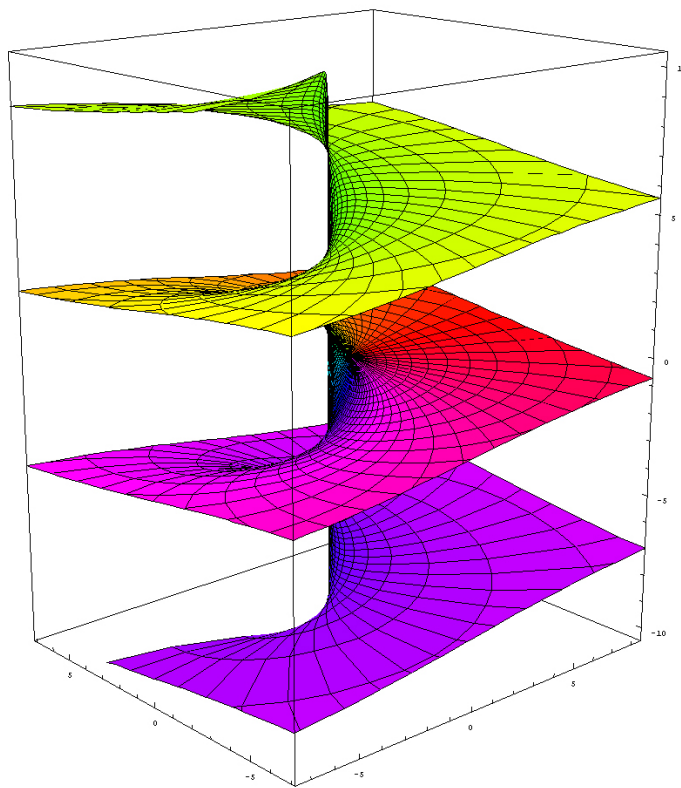


Kompleksmuutuja funktsioonide teooria



Lühikonspekt

2017

Sisukord

1	Kompleksarvud	1
1.1	Kompleksarvud ja tehted nendega	1
1.2	Kompleksarvu moodul ja argument	1
1.3	Kompleksarvude hulgad	2
2	Kompleksmuutuja funktsioon ja tema tuletis	3
2.1	Funktsiooni mõiste	3
2.2	Piirväärtus	3
2.3	Funktsiooni pidevus	4
2.4	Funktsiooni tuletis	4
2.5	Cauchy-Riemanni võrrandid	4
3	Elementaarfunktsioonid	5
3.1	Astmefunktsioon	5
3.2	Juurfunktsioon	5
3.3	Eksponentfunktsioon	6
3.4	Logaritmifunktsioon	7
3.5	Üldine astmefunktsioon	7
3.6	Funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$	7
3.7	Murdlineaarne funktsioon	7
3.8	Trigonomeetrilised funktsioonid	8
3.9	Hüperboolsed funktsioonid	8
3.10	Arkusfunktsioonid	8
3.11	Areafunktsioonid	8
4	Integraal kompleksmuutuja funktsioonist	9
4.1	Integraali mõiste ja omadused	9
4.2	Cauchy teoreem	10
4.3	Algfunktsioon. Newton-Leibnizi valem	11
4.4	Cauchy valem	11
4.5	Cauchy tüüpi integraalid	11
5	Analüütilised funktsioonid	13
5.1	Arvread	13
5.2	Funktsionaalread	14
5.3	Astmeread	15
5.4	Taylori rida	15
5.5	Analüütilised funktsioonid	15
5.6	Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem	16

5.7	Analüütilise funktsiooni nullkohad	16
5.8	Analüütiline jätkamine	17
6	Analüütilise funktsiooni iseärased punktid	19
6.1	Isoleeritud iseärased punktid	19
6.2	Laurent'i rida	19
6.3	Funktsiooni isoleeritud iseärase punkti tüübi ja funktsiooni Laurent'i rea selle punkti ümbruses peaosa vaheline seos	20
6.4	Funktsiooni käitumine lõpmatuspunktis	21
6.5	Analüütiliste funktsioonide klassid	21
7	Resiidide teooria	23
7.1	Resiidi mõiste	23
7.2	Resiidide teooria põhiteoreem	23
7.3	Resiidide arvutamine	24
7.3.1	Resiidi arvutamine 1. järku pooluse korral	24
7.3.2	Resiidi arvutamine kõrgemat järku pooluse korral	24
7.3.3	Resiidi arvutamine olulise iseärasuse korral	24
7.3.4	Resiidi arvutamine lõpmatuses	24
7.4	Resiidide kasutamine integraalide arvutamisel	24
7.4.1	Resiidide teooria põhiteoreemi otsene rakendamine	24
7.4.2	Integraalid üle reaaltelje	25
7.4.3	Integraalid perioodilistest funktsioonidest üle perioodi	25
7.5	Logaritmiline resiid. Argumendi printsiip	25
7.6	Rouche teoreem	26
7.7	Analüütilise funktsiooni pööramine	26
7.8	Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiibid	27
7.9	Harmoonilised funktsioonid	27
8	Konformne kujutamine	28
8.1	Konformse kujutuse mõiste ja põhiomadused	28
8.2	Konformse kujutamise põhiülesanne	28
9	Laplace'i ja Fourier' teisendus	30
9.1	Laplace'i teisendus	30
9.1.1	Konvolutsioon	31
9.2	Fourier' teisendus	31
9.2.1	Konvolutsioon	33
9.3	Laplace'i ja Fourier' teisenduse pööramine	34
9.3.1	Fourier' teisenduse pööramine	34
9.3.2	Laplace'i teisenduse pööramine	35

Peatükk 1

Kompleksarvud

1.1 Kompleksarvud ja tehted nendega

Def. Kompleksarvudeks nimetatakse reaalarvude järjestatud paare $z = (x, y)$, millega on defineeritud võrdus ja tehted järgnevalt:

- 1) $z_1 = z_2$, kui $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$;
- 2) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- 3) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

NB! Võrratus pole defineeritud.

Kõigi kompleksarvude hulka tähistatakse $\mathbb{C}$.

Kompleksarvu **algebraalne kuju**: $z = x + iy$.

Kompleksarvu **reaalosa** $\operatorname{Re}(x + iy) = x$, **imaginaarosa** $\operatorname{Im}(x + iy) = y$.

Kompleksarvud: $z, \zeta, w, A, B, \dots$

Reaalarvud: $x, y, \xi, \eta, u, v, a, b, \dots$

Tehete omadused:

- 1) kommutatiivsus $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$,
- 2) assotsiatiivsus $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
- 3) distributiivsus $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$,
- 4) $i^2 = -1$.

1.2 Kompleksarvu moodul ja argument

Komplekstasand $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.

Polaarkoordinaatides $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

Kompleksarvu **trigonomeetriline kuju**: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Kompleksarvu **moodul**: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Kompleksarvu **argument**: $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}$,

argumendi peaväärtus $\arg z$ on selline $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, mis rahuldab $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Euleri valem: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Kompleksarvu **eksponentkuju**: $z = r e^{i\varphi}$.

Euleri samasus: $e^{i\pi} = -1$.

Korrutamine ja jagamine trigonomeetrilisel kujul:

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

EkspONENTKujul:

$$r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Astendamine - **de Moivre' valem**: $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.

Kolmnurga võrratus: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Tagurpidi kolmnurga võrratus: $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

Def. Kompleksarvu $z = x + iy$ **kaaskompleksarvuks** nim. kompleksarvu $\bar{z} = x - iy$.

Omadused:

- 1) $z\bar{z} = |z|^2$,
- 2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,
- 3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- 4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$,
- 5) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{-i}{2}(z - \bar{z})$.

1.3 Kompleksarvude hulgad

Lõpmatuspunkt $z = \infty$.

Kinnine e. täielik komplekstasand $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Kui $z \neq 0$, siis $\frac{z}{0} = \infty$ ja $z\infty = \infty$; kui $z \neq \infty$, siis $\frac{z}{\infty} = 0$.

Def. Punkti $z_0 \in \mathbb{C}$ **ümbrus**: $U_\varepsilon(z_0) = B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Lõpmatuspunkti ümbrus: $U_M(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$.

Def. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **sisepunktiks**, kui leidub punkti z ümbrus $U(z)$ nii, et $U(z) \subset D$.

Def. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **rajapunktiks**, kui iga ümbrus $U(z)$ sisaldab nii hulga D kui hulga $\mathbb{C} \setminus D$ punkte.

Def. Hulga D **rajaks** ∂D nim. selle hulga kõigi rajapunktide hulka.

Def. Hulka D nim. **lahtiseks hulgaks**, kui kõik tema punktid on sisepunktid, ja **kinniseks hulgaks**, kui $\partial D \subset D$.

Def. Punkti z nim. hulga $D \subset \mathbb{C}$ **kuhjumispunktiks**, kui iga $r > 0$ korral $(B(z, r) \setminus \{z\}) \cap D \neq \emptyset$.

Def. Lahtist hulka D nim. **piirkonnaks**, kui selle hulga iga kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva joonega. Piirkonda koos oma rajaga nim. **kinniseks piirkonnaks**.

Def. Piirkonda nim. **ühelisisidusaks**, kui tema raja on sidus, vastasel juhul **mitmelisisidusaks**. Piirkonna **sidususe järgu** nim. tema raja sidususkomponentide arvu.

Def. Piirkonna raja **positiivseks suunaks** loetakse suund, milles liikudes piirkond (lokaalselt) jääb vasakule.

Def. Hulka nim. **tõkestatud hulgaks**, kui ta sisaldub mingis ringis $B(0, M)$, vastasel juhul **tõkestamata hulgaks**.

Kinnisel komplekstasandil tõkestamata hulk või tema raja sisaldab alati lõpmatuspunkti.

Peatükk 2

Kompleksmuutuja funktsioon ja tema tuletis

2.1 Funktsiooni mõiste

Olgu $D \subset \mathbb{C}$.

Def. Kui igale kompleksarvule $z \in D$ on seatud vastavusse mingi kindel kompleksarv w , siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud **kompleksmuutuja funktsioon** $w = f(z)$. Hulka D nim. **originaalide hulgaks**. Hulka $f(D) = \{f(z) : z \in D\}$ nim. funktsiooni **väärtuste hulgaks** e. **kujutiste hulgaks**.

Kui D on piirkond, siis hulka D nim. ka funktsiooni f määramispiirkonnaks.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$.

Def. Kui igale kompleksarvule $z \in D$ on seatud vastavusse mingi kompleksarvude hulga mittemühi alamhulk, siis öeldakse, et hulgal D on defineeritud **multifunktsioon** e. **mitmene funktsioon**.

Näide. $f(z) = \operatorname{Arg}(z)$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Def. Kui igale kujutisele vastab ainult üks originaal, siis funktsiooni nim. **üheleheliseks**, vastasel juhul **mitmeleheliseks**.

Kui funktsioon $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ on üheleheline, siis tal leidub pöördfunktsioon $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$ on kaheleheline, tema pöördfunktsioon $f^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on mitmene funktsioon $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$.

Näide. $f(z) = z^2$, $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ on üheleheline, tal leidub pöördfunktsioon $f^{-1} : D_1 \rightarrow \mathbb{C}$, kus $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z \leq 0\}$; $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ peaharu.

Kui hulgal D on määratud funktsioon $w = f(z)$, siis igale kompleksarvule $z = x + iy$ hulgas D on seatud vastavusse mingi kompleksarv $w = u + iv$. Seega on igale reaalarvude paarile hulgas $D_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in D\}$ seatud vastavusse 2 reaalarvu $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$. Funktsioone u ja v nim. funktsiooni f **reaal-** ja **imaginaariosaks**.

Näide. $f(z) = z^2$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$.

2.2 Piirväärtus

Def. Kompleksarvu A nimetatakse jada (z_n) **piirväärtuseks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N > 0$ nii, et kui $n > N$, siis $|z_n - A| < \varepsilon$.

Olgu funktsioon f määratud hulgal D ning olgu $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Suurust $A \in \overline{\mathbb{C}}$ nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis z_0 , kui iga punkti A ümbruse $V(A)$ korral leidub punkti z_0 ümbrus $U(z_0)$ nii, et kui $z \in U(z_0) \cap D$, siis $f(z) \in V(A)$.

Teoreem 2.1 Olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ning olgu $z_0 = x_0 + iy_0$ funktsiooni f originaalide hulga kuhjumispunkt. Siis $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a + ib$ parajasti siis, kui $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} u(x, y) = a$ ja

$$\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} v(x, y) = b.$$

2.3 Funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon f määratud hulgal D ning olgu $z_0 \in D$ hulga D kuhjumispunkt.

Def. Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks** punktis z_0 , kui $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Olgu iga hulga D punkt ühtlasi ka tema kuhjumispunkt (näiteks D on piirkond või kinnine piirkond või pidev joon).

Def. Funktsiooni f nimetatakse **ühtlaselt pidevaks** hulgas D , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $z_1, z_2 \in D$ ja $|z_1 - z_2| < \delta$, siis $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

Lause 2.1 Funktsioon f on pidev punktis $z_0 = x_0 + iy_0$ parajasti siis, kui funktsioonid u ja v , kus $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, on pidevad punktis (x_0, y_0) .

2.4 Funktsiooni tuletis

Olgu funktsioon f defineeritud punkti z mingis ümbruses.

Def. Funktsiooni f nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis z , kui leidub lõplik piirväärtus $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, sellisel juhul seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks** punktis z .

Def. Funktsiooni f nimetatakse **regulaarseks** piirkonnas D , kui ta on diferentseeruv piirkonna D igas punktis.

Def. Funktsiooni f nimetatakse **regulaarseks** punktis z , kui ta on diferentseeruv punkti z mingis ümbruses.

Näide. Funktsioon $f(z) = |z|^2$ on diferentseeruv ainult punktis 0 ning pole regulaarne kusagil.

Aga $u(x, y) = x^2 + y^2$ ning $v(x, y) = 0$ on diferentseeruvad igal pool!

2.5 Cauchy-Riemanni võrrandid

Def. Funktsiooni $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nim. **diferentseeruvaks** punktis (x, y) , kui leiduvad $a, b \in \mathbb{R}$ nii, et

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x + b\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

kui $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$.

Olgu f defineeritud punkti z mingis ümbruses ja olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

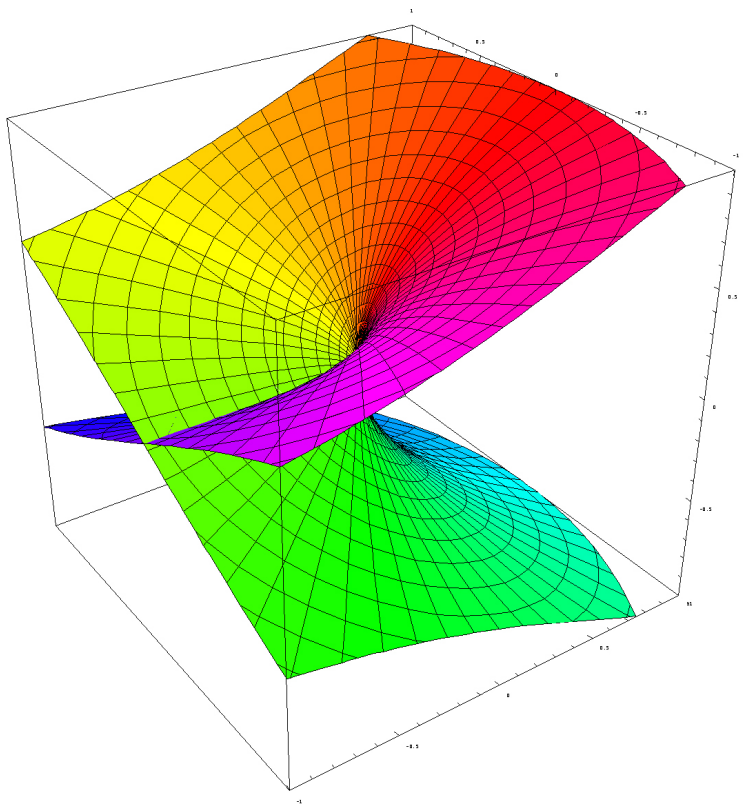
Teoreem 2.2 (Cauchy-Riemann) Funktsioon f on diferentseeruv punktis $z = x + iy$ parajasti siis, kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis (x, y) ja $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ ning $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ (Cauchy-Riemanni võrrandid).

Peatükk 3

Elementaarfunktsioonid

3.1 Astmefunktsioon

$$f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$$



Joonis 3.1: Ruutfunktsiooni väärtuste Riemanni pind

3.2 Juurfunktsioon

$$f(z) = \sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}$$

Def. Kompleksarvu z **n astme juureks** nim. kompleksarvu w , mille puhul $w^n = z$.

Arvutusvalem $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{arg } z + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1.$

Juurfunktsiooni peaharu $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\text{arg } z}{n}}.$

Def. Funktsiooni hargnemispunktideks nim. punkte, mille mingis ümbruses ümber selle punkti liikudes liigume mitmese funktsiooni ühelt harult teisele.

Funktsiooni $f(z) = \sqrt[n]{z}$ hargnemispunktideks on 0 ja ∞ . Need on n järku hargnemispunktid.

3.3 Eksponentfunktsioon

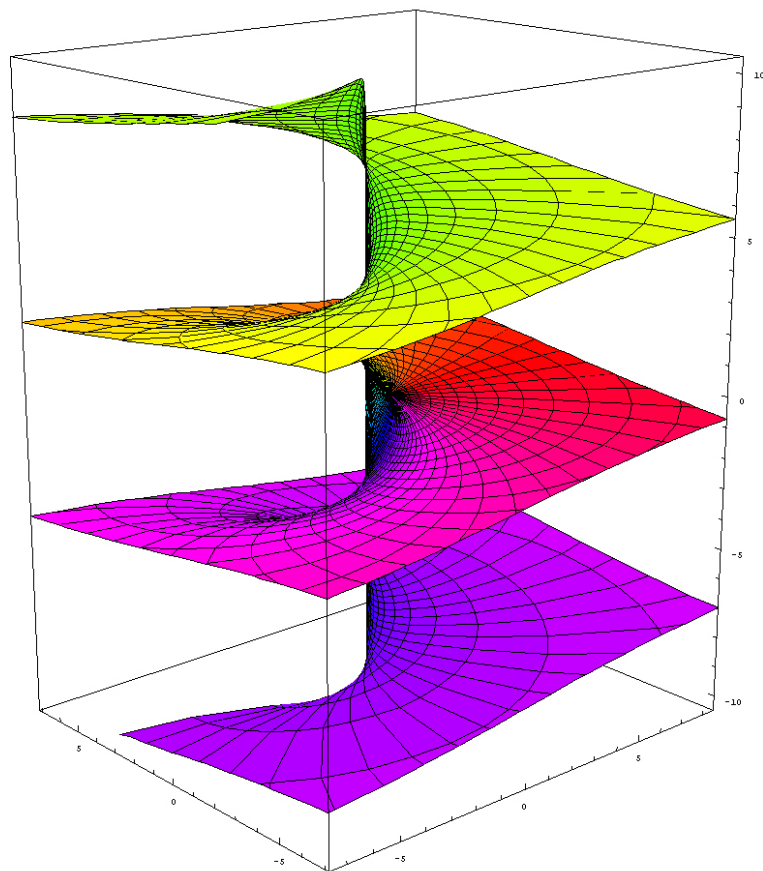
$$f(z) = e^z.$$

Euleri valem: $e^{iy} = \cos y + i \sin y.$

Defineerime $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), x, y \in \mathbf{R}.$

Omadused.

- 1) $|e^{x+iy}| = e^x, \text{ Arg } e^{x+iy} = y + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- 2) $e^{z+2\pi i} = e^z.$
- 3) $(e^z)' = e^z.$
- 4) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$



Joonis 3.2: Eksponentfunktsiooni väärtuste Riemanni pind

3.4 Logaritmifunktsioon

$$f(z) = \operatorname{Ln} z.$$

Def. Kompleksarvu z **logaritmiks** $\operatorname{Ln} z$ nim. kompleksarvu w , mille puhul $z = e^w$.

$$\text{Arvutusvalem } \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Logaritmifunktsioon on mitmene funktsioon. Selle peaharuks on $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Funktsiooni $f(z) = \operatorname{Ln} z$ hargnemispunktideks on 0 ja ∞ . Need on lõpmatut järku ehk logaritmilist tüüpi hargnemispunktid.

Omadused.

- 1) $e^{\operatorname{Ln} z} = z$, $\operatorname{Ln} e^z = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.
- 2) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, ei kehti peaharu korral!
- 3) $(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$.

3.5 Üldine astmefunktsioon

Def. Üldiseks astmefunktsiooniks nim. funktsiooni $f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}$.

$$\text{Arvutusvalem } z^{a+ib} = e^{a \ln |z| - b \operatorname{Arg} z} e^{i(a \operatorname{Arg} z + b \ln |z|)}.$$

Üldine astmefunktsioon on mitmene funktsioon. Selle peaharuks on $f(z) = z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}$.

$z^A z^B = z^{A+B}$ kehtib peaharu korral, aga mitte üldise astmefunktsiooni korral.

$$z_1^A z_2^A \neq (z_1 z_2)^A.$$

3.6 Funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$

Sirgete ja ringjoonte ühine üldvõrrand: $az\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0$, kus $A \in \mathbf{C}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $|A|^2 - ab > 0$.

Funktsioon $f(z) = \frac{1}{z}$ teisendab täielikul komplekstasandil sirged ja ringjooned sirgeteks ja ringjooneteks.

3.7 Murdlineaarne funktsioon

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$, seega murdlineaarne funktsioon on kompositsioon lineaarsest funktsioonist, funktsioonist $f(z) = \frac{1}{z}$ ja lineaarsest funktsioonist.

Murdlineaarne funktsioon teisendab täielikul komplekstasandil sirged ja ringjooned sirgeteks ja ringjooneteks.

3.8 Trigonomeetrilised funktsioonid

$$\text{Defineerime } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Omadused.

- 1) $\sin z$ ja $\cos z$ on 2π -perioodilised.
- 2) $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.
- 3) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Ei kehti $|\sin z| \leq 1$ ja $|\cos z| \leq 1$!

$$\text{Defineerime } \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

3.9 Hüperboolsed funktsioonid

$$\text{Defineerime } \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Omadused.

- 1) $\operatorname{sh} z$ ja $\operatorname{ch} z$ on $2\pi i$ -perioodilised.
- 2) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.
- 3) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

$$\text{Defineerime } \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

3.10 Arkusfunktsioonid

$$w = \operatorname{Arcsin} z \Leftrightarrow z = \sin w$$

$$w = \operatorname{Arccos} z \Leftrightarrow z = \cos w$$

$$w = \operatorname{Arctan} z \Leftrightarrow z = \tan w$$

$$w = \operatorname{Arccot} z \Leftrightarrow z = \cot w$$

Mitmesed funktsioonid!

3.11 Areafunktsioonid

$$w = \operatorname{Arsh} z \Leftrightarrow z = \operatorname{sh} w$$

$$w = \operatorname{Arch} z \Leftrightarrow z = \operatorname{ch} w$$

$$w = \operatorname{Arth} z \Leftrightarrow z = \operatorname{th} w$$

$$w = \operatorname{Arcth} z \Leftrightarrow z = \operatorname{cth} w$$

Mitmesed funktsioonid!

Peatükk 4

Integraal kompleksmuutuja funktsioonist

4.1 Integraali mõiste ja omadused

Def. Lihtsaks Jordani jooneks nim. punktihulka $\{z = z(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$, kus $z = z(t)$ on pidev funktsioon ning $z(t_1) \neq z(t_2)$, kui $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$. Erandina on lubatud $z(\alpha) = z(\beta)$, sel juhul joont nimetame kinniseks.

Def. Lihtsat Jordani joont nim. siledaks, kui z' on pidev lõigul $[\alpha, \beta]$. Joont, mis on jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osadeks, nim. tükiti siledaks.

Olgu $F(t) = U(t) + iV(t)$ kompleksväärtustega reaalmuutuja funktsioon, mis on pidev lõigul $[\alpha, \beta]$. Defineerime

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt.$$

Omadused:

- 1) $\operatorname{Re} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} F(t) dt, \quad \operatorname{Im} \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} F(t) dt,$
- 2) $\int_{\alpha}^{\beta} AF(t) dt = A \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt,$
- 3) $\int_{\alpha}^{\beta} (F_1(t) + F_2(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F_1(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} F_2(t) dt,$
- 4) $\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt.$

Olgu f pidev tükiti siledal joonel $\gamma : z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$. Defineerime

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Omadused.

- 1) Seos teist liiki joonintegraaliga: olgu $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ ning olgu $\gamma_{\mathbf{R}}$ joonele γ vastav joon reaalsel tasandil. Siis

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{\mathbf{R}}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma_{\mathbf{R}}} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

- 2) Integraal ei sõltu joone γ parametriseringust.

3) Aditiivsus: kui $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, kusjuures γ_1 lõpp-punkt on γ_2 alguspunkt, siis

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

4) Lineaarsus: $\int_{\gamma} Af(z) + Bg(z) dz = A \int_{\gamma} f(z) dz + B \int_{\gamma} g(z) dz.$

5) Joone suuna muutus: koosnegu $-\gamma$ samadest punktidest, mis γ , aga vastupidises järjekorras. Siis

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

6) Integraali mooduli hindamine: $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$, kus $|dz| = |z'(t)| dt$.

Järeldus 4.1 Kui $|f(z)| \leq M$ tükiti siledal joonel γ , siis $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq Ms_{\gamma}$, kus s_{γ} on joone γ pikkus.

4.2 Cauchy teoreem

Teoreem 4.1 (Cauchy 1) Olgu f ja f' pidevad tõkestatud ühelisidusas piirkonnas D . Siis $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise tükiti sileda $\gamma \subset D$ korral.

Teoreem 4.2 (Greeni valem) Olgu X, X_y, Y ja Y_x pidevad tõkestatud ühelisidusas kinnises piirkonnas G , mille rajajoon L on tükiti sile. Siis $\int_L X dx + Y dy = \iint_G (Y_x - X_y) dx dy$.

Pidevus kuni rajani

Olgu D piirkond ning olgu $A, B \in \overline{D}$.

Def. Punktide A ja B vaheliseks **kauguseks mööda piirkonda** D nim. suurust $\varrho_D(A, B) = \inf_{\gamma} s_{\gamma}$, kus γ on punkte A ja B ühendav tükiti sile joon piirkonnas D .

Siin võib võtta joonteks γ ka punkte A ja B ühendavad murdjooned piirkonnas D .

Def. Funktsiooni f nim. **kuni rajani pidevaks** piirkonnas D , kui iga $A \in \overline{D}^{qD}$ korral $\lim_{\varrho_D(z, A) \rightarrow 0} f(z) = f(A)$.

Kui $A \in D$ või $A \in \partial D$ pole raja kordne punkt, siis $\lim_{\varrho_D(z, A) \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow A} f(z)$.

Teoreem 4.3 (Cauchy 2) Olgu f regulaarne tõkestatud ühelisidusas piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Kui rajal on kordseid osi, siis siin tuleb võtta integraal mõlemas suunas.

Teoreem 4.4 (Cauchy 3) Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, kus integraal on võetud raja positiivses suunas.

4.3 Algfunktsioon. Newton-Leibnizi valem

Def. Funktsiooni F nim. funktsiooni f **alfunktsiooniks** piirkonnas D , kui selles piirkonnas $F' = f$.

Teoreem 4.5 (Newton-Leibniz) Olgu F regulaarne joone γ mingis ümbruses. Siis

$$\int_{\gamma} F'(z) dz = F(B) - F(A),$$

kus A ja B on vastavalt joone γ algus- ja lõpp-punkt.

Teoreem 4.6 (Integraali sõltumatus integreerimisteest) Olgu f pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ iga kinnise tükiti sileda $\gamma \subset D$ korral. Siis iga tükiti sileda joone Γ korral piirkonnas D integraal $\int_{\Gamma} f(z) dz$ ei sõltu joonest Γ , vaid ainult selle otspunktidest.

Teoreemi eeldused on täidetud, kui f on regulaarne tõkestatud ühelisidusas piirkonnas D .

Teoreem 4.7 (Algfunktsiooni olemasolu) Olgu f regulaarne tõkestatud ühelisidusas piirkonnas D ning olgu $z_0 \in D$. Defineerime $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$. Siis F on f algfunktsioon piirkonnas D .

4.4 Cauchy valem

Teoreem 4.8 (Cauchy valem) Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D.$$

4.5 Cauchy tüüpi integraalid

Teoreem 4.9 (Cauchy tüüpi integraali regulaarsus) Olgu funktsioon f pidev tükiti siledal joonel Γ ning olgu

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

Siis F on kuitahes palju kordi diferentseeruv ning

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

Teoreem 4.10 (Regulaarse funktsiooni lõpmatu diferentseeruvus) Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Siis f on kuitahes palju kordi diferentseeruv piirkonnas D ning

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D.$$

Järeldus 4.2 (Cauchy võrratus) Olgu f regulaarne ringis $B(z, R)$ ning pidev kuni rajani. Olgu $|f(\zeta)| \leq M$, kui $|\zeta - z| = R$. Siis

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Teoreem 4.11 (Liouville) Kui funktsioon f on regulaarne ja tõkestatud kogu komplekstasandil, siis f on konstantne.

Teoreem 4.12 (Algebra põhiteoreem) Igal kompleksarvuliste kordajatega mittekonstantsel polünoomil on vähemalt üks kompleksarvuline nullkoht.

Teoreem 4.13 (Morera) Olgu f pidev piirkonnas D ning olgu $\int_{\gamma} f(z) = 0$ iga kinnise joone γ puhul selles piirkonnas. Siis f on regulaarne selles piirkonnas.

Peatükk 5

Analüütilised funktsioonid

5.1 Arvread

Def. Arvreaks nimetatakse lõpmatut summat $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, $u_k \in \mathbb{C}$. Arvrea osasummaks nimetatakse

lõplikku summat $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Def. Arvrida nimetatakse koonduvaks, kui tema osasummade jadal leidub lõplik piirväärtus, vastasel juhul nimetatakse arvrida hajuvaks. Koonduva arvrea osasummade jada piirväärtust nimetatakse selle rea summaks.

Lause 5.1 Olgu $u_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Siis rida $\sum_k u_k$ koondub parajasti siis, kui koonduvad read $\sum_k a_k$ ja $\sum_k b_k$.

Def. Arvrida $\sum_k u_k$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui rida $\sum_k |u_k|$ koondub.

Lause 5.2 (Rea koonduvuse tarvilik tunnus) Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub, siis $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$.

Lause 5.3 (Absoluutselt koonduva rea koonduvus) Iga absoluutselt koonduv arvrida on koonduv.

Lause 5.4 (Positiivsete ridade võrdlustunnus) Olgu $0 \leq u_k \leq v_k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Siis

a) kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ koondub, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub.

b) kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ hajub, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ hajub.

Lause 5.5 (d'Alemberti koonduvustunnus) Kui leidub piirväärtus $D = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$ ning

$D < 1$, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt. Kui $D > 1$, siis rida hajub.

Lause 5.6 (Cauchy koonduvustunnus) Kui $C = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|u_k|} < 1$, siis rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub absoluutselt. Kui $C > 1$, siis rida hajub.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \sup\{a : a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n}\}$$

5.2 Funktsionaalread

Olgu funktsioonid f_k määratud hulgas D .

Def. Funktsionaalreaks nimetatakse lõpmatut summat $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, $z \in D$.

Def. Funktsionaalrida nimetatakse koonduvaks hulgas D , kui ta koondub iga $z \in D$ korral.

Kui funktsionaalrida koondub hulgas D , siis on iga $z \in D$ korral määratud selle rea summa ehk hulgal D on määratud funktsioon f , mida nimetatakse selle rea summaks.

Koonduvus hulgas D funktsiooniks f tähendab, et iga $z \in D$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N > 0$ nii, et kui $n > N$, siis $\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon$.

Def. Funktsionaalrida nimetatakse ühtlaselt koonduvaks hulgas D , kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N > 0$ nii, et kui $n > N$, siis $\left| \sum_{k=0}^n f_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon$ iga $z \in D$ korral.

Teoreem 5.1 (Weierstrassi tunnus) Olgu f_k , $k \in \mathbf{N}$ määratud hulgas D . Kui $|f_k(z)| \leq a_k$, $k \in \mathbf{N}$ iga $z \in D$ korral ning rida $\sum_k a_k$ koondub, siis rida $\sum_k f_k(z)$ koondub ühtlaselt ning absoluutselt hulgas D .

Teoreem 5.2 (Funktsionaalrea summa pidevus) Olgu $D \subset \mathbf{C}$ hulk, mille iga punkt on ühtlasi tema kuhjumispunkt. Hulgas D ühtlaselt koonduva pidevate funktsioonide rea summa on pidev hulgas D .

Teoreem 5.3 (Funktsionaalrea summa integreeruvus) Kui funktsioonid f_k on integreeruvad tükiti siledal joonel Γ ning rida $\sum_k f_k(z)$ koondub ühtlaselt joonel Γ , siis on rea summa integreeruv joonel Γ ning

$$\int_{\Gamma} \sum_k f_k(z) dz = \sum_k \int_{\Gamma} f_k(z) dz.$$

Teoreem 5.4 (Weierstrassi teoreem funktsionaalrea summa diferentseeruvusest) Olgu f_k regulaarsed tõkestatud piirkonnas D ning pidevad kuni tükiti sileda rajani Γ . Kui rida $\sum_k f_k(z)$ koondub ühtlaselt rajajoonel Γ , siis

- 1) see rida koondub kogu piirkonnas D funktsiooniks f ;
- 2) f on regulaarne piirkonnas D ning $f^{(m)}(z) = \sum_k f_k^{(m)}(z)$.

Tõestuse skeem: 1) $f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$,

$\forall z \in D \sum_k \frac{f_k(\zeta)}{\zeta - z}$ koondub ühtlaselt rajajoonel Γ

$\Rightarrow$ võib integreerida liikmeti $\Rightarrow$ rida koondub $\forall z \in D$, tähistame $f(z) = \sum_k f_k(z)$

2) $f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sum_k f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}} d\zeta$, rida koondub ühtlaselt joonel Γ .

5.3 Astmereal

Def. Astmereal punktis $a \in \mathbb{C}$ nimetatakse funktsionaalrida kujul $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Def. Astmereal punktis a koonduvusringiks nimetatakse suurimat ringi $B(a, R)$, kus astmerida koondub; selle ringi raadiust nimetatakse astmereal koonduvusraadiuseks.

Teoreem 5.5 (Cauchy-Hadamard) Astmerida koondub absoluutselt ringis $B(a, R)$ ja hajub väljaspool ringi $\overline{B(a, R)}$, kus $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Järeldus 5.1 Iga $r < R$ korral astmerida koondub ühtlaselt ringis $B(a, r)$.

Järeldus 5.2 Astmereal summa on regulaarne ringis $B(a, R)$ ning astmerida võib oma koonduvusringis liikmeti diferentseerida ja integreerida.

5.4 Tayloriga rida

Olgu f regulaarne punktis a .

Def. Astmerida $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$ nimetatakse funktsiooni f Tayloriga reaks punktis a .

Teoreem 5.6 (Astmereal ühesus) Iga astmerida punktis a , mille koonduvusraadius on positiivne, on oma summa Tayloriga rida.

Järeldus 5.3 Kui funktsioon on arendatav positiivse koonduvusraadiusega astmeritta punktis a , siis see arendus on ühene.

Järeldus 5.4 (Cauchy võrratus) Olgu f regulaarne ringis $B(a, R)$ ning pidev kuni rajani. Olgu $M = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$. Siis funktsiooni f Tayloriga rea punktis a kordajate jaoks kehtib võrratus

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

5.5 Analüütilised funktsioonid

Def. Funktsiooni f nimetatakse analüütiliseks punktis a , kui ta on punkti a mingis ümbruses arendatav astmeritta punktis a .

Mingis punktis analüütiline funktsioon on ka regulaarne selles punktis.

Teoreem 5.7 (Regulaarse funktsiooni analüütilisus) Punktis a regulaarne funktsioon on analüütiline punktis a , kusjuures tema Taylori rida punktis a koondub suurimas ringis $B(a, R)$, milles funktsioon on regulaarne.

Näide. $f(z) = \ln z$, $a = -1 + i \Rightarrow R = \sqrt{2}$.

5.6 Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem

Teoreem 5.8 (Analüütiliste funktsioonide ainsuse teoreem) Olgu f ja g analüütilised piirkonnas D ning võrdsed hulgal $E \subset D$, millel on vähemalt üks kuhjumispunkt piirkonnas D . Siis f ja g on võrdsed hulgas D .

Järeldus 5.5 Funktsioonid e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\tan z, \dots$ on ühesed sellised analüütilised funktsioonid, mis reaalteljel langevad kokku vastavate reaalmuutujate funktsioonidega. Funktsioonid $\ln z$ ja $\sqrt[n]{z}$ peaosa on samuti ühesed sellised analüütilised funktsioonid, mis reaalteljel langevad kokku vastavate reaalmuutujate funktsioonidega ning mille väljalõige paikneb piki reaaltelje negatiivset osa.

Järeldus 5.6 Komplekstasandil kehtivad kõik analüütilised valemid.

NB! Ettevaatust mitme väärtusega funktsioonidega!

NB! Ei kehti valemid, mis sisaldavad absoluutväärtust. Samuti ei kehti võrratused.

5.7 Analüütilise funktsiooni nullkohad

Def. Arvu z_0 nimetatakse funktsiooni f **nullkohaks**, kui $f(z_0) = 0$. Arvu z_0 nimetatakse funktsiooni f **n järku nullkohaks**, kui $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ ja $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Lause 5.7 Funktsioonil f on punktis z_0 n järku nullkoht parajasti siis, kui $\varphi(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^n}$ on analüütiline punktis z_0 ja $\varphi(z_0) \neq 0$.

Teoreem 5.9 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade arv kinnises tõkestatud piirkonnas) Mittekonstantsel analüütilisel funktsioonil on kinnises tõkestatud piirkonnas ülimalt lõplik arv nullkohti.

Järeldus 5.7 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade arv piirkonnas) Piirkonnas D mittekonstantsel analüütilisel funktsioonil on ülimalt loenduv arv nullkohti selles piirkonnas.

Järeldus 5.8 (Analüütilise funktsiooni nullkohtade isoleeritus) Mittekonstantse analüütilise funktsiooni nullkohad on isoleeritud, s.t. iga nullkoha jaoks leidub selle nullkoha ümbrus, mis ei sisalda teisi selle funktsiooni nullkohti.

5.8 Analüütiline jätkamine

Def. Olgu funktsioonid f ja g analüütilised vastavalt piirkondades D ja G ning $D \cap G \neq \emptyset$. Olgu $f(z) = g(z) \forall z \in D \cap G$. Siis öeldakse, et g on f vahetu analüütiline jätk piirkonnast D piirkonda G .

Näide. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in B(0, 1)$, $g(z) = \frac{1}{1-z}$, $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$.

Lause 5.8 (Analüütilise jätku ühesus) Olgu f analüütiline piirkonnas D ning olgu g_1 ja g_2 funktsiooni f vahetud jätkud piirkonda G . Siis $g_1 = g_2$ piirkonnas G .

NB! Kui g_1 ja g_2 on funktsiooni f vahetud jätkud piirkondadesse G_1 ja G_2 ning $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, siis sellest ei järeldu, et $g_1 = g_2$ piirkonnas $G_1 \cap G_2$!

Jätkamine astmeridade abil

Olgu f analüütiline piirkonnas D . Valime $a \in D$ ning arendame f astmeritta punktis a . Olgu selle astmerea koonduvusraadius r . Kui $B(a, r) \setminus D \neq \emptyset$, siis see astmerida defineerib f analüütilise jätku ringi $B(a, r)$.

Def. Olgu f analüütiline piirkonnas D . Piirkonda D nim. funktsiooni f loomuliku olemasolu piirkonnaks, kui mitte ühegi $z_0 \in D$ korral pole võimalik funktsiooni f arendada astmeritta selles punktis, mis koonduks ka väljaspool piirkonda D .

Näide. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ loomuliku olemasolu piirkond on $B(0, 1)$.
 $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{2\pi i p/q}) = \infty$, kui $p, q \in \mathbf{Z}$.

Def. Olgu funktsioonid f_k , $k = 1, \dots, n$ analüütilised vastavalt piirkondades D_k ning olgu $D_k \cap D_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n-1$. Olgu $f_k(z) = f_{k+1}(z) \forall z \in D_k \cap D_{k+1}$. Siis öeldakse, et f_n on f_1 analüütiline jätk piki piirkondade ahelat $D_1, \dots, D_n$.

Jätkamine valemite abil

Olgu f analüütiline piirkonnas D ning kehtigu mingi valem kujul $f(z) = F(z, f(z+a))$, kus $z, z+a \in D$ ning F on analüütiline. Siis funktsioon $g(z) = F(z, f(z+a))$ on analüütiline piirkonnas $D_a = \{z \in \mathbf{C} : z+a \in D\}$ ning $g(z) = f(z)$, kui $z \in D \cap D_a$, seega g on f analüütiline jätk piirkonnale D_a .

Näide. Gammafunktsioon $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Siin $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x} = x^{\operatorname{Re} z - 1} e^{i \operatorname{Im} z \ln x}$.

Gammafunktsioon on regulaarne pooltasandil $\operatorname{Re} z > 0$ ning rahuldab võrrandit $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ehk $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$.

Olgu $g(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$. Siis $g(z) = \Gamma(z)$, kui $\operatorname{Re} z > 0$ ning g on regulaarne piirkonnas $D = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > -1, z \neq 0\}$. Seega g on Γ analüütiline jätk piirkonnale D . Samamoodi jätkates saame defineerida Γ jätku kogu komplekstasandile, välja arvatud punktid $0, -1, -2, \dots$

Teoreem 5.10 (Pidevusprintsip) Olgu funktsioonid f ja g analüütilised vastavalt piirkondades D ja G , kus $D \cap G = \emptyset$ ning pidevad kuni D ja G ühise tükiti sileda rajaosani γ . Kui

$f(z) = g(z) \ \forall z \in \gamma$, siis funktsioon

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma, \\ g(z), & z \in G \end{cases}$$

on funktsioonide f ja g analüütiline jätk piirkonnale $D \cup G \cup \gamma$.

Teoreem 5.11 (Sümmeetriaprintsiip) Olgu f analüütiline piirkonnas D , mille raja sisaldab mingit reaaltelje lõiku γ ning olgu f pidev kuni rajaosani γ . Kui f väärtused on reaalsed rajaosal γ , siis saab funktsiooni f analüütiliselt jätkata piirkonda $D \cup \overline{D}$ (vajadusel tuleb seda mõista mitmekordsena, s.t. Riemanni pinnana), kusjuures jätkuks on $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, $z \in \overline{D}$.

Peatükk 6

Analüütilise funktsiooni iseärased punktid

6.1 Isoleeritud iseärased punktid

Def. Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **iseäraseks punktiks**, kui f pole regulaarne punktis z_0 . Funktsiooni f iseäras punkt z_0 nimetatakse **isoleeritud iseäraseks punktiks**, kui leidub punkti z_0 ümbrus, kus pole teisi iseäraseid punkte peale punkti z_0 .

Olgu punkt z_0 funktsiooni f isoleeritud iseärase punkt.

Def. Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **kõrvaldatavaks iseäraseks punktiks**, kui leidub lõplik piirväärtus $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **pooluseks**, kui $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Punkti z_0 nimetatakse funktsiooni f **oluliselt iseäraseks punktiks**, kui ei leidu piirväärtust $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Näide. $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{z}$, $e^{1/z}$

Pole isoleeritud: $\sqrt{z}$, $\ln z$, $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

6.2 Laurent'i rida

Teoreem 6.1 (Funktsiooni Laurent'i rida) Olgu funktsioon f regulaarne rõngas $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R\}$ (siin võib olla $r = 0$ või $R = \infty$). Siis $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$, $z \in D$,

$$\text{kus } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad r < \rho < R.$$

Märkus. Kui f on ka pidev kuni rajani rõngas D , siis võib võtta $r \leq \rho \leq R$.

Järeldus 6.1 (Cauchy võrratus) Olgu f regulaarne rõngas D . Olgu $M_\rho = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$, $r < \rho < R$. Siis funktsiooni f Laurent'i rea punktis a kordajate jaoks kehtib võrratus $|c_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}$, kus $r < \rho < R$. Kui f on ka pidev kuni rajani rõngas D , siis võime võtta $r \leq \rho \leq R$.

Def. Rida $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$, $z \in D$ nimetatakse funktsiooni f **Laurent'i reaks** rõngas D . Laurent'i rea osa $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$ nimetatakse Laurent'i rea **korrapäraseks osaks**, osa

$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ nimetatakse Laurent'i rea **peaosaks**.

Def. Laurent'i rea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ koonduvusrõngaks nimetatakse suurimat rõngast $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, kus rida koondub.

Teoreem 6.2 (Laurent'i rea regulaarsus) Iga rida kujul $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, mis koondub mingis rõngas $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, kus $r < R$, on regulaarne selles rõngas ning teda võib selles rõngas liikmeti diferentseerida ja integreerida.

Teoreem 6.3 (Laurent'i rea ühesus) Iga rida kujul $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, mis koondub mingis rõngas $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$, kus $r < R$, on oma summa Laurent'i rida selles rõngas.

6.3 Funktsiooni isoleeritud iseärase punkti tüübi ja funktsiooni Laurent'i rea selle punkti ümbruses peaosa vaheline seos

Lause 6.1 (Kõrvaldatav iseärasus) Olgu a funktsiooni f isoleeritud iseärase punkt ning olgu f tõkestatud punkti a mingis ümbruses. Siis funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus ning funktsiooni f Laurent'i rida selle punkti ümbruses ei sisalda peaosa.

Järeldus 6.2 Kui funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus, siis defineerides $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ saame uue funktsiooni, mis on regulaarne punktis a .

Järeldus 6.3 Funktsiooni f isoleeritud iseärase punkt a on kõrvaldatav iseärase punkt parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa puudub.

Olgu funktsioonil f poolus punktis a . Siis funktsioonil $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ on kõrvaldatav iseärasus punktis a ning $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$. Defineerides $g(a) = 0$ saame punktis a regulaarse funktsiooni, millel on nullkoht selles punktis.

Def. Funktsiooni f **pooluse järguks** punktis a nimetatakse funktsiooni $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ nullkoha kordsust punktis a .

Järeldus 6.4 Funktsioonil f isoleeritud iseärase punkt a on poolus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosa sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liikmeid, kusjuures pooluse järk on võrdne vähima indeksiga nullist erineva liikme indeksi vastand arvuga.

Funktsioonil f on punktis a m järku poolus

$$\Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z \in B(a, R) \setminus \{a\}, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Teoreem 6.4 (Iseärase punkti tüübi ja Laurent'i rea peaosa vaheline seos) Olgu funktsioonil f punktis $a \in \mathbb{C}$ isoleeritud iseärasus. Siis

- i) funktsioonil f on punktis a kõrvaldatav iseärasus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosaks puudub;
- ii) funktsioonil f on punktis a poolus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rea peaosaks sisaldab lõpliku arvu nullist erinevaid liikmeid, kusjuures pooluse järk on võrdne vähima indeksiga nullist erineva liikme indeksi vastand arvuga;
- iii) funktsioonil f on punktis a oluline iseärasus parajasti siis, kui selle punkti ümbruses tema Laurent'i rida sisaldab lõpmatu arvu nullist erinevaid liikmeid.

Teoreem 6.5 (Casorati-Weierstrass (Sohhotski)) Olgu funktsioonil f punktis $a \in \mathbf{C}$ oluline iseärasus. Siis iga $A \in \overline{\mathbf{C}}$ korral leidub selline jada (z_n) , et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$.

Teoreem 6.6 (Picardi Suur Teoreem) Olgu funktsioonil f punktis $a \in \overline{\mathbf{C}}$ oluline iseärasus. Siis leidub selline $B \in \mathbf{C}$, et iga $A \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \{B\}$ korral leidub selline jada (z_n) , et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ja $f(z_n) = A$.

Näide. $e^{1/z}$, $a = 0$.

6.4 Funktsiooni käitumine lõpmatuspunktis

Kui f on regulaarne piirkonnas $\mathbf{C} \setminus B(0, R]$, siis öeldakse, et funktsioonil f on lõpmatuspunktis isoleeritud iseärasus. Iseärasuse tüüp defineeritakse samamoodi kui lõpliku punkti korral.

Funktsiooni Laurent'i rida lõpmatuse ümbruses on kujul $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Siin peaosaks on

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ ja korrapäraseks osaks $f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$. Iseärase punkti tüübi ja Laurent'i rea peaosaks vahel kehtib samasugune seos nagu lõpliku punkti puhul.

Kui funktsioonil f on lõpmatuspunktis kõrvaldatav iseärasus, siis defineerime $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ ning ütleme, et f on regulaarne lõpmatuspunktis.

Teoreem 6.7 (Liouville) Kui funktsioon on regulaarne täielikul komplektasandil, siis ta on konstantne.

6.5 Analüütiliste funktsioonide klassid

Def. Kogu komplektasandil regulaarset funktsiooni nimetatakse **täisfunktsiooniks**.

Kui f on täisfunktsioon, siis on 3 võimalust:

1. kui funktsioon on regulaarne lõpmatuspunktis, siis ta on konstantne;
2. kui funktsioonil on lõpmatuspunktis poolus, siis ta on polünoom;
3. kui lõpmatuspunktis on oluline iseärasus, siis nimetatakse funktsiooni **täistranstsendentseks funktsiooniks** (näiteks e^z , $\sin z$, $\cos z$).

Teoreem 6.8 (Picardi Väike Teoreem) Kui f on mittekonstantne täisfunktsioon, siis kas $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ või $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{a\}$ mingi $a \in \mathbf{C}$ korral.

Def. Funktsiooni, mille kõik lõplikus kauguses asuvad iseärased punktid on poolused, nimetatakse **meromorfseks**.

Näide. Ratsionaalfunktsioonid; $\tan z$, $\tanh z$.

Lause 6.2 (meromorfse funktsiooni pooluste arv) *Meromorfsel funktsioonil võib kinnises tõkestatud piirkonnas olla ainult lõplik arv pooluseid; kogu komplekstasandil võib pooluste arv olla loenduv.*

Teoreem 6.9 *Kui funktsiooni f kõik iseärased punktid täielikul komplekstasandil on poolused, siis f on ratsionaalfunktsioon.*

Peatükk 7

Resiidide teooria

7.1 Resiidi mõiste

Olgu funktsioonil f punktis a isoleeritud iseärasus ning olgu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ punkti a ümbruses. Olgu f regulaarne $\overline{B(a, r)} \setminus \{a\}$. Siis

$$\int_{|z-a|=r} f(z)dz = \int_{|z-a|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = 2\pi i c_{-1}.$$

Def. Funktsiooni f **resiidiks** funktsiooni isoleeritud iseärases punktis a nimetatakse suurust $\text{res}[f(z); a] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)dz$, kus γ on punkti a sellise ümbruse raja, mis ei sisalda teisi funktsiooni f iseäraseid punkte.

Kui $a \in \mathbb{C}$ on funktsiooni f isoleeritud iseärane punkt, siis $\text{res}[f(z); a] = c_{-1}$. Seega kui $\text{res}[f(z); a] \neq 0$, siis funktsioonil on punktis a kas poolus või oluline iseärasus.

Kui $a = \infty$, siis $\text{res}[f(z); \infty] = -c_{-1}$. Kui $\text{res}[f(z); \infty] \neq 0$, siis funktsioonil f võib olla mistahes isoleeritud iseärane punkt, samuti võib funktsioon olla regulaarne lõpmatuses.

7.2 Resiidide teooria põhiteoreem

Teoreem 7.1 (Resiidide teooria põhiteoreem) Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D , välja arvatud lõplik arv punkte $a_1, \dots, a_n$, ning pidev kuni piirkonna tükiti sileda rajani Γ . Siis

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z); a_k].$$

Järeldus 7.1 Olgu funktsioon f regulaarne kogu komplektasandil, välja arvatud lõplik arv punkte $a_1, \dots, a_n$. Siis

$$\sum_{k=1}^n \text{res}[f(z); a_k] + \text{res}[f(z); \infty] = 0.$$

7.3 Resiidide arvutamine

7.3.1 Resiidi arvutamine 1. järku pooluse korral

Olgu funktsioonil f punktis a esimest järku poolus. Siis

$$\operatorname{res}[f(z); a] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z).$$

Kui f on kujul $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, kus funktsioonil h on 1. järku nullkoht punktis a , siis

$$\operatorname{res} \left[\frac{g(z)}{h(z)}; a \right] = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

7.3.2 Resiidi arvutamine kõrgemat järku pooluse korral

Olgu funktsioonil f punktis a m järku poolus. Siis

$$\operatorname{res}[f(z); a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} ((z-a)^m f(z))^{(m-1)}.$$

7.3.3 Resiidi arvutamine olulise iseärasuse korral

Olgu funktsioonil f punktis a oluline iseärasus. Lihtsat valemit pole, arendada funktsioon Laurent'i ritta punkti a ümbruses või kasutada resiidide teooria põhiteoreemi järeldust.

7.3.4 Resiidi arvutamine lõpmatuses

Olgu f regulaarne lõpmatuses. Siis

$$\operatorname{res}[f(z); \infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z \left(f(z) - \lim_{\zeta \rightarrow \infty} f(\zeta) \right).$$

7.4 Resiidide kasutamine integraalide arvutamisel

7.4.1 Resiidide teooria põhiteoreemi otsene rakendamine

Olgu funktsioon f regulaarne komplekstasandil, välja arvatud lõplik arv isoleeritud iseäraseid punkte. Olgu Γ kinnine tükiti sile kõver, mille sees asuvad iseärased punktid $a_1, \dots, a_n$ ning väljaspool iseärased punktid $b_1, \dots, b_m$ (ükski iseärane punkt ei asu kõveral Γ). Siis

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); a_k] = -2\pi i \left(\sum_{k=1}^m \operatorname{res}[f(z); b_k] + \operatorname{res}[f(z); \infty] \right).$$

Näide. $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z dz}{(z-2)(z^6-1)} = -\frac{4\pi i}{63}.$

7.4.2 Integraalid üle reaaltelje

Olgu F integreeruv üle reaaltelje. Olgu F regulaarne ülemisel pooltasandil, välja arvatud lõplik arv iseäraseid punkte $a_1, \dots, a_n$ ning pidev kuni reaalteljeni. Olgu Γ_R ringjoone $|z| = R$ ülemisel pooltasandil asuv osa. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [F(z); a_k] - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz.$$

Erijuht, kui F on kujul $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kus P ja Q on polünoomid: olgu $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ ning eeldame, et polünoomil Q pole nullkohti reaalteljel. Olgu Q nullkohad ülemisel pooltasandil $a_1, \dots, a_n$. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}; a_k \right].$$

Näide. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{18}.$

Näide. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}/2} \cos \frac{1}{2}.$

Näide. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$

7.4.3 Integraalid perioodilistest funktsioonidest üle perioodi

Integraalid kujul $\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx$.

Muutujavahetus $z = e^{ix}$. Siis

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dx = \frac{dz}{iz}.$$

Tähistame $g(z) = f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{iz}$. Siis

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx = \int_{|z|=1} g(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [g(z); a_k],$$

kus $a_1, \dots, a_n$ on funktsiooni g iseärsed punktid ühikringis.

Näide. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x \, dx}{5 - 4 \cos 2x} = \frac{3\pi}{8}.$

Näide. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} dx = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (n!)^2}.$

7.5 Logaritmiline resiid. Argumendi printsiip

Def. Funktsiooni f **logaritmiliseks resiidiks** nimetatakse tema logaritmilise tuletise $\frac{f'}{f}$ resiidi.

Funktsiooni $\frac{f'}{f}$ iseärased punktid on funktsiooni f iseärased punktid ja funktsiooni f nullkohad.

Kui funktsioonil f on m järku nullkoht punktis a , siis $\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = m$.

Kui funktsioonil f on m järku poolus punktis a , siis $\operatorname{res} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}; a \right] = -m$.

Teoreem 7.2 (Funktsiooni nullkohtade ja pooluste arv) Olgu funktsioon f regulaarne tõkestatud piirkonnas D , välja arvatud lõplik arv pooluseid, ning pidev kuni tükiti sileda rajani Γ . Eeldame, et funktsioonil f pole nullkohti rajajoonel Γ . Siis

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

kus N on funktsiooni f nullkohtade arv ja P on pooluste arv piirkonnas D , loetud koos kordsustega.

Olgu funktsioon f pidev joonel Γ ning eeldame, et tal pole nullkohti joonel Γ .

Def. Funktsiooni f **argumendi muuduks** üle joone Γ nimetatakse funktsiooni argumendi $\operatorname{Arg} f(z)$ väärtuse muutu joone Γ täielikul läbimisel, kusjuures kasutatakse $\operatorname{Arg} f(z)$ sellist haru, mis jääb joone Γ läbimisel pidevaks (välja arvatud võib-olla kinnise joone korral üks punkt, mille loeme algus- ja lõpp-punktiks), tähistatakse $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)$.

Järeldus 7.2 (Argumendi printsiip) Teoreemi eeldustel on funktsiooni f argumendi muut joone Γ täielikul läbimisel 2π korda suurem kui funktsiooni nullkohtade ja pooluste arvu vahe, ehk

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) = N - P.$$

7.6 Rouché teoreem

Teoreem 7.3 (Rouché) Olgu funktsioonid f ja g regulaarsed tõkestatud piirkonnas D ning pidevad kuni tükiti sileda rajani Γ , kusjuures iga $z \in \Gamma$ korral kehtib võrratus $|g(z)| < |f(z)|$. Siis on funktsioonidel f ja $f + g$ ühepalju nullkohti piirkonnas D , loetud koos kordsustega.

Näide. Leida funktsiooni $F(z) = e^{iz} + 3iz^2$ nullkohtade arv ühikringis.

Järeldus 7.3 (Algebra põhiteoreem) Igal n astme polünoomil on komplekstasandil n nullkohta, loetud koos kordsustega.

7.7 Analüütilise funktsiooni pööramine

Teoreem 7.4 (Analüütilise funktsiooni pööramine) Olgu f analüütiline punkti z_0 ümbruses. Siis f on pööratav punkti z_0 mingis ümbruses parajasti siis, kui $f'(z_0) \neq 0$.

Tõestuse skeem. 1) Olgu $w_0 = f(z_0)$. Siis $\exists r > 0 : f(z) \neq w_0$, kui $z \in B(z_0, r)$.

2) Tähistame $\delta := \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = \frac{r}{2}\} > 0$.

3) Siis $\forall w \in B(w_0, \delta)$ korral on funktsioonidel $f(z) - w_0$ ja $f(z) - w$ sama palju nullkohti ringis $B(z_0, \frac{r}{2})$.

Järeldus 7.4 Mittekonstantne analüütiline funktsioon kujutab lahtise hulga lahtiseks hulgaks ja piirkonna piirkonnaks.

Järeldus 7.5 Analüütilise funktsiooni pöördfunktsioon on analüütiline.

7.8 Mooduli maksimumi ja miinimumi printsiibid

Teoreem 7.5 (Mooduli maksimumi printsiip) Olgu f mittekonstantne analüütiline funktsioon piirkonnas D . Siis $|f|$ ei saavuta oma maksimumi piirkonnas D .

Järeldus 7.6 Tõkestatud piirkonnas analüütiline ja kuni rajani pidev funktsioon saavutab oma mooduli maksimumi rajal.

Teoreem 7.6 (Mooduli miinimumi printsiip) Olgu f mittekonstantne analüütiline funktsioon piirkonnas D , millel pole nullkohti piirkonnas D . Siis $|f|$ ei saavuta oma miinimumi piirkonnas D .

Järeldus 7.7 Tõkestatud piirkonnas analüütiline ja kuni rajani pidev funktsioon, millel pole nullkohti piirkonnas D , saavutab oma mooduli miinimumi rajal.

Lemma 7.1 (Schwarz) Olgu f analüütiline ühikringis, olgu $f(0) = 0$ ning $|f(z)| \leq 1$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Siis $|f(z)| \leq |z|$ iga $z \in B(0, 1)$ korral.

7.9 Harmoonilised funktsioonid

Olgu $D_{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}^2$ piirkond. Tähistame vastavat komplekstasandi piirkonda D .

Def. Funktsiooni $u : D_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$ nimetatakse [harmooniliseks](#) piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$, kui ta on 2 korda pidevalt diferentseeruv piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$ ning $u_{xx} + u_{yy} = 0$ piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$.

Teoreem 7.7 (Reaal- ja imaginaarosa harmoonilisus) Olgu f analüütiline piirkonnas D . Siis funktsioonid $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ ja $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ on harmoonilised piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$.

Def. Piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$ harmoonilisi funktsioone u ja v , mis rahuldavad Cauchy-Riemanni võrrandeid selles piirkonnas, nimetatakse [kaasharmoonilisteks](#).

Def. Harmoonilise funktsiooni u [kompleksseks potentsiaaliks](#) nimetatakse analüütilist funktsiooni f , mis rahuldab vaadeldavas piirkonnas seost $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Teoreem 7.8 (Kompleksse potentsiaali olemasolu) Olgu u harmooniline funktsioon ühelisidusas piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$. Siis leidub piirkonnas D analüütiline funktsioon f nii, et $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$.

Järeldus 7.8 (Kaasharmoonilise funktsiooni olemasolu) Igale ühelisidusas piirkonnas harmoonilisele funktsioonile saab leida selles piirkonnas kaasharmoonilise funktsiooni.

Näide. Funktsioon $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ on harmooniline piirkonnas $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, selle kaasharmooniliseks funktsiooniks on $2\operatorname{Arg}(x + iy)$ suvaline haru, kuid see on harmooniline ainult piirkonnas $\mathbf{R}^2 \setminus \gamma$, kus γ on suvaline nullpunkti ja lõpmatuspunkti ühendav pidev joon.

Teoreem 7.9 (Ekstreemumi printsiip) Olgu u mittekonstantne harmooniline funktsioon piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$. Siis u ei saavuta oma ekstreemaalseid väärtusi piirkonnas $D_{\mathbf{R}}$.

Järeldus 7.9 Tõkestatud piirkonnas harmooniline ja kuni rajani pidev funktsioon saavutab oma ekstreemaalsed väärtused rajal.

Peatükk 8

Konformne kujutamine

8.1 Konformse kujutuse mõiste ja põhiomadused

Def. Komplekstasandi mingi piirkonna üksühest kujutust nimetatakse **konformseks**, kui ta säilitab nurgad nii suuruse kui ka suuna poolest ning muudab mastaapi igas suunas ühte moodi.

Olgu Δw argumendi muudule Δz vastav funktsiooni väärtuse muut punktis z .

Nurkade säilivus: $\arg \Delta w$ mingi haru esitub kujul $\arg \Delta z + \alpha + o(1)$ protsessis $\Delta z \rightarrow 0$. Arvu $\alpha \in \mathbf{R}$ nimetatakse tasandi pöördeks selles punktis, α võib sõltuda punktist z , kuid ei sõltu suurusest Δz .

Mastaabi muutus on selline $k > 0$, et $|\Delta w| = k|\Delta z| + o(|\Delta z|)$ protsessis $\Delta z \rightarrow 0$; k võib sõltuda punktist z , kuid ei sõltu suurusest Δz .

Teoreem 8.1 Kui f kujutab piirkonna D konformselt mingiks hulgaks G , siis f on regulaarne piirkonnas D ja $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$.

Järeldus 8.1 Kui f kujutab piirkonna D konformselt mingiks hulgaks G , siis G on piirkond.

Teoreem 8.2 (Üksühese vastavuse printsiip) Kui piirkonnas D regulaarne funktsioon kujutab piirkonna D üksüheselt piirkonnaks G , siis see kujutus on konformne.

Järeldus 8.2 Konformse kujutuse pöördkujutus on konformne.

Järeldus 8.3 Kahe konformse kujutuse kompositsioon on konformne.

Teoreem 8.3 (Rajade vastavuse printsiip) Olgu f regulaarne tõkestatud piirkonnas D ning pidev kuni rajani Γ . Kui f kujutab Γ üksüheselt piirkonna G rajaks γ ja säilitab raja positiivse suuna, siis f kujutab piirkonna D konformselt piirkonnaks G .

8.2 Konformse kujutamise põhiülesanne

Ülesanne: On antud piirkonnad D ja G . Leida piirkonna D konformne kujutus piirkonnaks G .

Teoreem 8.4 (Riemann: konformse kujutamise põhiülesande lahenduvus) Iga üheli-sidusat piirkonda, mille raja sisaldab vähemalt 2 punkti, saab konformselt kujutada ühikringiks.

Ühelisidusus on vajalik: kui D on mitmelisidus, siis leidub kinnine joon γ , mille sisemuses on punkte, mis ei kuulu piirkonda D , selle joone kujutis on kinnine joon mida saab pidevalt deformeerida punktiks.

Raja sisaldab vähemalt 2 punkti on vajalik: kui $D = \mathbf{C}$, siis saame vastuolu Liouville'i teoreemiga.

Konformne kujutus pole ühene (näiteks ühikringi pöörded).

Lemma 8.1 *Olgu antud $z_0 \in B(0, 1)$ ja $\alpha \in \mathbf{R}$. Ühikringi saab konformselt kujutada ühikringiks nii, et punkt z_0 kujutub nullpunktiks ja tasandi pööre punktis z_0 on α .*

Lemma 8.2 (Schwarz) *Olgu f regulaarne ühikringis $B(0, 1)$, olgu $f(0) = 0$ ja $|f(z)| \leq 1$ iga $z \in B(0, 1)$ korral. Siis $|f(z)| \leq |z|$ iga $z \in B(0, 1)$ korral.*

Teoreem 8.5 (Konformse kujutuse ühesus) *Olgu D ühelisidus piirkond, mille raja sisaldab vähemalt 2 punkti. Olgu antud $z_0 \in D$, $w_0 \in B(0, 1)$ ja $\alpha \in \mathbf{R}$. Siis leidub täpselt üks funktsioon f , mis kujutab piirkonna D konformselt ühikringiks ning rahuldab $f(z_0) = w_0$ ja $\alpha \in \text{Arg } f'(z_0)$.*

Peatükk 9

Laplace'i ja Fourier' teisendus

9.1 Laplace'i teisendus

Olgu f määratud $(0, \infty)$, kas reaali- või kompleksarvuliste väärtustega. Eeldame, et

- 1) f on absoluutselt integreeruv (Riemanni või Lebesgue'i mõttes) igas $[0, \infty)$ lõplikus osalõiguses,
- 2) f on eksponentsiaalse kasvuga, s.t. leiduvad $M > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$ nii, et $|f(t)| \leq Me^{at}$ iga $t \geq 0$ korral.

Def. Arvu $a_0 = \inf\{a \in \mathbf{R} : \exists M > 0 : |f(t)| \leq Me^{at} \forall t \geq 0\}$ nimetatakse funktsiooni f kasvu näitajaks.

Def. Funktsiooni f Laplace'i teisendiks nim. funktsiooni

$$\mathcal{L}[f](p) = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt.$$

Teoreem 9.1 (Laplace'i teisendi olemasolu) Olgu a_0 funktsiooni f kasvu näitaja. Siis integraal $\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ koondub absoluutselt piirkonnas $\{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p > a_0\}$.

Teoreem 9.2 (Laplace'i teisendi regulaarsus) Olgu a_0 funktsiooni f kasvu näitaja. Siis F on regulaarne piirkonnas $\{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p > a_0\}$ ning $F'(p) = -\mathcal{L}[tf(t)](p)$.

Laplace'i teisenduse omadused:

1. lineaarsus $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha F + \beta G$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
2. sarnasus $\mathcal{L}[f(\lambda x)](s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$;
3. tuletise teisend: kui $f, \dots, f^{(n)}$ rahuldavad 1) ja 2), siis $\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$;
4. teisendi tuletis: $F^{(n)}(p) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](p)$;
5. nihke teisend $\mathcal{L}[H(t - \tau)f(t - \tau)](p) = e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$;
6. teisendi nihe $F(p - \lambda) = \mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)](p)$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

9.1.1 Konvolutsioon

Rahuldagu f ja g tingimusi 1) ja 2).

Def. Funktsioonide f ja g konvolutsiooniks nim. funktsiooni $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$, $t \geq 0$.

Lemma 9.1 Kui f ja g rahuldavad 1) ja 2), siis ka $f * g$ rahuldab 1) ja 2).

Konvolutsiooni omadusi:

1. kommutatiivsus: $f * g = g * f$,
2. assotsiatiivsus: $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. distributiivsus: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Teoreem 9.3 (Borel) Rahuldagu f ja g tingimusi 1) ja 2). Siis $\mathcal{L}[f * g](p) = F(p)G(p)$.

Teoreem 9.4 (Fubini) Kui h on hulgal $X \times Y$ defineeritud kas mittenegatiivne funktsioon või absoluutselt integreeruv funktsioon, siis $\int_X \int_Y h(x, y)dy dx = \int_Y \int_X h(x, y)dx dy$.

9.2 Fourier' teisendus

Olgu f absoluutselt integreeruv $\mathbf{R}$.

Def. Funktsiooni f Fourier' teisendiks nim. funktsiooni

$$\mathcal{F}[f](s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Fourier' teisenduse omadused:

1. lineaarsus $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
2. sarnasus $\mathcal{F}[f(\lambda x)](s) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{s}{\lambda}\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$;
3. tuletise teisend: kui $f, \dots, f^{(n)}$ on abs. int.-vad, siis $\mathcal{F}[f^{(n)}](s) = (is)^n \hat{f}(s)$;
4. teisendi tuletis: kui $f, x^n f$ on abs. int.-vad, siis $\hat{f}^{(n)}(s) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)](s)$;
5. nihke teisend $\mathcal{F}[f(x - y)](s) = e^{-isy} \hat{f}(s)$, $y \in \mathbf{R}$;
6. teisendi nihe $\hat{f}(s - \sigma) = \mathcal{F}[e^{i\sigma x} f(x)](s)$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

Lause 9.1 (Teisendi tuletis) Kui f ja xf on absoluutselt integreeruvad, siis $\hat{f}'(s) = \mathcal{F}[-ixf(x)](s)$, $s \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Tõestus: } \hat{f}'(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} \\ \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) dx \end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Valime $R > 0$ nii, et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| |x| dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

Kuna $|e^{-ihx} - 1| = \left| \int_0^{hx} -ie^{-it} dt \right| \leq |hx|$, siis

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) e^{-isx} f(x) \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| 2|x| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Siis } \left| \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| \left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Hindame:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-ihx} - 1}{h} + ix \right| &= \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ihx)^n}{n!} - 1 \right) + ix \right| = \left| \frac{1}{h} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-ihx)^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{|h|} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|hx|^n}{n!} \leq \\ &\leq |h|x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|hx|^n}{n!} = |h|x^2 e^{|hx|}. \end{aligned}$$

$$\text{Seega } \left| \frac{\hat{f}(s+h) - \hat{f}(s)}{h} - \mathcal{F}[-ixf(x)](s) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| |h|x^2 e^{|hx|} dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Valides $|h|$ piisavalt väikese saame ka esimese integraali muuta väiksemaks kui $\frac{\varepsilon}{2}$.

Lemma 9.2 (Fourier' teisendi ühtlane pidevus) Olgu f abs. integreeruv $\mathbf{R}$. Siis $\hat{f}$ on ühtlaselt pidev.

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Vaja on näidata, et siis leidub $\delta > 0$ nii et $|s_1 - s_2| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| < \varepsilon$. Valime $R > 0$ nii, et $\left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| dx \leq \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon}{4}$. Siis

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-is_1x} - e^{-is_2x}) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |e^{-is_1x} - e^{-is_2x}| |f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Kui $|s_1 - s_2| < \delta$, siis

$$|e^{-is_1x} - e^{-is_2x}| = \left| e^{-i\frac{s_1+s_2}{2}x} \right| \left| e^{-i\frac{s_1-s_2}{2}x} - e^{-i\frac{s_2-s_1}{2}x} \right| = \left| 2 \sin \frac{s_1 - s_2}{2} x \right| < |(s_1 - s_2)x| < \delta R.$$

Valides nüüd δ nii, et $\delta R \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$, saamegi $|\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| < \varepsilon$.

Teoreem 9.5 (Riemann-Lebesgue'i lemma) Olgu f absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel ning tükiti pidev. Siis $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \hat{f}(s) = 0$.

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ antud. Valime $R > 0$ nii, et $\left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty}\right) |f(x)|dx \leq \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon}{4}$. Siis

$$|\hat{f}(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-R}^R e^{-isx} f(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Olgu $a_1, \dots, a_n$ funktsiooni f katkevuspunktid vahemikus $(-R, R)$ ning olgu $a_0 = -R$ ja $a_{n+1} = R$. Nüüd f on ühtlaselt pidev lõikudes $[a_j, a_{j+1}]$. Seega leidub $\delta > 0$ nii, et kui $x_1, x_2 \in [a_j, a_{j+1}]$ ja $|x_1 - x_2| < \delta$, siis $|f(x_1) - f(x_2)| < \sqrt{2\pi}\varepsilon/8R$. Valime lõikudes $[a_j, a_{j+1}]$ punktid $a_j = b_{j,0} < b_{j,1} < \dots < b_{j,m_j} = a_{j+1}$ nii, et $b_{j,k+1} - b_{j,k} < \delta$ ning defineerime lõigul $[-R, R]$ tükiti konstantse funktsiooni $g(x) = f(b_{j,k})$, kui $x \in [b_{j,k}, b_{j,k+1})$. Siis $|f(x) - g(x)| < \sqrt{2\pi}\varepsilon/8R$ $\forall x \in [-R, R] \setminus \{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ ja seega

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R |e^{-isx}| |f(x) - g(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-R}^R e^{-isx} g(x) dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} f(b_{j,k}) \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} e^{-isx} dx \right| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} |f(b_{j,k})| \left| \frac{e^{-isx}}{-is} \right|_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N \max_{j=0, \dots, n, k=0, \dots, m_j-1} |f(b_{j,k})| \frac{2}{|s|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

kui $|s|$ on piisavalt suur (siin N on punktide $b_{j,k}$ arv).

9.2.1 Konvolutsioon

Olgu f ja g absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel.

Def. Funktsioonide f ja g konvolutsiooniks nim. reaalteljel defineeritud funktsiooni $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$.

Lemma 9.3 *Kui f ja g on absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel, siis ka $f * g$ on absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel.*

Tõestus. Viime moodulimärgi integraali alla; mittenegatiivsete funktsioonide korral võib vahetada integreerimisjärjekorra (Fubini t.)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt. \end{aligned}$$

Teoreem 9.6 (Konvolutsiooni Fourier' teisend) *Olgu f ja g on absoluutselt integreeruvad kogu reaalteljel. Siis $\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$.*

Tõestus. Kuna integraali all on absoluutselt integreeruv funktsioon, siis võib vahetada integreerimisjärjekorra (Fubini t.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy dx &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-y)} g(x-y)dx dy = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s). \end{aligned}$$

9.3 Laplace'i ja Fourier' teisenduse pööramine

9.3.1 Fourier' teisenduse pööramine

Teoreem 9.7 (Fourier' teisenduse pööramine) Olgu f tükiti pidev ja abs. integreeruv kogu reaalteljel. Siis igas punktis $y \in \mathbf{R}$, kus leiduvad lõplikud tuletise piirväärtused $f'(y+)$ ja $f'(y-)$, kehtib

$$\frac{1}{2}(f(y+) + f(y-)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \hat{f}(s) ds.$$

Tõestus. Võime vahetada integreerimisjärjekorra (Fubini t.)

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R e^{iys} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-R}^R e^{i(y-x)s} ds dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left. \frac{e^{i(y-x)s}}{i(y-x)} \right|_{-R}^R = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2 \sin(y-x)R}{y-x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt = \int_0^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt + \int_0^{\infty} f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt \end{aligned}$$

Tähistame $g(t) = \begin{cases} \frac{f(y-t)-f(y-)}{t}, & 0 < t \leq M, \\ \frac{f(y-t)}{t}, & t > M \end{cases}$, kus $M > 0$ on suvaline. Siis

$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(y-t) - f(y-)}{t} = f'(y-),$$

seega g on tõkestatud 0 parempoolses ümbruses. Kuna lõpmatuse ümbruses g käitub nagu $f(y-t)/t$, siis g on integreeruv $[0, \infty]$.

Riemann-Lebesgue'i lemma $\Rightarrow \int_0^{\infty} g(t) \sin tR dt \rightarrow 0$, kui $R \rightarrow 0$.

Seega

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} g(t) \sin Rt dt + \int_0^M f(y-) \frac{2 \sin tR}{t} dt \right) = \\ &= f(y-) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{MR} \frac{2 \sin \tau}{\tau} d\tau = \pi f(y-). \end{aligned}$$

Samamoodi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt = \pi f(y+).$$

Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iys} \hat{f}(s) ds &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} f(y-t) \frac{2 \sin tR}{t} dt + \int_0^{\infty} f(y+t) \frac{2 \sin tR}{t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi f(y-) + \pi f(y+)) = \frac{1}{2} (f(y+) + f(y-)). \end{aligned}$$

9.3.2 Laplace'i teisenduse pööramine

Teoreem 9.8 (Laplace'i teisenduse pööramine) Olgu f tükiti pidev $[0, \infty)$, eksponentsiaalse kasvuga, ning olgu a_0 f kasvu näitaja. Olgu $F = \mathcal{L}[f]$. Kui mingi t korral leiduvad ühepoolsed tuletised $f'(t+)$ ja $f'(t-)$, siis

$$\frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} F(p) dp$$

iga $c > a_0$ korral.

Tõestus. Defineerime $f(t) = 0$, kui $t < 0$. Olgu $c > a_0$. Kasutame Fourier' teisenduse pööramise teoreemi funktsiooni $e^{-ct} f(t)$ jaoks.

Järeldus 9.1 Kui f ja g on tükiti pidevad ja eksponentsiaalse kasvuga ning igas punktis leiduvad ühepoolsed tuletised, ning nende Laplace'i teisendid on võrdsed, siis f ja g on võrdsed, välja arvatud võib-olla katkevuspunktid.

Teoreem 9.9 (Originaali olemasolu) Olgu F regulaarne piirkonnas $\operatorname{Re} p > a_0$. Eeldame, et

1) leidub $a_1 \geq a_0$ nii, et $\max_{|p|=R, \operatorname{Re} p \geq a_1} |F(p)| \rightarrow 0$, kui $R \rightarrow \infty$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} |F(c + is)| ds$ koondub iga $c \geq a_1$ korral.

Defineerime

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c \geq a_1, \quad t \in \mathbf{R}.$$

S siis

- 1) $f(t) = 0$, kui $t < 0$,
- 2) f on pidev kogu reaalteljel,
- 3) leidub $M > 0$ nii, et $|f(t)| \leq M e^{a_1 t}$, kui $t \geq 0$,
- 4) $F = \mathcal{L}[f]$.

Tõestuse skeem:

- 1) Integraal on määratud ning ei sõltu c -st.
- 2) Defineerime $f(t)$, näitame, et kehtivad 1)–3).
- 3) Näitame, et $F = \mathcal{L}[f]$, selleks kasutame Fourier' teisenduse pööramise teoreemi $F(c + is)$ jaoks.

Järeldus 9.2 Olgu $F(s) = \sum_{k=1}^m a_k \frac{e^{-p\tau_k}}{p} + F_0(p)$, kus $\tau_k \geq 0$ ja F_0 rahuldab teoreemi eeldusi.

Olgu $F_0 = \mathcal{L}[f_0]$. Siis $F = \mathcal{L}[f]$, kus $f(t) = \sum_{k=1}^m a_k H(t - \tau_k) + f_0(t)$.